UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JULIO GOMES

CLASSIFICAÇÃO LIPSCHITZ DE FUNÇÕES EM UM TRIÂNGULO DE HÖLDER

REDENÇÃO
2023

JULIO GOMES

CLASSIFICAÇÃO LIPSCHITZ DE FUNÇÕES EM UM TRIÂNGULO DE HÖLDER

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Gomes, Julio.

G633c

Classificação Lipschitz de funções em um triângulo de Hölder / Julio Gomes. - Redenção, 2023.
43f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva.

1. Triângulo de Hölder. 2. Função Altura. 3. Equivalência Lipschitz Semialgé- brica. I. Título

CE/UF/Dsibiuni CDD 510.7

JULIO GOMES

CLASSIFICAÇÃO LIPSCHITZ DE FUNÇÕES EM UM TRIÂNGULO HÖLDER

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 11/12/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Profª Dra. Tatiana Skoraia
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Me. Paulo Ricardo Gonçalves Pereira
Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus pelo dom da vida e por tudo aquilo que encontrei no meu caminho. A minha família por cuidar de mim desde o meu primeiro dia na Terra até a data presente.

BICT/FUNCAP (IT), pela oportunidade que me deram de entrar na bolsa de Iniciação Científica e por financiar a bolsa, pelo conhecimento básico de Singularidades, não tenho palavras suficientes para agradecer, pois, a bolsa ajudou bastante nos meus estudos. Agradeço PIBIC-Af/Unilab pela oportunidade que me deram durante a bolsa de Iniciação Científica e por financiar a bolsa até o final do projeto. Agradeço a UNILAB, pela oportunidade que me deu ao longo do meu percurso, pelo auxílio e da nova face da carreira que me fez adquirir.

Ao Prof. Dr.Joserlan Perote da Silva, pela excelente orientação que tivemos em dois projetos de I.C. e aqui no TCC, agradeço no fundo do meu coração. Aprendi muita coisa com ele e admiro por ter um conhecimento tão elevado no mundo da matemática, não tenho palavras suficientes para caraterizar-lhe, mas, só sei dizer muito obrigado por estar no meu caminho. Nunca esquecerei dele, não só pela oportunidade que ele deu na bolsa de I.C. sem conhecer o meu nome, mas pelos conselhos que ele me deu para estudar mais se eu não quero errar mais, este conselho ajudou bastante e ajudará porque nunca esquecerei deste conselho.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof.ª Dra. Tatiana Skoraia e Prof. Me. Paulo Ricardo Gonçalves Pereira pelo tempo, pelas valiosas colaboração e sugestões.

Aos colegas da turma pela partilha e discussão do conteúdo, nunca esquecerei aquilo que aprendi com cada um da nossa turma, pelos conselhos e pela ajuda que recebi de cada um da turma. Só tenho que dizer obrigado Deus por colocar estas pessoas no meu caminho, pois neste caminho consegui ter amigos que nunca vou esquecer.

"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo." GALILEU GALILEI

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos alguns conceitos introdutório em Teoria de Singularidades como por exemplo, relação de equivalência, polinômios quase-homogêneos, noção de equivalência Lipschitz das funções de uma única variável, conjunto algébrico e semialgébrico e símbolo de multiplicidade que são assunto necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Estes assuntos são ferramentas importantes na demonstração do Teorema de classificação que abordamos neste trabalho. O trabalho tem por objetivo demonstrar a relação que existe em dois polinômios β-quase Homogêneos reduzidos ao triângulo de Hölder T_β, com mesmo grau d e os Símbolos de Multiplicidade das funções Alturas correspondentes.

Palavras-chave: Triângulo de Hölder. Função Altura. Equivalência Lipschitz Semialgébrica .

ABSTRACT

In this work we will present some introductory concepts in the Theory of Singularities such as, for example, equivalence relation, quasi-homogeneous polynomials, notion of Lipschitz equivalence of functions of a single variable, algebraic and semi-algebraic set and multiplicity symbol which are necessary subjects for the development of this work. These subjects are important tools in demonstrating the Classification Theorem that we address in this work. The work aims to demonstrate the relationship that exists in two polynomials β-almost Homogeneous reduced to the triangle of Hölder T_{β}, with the same degree d and the Symbols of Multiplicity of the corresponding Height functions.

Keywords: Hölder triangle. Height functions. Semialgebraically Lipschitz equivalent.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, temos como objetivo resolver completamente o problema da classificação Lipschitz semialgébrica de polinômios quase homogêneos em um triângulo de Hölder apresentando um invariante completo chamado símbolos de multiplicidade.

Iniciamos o trabalho apresentando um capítulo com alguns conceitos e resultados preliminares. Começamos revisando o conceito de aplicações suaves, relações de equivalências, em particular $\mathcal{R}$-Equivalência ou Equivalência a direita e a $\mathcal{L}$-Equivalência ou Equivalência a esquerda, a definição de germes de conjutos e germes de aplicações com ênfase em germes de aplicações suaves. Neste segundo capítulo, apresentamos também os conceitos de conjuntos algébricos e suas propriedades, o conceito de conjunto semialgébrico e suas propriedades que são importantes nesse trabalho. Apresentamos também a equivalência Lipschitz das funções polinomiais de uma variável.

