UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CARLOS ANDERSON ANDRADE DA SILVA

CLASSIFICAÇÃO DE LEIBNIZ ÁLGEBRAS DE DIMENSÃO 4 COM NILRADICAL BIDIMENSIONAL

REDENÇÃO
2023

CARLOS ANDERSON ANDRADE DA SILVA

CLASSIFICAÇÃO DE LEIBNIZ ÁLGEBRAS DE DIMENSÃO 4 COM NILRADICAL BIDIMENSIONAL

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Skoraia

REDENÇÃO - CE

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Silva, Carlos Anderson Andrade da.

S586c

Classificação de Leibniz álgebras de dimensão 4 com nilradical bidimensional / Carlos Anderson Andrade da Silva. - Redenção, 2023.
39f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Skoraia.

1. Álgebras de Leibniz. 2. Álgebras de imensão finita. 3. Álgebras solúveis. 4. Nilradical. I. Título

CE/UF/Dsibiuni CDD 512

CARLOS ANDERSON ANDRADE DA SILVA

CLASSIFICAÇÃO DE LEIBNIZ ÁLGEBRAS DE DIMENSÃO 4 COM NILRADICAL BIDIMENSIONAL

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 11/12/2023.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Tatiana Skoraia (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Kopnes

Prof. Dr. Alexandr Kornev
Universidade Federal do ABC (UFABC)

"Dedico este trabalho a todos os que me ajudaram ao longo desta caminhada, especialmente a minha tia, minha mãe e orientadora".

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela minha vida, e por me ajudar a ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso, pois sem ele não seria possível

Aos meus familiares, que me incentivaram e me ajudaram nos momentos difíceis e compreenderam o quão é importante concluir esse curso superior, em especial aos meus pais (Maria Antonia da silva e Carlos Alberto Andrade da Silva) pelo suporte que me proporcionaram, como também aos meus tios (Jôsi e Luis) que sempre me incentivaram a cursar o ensino superior.

Agradeço a honra de ser orientado pela magnífica Profa. Dra. Tatiana Skoraia, pelo apoio contínuo ao meu estudo, por sua paciência, por sua disponibilidade para me auxiliar, motivação e imenso conhecimento.

Agradeço de coração a Profa. Dra. Tatiana Skoraia, o Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva e o Prof. Dr. Alexandr Kornev que compõem a banca examinadora, que disponibilizaram do seu precioso tempo para ler e examinar este trabalho.

Agradeço aos meus amigos e colegas que contribuíram nesta jornada, em particular ao Italo, Larissa, Jonas, Badilé, Karine, Gabriela, Luzia e Erika que sempre acreditaram em mim e sempre nos fortalecendo mutualmente.

Agradeço à Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e a Residência Pedagógica (UNILAB).

Agradeço a UNILAB e a todos os seus servidores, em especial a todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática, que contribuíram na minha formação acadêmica por meio de seus ensinamentos, incentivos e correções que me ajudaram a apresentar um melhor desempenho no decorrer do processo de formação acadêmica.

"Educação nunca foi despesa. Sempre foi investimento com retorno garantido.".

Sir Arthur Lewis

RESUMO

Objetivo do presente trabalho é apresentar a classificação das álgebras de Leibniz solúveis de dimensão 4 com nilradical bidimensional. Para atingir esse objetivo inicialmente será feito um estudo das bases da teoria de álgebra pura, estudo de álgebras como objeto e tipos particulares de álgebras, em seguida iremos considerar alguns resultados sobre as álgebras de Leibniz solúveis. Seguindo a classificação desenvolvida em (4), (5), (6), demonstramos com a precisão de isomorfismo que existam 3 álgebras de Leibniz dentro de classe considerado.

Palavras-chave: Álgebras de Leibniz. Álgebras de Dimensão Finita. Álgebras solúveis. Nilradical.

ABSTRACT

The present work aims at presenting the classification of solvable Leibniz algebras of dimension 4 with two-dimensional nilradical. To achieve this objective, initially a study will be made of the bases of the theory of pure algebra, a study of algebras as an object and particular types of algebras, then we will consider some results on soluble Leibniz algebras. Following the classification developed in (4), (5), (6), we demonstrate with isomorphism precision that there are 3 Leibniz algebras within the considered class.
Keywords: Leibniz Algebras. Finite Dimensional Algebras. Finite Characteristic Field.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O trabalho tem como objetivo apresentar alguns aspectos da teoria das álgebras de Leibniz. A álgebra de Leibniz é uma generalização das álgebras de Lie em qual os operadores de multiplicação à direita são derivações, porém a anticomutatividade não é preservada. Elas foram chamadas pela primeira vez de D-álgebras em artigos (2), (3) de Arnold Blokh publicados na década de 1960 para indicar suas estreitas relações com as derivações. O a teoria das D-álgebras não recebeu grande atenção imediatamente após sua introdução. Mais tarde, as mesmas álgebras foram introduzidas em (8), (9), (10) por Jean-Louis Loday em 1993, que as chamou de álgebras de Leibniz devido à identidade que satisfazem:

$$(xy)z = (xz)y + x(yz).$$

A principal motivação para a introdução das álgebras de Leibniz foi estudar a periodicidade fenômenos na teoria K-algébrica.

Hoje em dia a teoria das álgebras de Leibniz é uma das áreas em desenvolvimento ativo da álgebra moderna. Juntamente com resultados cohomológicos, estruturais e de classificação em Leibniz álgebras também aparecem alguns artigos com suas diversas aplicações. Mas o objetivo principal do trabalho é classificação de Leibniz álgebras em dimensão 4 com nilradical bidimensional.

O trabalho contém 5 parágrafos incluindo introdução e conclusão. No segundo parágrafo iremos expor os fatos da teoria geral de espaços vetoriais e álgebras com exemplos e exercícios desenvolvidos. O terceiro parágrafo contém a base teórica para o estudo de álgebras de Leibniz solúveis com a demonstração de propriedades características do objeto. Já o quarto parágrafo contém os teoremas introdutórias e o resultado principal com demonstrações.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo introduziremos algumas noções básicas, para que a compressão do estudo das álgebras de Leibniz, seja feita de forma mais consistente e de fácil compreensão, logo este capitulo que consiste principalmente em definições de álgebra de conceitos introdutórios que formam a linguagem básica da teoria da álgebra de Lie.

Os conceitos serão abordados com algumas proposições, teoremas e exemplos que devem servir de ajuda na compressão dos próximos capítulos.

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

Definição 2.1.1 *Seja V um conjunto não vazio. O conjunto V é chamado de espaço vetorial sobre um corpo K (geralmente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) se satisfazem as oito propriedades:*

dados u, v e w elementos de V e os escalares α e β,

- *i.* *(Comutatividade) $u + v = v + u$.*
- *ii.* *(Associatividade) $u + (v + w) = (u + v) + w$.*
- *iii.* *(Elemento neutro) Existe 0 em V tal que $u + 0 = u$, $\forall u$.*
- *iv.* *(Elemento simétrico) Existe $-u$ em V tal que $u + (-u) = 0$, $\forall u$.*
- *v.* *(Associatividade) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.*
- *vi.* *(Distributividade) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.*
- *vii.* *(Distributividade) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.*
- *viii.* *(Multiplicação por 1) Existe um escalar 1 tal que $1u = u$, $\forall u$.*

Exemplo 2.1.1 *(Exemplos retirados do livro (7)*

1. *Para todo número natural n, o símbolo $\mathbb{R}^n$ representa o espaço vetorial euclidiano n-dimensional. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são as listas ordenadas*

$$u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ v = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

de números reais.

Por definição, a igualdade vetorial $u = v$ significa as n igualdades numéricas $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Os números $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são chamados as coordenadas do vetor u. As operações do espaço vetorial R_n são definidas pondo

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n),$$

$$\alpha \cdot u = (\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n).$$

O vetor zero é, por definição, aquele cujas coordenadas são todas iguais a zero: $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$. O elemento simétrico de $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é $-u = (-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n)$. Verifica-se, sem dificuldade, que estas definições fazem de $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial.

Para $n = 1$, tem-se $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, reta numérica. $\mathbb{R}^2$ é o plano euclidiano e $\mathbb{R}^3$ é o espaço euclidiano tridimensional da nossa experiência cotidiana.

