UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JANUÁRIO ERNESTO ANTÓNIO DOMINGOS

ALGUMAS APLICAÇÕES DAS CÔNICAS

REDENÇÃO
2023

JANUÁRIO ERNESTO ANTÓNIO DOMINGOS

ALGUMAS APLICAÇÕES DAS CÔNICAS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes .

REDENÇÃO- CE

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Domingos, Januário Ernesto Antonio.

D671a

Algumas aplicações das cônicas / Januário Ernesto Antonio Domingos. - Redenção, 2023.
63fl: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Aplicações. 2. Cônicas. 3. Elipse. 4. Hipérbole. 5. Parábola. I. Diógenes, Rafael Jorge Pontes. II. Título.

CE/UF/BSCA CDD 516.3

JANUÁRIO ERNESTO ANTÓNIO DOMINGOS

ALGUMAS APLICAÇÕES DAS CÔNICAS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 26/01/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Me. Paulo Ricardo Gonçalves Pereira
Secretaria de Educação do Ceará (SEDUC)

Dedico este trabalho aos meus pais, Ernesto Domingos Dala e Feliciana António Dala e a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua elaboração.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus o todo poderoso, porque sem Ele este sonho não seria possível. Aos meus pais, o senhor Ernesto Dala e a senhora Feliciana Dala, aos meus irmãos, António Dala e José Dala, as minhas irmãs, Madalena Dala, Ana Domingos e Marlene Dala, pelo apoio incondicional mesmo a distância.

Ao António Monteiro por estar presente nos momentos mais difíceis da minha vida, pelo apoio dado quando mais precisei, por não me deixar desistir dos meus sonhos quando pensei em desistir. Falar da tua pessoa não seria suficiente neste trabalho, você é uma pessoa incrível, aquele irmão que Deus me deu, meu amigo, meu conselheiro. Obrigado por fazer parte da minha vida durante esse período de tempo, foi um prazer enorme conhecer você. Ao José Betuel, é impossível escrever esse trabalho sem falar de ti, palavras para descrever você não tenho, mas você sabe o quanto você é especial para mim, o quanto você significa na minha vida, obrigado por tudo que você fez por mim e agradeço a Deus por colocar você na minha vida. Você é aquele irmão mais velho que nunca tive, você é aquela pessoa que quero levar para vida toda, não trocaria a tua amizade por nada neste mundo. Muito obrigado por tudo.

A Ana Cristina pelo apoio, pela força, você foi a irmã que a Unilab me deu durante esses anos e serei eternamente grato por tudo que tu fez na minha vida, você é aquela pessoa que levarei para vida toda. Ao meu grande amigo. Hélio Wember, através dele conheci a UNILAB, e graças a ele permaneci até hoje na concretização desse sonho, mas apesar das circunstâncias sempre esteve aí me dando muito suporte.

Ao meu orientador, professor Rafael Diógenes, pela orientação, apoio e confiança e incentivos, no qual tornaram possível a conclusão deste trabalho. A todos os professores que me acompanharam durante a graduação, e que me proporcionaram não apenas conhecimento racional, mas me ensinaram a ser alguém capaz de enfrentar os obstáculos da vida. Aos professores participantes da banca examinadora Profa. Dra. Danila Tavares e Prof. Me. Ricardo Pereira pelo tempo e pelas valiosas colaborações e sugestões que serão bastante improntantes na melhoria deste trabalho.

A todos que fazem parte da igreja Adventista de Acapare. A todos que diretamente estiveram presente na minha vida, ao André Fonseca, Ana Patricia, Cadija Jalo, Augusto Tchantchalam, Belchior Reis, Cláudio Samuel, Elisabeth Mutumbua, Fátima Soneto, Conceição Chiqui, Christina Riva pela força, Dedaldina Mutumbua, Mateus Paiva, Natalia Tchiyoca, Nelson Nghale, Paz Paulo, Klisman Figueira, Sebastião Pinto, Kongo Lubaki, Luísa Simão, Paulina Kayila. Ao Orlando Tchalale, pela ajuda nas figuras, sem ele não conseguiria fazer todas as figuras, o meu muito obrigado.

Á CAPES pela bolsa obtida no programa PIBID e a oportunidade de participar do programa Residencia Pedagógica.

“Ninguém é realmente ruim em matemática.
Ela só não foi ensinada da maneira certa.”
Beatriz Mello

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar algumas aplicações das cônicas no dia a dia que contribuem para o desenvolvimento do ser humano e de forma específica tentar avaliar alguns problemas de aplicação e suas respetivas soluções usando conceitos abordados ao longo deste trabalho. Inicialmente foi necessário apresentar alguns conceitos preliminares de geometria analítica como ponto e reta, distância entre dois pontos, plano cartesiano, equação geral da reta, translação de eixo, entre outros conceitos. Com a elaboração desse trabalho, procuramos apresentar o conceito de cônicas através de lugares geométricos. Para isso, foi necessário fazer uma abordagem histórica com a finalidade de despertar o interesse dos leitores e, em seguida um estudo sobre elipse, hipérbole e parábola, onde apresentamos os conceitos de cada uma delas, seus elementos, suas equações canônicas e suas equações com o centro fora da origem. Por fim, abordamos também importantes aplicações das cônicas no nosso dia a dia e procuramos trazer algumas questões de aplicações com as suas devidas soluções.

Palavras-chave: Aplicações. Cônicas. Elipse. Hipérbole. Parábola.

ABSTRACT

The present work aims to analyze the applications of conics in daily life that contribute to the development of the human being and specifically try to evaluate some application problems and their respective solutions using concepts addressed throughout this work. Initially it was necessary to present some preliminary concepts of analytical geometry such as point and straight, distance between two points, Cartesian plane, general equation of the line, axis translation, among other concepts. With the elaboration of this work, we try to present the concept of conics through geometric places. For this, it was necessary to make a historical approach with the purpose of arousing the interest of readers and then a study on ellipse, hyperbola and parabola, where we present the concepts of each of them, their elements, their canonical equations and their equations with the center out of origin. Finally, we also discuss important applications of conics in our daily lives and try to bring some application issues with their proper solutions.

Keywords: Applications. Conics. Ellipse. Hyperbole. Parabola.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante muito tempo o ser humano teve a necessidade de explicar o porquê das coisas acontecerem? Essa situação levou o homem buscar conhecimento que envolviam conceitos matemáticos, como o estudo das cônicas que surgiu para suprir tais necessidades. Segundo Katia Frensel e Jorge Delgado (2011), o primeiro matemático da época a utilizar o conceito de cônicas foi Menaecmus que buscava compreender o problema que envolvia a resolução de duplicação de cubo. Embora sendo o primeiro a utilizar as cônicas para a resolução dos problemas de duplicação dos cubos, o seu estudo não teve maior relevância, quanto ao estudo de Apolônio que são usados nos dias de hoje.

No decorrer deste trabalho apresentamos as três formas de estudar as cônicas, uma delas é por meio das secções cônicas, a outra forma é através da equação quadrática e por fim por meio de lugares geométricos, que foi o escolhido para ser abordado neste trabalho. As cônicas que iremos estudar são as elipses, hipérboles e parábolas. São curvas que têm um papel importante no estudo de cálculo, além disso, as suas aplicações é de ampla variedade nas áreas do saber, como na medicina, em projetos de telescópios, astronomia, arquitetura, e entre outros.

O presente trabalho teve como objetivo geral analisar algumas aplicações das cônicas no dia a dia que contribuem para o desenvolvimento do ser humano e de forma específica tentar avaliar alguns problemas de aplicação e suas respetivas soluções usando conceitos abordado ao longo deste trabalho.

Este trabalho está dividido por 3 capítulos principais. No capítulo 2 apresentamos alguns conceitos preliminares de geometria analítica que são indispensáveis para uma discussão cuidadosa das aplicações das cônicas. Dentre elas temos: ... ponto e reta, sistema cartesiano ortogonal, distância entre dois pontos, pontos colineares, equação geral da reta e translação de eixo. No capítulo 3 introduzimos os conceitos de cônicas, elipse, hipérbole e parábola, onde apresentamos o conceito, seus elementos e suas equações analíticas. O capítulo 4 aborda sobre algumas aplicações das cônicas no cotidiano. Neste capítulo procuramos trazer algumas áreas de aplicação da elipse, hipérbole e parábola. No decorrer da pesquisa constatamos que tais cônicas têm grande aplicação no nosso dia a dia uma delas, por exemplo, são as órbitas dos planetas e dos satélites, nas construções de teto de vários teatros, na representação gráfica de uma função inversa, na mecânica celeste, em pontes de suspensão, nas antenas parabólicas, no sistema de navegação LORAN (LOng RAnge Navigation), em refletor parabólico e em túnel hipotético.

Por fim, a conclusão traz uma abordagem de forma resumida e geral do trabalho. Esperamos que esse trabalho possa trazer uma visão melhor aos leitores sobre a Matemática em especial no estudo das cônicas e que sirva como ferramenta útil para quem futuramente for usar o mesmo trabalho para estudar sobre as cônicas e suas aplicações.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos os pré-requisitos que serão ferramentas a serem utilizadas para a compreensão deste trabalho. Serão apresentados alguns conceitos preliminares que será importante para a compreensão do que será abordado ao longo deste trabalho tendo como suporte alguns livros e dissertações de mestrado que abordam sobre a temática em estudo como (STEINBRUCH, 1987), (WINTERLE, 2000), (TONIOLO,2018), (MACHADO, 1980), (IEZZI, 2013), (VENTURE, 2022) dentre outros livros. Para a compreensão da temática em abordagem será necessário que o leitor tenha conhecimentos prévios de ponto e reta, sistema cartesiano ortogonal, distância entre dois pontos, razão entre segmentos colineares, condições de alinhamentos de três pontos, equação geral da reta e translação de eixo.

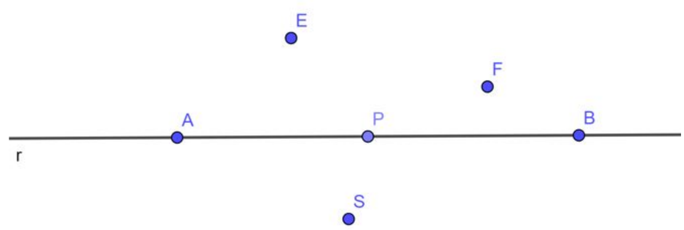
2.1 PONTO E RETA

Ao longo desta seção iremos apresentar algumas notações que representam um ponto e uma reta, postulado da existência, pontos colineares e postulado da determinação, e entre outros conceitos. Vale lembrar que não existe uma definição concreta para os conceitos de ponto e reta, por serem noções primitivas e são aceitas sem definições.

Os pontos serão denotados por letras maiúsculas latinas A, B, C, D ..., enquanto a reta podemos denotar com letras minúsculas latinas a, b, c, d ....

Segundo o postulado de existência que diz que, em uma reta, assim como fora da reta podemos encontrar infinitos pontos e num plano há infinitos pontos. A expressão "infinito pontos"enunciado anteriormente está relacionado a enorme quantidade de pontos que podem ser encontrados na reta ou no plano. Para uma melhor compreensão observe a Figura 1 que representa uma reta r contendo os pontos A, P, B, E, F e S.

Figura 1 – Postulado de Existência



Fonte: O autor (2022)

Note que os pontos A, P e B, são pontos que pertencem a reta, mas os pontos E, F, e S são pontos que não pertencem a reta dada.

Dando continuidade ao estudo de noções e proposições primitivas, falaremos um pouco sobre pontos colineares. Pontos colineares são pontos que pertencem a mesma reta. Quanto à reta, temos o postulado da determinação que diz que dados dois pontos distintos no plano podemos determinar uma única reta que passa por eles. Pela Figura 2, note que os pontos A e B são distintos determinam uma única reta.

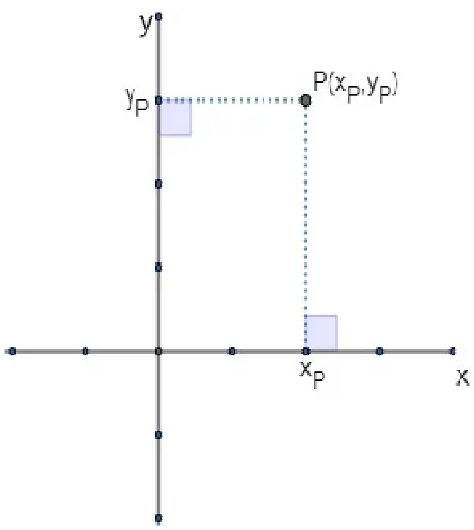
Figura 2 – Reta r com $A \in r, B \in r$ e $A \neq B$.

Fonte: O autor (2022)

2.2 SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

O sistema cartesiano é constituído por dois eixos que são perpendiculares entre si. O eixo X é dito eixo horizontal que também pode ser chamado como eixo das abcissas, enquanto que o Y é o eixo vertical que podemos chamar de eixo das ordenadas. No plano cartesiano, os eixos se cruzam no ponto $O(0,0)$, que é a origem do plano cartesiano. Para localizar um ponto no plano cartesiano, precisamos marcar o valor nos dois eixos mencionados anteriormente, depois basta traçar uma perpendicular aos eixos passando pelos pontos x e y como mostra a Figura 3 e o ponto $P(x_P, y_P)$ é onde as retas se encontram.