Ainda no segundo capítulo, apresentamos a seguinte definição: Dado $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação. Dizemos que f é Lipschitz se existir uma constante $c > 0$, tal que:

$$\parallel f(x) - f(y) \parallel \leq c \cdot \parallel x - y \parallel, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Introduzimos também o conceito de conjunto semialgébrico, o qual busca estudar fortemente os sistemas envolvendo igualdades e desigualdades polinomiais. Este conceito é uma ferramenta muito útil dentro do nosso estudo, mas antes definimos conjunto Algébrico real que é um caminho para conhecer melhor conjunto Semialgébrico real. Dizemos que $X \subset \mathbb{R}^n$ é algébrico se existem polinômios $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, onde $i = 1, ... = k$, tal que $X = \{x \in \mathbb{R}^n | f_1 = ... = f_k = 0\}$. Podemos pegar os conjuntos dos números reais, poderíamos simplesmente dizer que X é algébrico se existe uma função polinomial $X = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 0\}$. A partir deste conjunto podemos falar do conjunto Semialgébrico. Dizemos que um conjunto semialgébrico $X \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto satisfazendo uma combinação booleana de equações ou inequações polinomiais com coeficientes reais. Em outras palavras, os subconjuntos semialgébrico de $\mathbb{R}^n$ forma a menor classe SA_n de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que:

1. Se $p \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$, então $\{x \in \mathbb{R}^n; p(x) = 0\} \in SA_n$ e $\{x \in \mathbb{R}^n; p(x) > 0\} \in SA_n$.
2. Se $A \in SA_n$ e $B \in SA_n$ então $A \cup B, A \cap B$ e $\mathbb{R}^n$ A estão dentro SA_n

Na base destes itens e proposições nos leva para o triângulo de Hölder.

No terceiro capítulo, abordamos alguns resultados auxiliares e essenciais para o entendimento do resultado principal. Dividimos esse terceiro capítulo em três seções. Na primeira seção, definimos polinômios homogêneos e destacamos algumas de suas propriedades. Definimos também polinômios quase homogêneos e apresentamos algumas de suas propriedades. Na segunda seção, apresentamos o triângulo de Hölder que é um objeto indispensável para este trabalho. Na terceira seção, definimos a função altura associado a um polinômio quase homogêneo no triângulo de Hölder. A função altura é fundamental para este trabalho.

No quarto capítulo, enunciaremos e provaremos alguns proposições bases para nosso teorema de classificação. Também nesse capítulo definimos os símbolos de multiplicidades e por fim demonstraremos o teorema Principal. No último capítulo, faremos as considerações finais.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, abordaremos alguns tópicos básicos da teoria de singularidades, os quais são pré-requisitos a serem utilizados para uma melhor compreensão do nosso resultado principal.

2.1 APLICAÇÕES SUAVES

Nesta seção apresentaremos as noções de homeomorfismo e difeomorfismo que serão importantes para as próximas seções e também para o próximo capítulo desse trabalho. Para o desenvolvimento dessa seção tomamos como norte principalmente as obras de Lima (2014), Guidorizzi (2001), Apostol (1993), Saia (2011) e Silva (2022).

Definição 2.1. *Um homeomorfismo do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ sobre um conjunto $Y \subset \mathbb{R}^p$ é uma bijeção contínua $: X \to Y$ cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$ também é contínua.*

Exemplo 2.1. A aplicação $f : [0, 2\pi) \to S^1$, onde $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, é uma bijeção contínua mas não é um homeomorfismo. Sua inversa f^{-1} é descontínua no ponto $a = (1, 0) = f(0) \in S^1$. Com efeito, se tomarmos, para cada $k \in \mathbb{N}, t_k = (1 - 1/k) \cdot 2\pi$ e $z_k = (\cos t_k, \operatorname{sen} t_k)$, teremos $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = a$ mas $\lim\limits_{k\to\infty} f^{-1}(z_k) = \lim\limits_{k\to\infty} t_k = 2\pi$, logo não vale $\lim\limits_{k\to\infty} f^{-1}(z_k) = f^{-1}(a) = 0$.

Exemplo 2.2. A bola aberta $B = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$ é homeomorfa ao espaço $\mathbb{R}^n$. De fato, as aplicações $f : \mathbb{R}^n \to B$ e $g : B \to \mathbb{R}^n$, definidas por $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ e $g(y) = \frac{Y}{1-|y|}$ são contínuas e, como se verifica sem dificuldade, vale $g(f(x)) = x, f(g(y)) = y$, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in B$, logo $g = f^{-1}$.

Dessa forma apresentaremos a seguinte definição:

Definição 2.2. *Seja, $f : U \to \mathbb{R}$ uma função real, definida em um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dado o ponto $a \in U$, a i-ésima derivada parcial de f no ponto a (onde $1 \leq i \leq n$) é o seguinte limite:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t},$$

quando esse limite acima existe. Em alguns casos, também se usa a seguinte notação $\partial_i f(a)$.

Observação 2.1. Quando estamos trabalhando nos espaços de dimensões menores adotamos as letras x, y e z para simbolizarmos as direções e fazemos uso da notação com o índice i para os casos das funções de muitas variavéis, a fim de facilitar a compreensão e por conveniência já que a quantidade de letras para ser usadas como símbolo são limitadas.

Na situação em que $U \subset \mathbb{R}^2$, uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é o que se chama uma "função real de duas variáveis reais". Escrevemos $f(x, y)$ para designar o seu valor no ponto

$z = (x, y)$. Assim, sendo as derivadas parciais de f em um ponto qualquer $c = (a, b) \in U$ podem ser representadas por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(c)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(c)$, em vez de $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(c)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(c)$. Que são os seguintes limites:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(c) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a, b + t) - f(a, b)}{t}.$$

De modo análogo, podemos estender para o caso em que $U \subset \mathbb{R}^3$, uma função $f : U \to \mathbb{R}$ é uma "função real de três variáveis reais". Seu valor em um ponto qualquer $p = (x, y, z)$ se escreve $f(x, y, z)$ e suas derivadas parciais no ponto $q = (a, b, c)$ podem ser denotadas como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(q)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(q)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}(q)$, e assim temos os limites abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(q) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t, b, c) - f(a, b, c)}{t}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(q) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a, b + t, c) - f(a, b, c)}{t} \text{ e} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(q) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a, b, c + t) - f(a, b, c)}{t}.
\end{aligned}$$

Observação 2.2. Além da notação acima, podemos denotar as derivadas parciais com relação à x, y e z da função f da seguinte maneira:

$$f_x(x, y, z),\ f_y(x, y, z) \text{ e } f_z(x, y, z),$$

respectivamente

Observação 2.3. A derivada parcial em relação à x da função f é, de grosso modo, a derivada da função f em relação à variável x considerando y e z como duas constantes. Do mesmo modo, a derivada parcial em relação a variável y da função f é, a derivada da função f em relação à variável y considerando x e z como duas constantes. Assim como, a derivada parcial em relação a variável z da função f é, a derivada da função f em relação à variável z considerando x e y como duas constantes.