2. *Os elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty$ são as sequências infinitas $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $v = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots)$ de números reais.*
   O elemento zero de $\mathbb{R}^\infty$ é a sequência $\theta = (0, \ldots, 0, \ldots)$, formada por infinitos zeros, e o elemento simétrico da sequência $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots, \ldots)$ é $-u = (-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n, \ldots, \ldots)$. As operações de adição e multiplicação por um número real são definidas por
$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n, \ldots),$$
$$\alpha u = (\alpha\alpha_1, \ldots, \alpha\alpha_n, \ldots, \ldots).$$

3. *Uma matriz $m \times n$ (real) $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ é uma lista de números reais a_{ij} com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Costuma-se representar a matriz a como um quadro numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento da i-ésima linha com a j-ésima coluna:*
$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$
   O vetor $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ é o i-ésimo vetor-linha da matriz a e o vetor $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$ é o j-ésimo vetor-coluna de $\mathbf{a}$. Quando $m = n$, diz-se que a é uma matriz quadrada. O conjunto $M(m \times n)$ de todas as matrizes $m \times n$ torna-se um espaço vetorial quando nele se define a soma das matrizes $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{b} = [b_{ij}]$ como $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_{ij} + b_{ij}]$ e o produto da matriz $\mathbf{a}$ pelo número real α como $\alpha\mathbf{a} = [\alpha a_{ij}]$. A matriz nula $\theta \in M(m \times n)$ é aquela formada por zeros e o elemento simétrico da matriz $\mathbf{a} = [a_{ij}]$ é $-\mathbf{a} = [-a_{ij}]$.

4. *Seja X um conjunto não-vazio qualquer. O símbolo $\mathrm{F}(X; \mathbb{R})$ representa o conjunto de todas as funções reais $f, g : X \to \mathbb{R}$. Ele se torna um espaço vetorial quando se definem a soma $f + g$ de duas funções e o produto $\alpha \cdot f$ do número α pela função f da maneira natural:*
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$
   Variando o conjunto X, obtêm-se diversos exemplos de espaços vetoriais da forma $F(X; \mathbb{R})$. Por exemplo, se $X = \{1, ..., n\}$ então $F(X; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$; se $X = \mathbb{N}$ então $F(X; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$; se X é o produto cartesiano dos conjuntos $\{1, ..., m\}$ e $\{1, ..., n\}$ então $F(X; \mathbb{R}) = M(m \times n)$.

Exemplo 2.1.2 *(Exercício proposto pelo Lima em (7) e resolvidos durante o estudo.) Em $\mathbb{R}^2$, mantenhamos a definição do produto αv de um número por um vetor mas modifiquemos, de 3 maneiras diferentes, a definição da soma $u+v$ dos vetores $u=(x,y)$ e $v=(x',y')$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados:*

1. $u+v=(x+y',x'+y)$
2. $u+v=(xx',yy')$
3. $u+v=(3x+3x',5x+5x')$

Resolução:

1. $u+v=(x+y',x'+y)$

   (a) *O primeiro axioma falha:*

$$(x+y',x'+y)=u+v\neq v+u=(x'+y,x+y').$$

   (b) *O segundo axioma é violado:*
   Para $w=(x'',y'')$

$$(x+y'+x'',y+x'+x'')=(x+(x''+y'),x'+(y''+y))=(x,y)+(x'+y'',x''+y')=$$

$$=u+(v+w)\neq(u+v)+w=$$

$$=(x+y',x'+y)+(x'',y'')=((x+y')+y'',x''+(x'+y))=(x+y'+y'',y+x'+x'').$$

   (c) *O terceiro axioma falha:* $\theta=(\theta_1,\theta_2)$:

$$u+\theta=(x+\theta_1,\theta_2+y)=(x,y)=u\ \Rightarrow\ \theta=(0,0)$$

$$\theta+u=(0+y,x+0)=(y,x)\neq u.$$

   (d) *O quarto axioma é violada, pois não existe o elemento nulo.*

   (e) *O quinto axioma está válido:*

$$\alpha(\beta u)=\alpha(\beta x,\beta y)=(\alpha(\beta x),\alpha(\beta y))=(\alpha\beta)x,(\alpha\beta)y)=(\alpha\beta)(x,y)=(\alpha\beta)u.$$

   (f) *O sexto axioma é válido:*

$$\alpha(u+v)=\alpha(x+y',x'+y)=(\alpha(x+y'),\alpha(x'+y))=(\alpha x+\alpha y',\alpha x'+\alpha y)=$$

$$=(\alpha x,\alpha y)+(\alpha x',\alpha y')=\alpha(x,y)+\alpha(x',y')=\alpha u+\alpha v.$$

   (g) *O sétimo axioma é válido:*

$$(\alpha+\beta)u=(\alpha+\beta)(x,y)=((\alpha+\beta)x,(\alpha+\beta)y)=(\alpha x+\beta x,\alpha y+\beta y)=$$

$$= (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y) = \alpha u + \beta u.$$

(h) o último axioma é válido:

$$1 \cdot u = 1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y) = u.$$

2. $u + v = (xx', yy')$

(a) O primeiro axioma é válido:

$$u + v = (xx', yy') = (x'x, y'y) = v + u.$$

(b) O segundo axioma é violado:
Para $w = (x'', y'')$

$$u + (v + w) = (x, y) + (x'x'', y'y'') = (x(x'x''), y(y'y'')) =$$

$$= ((xx')x'', (yy')y'') = (xx', yy') + (x'', y'') = (u + v) + w.$$

(c) O terceiro axioma é válido, $\theta = (1, 1)$*:*

$$u + \theta = (x \cdot 1, y \cdot 1) = (x, y) = u.$$

(d) O quarto axioma falha, pois existe o elemento $a = (0, 0)$ *não nulo (diferente de* $\theta = (1, 1)$*) que não tem simétrico. Suponha, que* $u = (x, y)$ *é simétrico para* a*. Pelo axioma 3, temos*

$$a + u = (0, 0) + (x, y) = (0 \cdot x, 0 \cdot y) = (0, 0) \neq (1, 1).$$

Logo, esse simétrico não existe.

(e) O quinto axioma está válido:

$$\alpha(\beta u) = \alpha(\beta x, \beta y) = (\alpha(\beta x), \alpha(\beta y)) = (\alpha\beta)x, (\alpha\beta)y) = (\alpha\beta)(x, y) = (\alpha\beta)u.$$

(f) O sexto axioma falha:

$$\alpha(u + v) = \alpha(xx', yy') = (\alpha(xx'), \alpha(yy')) = ((\alpha x)x', (\alpha y)y') =$$

$$= (\alpha x, \alpha y) + (x', y') = \alpha(x, y) + (x', y') = \alpha u + v \neq \alpha u + \alpha v.$$

(g) O sétimo axioma é válido:

$$(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y) = (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y) =$$

$$= (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y) = \alpha u + \beta u.$$

(h) *o último axioma é válido:*

$$1 \cdot u = 1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y) = u.$$

3. $u + v = (3x + 3x', 5y + 5y')$

   (a) *O primeira axioma é válido:*

$$u + v = (3x + 3x', 5y + 5y') = (3x' + 3x, 5y' + 5y) = v + u.$$

   (b) *O segundo axioma é válido:*
   Para $w = (x'', y'')$

$$u+(v+w) = (x, y)+(3x'+3x'', 5y'+5y'') = (3x+(3x'+3x''), 5y+(5y'+5y'')) =$$

$$= ((3x+3x')+3x'', (5y+5y')+5y'') = (3x+3x', 5y+5y')+(x'', y'') = (u+v)+w.$$

   (c) *O terceiro axioma é violado:*
   Suponha que existe um $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ *tal que* $u + \theta = u$*, então*

$$u + \theta = (3x + 3\theta_1, 5y + 5\theta_2) = (x, y) = u.$$

   Logo, $\begin{cases} \theta_1 = -\dfrac{2}{3}x \\ \theta_2 = -\dfrac{4}{5}y \end{cases}$ *ou seja, para cada elemento u temos um* θ *diferente, o que é impossível.*

   (d) *O quarto axioma falha, pois não existe o elemento nulo.*

   (e) *O quinto axioma é válido:*

$$\alpha(\beta u) = \alpha(\beta x, \beta y) = (\alpha(\beta x), \alpha(\beta y)) = (\alpha\beta)x, (\alpha\beta)y) = (\alpha\beta)(x, y) = (\alpha\beta)u.$$

   (f) *O sexto axioma é válido:*

$$\alpha(u + v) = \alpha(3x + 3x', 5y + 5y') = (\alpha(3x + 3x'), \alpha(5y + 5y')) =$$

$$= (\alpha(3x) + \alpha(3x'), \alpha(5y) + \alpha(5y')) = (3(\alpha x) + 3(\alpha x'), 3(\alpha y) + 3(\alpha y')) =$$

$$= (\alpha x, \alpha y) + (\alpha x', \alpha y') = \alpha u + \alpha v.$$

   (g) *O sétimo axioma é válido:*

$$(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(x, y) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y) = (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y) =$$

$$= (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y) = \alpha u + \beta u.$$

(h) o último axioma é válido:

$$1 \cdot u = 1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y) = u.$$

Diz-se que o espaço vetorial E tem dimensão finita quando admite uma base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ com um número finito n de elementos. Este número, que é o mesmo para todas as bases de E, chama-se a dimensão do espaço vetorial E: $n = \dim E$. Por extensão, diz-se que o espaço vetorial $E = \{0\}$ tem dimensão zero.