Figura 3 – Plano Cartesiano



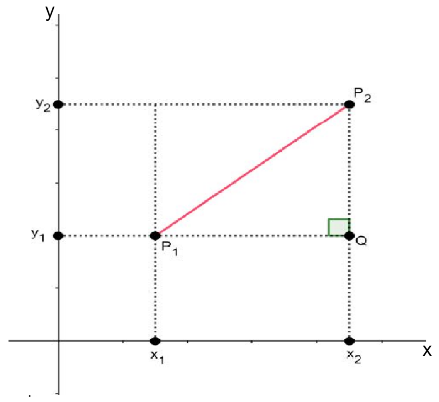
Fonte:Autor (2022)

Note que entre o conjunto dos pontos P do sistema cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_p, y_p) sempre vai existir uma correspondência biunívoca.

2.3 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Primeiramente vamos considerar dois pontos P_1 e P_2 pertencentes ao plano cartesiano, sendo as coordenadas de $P_1 = (x_1, y_1)$ e as coordenadas de $P_2 = (x_2, y_2)$. O nosso objetivo é encontrar uma expressão que representa a distância $d(P_1, P_2)$ em termos de coordenadas das P_1 e P_2. Para isso, será necessário introduzirmos um novo ponto que chamaremos de Q, formando um triangulo retângulo. A fórmula da distância entre dois pontos é obtido através do teorema de Pitágoras. A partir dos pontos P_1 e P_2 vamos construir um triangulo retângulo como mostra a Figura 4 e posteriormente aplicar o teorema de Pitágoras.

Figura 4 – Distância Entre dois Pontos



Fonte: Autor (2023)

Note que inicialmente foi necessário traçar um segmento de P_1 até P_2, esse segmento traçado tem uma medida que será a distância entre os pontos P_1 e P_2, neste caso, podemos escrever da seguinte forma $d(P_1, P_2)$. Observe agora que a distância procurada é a medida da hipotenusa do triangulo P_1P_2Q. Então, o passo a seguir é encontrar os dois catetos. Se traçamos um novo segmento a partir do ponto P_2, iremos encontrar um novo ponto que chamamos de Q. Com o triângulo retângulo formado, estamos em condições de encontrar os catetos.

Os catetos do triângulo formado na Figura 4 terão as seguintes medidas $|x_2 - x_1|$ e $|y_2 - y_1|$. Como já temos a medida da hipotenusa e dos dois catetos, podemos aplicar o teorema de Pitágoras.Pelo teorema de Pitágoras que diz que em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos dois catetos.

Assim, a expressão de distância entre dois pontos pretendida será escrita na forma:

$$d(P_1, P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

ou ainda

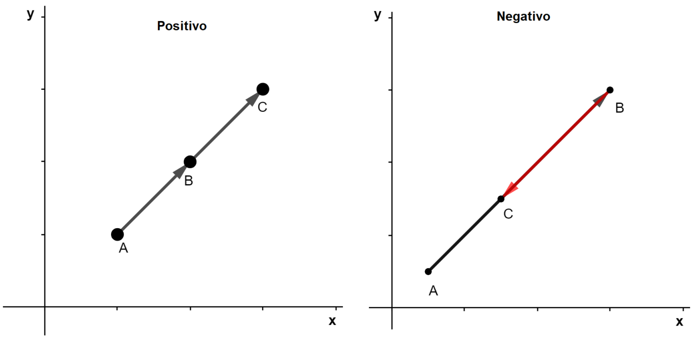
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2.4 PONTOS COLINEARES

Considerando três pontos colineares A, B e C, sendo eles distintos, com ($A \neq B \neq C$), é chamado de razão entre os segmentos orientados AB e BC o número real r tal que

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

Figura 5 – Razão Entre Segmentos Colineares



Fonte: Autor (2023)

com r sendo o quociente entre as medidas de AB e de BC. Com isso, temos os seguintes casos:

- Se AB e BC tiverem o mesmo sentido, então a razão r será positiva;
- Se AB e BC tiverem sentidos opostos, a razão r será negativa.

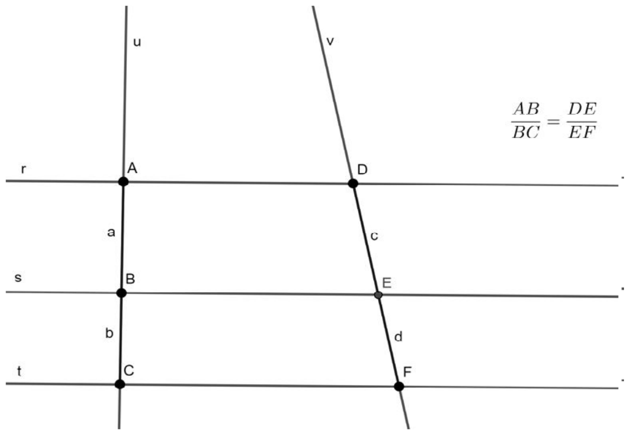
Podemos observar que o sinal da razão depende exclusivamente do sentido do segmento. O nosso objetivo neste tópico não é calcular o valor de r quando são dadas as coordenadas de A, B e C, mas note que se calculássemos por geometria analítica, usando a fórmula de distância entre dois pontos, seria muito trabalhoso, porque teríamos que aplicar a distância de A até B e de B até C e posteriormente dividimos. Neste caso, a maneira mais fácil de se resolver é usar o Teorema de Tales.

O Teorema de Tales diz o seguinte: dado um feixe de retas paralelas $r//s//t$ cortadas por duas transversais formam segmentos correspondentes (DOLCE e POMPEU, 2005).

O teorema de Tales também afirma que se pegarmos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, poderíamos pegar também a seguinte expressão $\frac{b}{a+b} = \frac{d}{c+d}$. Note que podemos pegar qualquer segmento desde que façamos a correspondência entre eles de uma determinada reta com a outra.

Para melhor compreensão observe a figura 6

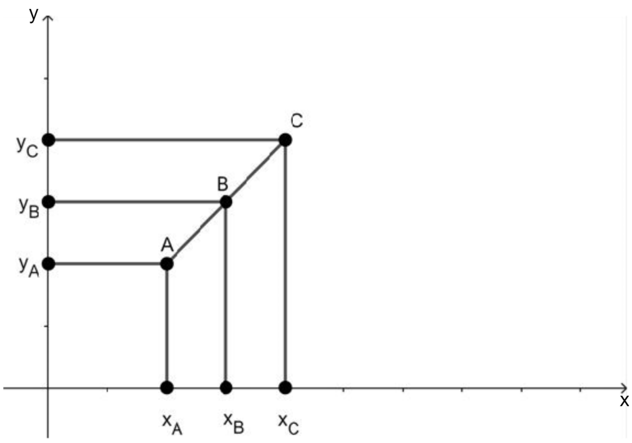
Figura 6 – Teorema de Tales



Fonte: Autor (2022)

Seguindo a ideia do Teorema de Tales, vamos encontrar a razão sobre eixo OX, como mostra a Figura 7. Considerando três retas paralelas, cortadas por duas transversais:

Figura 7 – Razão entre Segmento Colineares



Fonte: Autor (2023)

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B}. \tag{1}$$

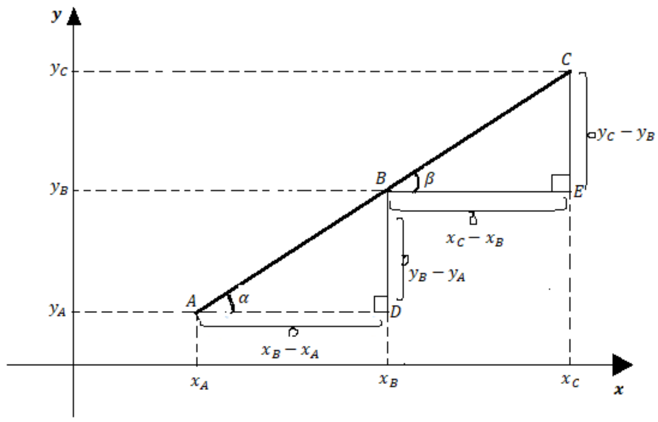
A expressão acima é a razão entre os segmentos AB e BC sem que precise calcular a distância entre os pontos, basta usarmos a diferença orientada das coordenadas. Para o segundo caso vamos calcular sobre o eixo OY. De forma análoga temos a seguinte expressão da razão de forma orientada.

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}. \tag{2}$$

Teorema 2.1 *Considerando três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. Esses pontos* *são colineares se e somente, as suas coordenadas obedecem a seguinte condição:*

$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_A)(y_B - y_A). \tag{3}$$

Figura 8 – Condições de alinhamento



Fonte: Autor (2023)

Demonstração: Considere as coordenadas de A, B e C, pela Figura 8 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. Observe que os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais, logo são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo. Neste caso temos que os ângulos $\alpha = \beta$ pois pelo axioma das paralelas diz que dados feixe de retas paralelas cortadas por transversais de retas paralelas nos garante que os ângulos correspondentes são congruentes. Como os triângulos ABC e BCE são retângulos assim sendo são semelhantes. Note que $\alpha = \beta$, isso resulta que os pontos A, B e C são colineares. Neste caso teremos:

$$\frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}$$

$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_B)(y_B - y_A).$$

■

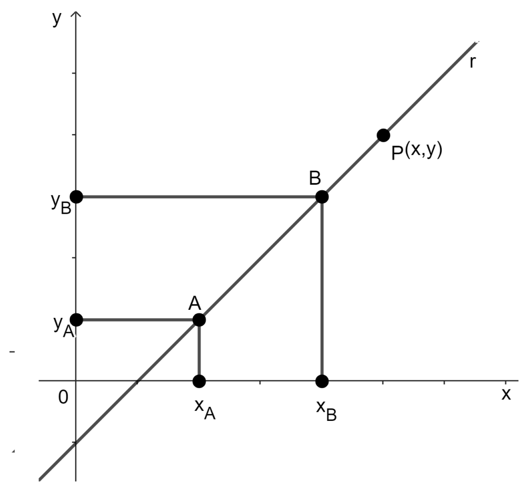
2.5 EQUAÇÃO GERAL DA RETA

Toda reta r do plano está associada a uma equação na forma $ax + by + c = 0$ onde a, b e c são números reais e a e b não são simultaneamente nulos. Ou seja, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Qualquer par ordenado (x, y) que satisfaz a equação citada acima representa um ponto de r.

Para determinar a equação geral da reta devemos utilizar a condição de alinhamento de três pontos. Note que a equação geral da reta é uma das maneiras de descrever a reta de modo algébrico através de uma equação.

Demonstração: Pela Figura9 temos que os pontos Q, e R têm como coordenadas $Q(x_A, y_A)$ e $R(x_B, y_B)$ pontos distintos do plano cartesiano.

Figura 9 – Razão entre Segmento



Fonte: Autor (2023)

Agora vamos considerar que a reta r está definida pelo ponto A e B. Se o $P(x, y)$ é um ponto qualquer que percorre a reta r, então temos que x e y são variáveis. Como P, A e B são colineares, pelo teorema 2.1, tem-se

$$\begin{aligned}(x_B - x_A)(y - y_B) &= (x - x_B)(y_B - y_A)\\ x_By - x_By_B - x_Ay + x_Ay_B &= xy_B - xy_A - x_By_B + x_By_A\\ x(y_A - y_B) + y(x_B - x_A) + x_Ay_B - x_By_A &= 0,\end{aligned}$$

e, por fim fazendo $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$, e $x_Ay_B - x_By_A = c$, temos:

$$ax + by + c = 0$$

Note que se $a = 0$ e $b = 0$, $y_A = y_B$ e $x_B = x_A$ o que é um absurdo, pois $A \neq B$. Portanto $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. ■

2.6 TRANSLAÇÃO DE EIXO

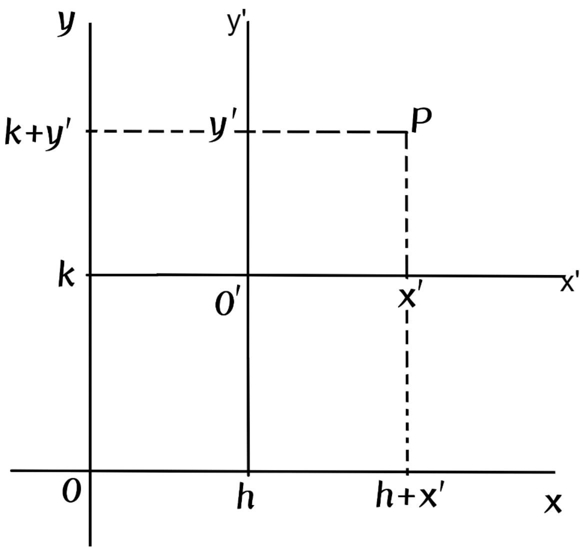
A translação de eixo consiste em deslocar uma figura do plano cartesiano, no sentido horizontal ou vertical. Outra forma de utilizar a translação é definir um novo sistema de forma que a figura que está sendo estudada no novo sistema tenha uma equação mais simples em relação ao sistema anterior.

Considerando o plano cartesiano com o eixo vertical e horizontal, sendo que o 0 será a origem desse mesmo plano, o nosso objetivo é transladar o plano o eixo xOy

para uma outra posição, com o finalidade de criar um novo plano cartesiano que denotaremos por $x'O'y'$, de maneira que os novos eixos x' e y' sejam paralelos aos eixos x e y respetivamente.