Exemplo 2.3. Seja $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Se $z = (x, y)$ não é a origem, temos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x^3 - x y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Na origem, vale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

A noção de função diferenciável, que apresentaremos agora, é devida a Fréchet e Stolz. Ela constitui, para funções de n variáveis, a extensão adequada do conceito de função derivável de uma só variável.

Definição 2.3. *Sejam $f\colon U \to \mathbb{R}$, com $U \subset \mathbb{R}^n$, e $a \in U$. Diremos que a função f é diferenciável no ponto a quando existirem constantes $A_1, \ldots, A_n$ tais que, para todo vetor $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, com $a + v \in U$, se tenha:*

$$f(a+v) = f(a) + A_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + A_n \cdot \alpha_n + r(v), \ \textit{onde} \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Definição 2.4. *Quando uma função f é diferenciável em todos os pontos de U, dizemos simplesmente que essa função f é diferenciável.*

Se f é *diferenciável* no ponto a então, tomando $v = te_i$, temos $\alpha_j = 0$ se $j \neq i$ e $\alpha_i = t$. Logo, temos:

$$\frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = A_i + \frac{r(te_i)}{t} = A_i \pm \frac{r(te_i)}{|te_i|}.$$

Fazendo $t \to 0$, vemos que existe cada derivada parcial de f no ponto a, sendo $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = A_i$. A definição abaixo é, portanto, equivalente à anterior.

Definição 2.5. *Diremos que a função $f\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $a \in U$ quando existirem as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)$ e, além disso, para todo vetor $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que $a + v \in U$, tivermos:*

$$f(a+v) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot \alpha_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot \alpha_n + r(v),$$

onde $\displaystyle\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$

Na igualdade acima, o "resto" $r(v)$ é definido como sendo igual a $f(a+v) - f(a) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i$. Esta definição pode ser dada para qualquer função que possua derivadas parciais. A essência da definição de diferenciabilidade é que, tomando $r(v)$ desta maneira, tem-se $\displaystyle\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$. Esta é a condição crucial, que deve ser verificada direta ou indiretamente sempre que quisermos provar que uma função é diferenciável.

De $\displaystyle\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$, concluimos que $\displaystyle\lim_{v \to 0} r(v) = 0$ pois $r(v) = \dfrac{r(v)}{|v|}|v|$. Daí resulta que toda função diferenciável em um ponto é contínua nesse ponto. Com efeito, para $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, temos:

$$\lim_{v \to 0}[f(a+v) - f(a)] = \lim_{v \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\alpha_i + r(v) \right] = 0.$$

A condição $\lim_{v\to 0}\dfrac{r(v)}{|v|}=0$ significa, entretanto, mais do que $r(v)\to 0$, ela quer dizer que $r(v)$ tende a zero mais rapidamente do que v, isto é, para valores de v suficientemente próximos de zero, a norma de $r(v)$ é uma fração arbitrariamente pequena da norma de v. Às vezes, isto se exprime dizendo-se que $r(v)$ é um infinitésimo de ordem superior a v. Assim, f é diferenciável no ponto a quando o acréscimo $f(a+v)-f(a)$ é igual a uma função linear de v, $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot\alpha_i$, mais um resto infinitamente pequeno em relação a v.

Observe que a validade da afirmação $\lim_{v\to 0}\dfrac{r(v)}{|v|}=0$ não depende da norma adotada em $\mathbb{R}^n$.

Em certas ocasiões, é preferível usar, em vez de $r(v)$, a função $\rho=\rho(v)$, definida para os valores de v tais que $a+v\in U$, do seguinte modo: $\rho(v)=\dfrac{r(v)}{|v|}$ se $v\neq 0$ e $\rho(0)=0$. Então, a função f é diferenciável no ponto $a\in U$ se, e somente se, possui derivadas parciais nesse ponto e, para todo $v=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tal que $a+v\in U$, vale:

$$f(a+v)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot\alpha_i+\rho(v)\cdot|v|,\ \text{onde}\ \lim_{v\to 0}\rho(v)=0.$$

Assim, f é diferenciável no ponto a se, e somente se, a função real $\rho=\rho(v)$, definida pela igualdade acima (se $v\neq 0$) e por $\rho(0)=0$, é contínua no ponto $v=0$.

Para funções $f\colon I\to\mathbb{R}$, definidas num intervalo aberto $I\subset\mathbb{R}$, diferenciabilidade é o mesmo que derivabilidade, pois de $f(a+t)=f(a)+A\cdot t+\rho|t|$ se tira:

$$\rho=\pm\left|\frac{f(a+t)-f(a)}{t}-A\right|,$$

logo $\lim_{t\to 0}\rho=0$ se, e somente se, $A=f'(a)$.

Exemplo 2.4. Seja $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2y$

Precisamos provar que f é diferenciável em todo $(x,y)\in\mathbb{R}^n=D_f$. A função f admite derivadas parciais em todo $(x,y)\in\mathbb{R}^n$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy\ \text{e}\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2.$$

Por outro lado, para todo (x,y) em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}E(h,k) &= f(x+h,y+k)-f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k\\ &= (x+h)^2(y+k)-x^2y-2xyh-x^2k\\ &= 2xhk+h^2y+h^2k.\end{aligned}$$

Como, para $(h,k) \neq (0,0)$ $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$ resulta

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\| (h,k) \|} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2xhk + h^2y + h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
&= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[2xh\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} + hy\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} + hk\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, f é diferenciável em todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ou seja, f é uma função diferenciável.