Definição 2.1.2 *Se a dimensão de E é n, um conjunto com n vetores gera E se, e somente se, é linearmente independente L.I..*

Definição 2.1.3 *Dados um espaço vetorial V. Um subespaço vetorial de V é um subconjunto $W \subset V$ com as seguintes propriedades:*

i. $\theta \in W$.

ii. *Se u e v são vetores em W, então $u + v$ está em W.*

iii. *Se α é um escalar qualquer e u é um elemento qualquer em W, então αu está em W.*

Exemplo 2.1.3 *(Exemplos retirados do livro (7).*

1. *Seja $v \in V$ um vetor não-nulo. O conjunto $W = \{\alpha v; \alpha \in \mathbb{R}\}$ de todos os múltiplos de v é um subespaço vetorial de V, chamado a reta que passa pela origem e contém v.*
2. *Seja $V = F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais de uma variável real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto $C^k(\mathbb{R})$ das funções k vezes continuamente deriváveis é um subespaço vetorial de V. Também são subespaços de V o conjunto $C^0(\mathbb{R})$ das funções contínuas, o conjunto $C^\infty(\mathbb{R})$ das funções infinitamente deriváveis, o conjunto $P = P(\mathbb{R})$ dos polinômios $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ e o conjunto P_n dos polinômios de grau $\leq n$. Para $n, k \in \mathbb{N}$ quaisquer, tem-se:*

$$C^0(\mathbb{R}) \supset C^k(\mathbb{R}) \supset C^{k+1}(\mathbb{R}) \supset C^\infty(\mathbb{R}) \supset P \supset P_n.$$

   Notamos que o conjunto dos polinômios de grau n não é um subespaço vetorial de V, pois, a soma de dois polinômios de grau n pode ter grau $< n$.

3. *Sejam $a_1, \ldots, a_n$ números reais. O conjunto H de todos os vetores $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

   é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. No caso desinteressante em que $a_1 = \cdots = a_n = 0$, o subespaço H é todo o $\mathbb{R}^n$. Se, ao contrário, pelo menos um dos a_i è $\neq 0$, H chama-se um hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que passa pela origem.

4. Sejam v um espaço vetorial e L um conjunto de índices. Se, para cada $\lambda \in L$, F_λ é um subespaço vetorial de V então a interseção

$$F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$$

é ainda um subespaço de V. Segue então do exemplo anterior que o conjunto dos vetores $v = (x_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}$ cujas coordenadas satisfazem as m condições abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & \ldots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, o qual é a interseção $F = F_1 \cap \cdots \cap F_m$ dos hiperplanos F_i definidos, segundo exemplo anterior, por cada uma das equações acima.

Exemplo 2.1.4 *(Exercícios proposto em livro (7) e resolvido durante o estudo)*

Seja V um subconjunto de $M_{m\times n}$ de todas as matrizes triangulares superiores. Mostre que V é um subespaço vetorial de $M_{m\times n}$.

Solução: *Primeiramente, notamos que matriz nula satisfaz às condições da definição de uma matriz triangular superior. Portanto o elemento nulo de $M_{m\times n}$ pertence ao V.*

Sejam A e B matrizes triangulares superiores:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Temos

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, a soma das matrizes triangulares superiores de novo é uma matriz triangular superior. Isto é, $A + B \in V$.

Seja agora $\alpha \in \mathbb{R}$ e considerando a matriz A já dada, sempre que $i > j$ temos que $\alpha a_{ij} = 0$, e portanto a matriz $\alpha A = (\alpha a_{ij}) \in V$. Desta forma, podemos concluir que V é um subespaço vetorial de $M_{m\times n}$.

Definição 2.1.4 *Sejam F_1 e F_2 subespaços vetoriais de V. O subespaço vetorial de V gerado pela reunião $F_1 \cup F_2$ é o conjunto de todas as somas $v_1 + v_2$, onde $v_1 \in F_1$ e*

$v_2 \in F_2$. Ele é representado pelo símbolo $F_1 + F_2$.

Mais geralmente, dados os subconjuntos $X, Y \subset V$, indica-se com $X + Y$ o conjunto cujos elementos são as somas $u + v$, onde $u \in X$ e $v \in Y$.

Quando os subespaços $F_1, F_2 \subset V$ têm em comum apenas o elemento $\{\theta\}$, escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$ e diz que $F = F_1 \oplus F_2$ é a soma direta de F_1 e F_2.

Teorema 2.1 *(7) Sejam F, F_1, F_2 subespaços vetoriais de V, com $F_1 \subset F$ e $F_2 \subset F$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$F = F_1 \oplus F_2$;*
2. *Todo elemento $w \in F$ se escreve, de modo único, como soma $w = v_1 + v_2$, onde $v_1 \in F_1$ e $v_2 \in F_2$.*

Proposição 2.1 *Provemos que (1) $\Rightarrow$ (2). Para isto, suponhamos que $F_1 \cap F_2 = \{\theta\}$ e que se tenha $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, com $u_1, v_1 \in F_1$ e $u_2, v_2 \in F_2$. Então $u_1 - v_1 = v_2 - u_2$. Como $u_1 - v_1 \in F_1$ e $v_2 - u_2 \in F_2$, segue-se que $u_1 - v_1$ e $v_2 - u_2$ pertencem ambos a F_1 e a F_2. Mas $F_1 \cap F_2 = \{\theta\}$. Logo $u_1 - v_1 = v_2 - u_2 = \theta$, ou seja, $u_1 = v_1$ e $u_2 = v_2$.*

Para provar que (2) $\Rightarrow$ (1), seja $v \in F_1 \cap F_2$. Então $\theta + v = v + \theta$ com $\theta, v \in F_1$ e v, θ F_2. Pela hipótese (2), isto implica $0 = v$, portanto $F_1 \cap F_2 = \{\theta\}$.

Exemplo 2.1.5 *Em $\mathbb{R}^4$, sejam F_1 o subespaço gerado pelos vetores $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ e F_2 o subespaço gerado pelos vetores $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Então F_1 é o conjunto dos vetores da forma*

$$(\alpha_1, 0, \alpha_3, 0),$$

enquanto os vetores de F_2 têm a forma $(0, \alpha_2, 0, \alpha_4)$. É claro que $\mathbb{R}^4 = F_1 \oplus F_2$.

Exemplo 2.1.6 *(Exercício proposto em (7)) No espaço vetorial $V = F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sejam:*

F_1 = conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulam em todos os pontos do intervalo [0, 1];

F_2 = conjunto das funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulam em todos os pontos do intervalo [2, 3].

Mostre que F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de V, que $V = F_1 + F_2$ e que não se tem $V = F_1 \oplus F_2$.

Solução:

Temos $F_1 = N([0, 1])$ e $F = N([2, 3])$. Os dois conjuntos são subespaços de V, pois a função nula pertence aos dois, a soma de duas funções que se anulam em um intervalo $[a, b]$ também se anula neste intervalo e o produto da função que se anula em $[a, b]$ com um escalar tem mesmo valor zero neste intervalo.

Como $[0, 1] \cap [2, 3] = \emptyset$, temos $F_1 + F_2 = V$. Além disso, existem funções reais não nulas que se anulam tanto em $[0, 1]$ como em $[2, 3]$, logo $F_1 \cap F_2 \neq \{\theta\}$, portanto $V \neq F_1 \oplus F_2$.

2.2 ÁLGEBRAS

Nesta seção apresentaremos alguns fatos básicos sobre teoria de álgebras. Usaremos como a base de estudo (1).