Considerando que as coordenadas de O' em xOy, seja (h, k), e as coordenadas de P em $x'O'y'$ seja (x', y'). Então, as coordenadas de P em xOy serão $(h + x', k + y')$ como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Translação de Eixo



Fonte: Autor (2022)

O passo a seguir é fazer a relação existente entre as coordenadas de um ponto em um sistema $x0y$ com as coordenadas desse mesmo ponto em um outro sistema $x'0'y'$ que foi obtido quando transladamos o sistema $x0y$.

Tomando o sistema cartesiano $x0y$ e um ponto $0' = (k, y')$ desse mesmo plano, considerando também o plano $x'0'y'$, de modo que os eixos x' e y' sejam paralelos aos eixos x e y. Note que se o ponto P em $x'0'y'$ tiverem coordenadas (x', y') e o ponto em xoy tiver coordenadas (x, y), teremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}.$$

Note que, fazer uma translação é mudar o sistema antigo para um novo sistema.

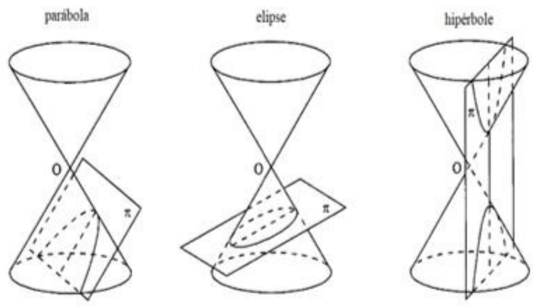
3 CÔNICAS

Neste capítulo o nosso objetivo é estudar as cônicas, de maneira específica a elipse, a hipérbole e a parábola. No decorrer deste capítulo vamos apresentar conceitos das cônicas mencionadas, suas equações quando o eixo de simetria coincide com o eixo OX e com o eixo OY. Além disso, também os elementos que as constituem. Essas curvas mencionadas têm um papel importante no estudo de cálculo e também tem uma variedade ampla de aplicações em várias áreas tais como em antenas parabólica, movimentos dos planetas, na medicina, em projetos de telescópios.

Existem várias maneiras de estudar as cônicas, uma delas por exemplo é por meio das seções cônicas.

Definição 3.1 *Cônicas são curvas que podem ser obtidas através de corte de um plano com uma superfície cônica. As três figuras abaixo são chamados de cônicas ou seções cônicas, porque elas são obtidas através da intersecção de um cone com um plano.*

Figura 11 – Cônicas



Fonte: WINTERLE, 2000, p.160.

Outra maneira de se estudar é através da equação quadrática. Qualquer curva que possa ser escrita na forma de equação quadrática, recebe o nome genérico de cônicas.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Com $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$. No caso em que $B = 0$, ou seja, a equação será da forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{4}$$

A equação (4) pode ser analisada de três maneiras. O primeiro caso é quando A e C têm o mesmo sinal, no qual a equação representa uma elipse. Já o segundo caso é quando A e C têm sinal contrários, que representa a equação da hipérbole, também temos o caso em que um dos coeficientes A ou C é nulo, que é o caso da parábola.

Por fim, a outra maneira é através de lugares geométricos que foi escolhido para ser abordado neste trabalho, o que falaremos com mais detalhe a partir da seção 3.2.

Como motivação falaremos um pouco sobre a parte histórica mencionando sobre a contribuição de René Descarte no estudo de geometria analítica e posteriormente falaremos de alguns filósofos e matemáticos que contribuíram no estudo de cônicas.

3.1 UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DAS CÔNICAS

O inicio do seculo $XVII$, foi um período em que a geometria ainda representava o conjunto da matemática e a contribuição de Euclides prevalecia na época, sendo um período de muitas transformações científicas e tecnológicas. Diante dessas transformações o primeiro passo foi pensar na criação de uma associação de álgebra que fazia uma ligação com a geometria compreendida por Fermat e Descartes.

René Descarte, nasceu em uma pequena cidade da França em La Haye que fica cerca de $300km$ de Paris, na província de Touraine. Seu pai era membro da nobreza francesa, desde muito cedo começou a investir em sua educação e aos 8 anos de idade começou a estudar no colégio Jesuíta de La Flèche, onde a forma de ensino era um dos melhores que havia na época. Descartes, era alguém que ficava doente constantemente, ou seja, tinha uma saúde frágil, por esta razão no colégio não o obrigavam a participar sempre nas aulas e quase todos os dias ficava deitado na cama fazendo leituras. Após concluir os estudos em La Flèche, passou a questionar-se se existia alguma área do saber que apresentava segurança. Entendeu que a Matemática seria a resposta para as suas constantes indagações.

Aos 20 anos de idade, já formado em direito pela Universidade de Poitiers, Descarte ficou em Paris com a finalidade de começar uma vida mundana, acreditava que a sua posição lhe permitia fazer o que bem entender. Mas ao passar do tempo encontrou-se com Mersenne, que era um conhecido amigo que o conhecera em La Flèche. O mesmo incentivou Descarte a se dedicar no estudo da Matemática durante o período de dois anos. Ao decorrer do tempo decidiu seguir carreira militar como voluntário com objetivo de conhecer o mundo. A história não registra nenhum feito militar de Descarte, mas segundo ele, as ideias de sua filosofia surgiram quando servia no exercito da Baviera. Estando ele na Holanda, um país que respeitava a liberdade de pensamento, veio a luz sobre seus estudos relacionados com a geometria.

No ano de 1637 foi publicada a obra-prima de Descarte na qual expõe a essência de sua filosofia, que visa na defesa do métodos matemáticos como modelo para aquisição de conhecimento. Essa obra é composta por três apêndices, nomeadamente A geometria. As duas primeiras partes desse material está constituído por aplicação da álgebra e a última parte fala sobre equações algébricas. No decorrer do seu trabalho, Descartes estabeleceu a notação algébrica, que hoje é adotado por x, y, z, para as variáveis e a, b, c para as constantes. Para ele, a ideia era pensar as letras como sendo segmentos de retas. Com o decorrer do tempo observou que x^2 e x^3 poderiam ser vistas como segmentos de reta e não necessariamente como uma área e um volume respetivamente. A partir disso foi possível mostrar que as cinco operações aritméticas incluindo a raiz quadrada correspondem a construção geométricas elementares com régua e compasso.

Muitos são os que contribuíram com o estudo das cônicas e com o decorrer do tempo, matemáticos, físicos e alguns filósofos da época, dedicaram uma boa parte do seu tempo para estudar sobre as cônicas. De acordo com Katia e Jorge (2011), Menaecmus (380 - 320 a.C.) foi o primeiro matemático da época a utilizar conceitos no qual ajudaram na resolução de problemas que envolviam duplicação de cubo, que nos dias de hoje conhecemos como secções cônicas. Além de Menaecmus, outro que também estudou sobre as cônicas foi Euclides (325 - 265 a.C). Euclides escreveu um artigo com o tema "Cônicas composto", este artigo era composto por quatro volumes, com o decorrer do tempo uma boa parte do teus escritos acabou por se perder. Além de Menaecmus e Euclides, outro que também decidiu estudar as cônicas foi Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), Arquimedes decidiu dedicar sua vida para estudar as cônicas, através dos seus estudos conseguiu calcular a área da elipse. Apesar da contribuição desses filósofos e matemáticos no estudo de cônicas, o maior realce sobre cônicas dá-se a Apolônio de Perga que falaremos um pouco sobre ele de forma mais detalhada.

Quando falamos de cônicas o nome importante é de Apolônio (262-190 a.C), nascido em Perge (atual Turquia), foi um dos primeiros matemáticos da época a estudar sobre as cônicas. Apolônio estudou na escola dos sucessores de Euclides em Alexandria, pouco se fala sobre ele, mas o seu trabalho teve grande importância no desenvolvimento da matemática, em especial das cônicas. Durante o período que esteve em vida ele escreveu o tratado de cônicas que era chamado de "As Cônicas", composto por 8 livros contendo muitas proposições e demostrações.

Essa obra escrita por Apolônio é composta por estudo de secções planas de cone de revolução, além disso, também podemos encontrar diversos teoremas que são usados apenas aos métodos geométricos de Euclides. Através dos feitos no estudo das cônicas, muitos o consideram como sendo um dos pioneiro sobre o estudo de cônicas que hoje conhecemos como elipse, hipérbole e parábola. Apesar de pouco se falar sobre ele, podemos afirmar que a Matemática dos nossos dias deve-se a grande contribuição dele.

É fundamental lembrar que os estudos de Apolônio fazem presente em nossa vida e do nosso cotidiano, em particular o estudo da elipse que tem um papel significativo no nosso dia a dia. Uma das maiores influências sobre o estudo das cônicas de Apolônio, foi o físico Johannes Kepler, que conseguiu provar que a órbita do planeta terra movimenta-se em uma elipse.

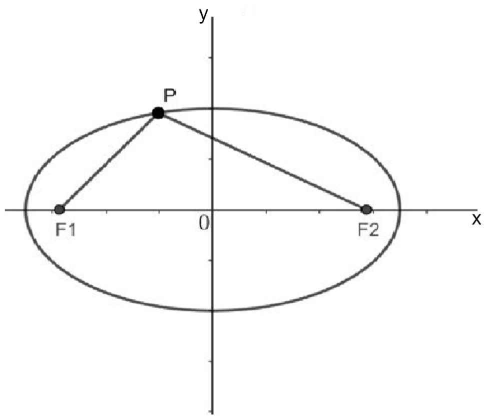
3.2 ELIPSE

Nesta seção, falaremos sobre a elipse, uma curva cujas aplicações vão desde o simples estudo de geometria analítica como em alguns contextos bem mais avançados, como o movimento dos astros, nas orbitas dos planetas entre outros. Iniciamos com a definição usando lugar geométrico.

Definição 3.2 *Elipse é o lugar geométrico de todos os pontos no qual a soma das distâncias a dois pontos fixos* F_1 *e* F_2 *é igual a uma constante.*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

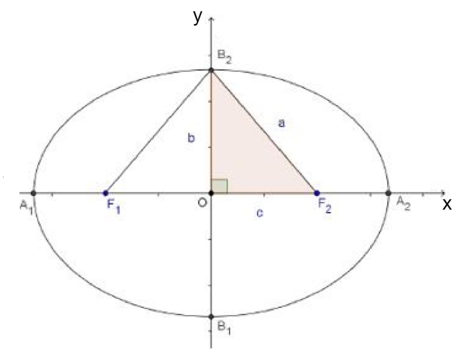
Figura 12 – Elipse centrada na origem



Fonte: O autor (2023)

3.2.1 Elementos da Elipse

Figura 13 – Elementos da Elipse



Fonte: Autor (2022)

A elipse é composta pelos seguintes elementos, levando em consideração a Figura 13

- F_1 e F_2: São os focos da elipse;
- O: é o centro da elipse;
- $2c$: distância focal;
- $2a$: medida do eixo maior;

- $2b$: medida do eixo menor;
- A_1A_2: eixo maior;
- B_1B_2: eixo menor;
- $e = \dfrac{c}{a}$: Excentricidade.

A excentricidade na elipse varia entre $0 \leq e \leq 1$. Isso significa que quanto mais se aproxima de 1, a elipse se torna mais achatada, e quanto mais se aproxima de 0, mais arredondada ela fica. Quando a excentricidade for 1, teremos apenas o segmentos F_1 e F_2, já quando a excentricidade for 0, a elipse será um círculo.

Observação 3.1 *A maior distância da Elipse é de A_1 até A_2 e os focos F_1 e F_2 são os pontos que formam a Elipse.*

Observação 3.2 *Em toda elipse vale a relação do Teorema de Pitágoras. Assim sendo, a expressão do Teorema de Pitágoras na elipse é escrita na forma $a^2 = b^2 + c^2$.*

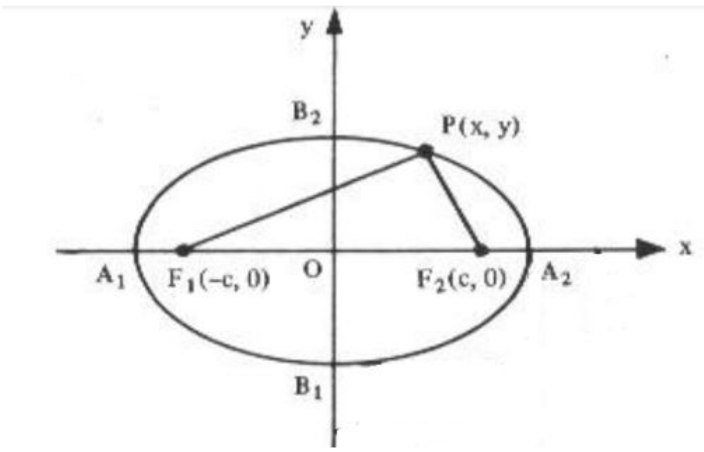
3.2.2 Equações canônicas da elipse

Nesta seção iremos encontrar as equações canônicas da elipse quando o eixo de simetria coincide com o eixo OX e OY.