Definição 2.6. *Uma função real $f\colon U \to \mathbb{R}$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, diz-se de classe C^1 quando existem, em cada ponto $x \in U$, as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ e as n funções $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \to \mathbb{R}$, assim definidas, são contínuas.*

De forma geral, para k inteiro maior que 0, temos

Definição 2.7. *Uma função $f\colon U \to \mathbb{R}$ é de classe C^k quando ela possuir derivadas parciais em todos os pontos de U e as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\colon U \to \mathbb{R}$ forem de classe C^{k-1}.*

Usaremos a notação $f \in C^k$. Diremos que uma função $f\colon U \to \mathbb{R}$ é de *classe* C^0 quando ela for contínua. Escreveremos também $f \in C^\infty$, e diremos que f é de *classe* C^∞, quando $f \in C^k$ para todo $k \geq 0$. Evidentemente $C^0 \supset C^1 \supset \cdots \supset C^k \supset \cdots \supset C^\infty$, sendo todas estas inclusões estritas.

Teorema 2.1. *Se uma função $f\colon U \to \mathbb{R}$ possui derivadas parciais em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e cada uma delas é contínua no ponto c, então a função f é diferenciável no ponto c.*

Demonstração: Por simplicidade, consideraremos o caso $n = 2$. A situação geral se trata de modo análogo, apenas com notação mais complicada. Fixemos $c = (a,b) \in U$ e tomemos $v = (h,k)$ tal que $c + v \in U$.

Seja,

$$r(v) = r(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}h - \frac{\partial f}{\partial y}k,$$

onde as derivadas são calculadas no ponto $c = (a,b)$. Podemos escrever:

$$r(v) = f(a+h, b+k) - f(a, b+k) + f(a, b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}h - \frac{\partial f}{\partial y}k.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para funções reais de uma variável real, existem $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ tais que:

$$r(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b+k) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b + \theta_2 k) \cdot k - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot k.$$

Logo,

$$\frac{r(v)}{|v|} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1\cdot h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right]\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} +$$
$$+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(a, b+\theta_2\cdot k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right]\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Ora, $\dfrac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$ e $\dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ estão, em valor absoluto, compreendidos entre 0 e 1. Com isso a continuidade das derivadas parciais nos dá então $\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{r(v)}{|v|} = 0$, logo f é diferenciável. ■

Corolário 2.1. *Toda função de classe C^1 é diferenciável.*

Demonstração: Segue imediatamente pelo Teorema 2.1. ■

Exemplo 2.5. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Se $z=(x,y)$ não é a origem, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Vamos mostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todo $(x,y)\neq(0,0)$, pois são quocientes de contínuas. Na origem, temos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[2x\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} + 4x\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$. De modo análogo, temos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$. Da continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em $\mathbb{R}^2$, segue que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.8. *Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^p$, definida no aberto $U\subset\mathbb{R}^n$, diz-se diferenciável no ponto $a\in U$ quando cada uma das suas funções coordenada $f_1,\ldots,f_p : U\to\mathbb{R}$ é diferenciável nesse ponto.*

Neste caso temos então, para todo $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ tal que $a + v \in U$ e para cada $i = 1, \ldots, p$, tem-se $f_i(a+v) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \cdot \alpha_i + r_i(v)$, com $\lim_{v \to 0} \frac{r_i(v)}{|v|} = 0$.

Definição 2.9. *A matriz* $Jf(a) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right] \in M(p \times n)$ *chama-se a matriz jacobiana de* f *no ponto* a.

Definição 2.10. *A transformação linear* $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *cuja matriz em relação às bases canônicas de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^p$ *é* $Jf(a)$, *chama-se a derivada da aplicação* f *no ponto* a.

Exemplo 2.6. Seja $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 + 2xy, -y + 5xy^2)$.
A matriz jacobiana de f no ponto (x, y) é

$$det Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+2y & 2x \\ 5y^2 & -1+10xy \end{pmatrix}.$$

Observação 2.4. O determinante da matriz Jacobiana da aplicação f é denominado determinante Jacobiano da aplicação f.

Observação 2.5. O determinante Jacobiano de uma aplicação polinomial é um polinômio. Quando a aplicação considerada f for de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ o determinante Jacobiano $det(JF)$ será um polinômio de uma variável real.Quando $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o determinante Jacobiano $det(JF)$ é um polinômio de duas variáveis reais.

Exemplo 2.7. Na aplicação f do exemplo 2.6, temos:

$$\begin{aligned} det Jf = \begin{pmatrix} 2x+2y & 2x \\ 5y^2 & -1+10xy \end{pmatrix} &= (2x+2y)(-1+10xy) - 5y^2 \cdot 2x \\ &= 20x^2y + 10xy^2 - 2x - 2y. \end{aligned}$$

Definição 2.11. *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^p$ *abertos. Uma aplicação* $f : U \to V$ *chama-se um difeomorfismo entre* U *e* V *quando é uma bijeção diferenciável, cuja inversa* $g = f^{-1} : V \to U$ *também é diferenciável.*

Definição 2.12. *Uma aplicação diferenciável* $f : U \to \mathbb{R}^n$, *definida no aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$, *chama-se um difeomorfisrno local quando, para cada* $x \in U$ *existe uma bola aberta* $B = B(x, \delta) \subset U$ *tal que* f *aplica* B *difeomorficamente sobre um aberto* V *contendo* $f(x)$. *Segue-se daí que se* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *e é um difeomorfismo local então* $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é um isomorfismo, para todo* $x \in U$.

Como no caso de funções, aplicações $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k são definidas por indução: diz-se que $f \in C^k$ quando f é diferenciável e sua derivada $f^{-1} : U \to \mathbb{R}^{pn}$ é de classe C^{k-1}. Se $f \in C^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ diz-se que f é de classe $C^\infty (f \in C^\infty)$. Então $f^{-1} \in C^\infty$ também.