Definição 2.1 *Uma álgebra A é um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$ equipado com uma operação bilinear $\lambda : V \times V \to V$.*

Exemplo 2.2.1

1. *Cada corpo é uma álgebra nele mesmo. Em particular, espaços $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são exemplos de álgebras.*
2. *O conjunto de polinômios $\mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ de variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ com coeficientes do corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$.*
3. *O conjunto de $n \times n$ matrizes com os elementos de $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$.*
4. *O conjunto de endomorfismos $\mathrm{End}(V)$ do espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$.*

Definição 2.2 *Sejam $L_1, \lambda_1)$ e (L_2, λ_2) duas álgebras com operações binárias λ_1 e λ_2 respectivamente. A função $f : L_1 \to L_2$ é um homomorfismo, se*

$$f(\lambda_1(x, y)) = \lambda_2(f(x), f(y)) \text{ para todos } x, y \in L_1.$$

Um homomorfismo bijetivo é chamado de isomorfismo.
Um automorfismo de álgebra L é um isomorfismo de L em L. O conjunto de automorfismos de uma álgebra Lforma um grupo em relação à composição. Esse grupo é denotado por $AutL$.

Definição 2.3 *Um subespaço S de uma álgebra (A, λ) é chamado de subálgebra de A, se $\lambda(S, S) \subset S$, ou seja, se $\lambda(x, y) \in S$ para todos os $x, y \in S$.*

Exemplo 2.2.2 *Seja $f : L_1 \to L_2$ é um homomorfismo de álgebras. Então a imagem*

$$Imf = \{y \in L_2 | \exists x \in L_1 : y = f(x)$$

é uma subálgebra em L_2.

Definição 2.4 *Um subespaço I de uma álgebra (L, λ) é chamado de ideal à esquerda (respectivamente à direita) de L se*

$$\lambda(L, I) \subset I \text{ (respectivamente } \lambda(I, L) \subset I).$$

Um subespaço I de uma álgebra (L, λ) é chamado ideal (de dois lados) de L se ele é ideal à esquerda e à direita, isto é,

$$\lambda(L, I) \subset I \text{ e } \lambda(I, L) \subset I.$$

Exemplo 2.2.3 1. *Cada álgebra tem dois ideais triviais: o espaço que contém somente* *vetor nulo e a álgebra por se mesmo.*

2. *O subconjunto de (L, λ) definido por*

$$K(L) = \{x \in L | \lambda(x, y) = \lambda(y, x) = 0 \text{ para todos } x, y \in L\}$$

chamado de aniquilador de L é um ideal em L.

3. *3. O núcleo*

$$Ker(f) = \{x_1 | f(x) = 0\}$$

de um homomorfismo $f : L_1 \to L_2$ é um ideal em L_1.

4. *Sejam I_1 e I_2 dois ideais de L e*

$$I_1 + I_2 = \{x \in L | \exists\ x_i \in I_i (i = 1, 2) \text{ tais que } x = x_1 + x_2\}.$$

Então

(a) *$I_1 + I_2$ é um ideal em L*
(b) *$I1$ e I_2 são ideais em $I_1 + I_2$*
(c) *$I_1 \cap I_2$ é um ideal em I_1 e I_2*

5. *Seja $f : L_1 \to L_2$ um homomorfismo de álgebras.*

(a) *Se J é um ideal em L_2 então $f^{-1}(J)$ é um ideal em L_1*
(b) *Se f é um epimorfismo e I é um ideal de L_1, então $f(I)$ é um ideal em L_2.*

Definição 2.5 *Sejam (L_1, λ_1) e (L_2, λ_2) duas álgebras sobre corpo $\mathbb{F}$, então uma álgebra com operação binária λ, definida no espaço vetorial*

$$L = L_1 \oplus L_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \in L_1 \text{ e } x_2 \in L_2\}$$

pela regra

$$\lambda((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (\lambda_1(x_1, x_2), \lambda_2(y_1, y_2))$$

é chamada a soma direta de álgebras L_1 e L_2. Note que L_1 e L_2 são os ideais de L.

Definição 2.6 *Uma transformação linear $d : L \to L$ é chamada de derivação de álgebra (L, λ), se*

$$d(\lambda(x, y)) = \lambda(d(x), y) + \lambda(x, d(y)) \text{ para todos } x, y \in L.$$

De agora em diante anotamos a função bilinear $\lambda(x, y)$ por xy.

O associador em uma álgebra é uma função trilinear

$$(x, y, z) = (xy)z - x(yz).$$

O Jacobiano em uma álgebra é definido por

$$J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y.$$

A identidade de Leibniz esquerda (direita) é definida por

$$x(yz) \equiv (xy)z + y(xz) \quad ((xy)z \equiv (xz)y + x(yz)).$$

Exemplo 2.2.4 *1. Uma álgebra L é:*

- *comutativa, se $xy = yx$ para todos $x, y \in L$*
- *anticomutativa, se $x^2 = 0$ para todo $x \in L$*
- *associativa, se $(x, y, z) = 0$ para todos $x, y, z \in L$*

2. Álgebra de Jordan é uma álgebra comutativa que satisfaz a identidade de Jordan:

$$(x^2, y, x) = 0 \ \forall x, y \in L.$$

3. Uma álgebra L é alternativa à esquerda (à direita), se $(y, x, x) = 0$ ($(x, x, y) = 0$) para todos $x, y \in L$.

4. Lie álgebra é uma álgebra anticomutativa L que satisfaz à identidade de Jacobi:

$$J(x, y, z) = 0 \ \forall x, y, z \in L.$$

5. Malcev álgebra é uma álgebra anticomutativa L que satisfaz a identidade

$$J(x, y, xz) = J(x, y, z)x \ \forall x, y, z \in L.$$

6. Leibniz álgebra esquerda (direita) é uma álgebra L que satisfaz à identidade esquerda (direita) de Leibniz.

3 ÁLGEBRAS DE LIE E LEIBNIZ

Neste capítulo, iremos explorar alguns fatos sobre as Lie e Leibniz álgebras em quais vamos nos basear no estudo do resultado principal.

3.1 SÉRIES DE COMPOSIÇÃO E ÁLGEBRAS NILPOTENTES E SOLÚVEIS

Definição 3.1.1 *Define-se, por indução, os seguintes subespaços da álgebra de Leibniz L:*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{L}^{(0)} & = & \mathfrak{L} \\ \mathfrak{L}^{(1)} & = & LL \\ \mathfrak{L}^{(2)} & = & L^{(2)}L^{(2)} \\ \vdots & & \\ \mathfrak{L}^{(n)} & = & L^{(n-1)}L^{n-1)}. \end{array}$$

Esses subespaços são ideais de L. Para ver isso basta notar que se I e J são ideais de L, então IJ também é ideal. Assim, $L^{(1)} = LL$ é um ideal, bem como $L^{(2)} = L^{(1)}L^{(1)}$, etc. Essa sequência de ideais é conhecida por série derivada de L.

Definição 3.1 *Uma álgebra de Leibniz é solúvel se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é, $L^{(k_0)} = \{0\}$ para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $L^{(k)} = \{0\}$ para todo $k \geq k_0$) e $L^{(k_0-1)} \neq \{0\}$. Este k_0 é chamado de índice de solubilidade de L.*

Exemplo 3.1.1 *As álgebras de Lie abelianas, isto é, álgebras cujo produto de dois quaisquer elementos é sempre nulo, são solúveis, pois essa classe de álgebras é definida por $A^{(1)} = \{0\}$.*

Definição 3.1.2 *Define-se, por indução, os seguintes subespaços da álgebra de Leibniz L:*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{L}^{0} & = & \mathfrak{L} \\ \mathfrak{L}^{1} & = & LL \\ \mathfrak{L}^{2} & = & L^{(1)}L \\ \vdots & & \\ \mathfrak{L}^{n} & = & L^{(n-1)}L. \end{array}$$

Essa sequência de ideais é conhecida por série central (descendente) de L.

Definição 3.2 *Uma álgebra de Leibniz é nilpotente se sua série central se anula, isto é, $L^{k_0} = \{0\}$ para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $L^{k} = \{0\}$ para todo $k \geq k_0$) e $L^{(k_0-1)} \neq \{0\}$.*

Este k_0 é chamado de índice de nilpotencia de L.

Notaremos que as mesmas definições estão corretas para as álgebras de Lie com a condição de substituição de multiplicação por comutante.