Considerando $2c$ como sendo a distância entre os focos e $c > 0$. Para encontramos a equação da elipse pretendida, precisamos escolher um eixo, ou seja, vamos inicialmente escolher o eixo OX como sendo a reta que passa pelos focos F_1 e F_2 e a origem será o nosso ponto médio do segmento F_1 e F_2.

A Figura 14 mostra que os focos F_1 e F_2 têm como coordenadas $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Figura 14 – Elipse com eixo maior sobre OX



Fonte: STEINBRUCH,1987,p.229

Considere $P(x, y)$ um ponto qualquer da elipse. Pela definição de elipse temos que $d(P, F_1)+d(P, F_2) = 2a$, substituindo na fórmula da distância entre dois pontos temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a.
\end{aligned}$$

Isolando um dos radicais

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade acima temos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \\
(x+c)^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \\
x^2+2xc+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2 \\
2xc &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}-2xc \\
4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 4a^2-4cx.
\end{aligned}$$

Note que podemos dividir a expressão acima por 4 e assim

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2-cx.$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os membros da igualdade acima temos

$$\begin{aligned}
\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 &= (a^2-cx)^2 \\
a^2((x-c)^2+y^2) &= a^4-2a^2cx+c^2x^2 \\
a^2(x^2-2xc+c^2+y^2) &= a^4-2a^2cx+c^2x^2 \\
a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4-2a^2cx+c^2x^2 \\
a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4+c^2x^2 \\
a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 &= a^4-a^2c^2.
\end{aligned}$$

Podemos evidenciar os termos em comuns, assim temos

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \tag{5}$$

Pela Observação 3.2 temos que

$$b^2 = a^2-c^2. \tag{6}$$

Substituindo (8) em (7) obtemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo a igualdade acima por a^2b^2 temos

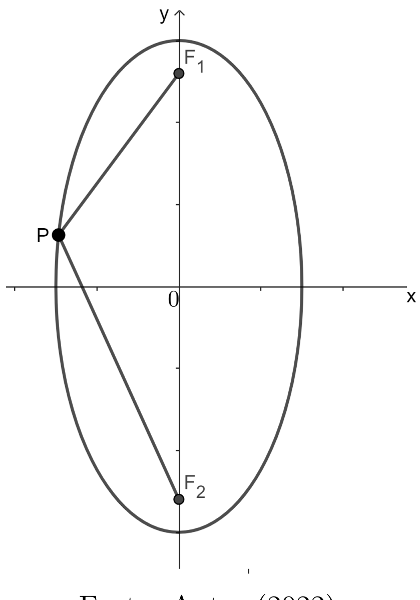
$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}.$$

Concluímos que a equação canônica da elipse de centro na origem e focos sobre o eixo OX é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O passo a seguir é encontrar a equação canônica da elipse quando o eixo de simetria coincide com o eixo OY. Para esse caso a demostração é análogo ao caso anterior. Como $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$.

Figura 15 – Elipse com eixo maior sobre OY



Fonte: Autor (2022)

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} &= 2a \\ \sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Isolando um dos radicais

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y-c)^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade acima temos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x^2+(y+c)^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{x^2+(y-c)^2}\right)^2\\
x^2+(y+c)^2 &= 4a^2-4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\left(\sqrt{x^2+(y-c)^2}\right)^2\\
x^2+y^2+2yc+c^2 &= 4a^2-4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}+x^2+y^2-2yc+c^2\\
2yc &= 4a^2-4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}-2yc\\
4a\sqrt{x^2+(y-c)^2} &= 4a^2-4yc.
\end{aligned}$$

Note que podemos dividir a expressão acima por 4 e assim

$$a\sqrt{x^2+(y-c)^2} \;=\; a^2-yc.$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os membros da igualdade acima temos

$$\begin{aligned}
\left(a\sqrt{x^2+(y-c)^2}\right)^2 &= (a^2-yc)^2\\
a^2(x^2+y^2-2yc+c^2) &= a^4-2a^2yc+y^2c^2\\
a^2x^2+a^2y^2-2a^2yc+a^2c^2 &= a^4-2a^2yc+y^2c^2\\
a^2y^2+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4-a^2y^2\\
a^2y^2-c^2y^2+a^2x^2 &= a^4-a^2c^2.
\end{aligned}$$

Podemos evidenciar os termos em comuns, assim temos

$$(a^2-c^2)y^2+a^2x^2=a^2(a^2-c^2) \tag{7}$$

Pela observação 3.2 temos que

$$b^2=a^2-c^2. \tag{8}$$

Substituindo (8) em (7) obtemos

$$b^2y^2+a^2x^2=a^2b^2.$$

Dividindo a igualdade acima por a^2b^2 temos

$$\frac{b^2y^2}{a^2b^2}+\frac{a^2x^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}.$$

Concluímos que a equação canônica da elipse de centro na origem e focos sobre o eixo

OX é

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

■

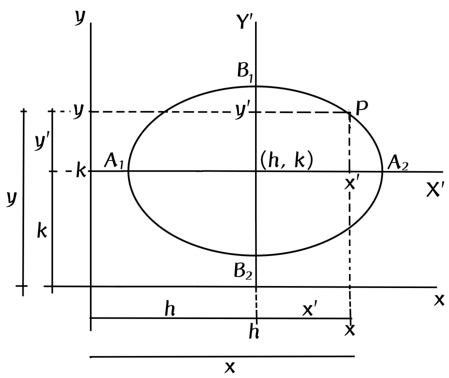
Observação 3.3 *Como na elipse $a^2 > b^2$, para saber se a elipse possui eixo maior sobre o eixo OX ou sobre o eixo OY, precisamos observar onde está o maior denominador. Se o maior denominador estiver sobre x^2, então o eixo maior estará sobre OX. Agora, caso estiver sobre y^2, isso nos diz que estará sobre OY.*

3.2.3 Equação da elipse de centro fora da origem

Nesta seção o nosso objetivo é encontrar uma equação da elipse quando o centro não é a origem, para tal iremos seguir o conceito de translação de eixo visto na seção 2.6 .

Consideremos uma elipse de centro $C(h, k)$ e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer que pertence a elipse como mostra a Figura 16.

Figura 16 – Equação da elipse de centro fora da origem



Fonte: O autor (2022)

Note que se o centro da elipse não for a origem, mas sim o ponto $C(h, k)$, com eixo principal paralelo a um dos eixos coordenadas, nestas condições podemos considerar como sendo a uma translação de eixo de forma que o ponto $C(h, k)$ será a nova origem, com isso temos a equação da elipse $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, se o eixo principal for horizontal e se o eixo principal for vertical a equação será $\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1$.

Como $x = h + x'$ e $y = k + y'$.

$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}.$$

Substituindo o sistema acima na equação da elipse obtemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \tag{9}$$

quando o eixo maior for horizontal. E quando o eixo maior for vertical a equação será

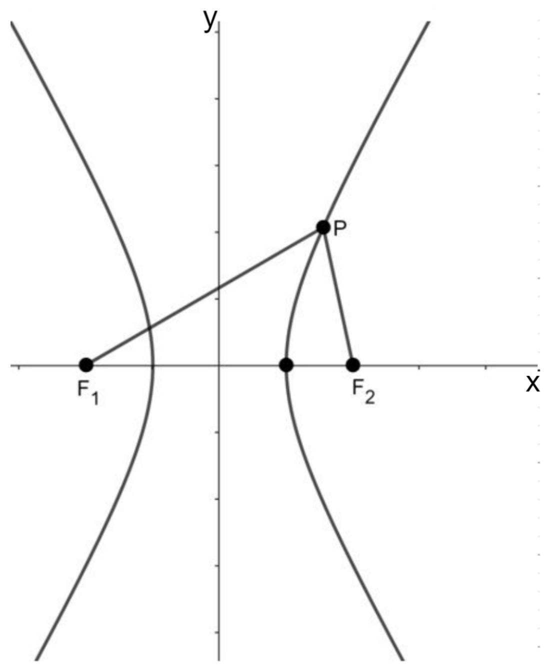
$$\frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1. \tag{10}$$

3.3 HIPÉRBOLE

Continuaremos com o estudo das cônicas, nesta seção o nosso objetivo é estudar a hipérbole.

Definição 3.3 *Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias, em módulo, a dois pontos fixos desse plano é constante.*

Figura 17 – Hipérbole

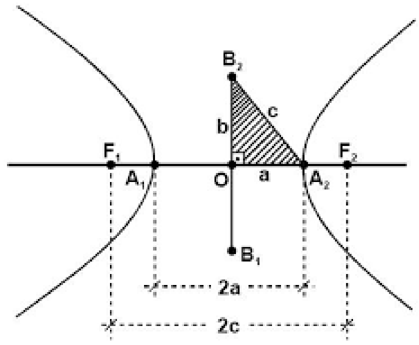


Fonte: O autor (2022)

Matematicamente, a expressão da hipérbole é dada na forma $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$, com $0 \leq a < c$, $d(F_1, F_2) = 2c$ e $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| \leq d(F_1, F_2)$.

3.3.1 Elementos da Hipérbole

Figura 18 – Elementos da hipérbole



Fonte: VENTURI, 2003, p. 92

A hipérbole é composto pelos seguintes elementos, levando em consideração a Figura 18

- F_1 e F_2 focos da hipérbole;
- A_1A_2 : eixo real ou transverso;
- B_1B_2 : eixo imaginário;
- $2c$: distância focal;
- $2a$: medida do eixo real;
- $2b$: medida do eixo imaginário;
- $e = \dfrac{c}{a}$: excentricidade.

Na hipérbole, c e a são positivos com $c > a$, assim $e > 1$. Também há uma relação entre a excentricidade e a abertura da hipérbole, ou seja, quanto maior for a excentricidade, maior será a abertura da hipérbole.

Para determinar a relação entre a e c, consideramos o fato de que a soma dos lados de um triangulo é maior do que o comprimento do terceiro lado.

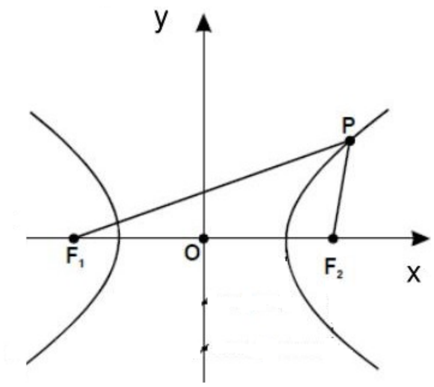
Observação 3.4 *Em toda hipérbole vale a relação do teorema de Pitágoras. Assim sendo, a expressão do teorema de Pitágoras na hipérbole é escrita na forma* $c^2 = a^2 + b^2$.

3.3.2 Equações canônicas da hipérbole

Neste tópico pretendemos achar uma equação cônica da hipérbole quando o eixo de simetria coincide com o eixo OX e OY. Para encontramos ao equação canônica ou cônicas o procedimento será análogo a da elipse tomando a distância entre os focos $2c$.

Consideremos o $P(x, y)$ como sendo um ponto qualquer que pertence a hipérbole, a Figura 19 tem os focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Figura 19 – Hipérbole



Fonte: Autor (2023)

Pela definição de hipérbole temos que $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$, substituindo na fórmula da distância entre dois pontos teremos.

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a.\end{aligned}$$

Isolando um dos radicais teremos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade acima e desenvolvendo os produtos notáveis temos

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\ x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\ 2xc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc \\ 4xc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Dividindo a expressão acima por 4 tem-se

$$\begin{aligned}xc &= a^2 + a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ xc - a^2 &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os membros da igualdade acima temos

$$\begin{aligned} (xc-a^2)^2 &= \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \\ x^2c^2-2a^2xc+a^4 &= a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2 \\ x^2c^2-a^2x^2-a^2y^2 &= a^2c^2-a^4. \end{aligned}$$

Evidenciando o fator comum temos

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \tag{11}$$

Pela observação 3.4 temos que

$$b^2=c^2-a^2. \tag{12}$$

Substituindo (14) em (13) teremos

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2.$$

Dividindo a igualdade acima por a^2b^2 temos

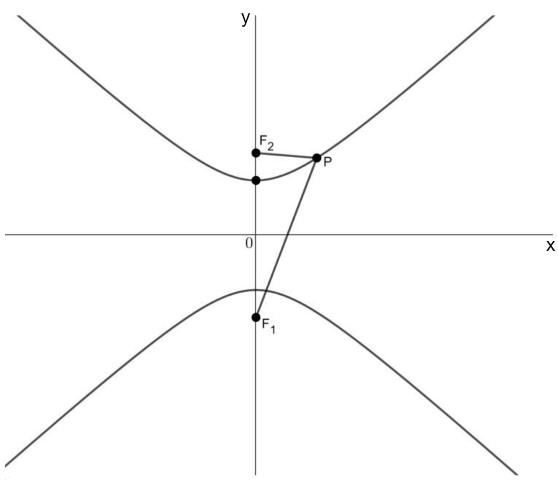
$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2}-\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}.$$

Concluímos que a equação canônica da elipse de centro na origem e focos sobre o eixo OX é

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Agora, o nosso objetivo é encontrar a equação da hipérbole quando o eixo de simetria coincide com o eixo OY. Como $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$.