Uma propriedade relevante das aplicações diferenciáveis é dada pela:

Proposição 2.1. ***(Regra da Cadeia.)*** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^p$ abertos, em que $f = (f_1, \ldots, f_p) \colon U \to \mathbb{R}^p$ tal que $f(U) \subset V$ e cada função coordenada $f_k \colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $a \in U$. Seja ainda $g \colon V \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $b = f(a)$. Então a função composta $g \circ f \colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e suas derivadas parciais são,*

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

Demonstração: Seja U_0 o conjunto dos vetores $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $a+v \in U$. Para $v \in U_0$ e $k = 1, \ldots, p$, temos:

$$f_k(a+v) = f_k(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cdot \alpha_i + \rho_k \cdot |v|, \tag{1}$$

onde cada $\rho_k = \rho_k(v)$ é uma função definida em U_0, contínua no ponto 0, que se anula quando $v = 0$. Acima, e no que se segue, as derivadas $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y_k}$ são consideradas nos pontos a e b respectivamente. Consideremos a aplicação $w = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \colon U_0 \to \mathbb{R}^p$, contínua no ponto 0, cujas funções coordenada são definidas por:

$$\beta_k(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cdot \alpha_i + \rho_k \cdot |v|. \tag{2}$$

Adotando, por exemplo, a norma da soma, temos $\dfrac{|\alpha_i|}{|v|} \leq 1$ se $v \neq 0$, logo cada $\dfrac{|\beta_k|}{|v|}$, e portanto a função $\dfrac{|w|}{|v|}$, é limitada numa vizinhança do ponto $v = 0$. Podemos afirmar, em virtude de (1), (2) e da diferenciabilidade de g no ponto $b = f(a)$, que, para todo $v \in U_0$, vale:

$$(g \circ f)(a+v) = g(b+w) = g(b) + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \beta_k + \sigma \cdot |w|,$$

onde $\sigma = \sigma(v)$ é uma função real contínua no ponto 0, que se anula no ponto $v = 0$ pois w também se anula nesse ponto. Usando a definição de β_k, obtemos,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(a+v) &= (g \circ f)(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cdot \alpha_i + \rho_k |v| \right] + \sigma \cdot |w| \\
&= (g \circ f)(a) + \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \alpha_i + R,
\end{aligned}$$

onde $A_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ e $R = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \rho_k \cdot |v| + \sigma |w|$.

Daí,

$$\frac{R}{|v|} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k} \rho_k + \sigma \cdot \frac{|w|}{|v|}.$$

Quando v tende a zero, sabemos que cada função ρ_k tende a zero, que o quociente $\frac{|w|}{|v|}$ é limitado e que $\lim_{v \to 0} \sigma = 0$. Segue-se que $\lim_{v \to 0} \frac{R}{|v|} = 0$. Isto mostra que $g \circ f$ é diferenciável no ponto a e suas derivadas parciais são os números A_i. ■

Observação 2.6. A notação clássica do Cálculo Diferencial, às vezes imprecisa porém bastante sugestiva, além de compatível com a prática então universal de enfatizar *grandezas* ("y é uma função de x") em vez de *aplicações* ("f leva x em y"), seria a seguinte, para a Regra da Cadeia: os pontos de U seriam escritos como "x" e os de V como "y"; as funções f_k seriam escritas como $y_k = y_k(x)$. A derivada $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}$ seria a "derivada de g em relação à variável x_i", indicada com $\frac{\partial g}{\partial x_i}$. A Regra da Cadeia seria então:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}.$$

Corolário 2.2. *Se $f : U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto b e se $\lambda \colon (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \to U \subset \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a, com $\lambda(a) = b$ e $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_p(t))$, então a função composta $f \circ \lambda \colon (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a, e tem-se,*

$$(f \circ \lambda)'(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) \cdot \lambda_i'(a).$$

Se escrevermos $\lambda(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$ então:

$$\lambda'(t) = \left(\frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_p}{dt} \right).$$

Indicando com $\frac{df}{dt}$ a derivada da função composta, $f \circ \lambda \colon (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ dada por $f(\lambda(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_p(t))$, a Regra da Cadeia assume a forma clássica:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}.$$

Corolário 2.3. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto a, com $f(U) \subset I$, $g\colon I \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $b = f(a)$. Então $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e, para cada $i = 1, \ldots, n$ vale:*

$$\frac{\partial(g \circ f)}{dx_i}(a) = g'(b) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Demonstração: Decorre da Regra da Cadeia que, se $f\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $a \in U$, ao calcularmos a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$, não é necessário tomar $\lambda(t) = a + tv$. Em vez de nos restringirmos a um caminho retilíneo, podemos considerar *qualquer* caminho $\lambda\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, *diferenciável no ponto* a, com $\lambda(0) = a$ e $\lambda'(0) = v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e teremos ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (f \circ \lambda)'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\lambda(t)) - f(a)}{t}.$$

Com efeito, pela Regra da Cadeia,

$$(f \circ \lambda)'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \lambda_i'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

■

Para concluir, registremos um importante corolário do Teorema 2.1 (e da Regra da Cadeia), segundo o qual $g \circ f \in C^k$ desde que $g \in C^k$ e cada função coordenada de f também seja de classe C^k.

Corolário 2.4. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^p$ abertos, $f = (f_1, \ldots, f_p)\colon U \to \mathbb{R}^p$ tal que $f(U) \subset V$ e cada função coordenada $f_j\colon U \to \mathbb{R}$ é de classe C^k. Seja ainda $g\colon V \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k. Então a função composta $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}$ é de classe C^k.*

Demonstração: Com efeito, pelo Corolário 2.1, g e cada f_j são diferenciáveis. (Estamos supondo $k \geq 1$ pois o Corolário 2.4 é simples se $k = 0$.) Podemos então aplicar a Regra da Cadeia, segundo a qual, para todo $i = 1, \ldots, n$ e todo $x \in U$:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x),$$

ou seja, vale a igualdade de funções,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{p} \left(\left(\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)(x).$$

Suponhamos, por indução, que o Corolário 2.4 foi provado para classe C^{k-1}. Então, para cada $j = 1, \ldots, n$, a função composta $\dfrac{\partial g}{\partial y_j} \circ f$ é de classe C^{k-1}, o mesmo ocorrendo com $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ para todo i, já que $f \in C^k$. Como o produto de funções de classe C^{k-1} é ainda desta classe, cada parcela da soma acima é de classe C^{k-1}, donde a soma também é. Assim, todas as derivadas parciais de $g \circ f$ são de classe C^{k-1}, portanto $g \circ f \in C^k$. ■