Exemplo 3.1.2 *Lie álgebra $\mathfrak{g}$ das matrizes triangulares superiores 3×3 é solúvel.*
Solução: De início para verificar se $\mathfrak{g}$ é solúvel, devemos calcular $\mathfrak{g}^{(1)}$ onde:

$$\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & b_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_4 & a_1 \cdot b_3 + a_2 \cdot b_5 + a_3 \cdot b_6 \\ 0 & a_4 \cdot b_4 & a_4 \cdot b_5 + a_5 \cdot b_6 \\ 0 & 0 & a_6 \cdot b_6 \end{bmatrix}$$
$$- \begin{bmatrix} b_1 \cdot a_1 & b_1 \cdot a_2 + b_2 \cdot a_4 & b_1 \cdot a_3 + b_2 \cdot a_5 + b_3 \cdot a_6 \\ 0 & b_4 \cdot a_4 & b_4 \cdot a_5 + b_5 \cdot a_6 \\ 0 & 0 & b_6 \cdot a_6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & b_2(a_1 - a_4) + a_2(b_4 - b_1) & b_3(a_1 a_5) + a_3(b_6 - b_1) + a_2 \cdot b_5 + a_6 \cdot b_3 \\ 0 & 0 & b_5(a_4 - a_6) + (b_6 - b_4)_5(a_4 - a_6) + (b_6 - b_4) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para simplificar nossas contas, iremos denotar o elemento $b_2(a_1 - a_4) + a_2(b_4 - b_1) = c_1$, $b_3(a_1 a_5) + a_3(b_6 - b_1) + a_2 \cdot b_5 + a_6 \cdot b_3 = c_2$, $b_5(a_4 - a_6) + (b_6 - b_4) = c_3$.
E agora iremos calcular $\mathfrak{g}^{(2)}$, onde $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$

$$\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \cdot d_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 \cdot c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \cdot d_3 - d_1 \cdot c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De forma similar para simplificar nossas contas, iremos denotar o elemento $c_1 \cdot d_3 - d_1 \cdot c_3 = e_1$. E agora iremos calcular $\mathfrak{g}^{(3)}$, onde $\mathfrak{g}^{(3)} = [\mathfrak{g}^{(2)}, \mathfrak{g}^{(2)}]$

$$\mathfrak{g}^{(3)} = [\mathfrak{g}^{(2)}, \mathfrak{g}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O que nos mostra que $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores 3×3, é solúvel.

Exemplo 3.1.3 *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie das matrizes triangulares inferiores 3×3, é solúvel.*

Solução: O cálculo é de forma análoga ao triangulares superiores.

Exemplo 3.1.4 *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores 3×3, com sua diagonal principal nula, é solúvel.*

Solução: De inicio para verificar se $\mathfrak{g}$ é solúvel, devemos calcular $\mathfrak{g}^{(1)}$ onde:

$$\mathfrak{g}^{1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 \cdot b_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 \cdot a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E agora iremos calcular $\mathfrak{g}^{(2)}$, onde $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$, denotaremos $a_1 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_3 = c_1$

$$\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

como $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$, temos que $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores 3×3, com sua diagonal principal nula, é solúvel.

Exemplo 3.1.5 *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie das matrizes triangulares inferiores 3×3, com sua digonal principal nula, é solúvel.*

Solução: Os cálculos são feitos de forma análoga ao triangulares superiores, com sua diagonal nula.

Definição 3.1.3 (Álgebra Nilpotente) *Uma álgebra de Lie é dita nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, ou seja,*

$$L^m = 0.$$

Exemplo 3.1.6 *Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores 3×3, com sua digonal principal nula, é nilpotente.*

Solução: De início para verificar se $\mathfrak{g}$ é Nilpotente, devemos calcular $\mathfrak{g}^1$ onde:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 \cdot b_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 \cdot a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

E agora iremos calcular $\mathfrak{g}^2$, onde $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}]$, denotaremos $a_1 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_3 = c_1$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$, temos que $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores 3×3, com sua diagonal principal nula, é nilpotente.

Definição 3.1.4 (Radical) *O radical R de uma álgebra é o maior ideal solúvel desta álgebra.*

Definição 3.1.5 (Nilradical) *O nilradical N de uma álgebra é o maior ideal nilpotente* *desta álgebra.*

4 ÁLGEBRAS DE LEIBNIZ SOLÚVEIS EM DIMENSÃO 4 COM NILRADICAL BIDIMENSIONAL

Aqui estudaremos álgebras de Leibniz solúveis de dimensão 4 com um nilradical de dimensão 2. Esses resultados apresentam o estudo de artigos (4), (5) e (6) com explicações e cálculos abertos.

Seja L uma álgebra de Leibniz solúvel. Então, pode ser decomposta como uma soma direta de espaços vetoriais $L = N \oplus Q$; onde N é o nilradical e Q é o espaço vetorial complementar.

Proposição 4.1 *A Derivada de uma álgebra solúvel é nilpotente, em particular, $L^{(2)} \subseteq N$ e consequentemente, $Q^2 \subseteq N$.*

Prova: Inicialmente, vamos mostrar por que $L^{(2)}$ é um ideal em L. Seja $a \in L$ e $b \in L^{(2)}$. O produto ab pode ser expresso como $ab = a[b_1, b_2]$, onde b_1 e b_2 são elementos de L. Portanto, $a[b_1, b_2] = [ab_1, b_2]$. Como ab_1 e b_2 estão em L, temos que $[ab_1, b_2] \in L^{(2)}$, o que implica que $L^{(2)}$ é um ideal em L.

Agora, vamos mostrar por que $L^{(2)}$ é nilpotente. Temos que L é solúvel logo considere o ideal:

$$I = span_F\{[x, x] | x \in L\}$$

dito isso, é temos que:

$$I \subset N \subset R$$

e

$$I \subset ann_R(L)$$

pois devido a álgebra L ser solúvel.
Consideremos uma álgebra de Lie L^* obtida de álgebra L em relação a operação de comuntante. Definimos o radical e nilradical de L^* por $R^* = R/I$ e $N^* = N/I$, respectivamente. Assim $[L^*, R^*] \subset N^*$.
Como $I \subset N \subset R$, obtemos:

$$[L, R] \subset N.$$

.
Como L é solúvel, logo temos que $L = R$ e então, $[L, L] \subset N \Rightarrow L^{(2)} \subset N$ e portando $L^{(2)}$ é nilpotente

Por fim, para mostrar que $L^{(2)} \subseteq N$, observe que $L = N + Q$. Isso implica que $L^{(2)} = [N + Q, N + Q] = [N, N] + [Q, Q]$. Já que $[N, N] \subseteq N$ e $[Q, Q] \subseteq N$, concluímos que $L^{(2)} \subseteq N$. Além disso, como $Q^2 \subseteq N$, também temos $Q^2 \subseteq N$.

Definição 4.1 *Seja $d_1, d_2, ..., d_n$ derivações de uma álgebra de Leibniz L. As derivações $d_1, d_2, ..., d_n$ são ditos nil-independentes, se cada combinação linear não trivial delas, não é nilpotente. Ou seja, se existir um número natural k tal que $(a_1d_1+a_2d_2+...+a_nd_n)^k = 0$ então $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.*

Lema 4.1 *Seja L uma álgebra de Leibniz solúvel, e N o seu nilradical e Q o espaço vetorial complementar, tal que $L = N \oplus Q$. Se o operador $R_x|_N$ é nilpotente para algum $x \in Q$, então o subespaço $V = span\{x + N\}$ é um ideal nilpotente da álgebra L.*

Prova. Uma vez que $L^{(2)} \subseteq N$, o subespaço V é um ideal de L:

Escolhemos quaisquer $a \in L$ e $(x + N) \in V$. Temos $a(x + N) = ax + aN$. Como N é nilradical (isto é, um ideal), temos então $aN \subset N$. Visto que $x \in Q$, x não é nilpotente. Daqui ax não é nilpotente, ou seja, $ax \in Q$. Logo, $ax + aN \in V$.

Analogamente, $(x + N)a = xa + Na \in V$. Portanto, V é um ideal em L.

Podemos afirmar também que V é nilpotente:

Para $a \in N$ e $b \in N$, temos que $R_a(b) = ba \in N$, logo $R_a|_N$ é um operador nilpotente. Suponha que seu índice de nilpotência seja k, ou seja, $(R_a|_N)^k = 0$; então $(R_a|_N)^{k+1} = 0$. Portanto, $R_a|_V$ é nilpotente, pois $R_a|_V = (x + N)a = xa + Na$.