Figura 20 – Hipérbole



Fonte: Autor (2022)

Pela definição de hipérbole tem-se

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x+0)^2+(y+c)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} &= 2a\\
\sqrt{x^2+(y+c)^2}-\sqrt{x^2+(y-c)^2} &= 2a.
\end{aligned}
$$

Isolando um dos radicais teremos

$$
\sqrt{x^2+(y+c)^2} = 2a+\sqrt{x^2+(y-c)^2}.
$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade acima e desenvolvendo os produtos notáveis temos

$$
\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)^2 &= \left(2a+\sqrt{x^2+(y-c)^2}\right)^2\\
x^2+(x+c)^2 &= 4a^2+4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}+\left(\sqrt{x^2+(y-c)^2}\right)^2\\
x^2+y^2+2yc+c^2 &= 4a^2+4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}+x^2-2yc+c^2+y^2\\
2yc &= 4a^2+4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}-2yc\\
4yc &= 4a^2+4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}.
\end{aligned}
$$

Dividindo a expressão acima por 4 tem-se

$$
\begin{aligned}
yc &= a^2+a\sqrt{x^2+(y-c)^2}\\
yc-a^2 &= a\sqrt{x^2+(y-c)^2}.
\end{aligned}
$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os membros da igualdade acima temos

$$
\begin{aligned}
(yc-a^2)^2 &= \left(a\sqrt{x^2+(y-c)^2}\right)^2\\
y^2c^2-2a^2yc+a^4 &= a^2(x^2+(y-c)^2)\\
y^2c^2-2a^2yc+a^4 &= a^2x^2+a^2y^2-2a^2yc+a^2c^2\\
y^2c^2-a^2y^2-a^2x^2 &= a^2c^2-a^4.
\end{aligned}
$$

Evidenciando o fator comum temos

$$
(c^2-a^2)y^2-a^2x^2=a^2(c^2-a^2). \tag{13}
$$

Pela observação 3.4 temos que

$$
b^2=c^2-a^2. \tag{14}
$$

Substituindo (14) em (13) teremos

$$
b^2y^2-a^2y^2=a^2b^2.
$$

Dividindo a igualdade acima por a^2b^2 temos

$$\frac{b^2y^2}{a^2b^2} - \frac{a^2x^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}.$$

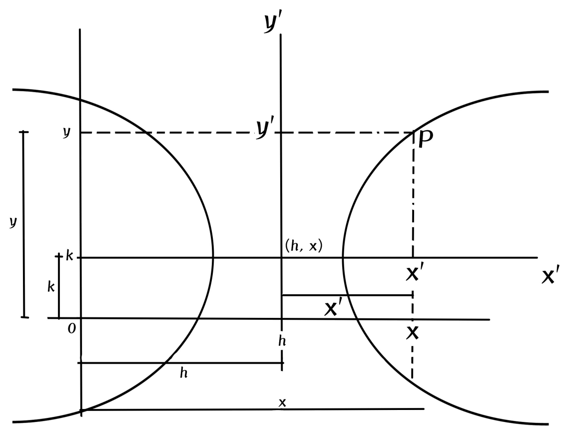
Concluímos que a equação canônica da elipse de centro na origem e focos sobre o eixo OY é

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

3.3.3 Equação da hipérbole de centro fora da origem

Queremos encontrar uma equação da hipérbole quando o centro não é a origem do plano cartesiano.

Figura 21 – Equação da hipérbole de centro fora da origem



Fonte: O autor (2022)

Note que se o centro estiver no ponto (h, k) e o eixo principal for paralelo em relação ao eixo OX, os eixos serão transladados de maneira que o ponto (h, k) seja a nova origem. Com isso temos que a equação da hipérbole no novo sistema de coordenadas quando o eixo for na horizontal a equação será da forma $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Como isso temos a seguinte expressão abaixo

$x = h + x'$ e $y = k + y'$.

$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}.$$

Substituindo na equação da hipérbole temos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \tag{15}$$

quando o eixo maior for horizontal. Quando o eixo maior for vertical a equação será

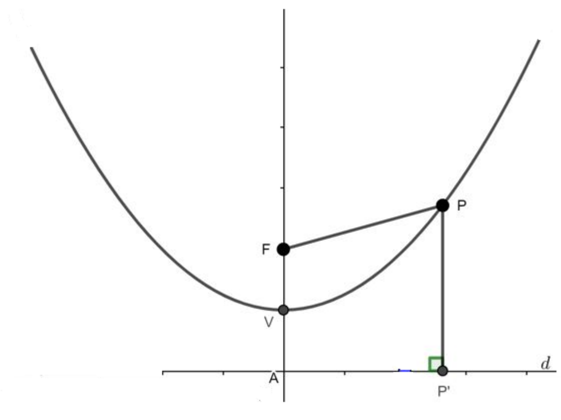
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \tag{16}$$

3.4 PARÁBOLA

Como anteriormente falamos sobre elipse e hipérbole, nesta secção daremos continuidade com o estudo de cônicas onde falaremos sobre a parábola.

Definição 3.4 *A parábola é o lugar geométrico de todos os pontos que equidistam de uma reta e de um ponto fixado que não está na reta. Essa reta é denominada diretriz da parábola, já o ponto é chamado de foco da parábola.*

Figura 22 – Parábola



Fonte: Autor (2022)

Pela definição de parábola, se o ponto $P = (x, y)$ é um ponto qualquer que pertence a parábola, então vale a equação abaixo.

$$d(P, F) = d(P, d).$$

3.4.1 Elementos da Parábola

A parábola é composta pelos seguintes elementos, em relação a Figura 22

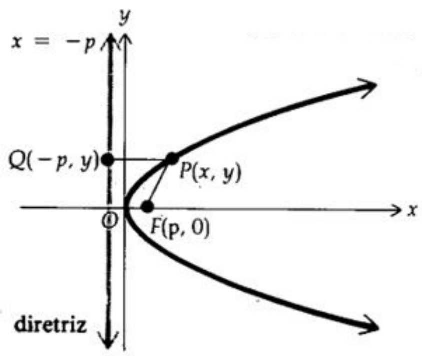
- Foco: é o ponto F;
- Diretriz: é a reta d;
- Eixo: é a reta que passa pelo foco e é perpendicular a diretriz;
- Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo;

- p: parâmetro;
- $e = \dfrac{PF}{Pd}$: excentricidade

3.4.2 Equações canônicas da parábola

A partir da definição de parábola, vamos encontrar a sua equação. Para uma melhor facilidade iremos escolher um dos eixo. Tomando a diretriz paralela ao eixo OX uma vez que é perpendicular a reta diretriz, com o foco. Agora vamos tomar a origem sobre o eixo OX e no ponto médio. Vale lembrar que estamos a tomar uma escolha particular dos eixos e não da parábola. Observe a Figura 23,

Figura 23 – Parábola



Fonte: STEINBRUCH, 1987, p.204

Agora seja P a distância da origem ao foco. O foco será o ponto $F(p, 0)$, e a reta diretriz será a reta da equação $x = -p$. Note que também teremos um ponto qualquer $P(x, y)$ que pertence a parábola se e somente se P for equidistante de F e da reta diretriz.

Tem-se que se $Q(-p, y)$ for o nosso pé da perpendicular à diretriz que passa por P, neste caso P será um ponto que vai pertencer a parábola se $d(F, P) = d(Q, P)$.

Substituindo a fórmula da distância elevando ao quadrado temos

$$\begin{aligned}
\left[\sqrt{(x-p)^2+y^2}\right]^2 &= \left[\sqrt{(x+p)^2}\right]^2 \\
x^2 - 2xp + p^2 + y^2 &= x^2 + 2xp + p^2 \\
y^2 &= 2xp + 2xp \\
y^2 &= 4xp.
\end{aligned}$$

De forma análoga, a equação com o foco é $(0, p)$, e a reta diretriz sendo $y = -p$ a equação da parábola procurada será

$$\begin{aligned}
\left[\sqrt{(y-p)^2+x^2}\right]^2 &= \left[\sqrt{(y+p)^2}\right]^2 \\
y^2-2yp+p^2+y^2 &= y^2+2yp+p^2 \\
x^2-2yp &= 2yp \\
x^2 &= 2yp+2yp \\
x^2 &= 4yp.
\end{aligned}$$

$$x^2 = 4py.$$

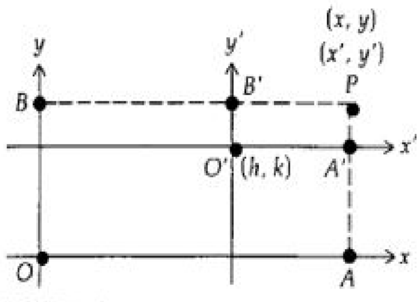
Agora vamos apresentar alguns casos particulares da parábola em relação a sua concavidade.

Quando o eixo coincide com o eixo OX temos que, se $p > 0$ e $x > 0$ a concavidade estará voltado para direita, caso $p < 0$ e $x < 0$, então a concavidade será para esquerda. Quando o eixo coincide com o eixo OY se $p > 0$ e $y > 0$ a concavidade da parábola estará voltada para cima, caso $p < 0$ e $y < 0$ a concavidade será para baixo.

3.4.3 Equação da parábola de centro fora da origem

Suponhamos que os eixos x e y sejam transladados para novos eixos que chamaremos de x' e y' com centro em (h, k) em relação aos eixos dados. Considerando que os números positivos estejam do mesmo lado da origem do plano em relação a x' e y' e do mesmo modo aos eixos x e y como mostra a Figura 24

Figura 24 – Translação de Eixo



Fonte: LEITHOLD, 1994, p. 581

Note que o ponto P no plano com coordenadas (x, y) em relação ao sistema antigo, para o novo sistema as coordenadas (x', y'). Para encontrar a relação entre os dois conjuntos de coordenadas, é importante traçar uma reta por P, paralela tanto ao eixo y e y' da mesma forma nos eixos x e x' .

Suponhamos que a reta intercepta o eixo x num determinado ponto A e x' em A' e a outra reta em y em B e y' em B'. As coordenadas de $P(x, y)$ e as de $A(x, 0)$ em relação aos eixos x e y e $A'(x,k)$. No entanto, temos

$$y = y' + k$$

$$y' = y - k. \tag{17}$$

Para o ponto B e B' temos as seguintes coordenadas de $B(0,y)$ e $B'(h,y)$ teremos

$$x = x' + h$$

$$x' = x - h. \tag{18}$$

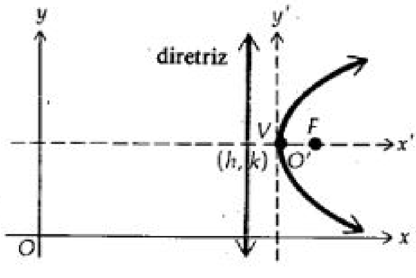
Formando um sistema de duas equações tem-se

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}.$$

O passo a seguir é utilizar o conceito de translação de eixo para encontrar a equação geral da parábola com diretriz paralela aos eixos coordenados e vértice no ponto (h,k).

Observe que se a reta diretriz for paralela ao eixo y e com vértice em (h,k) a equação será $x = h - p$ e o foco será $(h+p,k)$. Tomando x' e y' de modo que a origem $0'$ esteja em $V(h,k)$ como mostra a Figura 25, a equação da parábola em relação aos eixos x' e y' é ${y'}^2 = 4px'$.

Figura 25 – Translação de Eixo



Fonte: LEITHOLD, 1994, p. 582

Substituindo y' e x' na equação da parábola teremos

$$(y-k)^2 = 4p(x-h). \tag{19}$$

De maneira análoga, se a reta diretriz da parábola for paralela ao eixo x e o vértice estiver em $V(h,k)$, neste caso o foco é $F(h,k+p)$ e $y=k-p$. Substituindo vem

$$(x-h)^2 = 4p(y-k). \tag{20}$$

Observação 3.5 *Denomina-se excentricidade como sendo o parâmetro associado a qualquer cônica, que tem por finalidade medir o seu desvio em relação a uma circunferência.*

4 APLICAÇÕES DAS CÔNICAS

Neste capítulo o nosso objetivo é apresentar algumas aplicações de cônicas no cotidiano e posteriormente apresentaremos alguns problemas de aplicação relacionado a temática em abordagem. Na astronomia existem varias aplicações de elipses, como exemplo temos as órbitas dos planetas e dos satélites que têm a forma de elipse (VENTURI, 2003). Além disso, as elipses também são utilizadas para fazer engrenagens de maquinas, pontes etc (VENTURI, 2003). Uma das curiosidade sobre a elipse, é o mais portentoso monumento arquitetônico de Roma antiga foi o coliseu. A planta baixa possui a forma elíptica, cujo eixo maior tinha $188m$ e o menor $156m$. a sua construção teve inicio em 72 por Vespasiano e foi concluído em 82 por Tito (VENTURI, 2003). Observe a Figura 28.