Teorema 2.2 (Teorema da Função Inversa). *Uma aplicação C^∞ $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, U subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, é um difeomorfismo local em $x \in U$ se, e somente se, matriz Jacobiana $D\phi(x)$ de ϕ em x é inversível.*

Definição 2.13. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $x \in U$. Dizemos que uma aplicação de classe C^∞ $f : U \to \mathbb{R}^p$ é uma imersão em x se $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ for injetora (notemos que necessariamente $n \leq p$). Dizemos que f é submersão em x se $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ for sobrejetora ($n \geq p$). Dizemos que f é submersão (respectivamente, imersão) se f for submersão (respectivamente, imersão) em todo $x \in U$.*

Na busca da classificação de aplicações, as duas importantes proposições a seguir, são consequências do Teorema da Função Inversa, nos dão os modelos para aplicações regulares.

Proposição 2.2 (Forma Local das Submersões). *Sejam U subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação C^∞ tal que $f(0) = 0$ e f é uma submersão em 0. Então existe um difeomorfismo $\phi : V \to W$, (V e W vizinhanças de 0 em $\mathbb{R}^n$), tal que, $\phi(0) = 0$ e*

$$(f \circ \phi^{-1})(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_p).$$

Proposição 2.3 (Forma Local das Imersões). *Sejam U subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação C^∞ tal que $f(0) = 0$ e f é uma imersão em 0. Então existe um difeomorfismo $h : V \to W$, (V e W vizinhanças de 0 em $\mathbb{R}^p$), tal que, $h(0) = 0$ e*

$$(h \circ f)(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0).$$

Teorema 2.3 (Teorema do Posto constante). *Sejam $f : U \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação tal que em todos os pontos de U, f tem posto constante m, então existem difeomorfismos locais $h : (U \subset \mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ e $k : (\mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ com $k \circ f \circ h^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$.*

Imersões e submersões são exemplos de aplicações de posto constante.

2.2 GERMES

A fim de discutir o comportamento local de uma aplicação, isto é, numa vizinhança pequena e arbitrária de um ponto x, é conveniente introduzirmos a noção de germe, entre outros conceitos importantes que podem ser conferidos em Dimca (1992), Ebeling (1992) e Gibson (1979).

Definição 2.14. *Sejam $x \in \mathbb{R}^n, f : U_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $g : U_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ aplicações C^∞ definidas em vizinhanças abertas U_1 e U_2 de x. Dizemos que f e g são equivalentes, e escrevemos $f \sim g$, se existir uma vizinhança $U \ni x$ em $\mathbb{R}^n, U \subset U_1 \cap U_2$ tal que $f|_U = g|_U$, ou seja, se f e g coincidem em uma vizinhança U de x. Esta é uma relação de equivalência.*

Definição 2.15. *As classes de equivalência sob esta relação são chamadas germes de aplicações C^∞ de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$ em x. Os elementos de uma classe são chamados representantes do germe.*

Frequentemente, usamos o mesmo símbolo para denotar um germe ou seu representante. Notemos que se f e g são representantes do mesmo germe em x, então temos $f(x) = g(x)$. Portanto, qualquer outro representante deve assumir o mesmo valor em x. Em vista desse fato, é usual a notação $f : (\mathbb{R}^n, x) \to \mathbb{R}^p$ para indicar um germe de aplicação em x. Sem perda de generalidade, podemos tomar $x = 0 \in \mathbb{R}^n$.

O conjunto de todos os germes $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^p$ será denotado por $\varepsilon_{n,p} := \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^p\}$. Quando $p = 1$ (germes de funções), a notação usada é ε_n. Geometricamente, se f_1 e f_2 forem dois representantes da classe de equivalência de f, os gráficos dessas funções coincidem num aberto contendo a origem.

O germe de uma aplicação $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^p$ é dito singular se a matriz Jacobiana $Df(0)$ não tem rank máximo, caso contrário, f é dito regular.

Denotaremos o conjunto de todos os germes $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ por $\varepsilon^0_{n,p} := \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)\}$ e quando $p = 1$ (germes de funções), denotaremos por ε^0_n.

Seja X um espaço topológico e $x \in X$ um ponto. O conjunto $P(X)$ formado por todos os subconjuntos de X define uma relação de equivalência $A \sim_X B \Leftrightarrow A \cap U = B \cap U$ para alguma vizinhança U de $x \in X$.

Definição 2.16. *A classe de equivalência da relação $\sim_X$ é chamada de germe do conjunto X no ponto x.*

2.3 ALGUMAS RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIAS IMPORTANTES

Nesta seção, apresentaremos algumas relações de equivalências envolvendo germes de funções. Para mais detalhes, consultar Sena (2012)

2.3.1 A $\mathcal{R}$-Equivalência ou Equivalência à direita

Esta relação de equivalência está relacionada à ação do grupo $R = R_n := \{h :$

$\mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0 \mid h$ é difeomorfismo$\}$, dada por:

$$
\begin{array}{rcl}
r : R_n \times \varepsilon^0_{n,p} & \to & \varepsilon^0_{n,p} \\
(h, f) & \mapsto & f \circ h
\end{array}
$$

Dois germes $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$ estão relacionados se, e somente se, $\exists h \in R_n$ tal que $f \circ h = g$, isto é, o diagrama abaixo comuta:

Figura 1 – $\mathcal{R}$-Equivalência

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "f"] & (\mathbb{R}^p, 0) \\
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Fonte: Autor (2023).