Logo, Na é nilpotente. Por outro lado, sabemos que $xa \in V$ é nilpotente, pois $(xa)^{k+1} = x^{k+1}a^{k+1} = 0$. Logo, $xa + Na$ é nilpotente, o que implica que $R_a|_V$ é nilpotente.

Uma vez que V é um ideal de álgebra de Leibniz solúvel L, então o espaço de derivações internas $Inner(V)$ de V é uma sub-álgebra solúvel de Lie de $End(V)$; e assim, pelo teorema de Lie, existe uma base em que $R_a|_V$ e $R_x|_V$ têm matrizes triangulares superiores; além disso, $R_a|_V$ é nilpotente, o que significa que todos os elementos diagonais de $R_a|_V$ são nulos.

Por outro lado, pelo pressuposto, $R_x|_N$ é nilpotente, então com um argumento semelhante ao anterior, existe $s \in N$ tal que $(R_x|N)^{s+1} = 0$; então $(R_x|V)^{s+1} = 0$.

Resumindo, obtemos que $R_a|_V$ e $R_x|_V$ são nilpotentes e triangulares superiores, portanto, $R_a|_V + R_x|_V$ também é nilpotente. Assim, pelo teorema de Engel para álgebras de Leibniz, V é um ideal nilpotente.

Teorema 4.1 *Seja L uma álgebra de Leibniz solúvel e N o seu nilradical. Então, a dimensão do espaço vetorial complementar a N não é maior do que o número máximo de derivações nil-independentes de N.*

Prova: Suponha que para $x \in Q$; o operador $R_x|_N$ é um operador não nilpotente de derivação externa de N. Na verdade, se existe $x \in Q$ tal que o operador $R_x|_N$ é nilpotente, então o subespaço $V = span\{x + N\}$ é um ideal nilpotente da álgebra L da proposição anterior, contradizendo que N é um ideal maximal. Seja $x_1, ..., x_m$ uma base de Q. Então os operadores $R_{x1}|_N, R_{x2}|n, ..., R_{xm}|_N$, são nil-independentes, pois se para alguns escalares

$\alpha_1, ..., \alpha_m \in C$ então temos:

$$(\alpha_1 R_{x_1}|_{N_1} + \alpha_2 R_{x_2}|_N + ... + \alpha_m R_{x_m}|_N)^k = 0$$

$$(\alpha_1 R_{x_1} + \alpha_2 R_{x_2} + ... + \alpha_m R_{x_m})^k(N) = 0.$$

Porém como $R_{xi}|_N = Nx_i$ então obtemos:

$$(\alpha_1 N x_1 + \alpha_2 N x_2 + ... + \alpha_m N x_m)^k = 0$$

$$[(N)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m)]^k = 0.$$

Então operador $R_y|_N \in Q$ então não é nilpotente, logo, $R_y^k|_N$, onde $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$. Portanto, $y = 0$; e então $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, ..., m$. Portanto, vemos que a dimensão de Q é limitada pelo número máximo de derivações nil-independentes do seu nilradical N.

Como o caso de álgebras de Leibniz é análogo ao caso de álgebras de Lie, logo obtemos a seguinte proposição.

Proposição 4.2 *Seja L uma álgebra de Leibniz solúvel e N o seu nilradical. Então temos a desigualdade* $dimN \geq \dfrac{dimL}{2}$.

Teorema 4.2 *Seja L uma álgebra de Leibniz nilpotente bidimensional. Então L é $\mathbb{C}^2$ (abeliano) ou isomorfa a:*

$$\mu : [e_1, e_1] = e_2.$$

Teorema 4.3 *Seja L uma álgebra de Leibniz nilpontente tridimensional. Então L é isomorfa a umas das seguintes álgebras, duas a duas não-isomofas.*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &:= \mathbb{C}^3 - \textit{abeliano}, \\
\lambda_2 &:= \mu_1 \oplus \mathbb{C}, \\
\lambda_3 &:= [e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_1] = -e_3, \\
\lambda_4(\alpha) &:= [e_1, e_1] = e_3, [e_2, e_2] = \alpha e_3, [e_1, e_2] = e_3, \\
\lambda_5 &:= [e_2, e_1] = e_3, [e_1, e_2] = e_3, \\
\lambda_6 &:= [e_1, e_1] = e_2, [e_2, e_1] = e_3.
\end{aligned}$$

Além disso, por conveniência, consideraremos outra forma de família de $\lambda_4(\alpha)$. Na verdade, devemos transformar a família de álgebras $\lambda_4(\alpha)$ à forma em que derivações nil-independentes de novas álgebras $\lambda_4', \lambda_4'(\beta)$ têm formas diagonais.

Ou seja, ao escolher uma base apropriada, representamos o parâmetro α família $\lambda_4(\alpha)$

como duas álgebras não isomorfas

$$\lambda_4'(\beta) := \begin{cases} [e_2, e_1] = e_3 \quad \text{com} \quad \beta = \frac{\sqrt{1-4\alpha}-1}{\sqrt{\sqrt{1-4\alpha}+1}} \\ [e_1, e_2] = \beta e_3 \end{cases}$$

$$\lambda_4' := \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3 \\ [e_2, e_1] = e_3 \\ [e_1, e_2] = -e_3 \end{cases} .$$

Mais tarde, usaremos uma descrição de álgebra de derivação de dimensão 3, álgebras de Leibniz complexas nilpotentes, fornecidas acima. A descrição necessária é fornecida em forma de matriz como na **proposição 4.3** a seguir.

Prova: Para $\lambda_4'(\alpha)$ definido por $\lambda_4(\alpha) := [e_1, e_1] = e_3, [e_2, e_2] = \alpha e_3, [e_1, e_2] = e_3$ dividiremos em 2 casos onde $\alpha = 0$ e para $\alpha \neq 0$

- Para $\alpha = 0$ logo obtemos as seguintes multiplicações
$$\lambda_4(0) := [e_1, e_1] = [e_1, e_2] = e_3$$
escolhendo as bases tal que: $e_2' = e_1 - e_2, e_1' = e_2$ e assim temos que verificar as multiplicações:
$[e_1', e_1'] = [e_2, e_2] = 0$
$[e_1', e_2'] = [e_2, e_1 - e_2] = [e_2, e_1] - [e_2, e_2] = 0$
$[e_2', e_1'] = [e_1 - e_2, e_2] = [e_1, e_2] - [e_2', e_2'] = e_3$
$[e_2, e_2] = [e_1 - e_2, e_1 - e_2] = [e_3 - e_3] = 0.$
- Para $\alpha \neq 0$, obtemos as seguintes multiplicações:
$$\lambda_4(\alpha) := [e_1, e_1] = e_3, [e_2, e_2] = \alpha e_3, [e_1, e_2] = e_3$$
escolhendo as bases tal que: $e_2' = e_2 + \beta e_1, e_1' = e_1$ tal que $\beta = -\frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2} - \frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2} + -\frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}$ e assim temos que verificar as multiplicações

$$\begin{aligned}
&[e_1', e_1'] = [e_1, e_1] = e_3. \\
&[e_1', e_2'] = [e_1, e_2 + \beta e_1] = [e_1, e_2] + [e_1, \beta e_1] = e_3 + \beta e_3 = (1 + \beta)e_3. \\
&[e_2', e_1'] = [e_2 + \beta e_1, e_1] = [e_2, e_1] + [\beta e_1, e_1] = \beta e_3. \\
&[e_2', e_2'] = [e_2 + \beta e_1, e_2 + \beta e_1] = [e_2, e_2] + [e_2, \beta e_1] + [\beta e_1, e_2] + [\beta e_1, \beta e_1] \\
&\qquad = \alpha e_3 + \beta e_3 + \beta^2 e_3 = \alpha - -\frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha}}{2} + \left(-\frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha}}{2}\right)^2 \\
&\qquad = 4\alpha - 2 - 2\sqrt{1 - 4\alpha} + 1 + 2\sqrt{1 - 4\alpha} + 1 - 4\alpha = 0
\end{aligned}$$

resultando em:

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = e_3 \\ [e_2, e_1] = \beta e_3 \\ [e_1, e_2] = (1+\beta)e_3 \end{cases}.$$