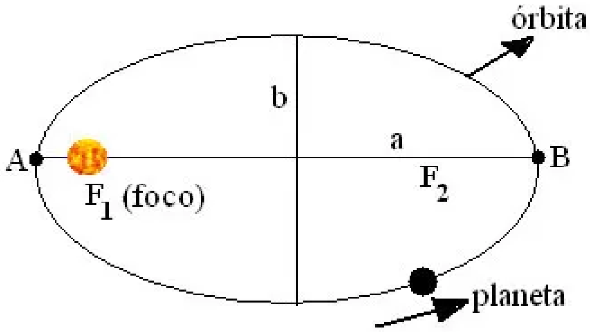
Figura 26 – Coliseu

Fonte: `https://curvasearquitetura.files.wordpress.com/2012/07/coliseu.jpg`

Existem teatros cujo os seus tetos têm a forma de elipse, tendo em conta que esse formato ajuda na propagação do som a uma distância razoável e garante qualidade do som. Também é usado na arquitetura e no *design*. Podemos encontrar a aplicação da elipse na óptica, que pode ser vista no dispositivo de iluminação dos dentistas (VENTURI, 2003). Esse aparelho usado pelos dentistas tem o formato de um arco em forma de elipse e possui uma lampada que se coloca no foco. A luz que é transmitida pela lampada, é concentrada por meio de espelho no outro foco, que facilita os dentistas ajustar num ponto dentro da boca do paciente. Assim como os aparelhos utilizados em tratamentos radioterápicos, principalmente em casos de câncer.

Uma grande aplicação da elipse é a primeira lei de Johannes Kepler, depois de muito tempo de estudo, Kepler descobriu que a trajetória dos planetas ao redor do sol não é circular e sim elpística. Uma elipse é uma figura achatado, e possui propriedades especiais. Kepler determinou que a órbita dos planetas segue uma figura elíptica, com o sol em um dos focos. Pela complexidade do conteúdo, não será trazido a sua demostração neste trabalho, para uma melhor compreensão, o leitor pode dar uma olhada em (SIMMONS, 1988).

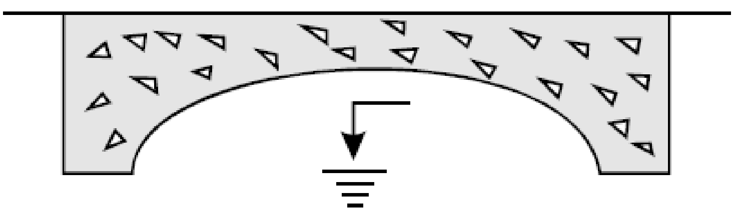
Figura 27 – Órbita de um planeta



Fonte: `https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/fisica/leis-movimento-planetario.htm`

Segundo Venturi (2003), na engenharia civil podemos encontra a resistência dos materiais que é bastante empregada a elipse de inércia. Além da engenharia civil, a elipse também tem grande aplicação na engenharia elétrica, onde podemos destacar o conjuntos de elipses homofocais. Ou seja, elipse de mesmo foco, são utilizadas na teoria de correntes elétricas estacionárias. Os arcos em forma de semi-elipse são muitos empregados na construção de pontes de concreto e de pedras desde os antigos romanos.

Figura 28 – Arcos em forma de Semi-elipse



Fonte: VENTURI,2003

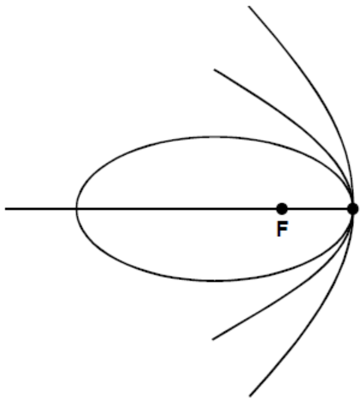
Além da elipse, a hipérbole também tem grande aplicação no nosso cotidiano. Uma das aplicações é na fabricação de telescópio. O telescópio é um instrumento que tem dois espelhos: O primeiro é o espelho maior chamado primário, este tem um formato Parabólico, já o segundo é o espelho menor que tem o formato Hiperbólico. Outra aplicação da hipérbole é na representação gráfica de uma função inversa. Note que podemos observar a aplicação da hipérbole em diversas áreas profissional, como na óptica, na mecânica celeste, na mecânica dos fluidos, etc (VENTURI, 2003).

Figura 29 – Telescópio

Fonte: `www.portaldoastronomo.org/tema_pag.php?id=24&pag=4`

Segundo o Venturi (2023), na mecânica celeste o exemplo que podemos trazer é a trajetória de uma cometa, dependendo de sua velocidade, descreve uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica. Os cometas são os menores corpos do sistema solar, são irregulares, são frágil e basicamente são constituídos por gelo e poeira.

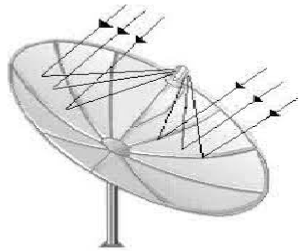
Figura 30 – Cometas



Fonte: `VENTURI,2003`

Por fim temos a parábola que tem grande aplicação no cotidiano e uma das suas aplicações são os arcos que têm a forma de uma parábola, os cabos de suspensão de pontes e as antenas parabólicas que emitem sinais na TV (VENTURI, 2003). Poderíamos nos perguntar o seguinte. Por quê as antenas parabólica tem a forma de uma parábola? A resposta seria simples, porque as antenas parabólicas tem uma diretriz e um foco, pela propriedade reflexiva que diz o que, todo raio que vai perpendicular a reta diretriz bate na parábola e se concentra no foco. Essa propriedade também pode ser encontrada na elipse e na hipérbole.

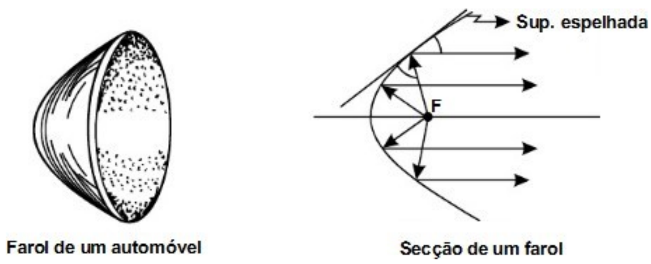
Figura 31 – Esquema de incidência de raios sobre uma antena parabólica



Fonte:`http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/673-4.pdf`

Segundo ventura (2003), uma das aplicações da parábola esta relacionada com os faróis de automóveis. Se colocarmos uma luz no foco da parábola, os raios de luz irão se espalhar pela superfície do paraboloide elíptico e, pela propriedade refletora da parábola, esses raios serão refletidos paralelamente ao seu eixo de simetria, o que acontece no farol de um automóvel. Observe a Figura 32

Figura 32 – Cometas



Fonte: `VENTURI,2003`

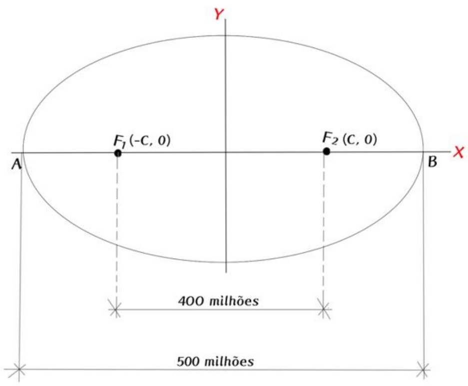
Outros exemplos que podemos trazer são os espelhos das lojas, os retrovisores de carros, a catedral de brasília entre outros. Esses são alguns exemplos de cônicas e no nosso dia a dia utilizamos ferramentas que têm o formato de uma cônica sem tão pouco saber. Note que as cônicas têm grande aplicação no nosso dia a dia.

Outra aplicação da parábola é sobre balística, quando é lançado um projétil sobre o qual atua apenas força de gravidade, a trajetória é sempre uma parábola. Em resistência dos materiais podemos trazer como exemplo o diagrama do momento fletor de uma viga submetida a uma carga uniforme também é uma parábola (VENTURI, 2003).

Como mencionado no primeiro parágrafo deste capítulo, agora iremos apresentar alguns problemas de aplicação relacionado a elipse, hipérbole e parábola. Mas antes vale realçar que os problemas a serem mencionados, serão de forma aleatórias, ou seja, não iremos seguir as ordens das cônicas apresentado ao longo deste trabalho, mas buscaremos o desenvolvimento do nível dos problemas.

Problema 4.1 (LEITHOLD, 1988, p.593) *Suponha que a órbita de um planeta tenha a forma de uma elipse com o eixo maior cujo comprimento é* 500 *milhões de quilômetros. Se a distância entre os focos for* 400 *milhões de quilômetros, ache a equação da orbita.*

Solução: Note que a questão nos diz que o eixo maior mede 500 como mostra a Figura.



Assim temos,

$$2a = 500 \Rightarrow a = 250.$$

Como a distância focal é de 400, com isso tem-se

$$2c = 400 \Rightarrow c = 200.$$

Pela Observação 3.2, vamos encontrar o valor de b, temos

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - c^2 \\ &= (250)^2 - (200)^2 \\ &= 62500 - 40000 \\ &= 22500. \end{aligned}$$

Como a equação da elipse é da forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, substituindo os valores de a e b na equação da elipse temos

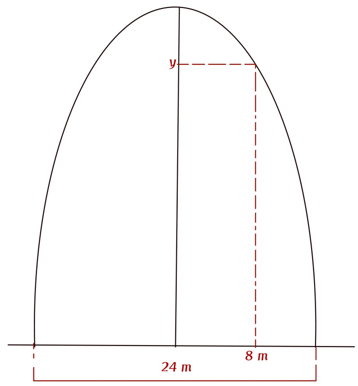
$$\frac{x^2}{250^2} + \frac{y^2}{22500} = 1.$$

Portanto, a equação da órbita será

$$\frac{x^2}{62500} + \frac{y^2}{22500} = 1.$$

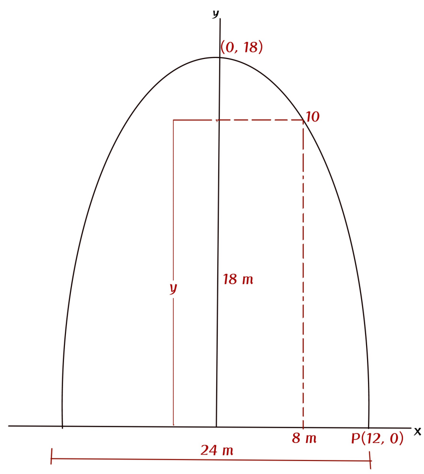
■

Problema 4.2 (KINDLE, 1997, p. 48 - Adaptado) *Encontre a altura de um ponto de um arco parabólico de 18 metros altura e 24 metros de largura. localizado a uma distância de 8 metros do centro do arco.*



Solução: Para a resolução desa questão vamos usar a seguinte equação da parábola.

$$(x-h)^2 = -4p(y-k) \tag{21}$$



Como o vértice tem os pontos $V(0,18)$ e $P(12,0)$ como mostra a figura, substituindo na equação (21) tem-se,

$$\begin{aligned}(x-0)^2 &= -4p(y-18)\\ x^2 &= -4p(y-18).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}12^2 &= -4p(-18)\\ \frac{144}{18} &= 4p \Rightarrow p = 2\end{aligned}$$

Como já temos o valor de p, vamos calcular o valor de y que será a altura que procuramos. Substituindo por x tem-se,

$$\begin{aligned} x^2 &= -8(y-18) \\ x^2 &= -8y+144. \end{aligned}$$

Como queremos sobre o valor de altura y, quando $x = 8$, teremos

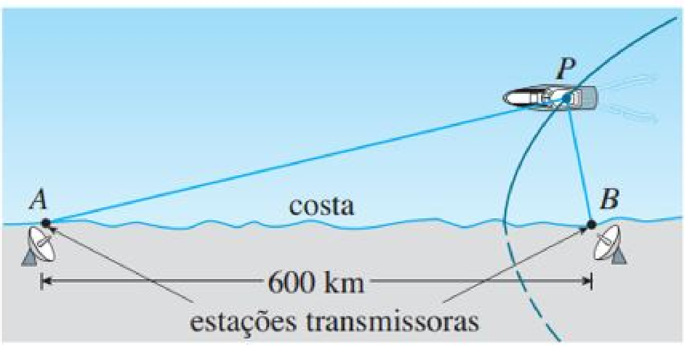
$$\begin{aligned} (8)^2 &= -8y+144 \\ 64 &= -8y+144 \\ -144+64 &= -8y \\ -80 &= -8y \Rightarrow y = 10. \end{aligned}$$

Logo, a altura será $y = 10m$. ■

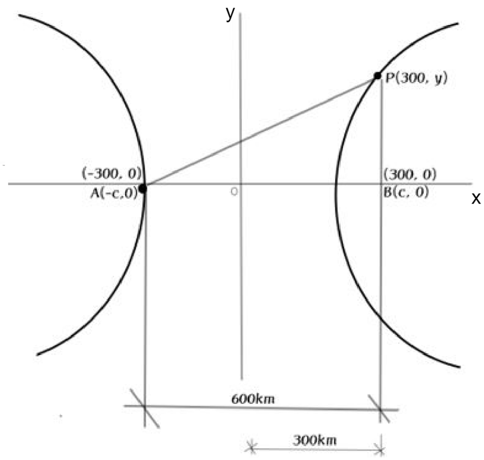
Problema 4.3 (STEWART, 2009, p. 627-Adaptado) *No sistema de navegação LORAN (LOng RAnge Navigation), duas estações de rádio localizada em A e B transmitem simultaneamente sinais para um barco ou um avião localizado em P. O computador de bordo converte a diferença de tempo na recepção desses sinais em diferença de distância* $d(P, A)$ - $d(P, B)$ *e isso, de acordo com a definição de uma hipérbole, localiza o navio ou o avião em um ramo da hipérbole (veja a figura). Suponha que a estação B esteja localizada* 600km *a leste da estação A na costa. Um navio recebe o sinal de B* 1.200 *microssegundos* (μs) *antes de receber o sinal de A.*

(a) Assumindo que o sinal de rádio viaja a uma velocidade de $300m/\mu s$*, encontre uma equação da hipérbole na qual o navio está.*

(b) Se o navio deveria estar ao norte de B, a que distância da costa ele estará?