Exemplo 2.8. Pelo teorema da Forma Local das Submersões (proposição 2.2), se $f : (\mathbb{R}^{n+k}, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ é tal que $f'(0)$ é sobrejetora, então existe um germe $h \in \mathbb{R}_{n+k}$ tal que: $f \circ h(x, y) = x$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, isto é, $f \sim_{\mathcal{R}} Id_{\mathbb{R}^n}$

2.3.2 A $\mathcal{L}$-Equivalência ou Equivalência a esquerda

Esta relação de equivalência está associada a ação do grupo $\mathbb{R} \times L$, dada por:

$$
\begin{array}{rcl}
a : R_p \times \varepsilon^0_{n,p} & \to & \varepsilon^0_{n,p} \\
(h, f) & \mapsto & h \circ f
\end{array}
$$

Dois germes $f, g \in \varepsilon^0_{n,p}$, dizemos que $f \ _{\tilde{L}}\ g$, se, e se somente se, existe $h \in L = \mathbb{R}_p$ tal que $h \circ f = g$. Isto é, o diagrama abaixo é comutativo:

Figura 2 – $\mathcal{L}$-Equivalência

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, 0) \arrow[r, "f"'] \arrow[dr, "g"'] & (\mathbb{R}^p, 0) \arrow[d, "h"] \\
& (\mathbb{R}^p, 0)
\end{tikzcd}
$$

Fonte: Autor (2023)

Exemplo 2.9. Pelo teorema da Forma local das imersões (Proposição 2.3), se $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^{n+k}, 0)$ é tal que $f'(0)$ é injetiva, então existe um germe $h \in \mathbb{R}_{n+k}$, tal que: $h \circ f(x) = (x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, é isto, $f \sim_{\mathcal{L}} Id_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}$.

De forma mais simples, dizemos que $f \sim_{\mathcal{L}} g$ quando os germes f e g coincidem, a menos de uma mudança de coordenadas na fonte (Domínio) e na meta (Contra-Domínio).

2.4 CONJUNTOS ALGÉBRICOS

Nesta seção trabalharemos o conceito de conjuntos algébricas e apresentaremos algumas propriedades importantes que podem ser conferidos em Costa (2005), Coste (2000) e Mancini (1980)

Definição 2.17. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é algébrico se existem funções polinomiais $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, ..., = k$ tais que $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = ... = f_k(x) = 0\}$.*

Observação 2.7. Como pegamos o conjunto dos números reais, poderíamos simplesmente dizer que X é algébrico se existe uma função polinomial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$. Basta considerar $f = f_1^2 + ... + f_k^2$.

Exemplo 2.10. A esfera padrão unitária $S^n = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ é um conjunto algébrico. De fato, considerando $f(x_1, ..., x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - 1$, é claramente $f^{-1}(0) = S^n$.

Proposição 2.4. *Sejam X, Y conjuntos algébricos em $\mathbb{R}^n$. Então $X \cup Y$, e $X \cap Y$ são conjuntos algébricos.*

Proposição 2.5. *Sejam $Y \subset \mathbb{R}^p$ um conjunto algébrico e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação polinomial. Então, $F^{-1}(Y) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto algébrico.*

A **Proposição** (2.5) nos induz a questionar se a imagem de um conjunto algébrico por uma aplicação polinomial é um conjunto algébrico. Isso nem sempre ocorre. Observe o contra-exemplo a seguir: **Exemplo** (2.11).

Exemplo 2.11. Considere o círculo padrão unitária S^1 em $\mathbb{R}^2$ e $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ projeção canônica $\pi(x, y) = x$. Pelo **Exemplo** (2.10), S^1 é um conjunto algébrico, mas $\pi(S^1) = [-1, 1]$ não é algébrico.

Este contra-exemplo nos motiva a definição de uma classe mais geral que a dos conjuntos algébricos, a saber a classe dos conjuntos semialgébricos.

2.5 CONJUNTOS SEMIALGÉBRICOS

Nesta seção apresentaremos noções preliminares de conjuntos semialgébricos, bem como propriedades que podem ser conferidos em Coste (2000), Benedetti (1991) e Birbrair (1999).

Definição 2.18. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico básico se existem funções $f, g_1, \ldots,$ $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) > 0\}).$$

Definição 2.19. *Um conjunto semialgébrico é a reunião finita de conjuntos semialgébricos básicos. Logo, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é semialgébrico, existem funções polinomiais f_i, g_{ij} definidas em $\mathbb{R}^n$, tais que*

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} \{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0\} \cap (\bigcap_{j=1}^{s_i} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_{ij}(x) > 0\})\}.$$

Observação 2.8.

a) Os conjuntos algébricos são, claramente, conjuntos semialgébricos;

b) O conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ é semialgébrico, mas não é algébrico;

c) Em $\mathbb{R}$, um conjunto semialgébrico é a união finita de intervalos abertos, fechados, semialgébricos e pontos;

d) Se $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ são conjuntos semialgébricos, então $X \cup Y$, $X - Y$, $\mathbb{R}^n - X$, $\mathbb{R}^n - Y$ e $X \cap Y$ são também semialgébricos;

e) Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^p$ são conjuntos semialgébricos, então $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ é conjunto semialgébrico.

Definição 2.20. *A classe dos conjuntos semialgébricos de $\mathbb{R}^n$ é definida como menor álgebra booleana de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que contém os subconjuntos de forma $\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$ com $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função polinomial ou seja $(x_1, ..., x_n)$ em $\mathcal{R}^n$ satisfazendo uma combinação booleana de equações polinomiais e desigualdades com coeficientes reais. Em outra palavras, os subconjuntos semialgébricos de $\mathbb{R}^n$ forma a menor classe SA_n de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que:*

1 Se $P \in \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$, então $\{x \in \mathbb{R}^n; P(x) = 0\} \in SA_n$ e $\{x \in \mathbb{R}^n; P(x) > 0\} \in SA_n$.

2 Se $A \in SA_n$ e $B \in SA_n$ então $A \cup B, A \cap B$ e $\mathbb{R}^n \setminus A$ estão dentro SA_n.

O fato de um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ ser semialgébrico não depende da escolha das coordenadas afins.