Tomando $\beta \neq 0$, e usando a base $e_2' = \frac{1}{\beta}e_2$ logo $\lambda_4(\beta)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} [e_1, e_1] = e_3 \\ [e_2, e_1] = e_3 \\ [e_1, e_2] = (1+\frac{1}{\beta})e_3 \end{cases}.$$

Caso 1 se $\beta \neq -\frac{1}{2}$ logo $\alpha \neq \frac{1}{4}$ usando a base $e_1' = e_1 - \frac{\beta}{2\beta+1}e_2$ teremos que verificar as seguintes multiplicações:

$$\begin{aligned}
[e_1', e_1'] &= [e_1 - \frac{\beta}{2\beta+1}e_2, e_1 - \frac{\beta}{2\beta+1}e_2] = [e_3 - \frac{\beta}{2\beta+1} \cdot (1+\frac{1}{\beta})e_3 - \frac{\beta}{2\beta+1}e_3] \\
&= [1 - \frac{\beta+1}{2\beta+1} - \frac{\beta}{2\beta+1}]e_3 = 0. \\
[e_1', e_2'] &= [e_1 - \frac{\beta}{2\beta+1}e_2, e_2] = (1+\frac{1}{\beta})e_3 = \beta' e_3'. \\
[e_2', e_1'] &= [e_2, e_1 - \frac{\beta}{2\beta+1}e_2] = e_3' \\
[e_2', e_2'] &= [e_2, e_2] = 0.
\end{aligned}$$

E assim pelas multiplicações acima conseguimos montar a álgebra $\lambda_4'(\beta)$ com $\beta = \frac{\sqrt{1-4\alpha}-1}{\sqrt{\sqrt{1-4\alpha}+1}}$ e $\beta' = (1+\frac{1}{\beta})$ $\alpha \notin \{0, \frac{1}{4}\}$

$$\lambda_4'(\beta) := \begin{cases} [e_2, e_1] = e_3 \quad \text{com} \quad \beta = \frac{\sqrt{1-4\alpha}-1}{\sqrt{\sqrt{1-4\alpha}+1}} \\ [e_1, e_2] = \beta e_3 \end{cases}$$

Caso 2 se $\beta = -\frac{1}{2}$, obtemos a álgebra λ_4'

$$\lambda_4' := \begin{cases} [e_1, e_1] = e_3 \\ [e_2, e_1] = e_3 \\ [e_1, e_2] = -e_3 \end{cases}.$$

O que conclui o desejado.

Proposição 4.3 *Existe uma base tal que as derivações das álgebras $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4', \lambda_4'(\beta), \lambda_5$ e λ_6 são dados como:*

$$\begin{aligned}
Der(\lambda_1) &= M_3(\mathbb{C}) \\
Der(\lambda_2) &= \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) | A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 2a_1 \end{pmatrix} \right\} \\
Der(\lambda_3) &= \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) | A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & a_1 + b_2 \end{pmatrix} \right\} \\
Der(\lambda_4') &= \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) | A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 2a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 3a_1 \end{pmatrix} \right\} \\
Der(\lambda_4'(\beta)) &= \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) | A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & a_1 + b_2 \end{pmatrix} \right\} \\
Der(\lambda_5) &= \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) | A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & a_1 + b_2 \end{pmatrix} \right\} \\
Der(\lambda_6) &= \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) | A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 2a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 3a_1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

para todo $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{C}$ com $i, j, k = \{1, 2, 3\}$.

Prova: Vamos demonstrar o teorema anterior por meio de verificação diretamente da propriedade de derivação $d[x, y] = [d(x), y] + [x, d(y)]$ e usando a tabela de multiplicações das álgebras.

$$\lambda_2 = \mu \oplus \mathbf{C}$$

$$\mu : [e_1, e_1] = e_2$$

seja:

$$\begin{aligned}
d(e_1) =& a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\
d(e_2) =& b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \\
d(e_3) =& c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} d[e_1,e_1] =&[d(e_1),e_1]+[e_1,d(e_1)]\\ =&[a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3,e_1]+[e_1,a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3]\\ =&2a_1e_2=d(e_2)\end{aligned}$$

e assim podemos montar a matriz:

$$Der(\lambda_2) \quad = \quad \left\{ A\in M_3(\mathbb{C})|A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ 0 & b_2 & b_3\\ 0 & 0 & 2a_1\end{pmatrix}\right\}.$$

Para λ_3, observe que:

$$\lambda_3:[e_1,e_2]=e_3,[e_2,e_1]=-e_3$$

temos que:

$$\begin{aligned} d[e_1,e_2] &= [d(e_1),e_2]+[e_1,d(e_2)]\\ &= [a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3,e_2]+[e_1,b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3]\\ &= [a_1e_3+b_2e_3]=d(e_3)\\ &= [a_1+b_2]e_3=d(e_3).\end{aligned}$$

Como isso temos que, $c_1=c_2=0$ e $c_3=[a_1+b_2]$.

$$\begin{aligned} d[e_2,e_1] &= [d(e_2),e_1]+[e_2,d(e_1)]\\ &= [b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3,e_1]+[e_2,a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3]\\ &= [-b_2e_3-a_1e_3]\\ &= -[b_2+a_1]e_3=-d(e_3).\end{aligned}$$

Logo podemos montar nossa matriz:

$$Der(\lambda_3) \quad = \quad \left\{ A\in M_3(\mathbb{C})|A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ 0 & 0 & a_1+b_2\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\lambda_4'(\beta):[e_2,e_1]=e_3[e_1,e_2]=\beta e_3$$

$$d[e_2,e_1]=[d(e_2),e_1]+[e_2,d(e_1)]$$

$$d[e_2,e_1]=[b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3,e_1]+[e_2,a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3]$$

$$= [b_2e_3 + a_1e_3]$$

$$= [b_2 + a_1]e_3 = d(e_3),$$

o que resulta em $c_1 = c_2 = 0$.

$$d[e_1, e_2] = [d(e_1), e_2] + [e_1, d(e_2)]$$

$$d[e_1, e_2] = [a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, e_2] + [e_1, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3]$$

$$= [a_1\beta e_3 + b_2\beta e_3]$$

$$= [a_1 + b_2]\beta e_3 = \beta d(e_3).$$

e assim podemos montar a matriz:

$$Der(\lambda_4'(\beta)) = \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) | A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & a_1 + b_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\lambda_5 : [e_2, e_1] = e_3[e_1, e_2] = e_3$

$$d[e_2, e_1] = [d(e_2), e_1] + [e_2, d(e_1)]$$

$$d[e_2, e_1] = [b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, e_1] + [e_2, a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3]$$

$$= [b_2e_3 + a_1e_3] = d(e_3)$$

$$= [b_2 + a_1]e_3 = d(e_3).$$

$$d[e_1, e_2] = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_2)]$$

$$d[e_1, e_2] = [a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, e_2] + [e_1, b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3]$$

$$= [a_1e_3 + b_2e_3] = d(e_3)$$

$$= [a_1 + b_2]e_3 = d(e_3).$$

logo podemos montar a matriz:

$$Der(\lambda_5) = \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) | A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & a_1 + b_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$\lambda_6 : [e_1, e_1] = e_2[e_2, e_1] = e_3$

$$d[e_1, e_1] = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)]$$

$$= [a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, e_1] + [e_1, a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3]$$

$$= [a_1e_2 + a_2e_3 + a_1e_2] = d(e_2)$$

$$= [2a_1e_2 + a_2e_3] = d(e_2),$$

com isso temos que $b_1 = 0, b_2 = 2a_1, b_3 = a_2$. $(*)$

$$d[e_2, e_1] = [d(e_2), e_1] + [e_2, d(e_1)]$$

$$= [b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, e_1] + [e_2, a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3]$$

$$= [b_1e_2 + b_2e_3 + a_1e_3] = d(e_3),$$

por $(*)$ a ultima equação se resume a:

$$3a_1e_3 = d(e_3)$$

resultando em $c_1 = 0, c_2 = 0$.
Com isso podemos montar a matriz:

$$Der(\lambda_6) \quad = \quad \left\{ A \in M_3(\mathbb{C}) | A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 2a_1 & b_3 \\ 0 & 0 & 3a_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

E assim terminamos a demostração das matrizes de derivação. Consideremos agora as álgebras de Leibniz cujo nilradical é bidimensional. Aqui está o resultado da classificação dessas álgebras.