Solução: Para a resolução dessa questão é importante que o leitor tenha conhecimento prévios de distancia e velocidade. Para melhor compreensão observe a figura abaixo.



Para o item (a), pela definição de hipérbole temos que $d(P,A) - d(P,B) = 2a$ e a sua equação cônica é da forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Considerando que a origem esteja no meio do caminho entre A e B. Neste as coordenadas dos pontos serão $A(-300,0)$ e $B(300,0)$.

O passo a seguir é encontrar a distância $d(P,A) - d(P,B)$. Como o sinal de radio viaja a uma velocidade de $300m/\mu s$ e o sinal que o navio recebe após o tempo de $1200\mu s$. Desde que $distancia = Velocidade \times Tempo$. Substituindo esses valores na expressão da distância temos

$$d(P,A) - d(P,B) = 300 \cdot 1200 = 360.000m = 360km.$$

Mas pela definição de hipérbole temos que

$$2a = 360000 \Rightarrow a = 180000m = 180km$$

Pela observação 3.4 temos

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Como o ponto B é um dos focos da nossa hipérbole teremos $(300,0) = (c,0)$. Substituindo temos

$$\begin{aligned} b^2 &= (300)^2 - (180)^2 \\ &= 90000 - 32400 \\ &= 57600. \end{aligned}$$

Substituindo os valores encontrado na equação da hipérbole temos

$$\frac{x^2}{32400} - \frac{y^2}{57600} = 1.$$

Para o item (b) vamos considerar que o navio está ao norte de B, assim a coordenada de $x = 300$. Vamos encontrar o valor de y.

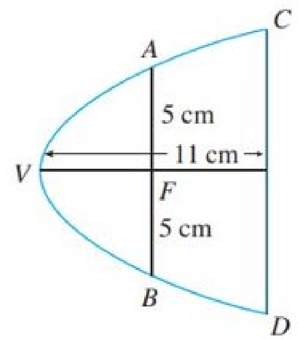
$$\begin{aligned} \frac{300^2}{32400} - \frac{y^2}{57600} &= 1 \\ \frac{90000}{32400} - \frac{y^2}{57600} &= 1 \\ 2,77 - 1 &= \frac{y^2}{57600} \\ y^2 &= 102400 \\ y &= \sqrt{102400} \Rightarrow y = 320km. \end{aligned}$$

Neste caso, o barco estará a $320km$ da costa. ■

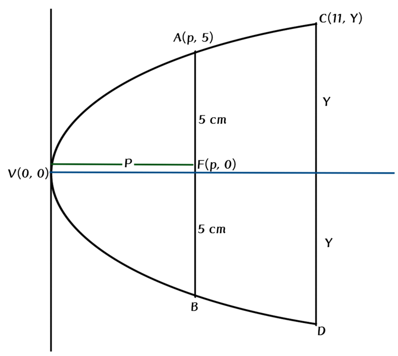
Problema 4.4 (STEWART, 2009, p. 627) *Uma secção transversal de um refletor parabólico é mostrada na figura. A lâmpada é colocada no foco, e a abertura no foco é 10 cm.*

(a) Ache uma equação da parábola;

(b) Encontre o diâmetro da abertura $|CD|$, $11cm$ a partir do vértice.



Solução: Para uma melhor compreensão da resolução dessa questão, observe a figura abaixo.



(a) Considerando que o eixo de simetria da parábola está sobre o eixo OX e o vértice na origem, então o foco estará sobre o eixo OX.

A equação da parábola será $y^2 = 4px$, em que p é a distância do vértice ao foco. Como queremos a equação da parábola, precisamos determinar o valor de p. Note que o ponto A possui coordenada $A(p, 5)$ e por ser um ponto que pertence a parábola, vamos substituir as coordenadas do ponto A na equação da parábola tem-se

$$\begin{aligned} 5^2 &= 4pp \\ 25 &= 4p^2 \\ p^2 &= \frac{25}{4} \\ p &= \sqrt{\frac{25}{4}} \\ p &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Como $y^2 = 4px$ e $p = \dfrac{5}{2}$, tem-se

$$y^2 = 4 \cdot \frac{5}{2}x \Rightarrow y^2 = 10x.$$

Considerando que o ponto C tem as coordenadas $C(11, y)$ sendo um ponto que também pertence a parábola vamos substituir as coordenada de C na equação da parábola encontrada. Como

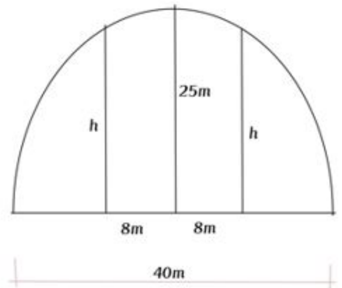
$$y^2 = 10x \Rightarrow y^2 = 10 \cdot 11 = 110 \Rightarrow y = \sqrt{110}.$$

Logo, o diâmetro $|CD|$ será o dobro de y, assim temos:

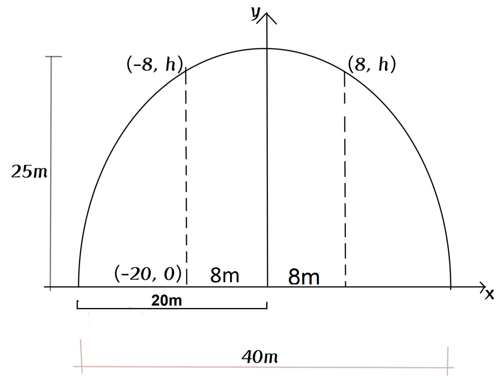
$$D = 2\sqrt{110} \approx 21cm.$$

■

Problema 4.5 (KINDLE, 1997, p. 50-Adaptado) *Um arco parabólico tem uma altura de 25 metros e um vão de 40 metros. Encontre a altura das pontas do arco localizado a 8 metros de ambos os lados do seu centro.*



Solução: Para a solução dessa questão vamos usar a seguinte equação $(x-h)^2 = -4p(y-k)$ com concavidade voltada para baixo como mostra a figura abaixo.



Como a altura é de 25 metros posicionada acima da origem, então x = 0, neste caso o vértice será igual a: $V(0,25)$, ou seja, $h = 0$ *e* $k = 25$. Note também que temos um ponto qualquer que vamos chamar de $A(-20,0)$, substituindo esses valores na equação da parábola tem-se

$$\begin{aligned}(x-h)^2 &= -4p(y-k)\\ (-20-0)^2 &= -4p(0-25)\\ 400 &= 100p \Rightarrow p = 4.\end{aligned}$$

Como o nosso objetivo é encontrar a altura e já encontramos o valor de p, substituindo temos,

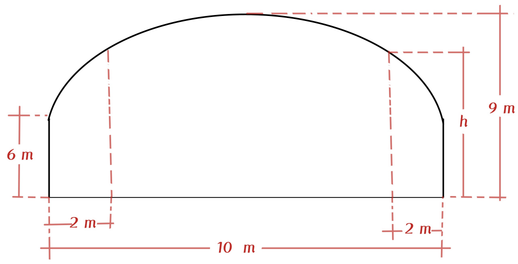
$$\begin{aligned}(x-0)^2 &= -4(4)(y-25)\\ x^2 &= -16(y-25)\end{aligned}$$

Substituindo o ponto $(8,h)$ obtemos,

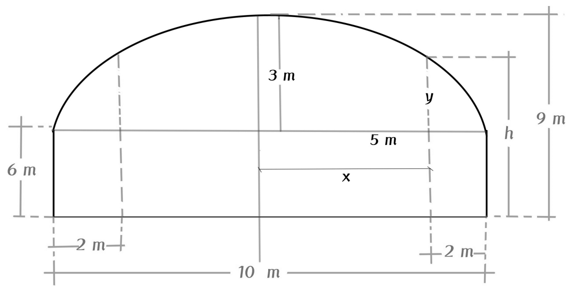
$$\begin{aligned}8^2 &= -16(h-25)\\ \frac{64}{16} &= -h+25\\ 4 &= -h+25 \Rightarrow h = 21m.\end{aligned}$$

Logo, a altura das pontas do arco localizado a 8 metros de ambos os lados do seu centro é de $21m$. ∎

Problema 4.6 (LEITHOLD, 1994, p. 593) *O teto de um saguão com* $10m$ *de largura tem a forma de uma semi-elipse com* $9m$ *de altura no centro e* $6m$ *de altura nas paredes laterais. Ache a altura do teto a* $2m$ *de cada parede.*



Solução: Observe a figura abaixo.



Primeiramente vamos encontrar os semi-eixo da elipse.

$$2a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{2} = 5.$$

Calculando o valor de b temos

$$b = 9 - 6 = 3.$$

Assim sendo, os semi eixo da elipse são $a = 5$ e $b = 3$. Como $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Como a distância entre o centro e a pede é de $5m$, e queremos encontrar a altura ao ponto de $2m$ da parede. Calculando o valor de x tem-se

$$x = 5 - 2 \Rightarrow x = 3.$$

Substituindo o valor de x na equação da elipse tem-se

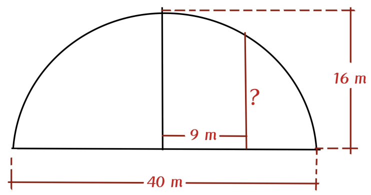
$$\begin{aligned}
\frac{3^2}{25}+\frac{y^2}{9} &= 1\\
\frac{9}{25}+\frac{y^2}{9} &= 1\\
81+25y^2 &= 225\\
25y^2 &= 144\\
y &= \sqrt{\frac{144}{25}}\\
y &= \pm 2,4.
\end{aligned}$$

Como a distância nunca é negativa, temos:

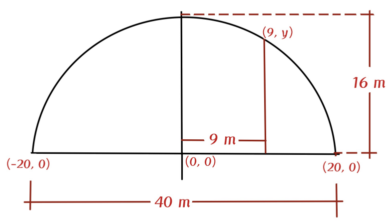
$$\begin{aligned}
h &= 6+2,4\\
h &= 8,4m.
\end{aligned}$$

Concluímos que a altura do teto a $2m$ de cada parede é $8,4m$. ■

Problema 4.7 (LEITHOLD, 1994, p. 593) *O arco de uma ponte tem a forma de uma semi-elipse com um vão horizontal de* $40m$ *e com* $16m$ *de altura no centro. Qual a altura do arco a* $9m$ *á esquerda ou à direita do centro?*



Solução:: Para a compreensão da resolução da questão, observe a figura abaixo.



O primeiro passo será encontrar as medidas dos semi-eixos, note que amplitude horizontal mede $40m$. Com isso temos

$$\begin{aligned}
2a &= 40 \Rightarrow a=\frac{40}{2}\Rightarrow a=20.\\
b &= 16.
\end{aligned}$$

Assim sendo $a = 20$ e $b = 16$ são os semi-eixos da elipse. A equação da elipse é dada da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Substituindo os valores de a e b na equação da elipse temos

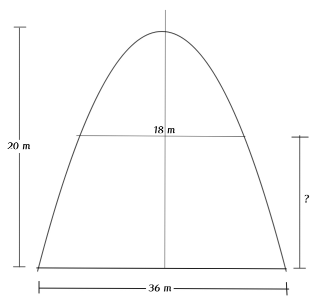
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{20^2} + \frac{y^2}{16^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{256} &= 1. \end{aligned}$$

Como mostra a figura acima temos o ponto com coordenadas $(9, y)$, substituindo as coordenadas desse ponto na expressão da elipse encontrada para encontrar o valor de y obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{81}{400} + \frac{y^2}{256} &= 1 \\ \frac{y^2}{256} &= \frac{400-81}{400} \\ \frac{y^2}{256} &= \frac{319}{400} \\ y &= \frac{4}{5}\sqrt{319} \\ y &= 14,288m. \end{aligned}$$

$y = 14,288m$ é a altura procurada. ■

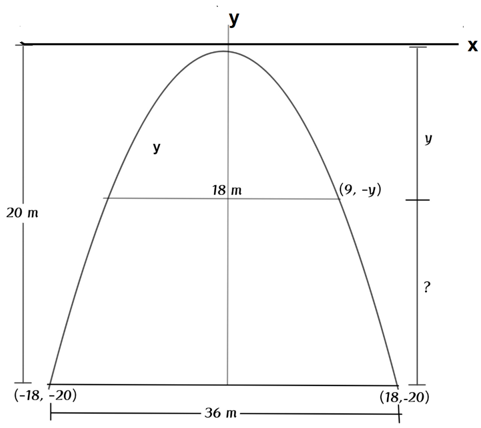
Problema 4.8 (LEITHOLD, 1994, p. 586) *Um arco parabólico tem uma altura de* $20m$ *e uma largura de* $36m$ *na base. Se o vértice da parábola estiver no topo do arco, a que altura acima da base ele terá* $18m$ *de largura?*



Solução: Para a resolução desta questão o primeiro passo é encontrar a equação dessa parábola. O vértice da parábola está na origem. Como a parábola tem como o eixo OY

como sendo o eixo central, a equação será da forma.

$$x^2 = 4py$$



Calculando o valor de p tomando os pontos já conhecidos temos.

$$\begin{aligned} 18^2 &= 4p(-20) \Rightarrow 324 = -80p \\ p &= -4,05. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de p na equação da parábola tem-se:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4(-4,05)y \\ x^2 &= -16,2y. \end{aligned}$$

O passo a seguir é encontrar a altura que a questão nos pede. Note que as coordenadas do ponto são $(9, -y)$ sendo que a distância que nos foi dado no problema.

Substituindo na equação da parábola temos:

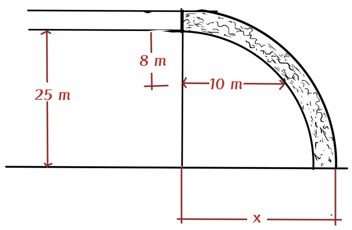
$$\begin{aligned} 9^2 &= -16,2(-y). \Rightarrow 81 = 16,2y \\ y &= \frac{81}{16,2} \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Neste caso, a altura que procuramos será:

$$h = 20 - 5 = 15m.$$

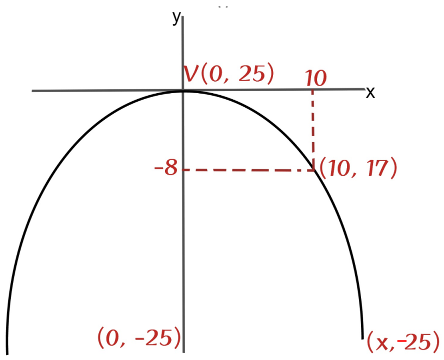
Podemos concluir que a $15m$ da base a altura será $18m$. ■

Problema 4.9 (LEITHOLD, 1988, p. 585) *Suponha que a água escoada por um cano* *horizontal a 25m acima do chão descreve uma parábola cujo vértice está na extremidade do cano. Se num ponto 8m abaixo da linha do cano o fluxo de água curvou-se 10m para fora de uma linha vertical que passa pela extremidade do cano, a que distância dessa linha vertical a água atingirá o solo?*



Solução: Note que a água que sai do cano ela não sobe, assim a concavidade da nossa parábola estará voltado para baixo. Assim temos $(x-h)^2 = -4p(y-k)$.

Como o cano está no vértice da parábola a $25m$ de altura, o vértice terá os pontos $V = (0, 25)$ como mostra a figura abaixo.



Neste caso temos $h = 0$ e $k = 25$. Substituindo tem-se:

$$\begin{aligned} (x-0)^2 &= -4p(y-25) \\ x^2 &= -4p(y-25). \end{aligned}$$

Observe que a questão nos pede x em que $y = 0$. Neste caso temos $x = 10$ e $y = 25 - 8 = 17$, o ponto será $A(10, 17)$.

$$\begin{aligned} 10^2 &= -4p(17-25) \\ 100 &= -4p(-8) \\ 100 &= 32p \\ p &= \frac{25}{8}. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de p na equação da parábola temos

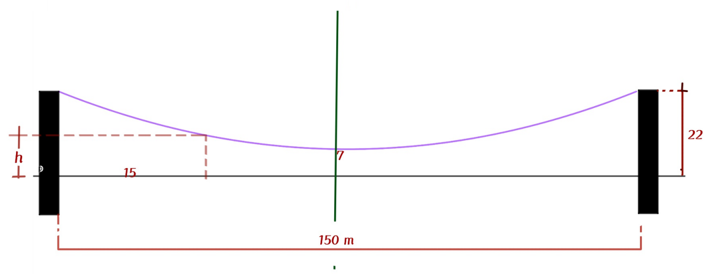
$$x^2 = -4(\frac{25}{8})(y-25)$$

Como desejamos saber o valor de x quando $y-0$, substituindo tem-se

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{25}{2}(0-25) \\ x^2 &= \frac{625}{2} \\ x &= \sqrt{\frac{625}{2}} \Rightarrow x = 17,67m. \end{aligned}$$

Logo, a água atingirá o solo a $17,67m$ da linha vertical. ■

Problema 4.10 (LEITHOLD, 1988, p. 585) *O cabo de uma ponte suspensa tem a forma de uma parábola quando a carga é unidoramente distribuída na horizontal. A distância entre duas colunas é $150m$, os pontos de suporte no cabo das colunas estão $22m$ acima da pista e o ponto mais baixo do cabo está $7m$ acima da pista. Ache a distancia vertical do cabo a um ponto na pista a $15m$ do pé de uma coluna.*



Solução: Observe que cada coluna está a $75m$ do eixo OY e os pontos de sustentação a $22m$ do eixo OX. Neste caso o vértice será $V = (0,7)$.

Como

$$(x-h)^2 = 4p(y-k). \tag{22}$$

A concavidade estará voltada para cima. h e k são as coordenadas do vértice. Ou seja, $h = 0$ e $k = 7$. Substituindo os valores de h e k na equação (22) obtemos:

$$\begin{aligned}(x-h)^2 &= 4p(y-k)\\ (x-0)^2 &= 4p(y-7)\\ x^2 &= 4p(y-7).\end{aligned}$$

O passo a seguir é encontrar o valor de p, como o ponto onde a corda está fixo tem as coordenadas $(75, 22)$, então temos

$$\begin{aligned}(75)^2 &= 4p(22-7)\\ 5625 &= 4p(15)\\ 5625 &= 60p\\ p &= \frac{5625}{60}\\ p &= \frac{375}{4}.\end{aligned}$$

Substituindo o valor de p em (22), temos

$$\begin{aligned}(x-h)^2 &= 4p(y-k)\\ x^2 &= 4\frac{375}{4}(y-7)\\ x^2 &= 375(y-7).\end{aligned}$$

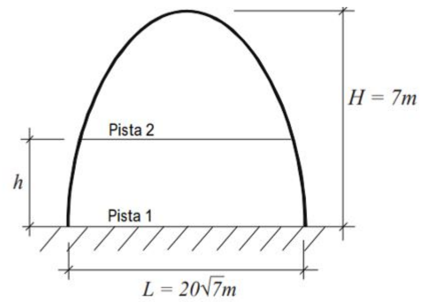
Note que a questão nos pede para encontrar a distância vertical do cabo a uma ponto na pista a $15m$ do pé de uma coluna.

Como $A(-60, ?)$, substituindo temos

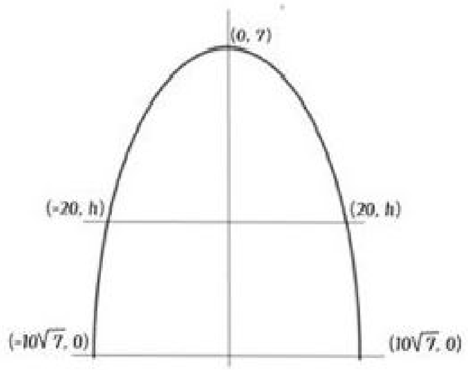
$$\begin{aligned}(-60)^2 &= 375y - 2625\\ 3600 &= 375y - 2625\\ 375y &= 6225\\ y &= \frac{6225}{375}\\ y &= 16,6.\end{aligned}$$

Concluímos que a distancia vertical do cabo a um ponto na pista a $15m$ do pé de uma coluna é $16,6m$. ■

Problema 4.11 (REIS e PINTO, 2010, P. 42) *A figura abaixo mostra um túnel hipotético de duas pistas com uma seção transversal que é uma parábola. A altura H do túnel é de $7m$ e a sua largura na base é de $L = 20\sqrt{7}m$. Pretende-se saber a que altura h deverá estar a pista 2 de modo que ela tenha $l = 40m$ de largura.*



Solução: Para a solução dessa questão vamos considerar que o eixo esteja na base do túnel.



Primeiro passo é encontrar uma equação da parábola, como consideramos que o vértice está na altura máxima do túnel, teremos os seguintes pontos $V(0,7)$, $A(10\sqrt{7},0)$, $B(20,h)$, $C(-20,h)$ e $D(-10\sqrt{7},0)$ como mostra a figura acima. Neste caso a equação da parábola será da forma:

$$x^2 = 4p(y-7).$$

Calculando o valor de p a partir da equação da parábola tem-se

$$\begin{aligned}(10\sqrt{7})^2 &= 4p(0-7)\\ 100.7 &= 4p(-7)\\ 700 &= -28p\\ p &= -25.\end{aligned}$$

O passo a seguir é substituir o valor de p na equação da parábola. Substituindo temos

$$x^2 = 4(-25)(y-7).$$

Multiplicando temos

$$x^2 = -100y + 700. \tag{23}$$

Agora vamos substituir o ponto $(20, h)$ na equação (23) temos

$$\begin{aligned} (20)^2 &= -100h + 700 \\ 400 &= -100h + 700 \\ 100h &= 300 \\ h &= 3m. \end{aligned}$$

Concluímos que a altura que procuramos é $h = 3m$. ■

5 CONCLUSÃO

Um dos principais desafios que existe no ensino da Matemática é relacionar a teoria com a prática. "As cônicas"é um dos ramos da Matemática que possui inúmeras aplicações e que estuda várias situações existentes em nosso cotidiano, como por exemplo as elipses são observadas e facilmente encontradas em várias situações do dia a dia.

Ao apresentar o contexto histórico das cônicas, procuramos trazer ao leitor a importância que tais curvas têm no cotidiano. Para a melhor compreensão, os assuntos abordado neste trabalho foram feitos de forma a facilitar a compreensão do conteúdo de um aluno do ensino médio ou de nível superior.

É notório perceber ao longo deste trabalho a importância da geometria na nossa vida cotidiana, principalmente as cônicas que são curvas que estão presentes em diversas aplicações, podemos encontrar desde a construção civil, saúde, astronomia, física, e nos sistemas de navegação. Além disso, é importante destacar que as suas aplicações tem potencial para serem ensinadas em sala de aula, que ajuda a despertar o interesse do aluno. Ao longo de todo trabalho, apresentamos as principais aplicações das cônicas.

Ao realizar este trabalho, foi possível perceber que quando o conteúdo é ensinado e explicado a sua aplicação, enriquece o ambiente de aprendizagem e faz com que o aluno olhe a Matemática de maneira diferente. Muitas pessoas acreditam que a Matemática não tem aplicação no nosso dia a dia, esse pensamento parte muitas vezes desde o ensino fundamental, ensino médio e muitos levam até ao ensino superior.

Por fim, foi uma satisfação elaborar este trabalho e contribuir com mais uma fonte de pesquisa sobre o conceito de cônicas. Esperamos que esse trabalho possa contribuir na formação de professores de Matemática e que traga uma visão melhor aos leitores sobre o ensino da Matemática e que esse trabalho sirva como ferramenta para quem futuramente for estudar sobre as aplicações das cônicas. Indicamos a leitura deste trabalho por parte dos leitores principalmente dos professores de Matemática do ensino médio com a finalidade de compreenderem sobre as cônicas e suas aplicações.

REFERÊNCIAS

DOLCE, Osvaldo.;POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática 9 Elementar**: Geometria Plana. 3. ed. São Paulo, 2005.

DOS ANJOS, Talita Alves. **Leis do Movimento Planetário.** Desponivel em: https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/leis-movimento-planetario. Acesso em: 28 de fev.2023.

FRENSEL, Katia.; DELGADO, Jorge. **Geometria Analítica.** Maranhão: UFMA, 2011.

GONÇALVES, Vladmir Sicca. **Curvas, Superficie e Arquitetura.** Universidade Estadual de Campinas. 2012. Disponivel em: https://curvasearquitetura.files.wordpress.com/2012/07/coliseu. Acesso em: 10 nov.2022.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Analítica. 6. ed. São Paulo, 2013.

KINDLE, Joseph H. **Teoria e Problema de Geometria Analítica**. 6. ed. São Paulo, 1970.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** volume-1. 3. ed. São Paulo, 1994..

MACHADO, Antonio. Dos Santos. **Álgebra Linear e Geometria Analítica.** São Paulo, 1980.

MACHADO, M. T, Gomes. **Parábolas – As curvas preciosas.** Disponivel em: http://www. diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/673-4.pdf. Acesso em: 12 dez. 2022.

PINTO, J. M. Andrade.; REIS, F.H. Espindola . **As seções cônicas na engenharia civil.** Belo Horizonte, 2010.

PORTAL DO ASTRONOMO. **O Telescópio Ideal.** 2016. Disponivel em: http://vintage.portaldoastronomo.org/noticias.php. Acesso em: 12 dez.2022.

SIMMONS, George. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. volume-2. São Paulo, 1988.

STEWART, James. **Cálculo**, volume 2– Tradução da 7. ed. norte-americana Versão métrica internacional, 2014.

STEINBRUCH, Alfredo. **Geometria Analítica**. Editora Makron Books, 1987.

TONIOLO, Luciano Santos. **Cônicas em modelos físicos**. Dissertação de mestrado do programa de mestrado profissional de mestrado em rede nacional (PROFMAT) USP-São Carlos, julho de 2018.

VENTURI, Jacir J. **Cônicas e Quádricas**. 5. ed. Curitiba, 2003.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.