Teorema 4.4 *Seja L uma álgebra de Leibniz solúvel de dimensão 4 e com um nilradical bidimensional. Então, ela é isomorfa a uma das seguintes álgebras não isomorfas pareadas com a base* $\{e_1, e_2, x, y\}$:

$$R_1 := \begin{cases} [e_1, x] = e_1 \\ [e_2, y] = e_2 \end{cases} \quad R_2 := \begin{cases} [e_1, x] = e_1 \\ [e_2, y] = e_2 \\ [x, e_1] = -e_1 \\ [y, e_2] = -e_2 \end{cases} \quad R_3 := \begin{cases} [e_1, x] = e_1 \\ [e_2, y] = e_2 \\ [y, e_2] = -e_2 \end{cases}$$

Notamos que a base $\{e_1, e_2, x, y\}$ é uma extensão da base $\{e_1, e_2\}$ de nilradicais correspondentes.

Demonstração. Lembramos que a classificação de Leibniz álgebras nilpotentes de dimensão dois é dada no teorema 4.3. Seja L uma Leibniz álgebra solúvel de dimensão 4 com nilradical μ de dimensão 2. Desde que existe única derivação nil-independente de μ_1, concluímos que μ deve ser abeliano. Portanto, considerando a base $\{x, y, e_1, e_2\}$, escrevemos a multiplicação em L como

$$\begin{cases} [e_1, x] = a_1e_1 + a_2e_2 & [e_2, x] = a_3e_1 + a_4e_2 \\ [e_1, y] = b_1e_1 + b_2e_2 & [e_2, y] = b_3e_1 + b_4e_2. \end{cases}$$

Uma vez que R_x e R_y são derivações de μ nil-independentes, concluímos que $a_1 \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $a_1 = 1$, e pela transformação de base $y' = y = b_1x$ obtemos $b_1 = 0$.

Assim, a matriz de R_x pode ter umas das seguintes formas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \ ou \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto consideremos os seguintes casos:

Caso 1. Se $\begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}$, então podemos escrever:

$$\begin{cases} [e_1, x] = e_1 & [e_2, x] = a_4e_2 \\ [e_1, y] = b_1e_1 + b_2e_2 & [e_2, y] = b_3e_1 + b_4e_2. \end{cases}$$

Aplicando a identidade de Leibniz para $[e_1, [x, y]]$ e $[e_2, [x, y]]$:

$$[e_1, [x, y]] = [e_1, 0] = 0$$

$$[e_1, [x, y]] = [[e_1, x], y] - [[e_1, y], x] = [e_1, y] - [b_1e_1 + b_2e_2, x] =$$

$$= b_1e_1 + b_2e_2 - b_1e_1 - a_4b_2e_2 = b_2(1 - a_4)e_2$$

e

$$[e_2, [x, y]] = [e_2, 0] = 0$$

$$[e_2, [x, y]] = [[e_2, x], y] - [[e_2, y], x] = [a_4e_2, y] - [b_3e_1 + b_4e_2, x] =$$

$$= a_4b_3e_1 + a_4b_4e_2 - b_3e_1 - a_4b_4e_2 = b_3(a_4 - 1)e_2.$$

Obtemos as restrições $b_2(1 - a_4) = 0$ e $b_3(1 - a_4) = 0$. Assim, podemos considerar os seguintes subcasos:

Caso 1.1. Seja $a_4 = 1$. É óbvio que $R_y :\simeq \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ é congruente a uma das seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_4 \end{pmatrix} \ ou \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è fácil de ver, que $R_y :\simeq \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ com $b_4 \neq 1$, caso contrário $R_x - R_y$ seria nilpotente, o que é impossível.

Com a transformação de base $x' = \frac{b_4}{b_4 - 1}x - \frac{1}{b_4 - 1}y$ e $y' = \frac{1}{b_4 - 1}y - \frac{1}{b_4 - 1}x$, obtemos os seguintes produtos:

$$[e_1, x] = e_1,\ [e_2, x] = 0,\ [e_1, y] = 0,\ [e_2, y] = e_2.$$

Caso 1.2. Se $a_4 \neq 1$, então $b_2 = b_3 = 0$. Como R_x e R_y são as derivações nil-independentes de μ, temos $b_4 \neq 0$. Consideremos a troca da base $x' = x - \frac{a_4}{b_4}y,\ y' = \frac{1}{b_4}y$, de novo obtemos:

$$[e_1, x] = e_1,\ [e_2, x] = 0,\ [e_1, y] = 0,\ [e_2, y] = e_2.$$

Caso 2. Se $R_x \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, aplicaremos a identidade de Leibniz para $[e_1, [x, y]]$ e obtemos $b_3 = b_4 = 0$, isso dá a contradição com a suposição que R_y é não nilpotente. Portanto

$$[e_1, x] = e_1,\ [e_2, x] = 0,\ [e_1, y] = 0,\ [e_2, y] = e_2.$$

Agora consideremos possíveis restantes produtos em L. Suponha que

$$\begin{cases} [e_1, x] = a_1e_1 + a_2e_2 & [e_2, x] = a_3e_1 + a_4e_2 \\ [e_1, y] = b_1e_1 + b_2e_2 & [e_2, y] = b_3e_1 + b_4e_2 \\ [x, x] = c_1e_1 + c_2e_2 & [x, y] = c_3e_1 + c_4e_2 \\ [y, x] = d_1e_1 + d_2e_2 & [y, y] = d_3e_1 + d_4e_2 \end{cases}$$

Com a troca de base $x' = x - c_1e_1 - c_4e_2,\ y' = y = d_1e_1 - d_4e_2$, obtemos

$$c_1 = c_2 = d_1 = d_4 = 0.$$

Aplicando a identidade de Leibniz, obtemos

$$a_2 = a_3 = a_4 = b_1 = b_2 = b_3 = c_2 = c_3 = c_4 = d_2 = d_3 = 0$$

e

$$a_1^2 + a_1 = 0,\ b_3^2 + b_3 = 0.$$

Isso resulta em seguintes casos:

Caso 2.1. Se $a_1 = b_3 = 0$, temos R_1.

Caso 2.2. Se $a + 1 = b_3 = -1$, temos R_2.

Caso 2.3. Se $(a_1, b_3 = (0, -1)$ ou $(a_1, b_3) = (-1, 0)$, obtemos R_3.
Isso termina a demonstração do teorema.

5 CONCLUSÃO

Objetivo deste trabalho foi apresentar a classificação das álgebras de Leibniz solúveis de dimensão 4 com nilradical bidimensional. Para atingir esse objetivo inicialmente fizemos um estudo das bases da teoria de álgebra pura, estudo de álgebras como objeto e tipos particulares de álgebras, em seguida consideramos alguns resultados sobre as álgebras de Leibniz solúveis. Seguindo a classificação desenvolvida em (4), (5),(6), demonstramos com a precisão de isomorfismo que existam 3 álgebras de Leibniz dentro de classe considerado.

O estudo dentro de trabalho de conclusão de curso incluiu conhecimento de teoria e exemplos de literatura usada, resolução de exercícios e averiguação de fatos de pesquisas recentes.

Referências

Ayupov, Sh.H.; Omirov, B.A.; Rhakimov, I.S. (2019). *Leibniz Algebras: structure and classification.* Chapman and Hall/CRC.

Blokh, A.M. (1965). On a generalization of the concept of Lie algebra. *Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165,* 471–473.

Blokh, A.M. (1967). Cartan-Eilenberg homology theory for a generalized class of Lie algebras. *Dokl. Akad. Nauk SSSR, 175,* 824–826.

Cañete, E.M.; Khudoyberdiyev, A.Kh. (2013). The classification of 4-dimensional Leibniz algebras. *Linear Algebra and its Applications, 439(1),* 273–288.

Casas, J.M.; Ladra, M.; Omirov, B.A.; Karimjanov, I.A. (2013). Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical. *Linear and Multilinear Algebra, 61(6),* 758–774.

Casas, J.M.; Ladra, M.; Omirov, B.A.; Karimjanov, I.A. (2013). Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical. *Linear Algebra and its Applications, 438(7),* 2973–3000.

Lima, E.L. (2008). *Álgebra linear, 7.ed.* Rio de Janeiro: IMPA.

Loday, J.-L. (1993). Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. *L'Ens. Math., 39,* 269–293.

Loday, J.-L.; Pirashvili, T. (1993). Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. *Math. Ann., 296,* 139–158.

Loday, J.-L. (1995). Cup product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras. *Math. Scand., 77,* 189–196.