Proposição 2.6. *Todo subconjunto semialgébrico de $\mathbb{R}^n$ é a união subconjuntos semialgébricos de forma:*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n;\ P(x) = 0\} \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^n | P > 0\}).$$

Proposição 2.7. *Se* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto semialgébrico, então o fecho de* X*, denotado por* $\overline{X}$ *é um conjunto semialgébrico.*

Definição 2.21. *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$*. Dizemos que a função* $F : X \to \mathbb{R}$ *é semialgébrico se, o gráfico de* F*,* $\text{graf}(F) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}|\ Y = F(x)\}$ *é um conjunto semialgébrico.*

Proposição 2.8. *Se* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é um conjunto semialgébrico, então* X *é um número finito de componentes conexas e cada uma dessas componentes, ainda é conjunto semialgébrico.*

Teorema 2.4 (Tarski-Seideberg)**.** *Sejam* $X \subset \mathbb{R}^n$ *semialgébrico e por uma projeção* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ *é um conjunto semialgébrico. Nestas condições,* $F(X) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *(imagem de conjunto semialgébrico) é semialgébrico.*

Corolário 2.5. *A imagem de um conjunto semialgébrico por uma aplicação polinomial é um conjunto semialgébrico.*

2.6 EQUIVALÊNCIA LIPSCHITZ DAS FUNÇÕES POLINOMIAIS DE UMA ÚNICA VARIÁVEL

Nesta seção apresentaremos a equivalência Lipschitz das funções polinimiais de uma variável e para tanto tomamos como norte os trabalhos de Correia (2021), Costa (2005) e Sena (2012).

Antes de falarmos sobre equivalência das funções Lipschitz, vamos relembrar as definição de função Lipschitz e função analítica.

Definição 2.22. *Seja* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *uma aplicação. Dizemos que* f *é Lipschitz se existir uma constante* $c > 0$*, tal que:*

$$||f(x) - f(y)|| = c \cdot ||x - y||, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 2.12. Seja f uma função Lipschitz, definida por $f(x) = x$
Pela definição da função Lipschitz, temos que $c = 1$. De fato,

$$||f(x) - f(y)|| = 1 \cdot ||x - y||$$

é Lipschitz com sua constante $c = 1$.

Exemplo 2.13. Seja $a(t) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função lipschitziana. Isto significa que existe $c > 0$ tal que $t, s \in X \Rightarrow |a(t) - a(s)| \leqslant c|t - s|$, então a é contínua. Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Como $c > 0$, e $x, y \in X$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |a(t)-a(s)| \leqslant c|x-y| < c\cdot\delta = c\cdot\dfrac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$. Então, a função $a(t)$ satisfaz a condição da definição de função Lipschitz.

Exemplo 2.14. Seja $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Então f não é Lipschitz. De fato, pelo **Exemplo** (2.13), $|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|$. Então temos:
$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant c|x - y| \Rightarrow \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|} \leq c$.

Como sabemos que $|x-y| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}||\sqrt{x}+\sqrt{y}|$.
Então, voltando a nossa equação a cima, temos:

$$\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|\sqrt{x}-\sqrt{y}||\sqrt{x}+\sqrt{y}|} = \frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}.$$

Como $x, y \in [0,1]$ então, temos: $0 \leqslant x \leqslant 1$ e $0 \leqslant y \leqslant 1$. Observe que se pegarmos x próximo de zero e fixar y a equação $\frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}$ vai para infinito. Nesse caso, c não pode limitar a razão $\frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|}$.
Portanto, a função f não é Lipschitz.

Definição 2.23. *Seja $f : X \to Y$ um homeomorfismo com $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^p$. Dizemos que f é um homeomorfismo bi-lipschitz se existe $K \geq 1$ tal que*

$$\frac{1}{K} \parallel x-y \parallel \leq \parallel f(x)-f(y) \parallel \leq K \parallel x-y \parallel,$$

para todo $x, y \in X$.

Definição 2.24. *Duas funções polinomiais $f; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são equivalentes de Lipschitz, escritos $f \cong g$, se existe um homeomorfismo bi-Lipschitz $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante $c > 0$ tal que $g \circ \phi = c \cdot f$.*

Definição 2.25. *Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, é dita analítica se para cada $t_0 \in I$ existe um $\delta > 0$ tal que $(t_0-\delta, t_0+\delta) \subseteq I$ e a serie de potência $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k$ converge tal que $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t-t_0)^k$ para todo $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$.*

Definição 2.26. *Seja função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Dizemos que f é bi-analítica se f for uma bijeção analítica cuja inversa f^{-1} também é analítica.*

Lema 2.1. *Sejam $f; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções polinomiais não constantes. Se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo tal que $g \circ \phi = f$ então, ϕ é semialgébrico.*

Demonstração: Seja $s_1 < s_2 < ... < s_p$ os pontos críticos de g, então temos:

$$\mathbb{R} = (-\infty, s_1] \cup [s_1, s_2] \cup ... \cup [s_{p-1}, s_p] \cup [s_p, \infty).$$

E g é monômio e injetiva em cada um dos intervalos $[s_p, \infty)$. Seja $t_i = \phi^{-1}(s_i)$, para $i = 1, ..., p$.
Suponha que ϕ seja um homeomorfismo crescente (decrescente pode ser tratada de forma semelhante). Então temos: $t_1 < ... < t_p$. Em cada um dos intervalos $(-\infty, t_1]; [t_1, t_2]; ...;$ $[t_{p-1}, t_p]$ e $[t_p, \infty)$, nós temos $\phi = g^{-1} \circ f$. Mais precisamente:

$$\phi|_{(-\infty, t_1]} = (g|_{(-\infty, s_1]})^{-1} \circ f|_{(-\infty, t_1]},$$

$$\phi|_{[t_i, t_{i+1}]} = (g|_{[s_i, s_{i+1}]})^{-1} \circ f|_{[t_i, t_{i+1}]}$$

para $1 \leq i \leq p$

$$\phi|_{[t_p,+\infty)} = (g|_{[s_p,\infty)})^{-1} \circ f|_{[t_p,+\infty)}.$$

Como f e g são funções polinomiais, vemos que cada uma das restrições $\phi|_{(-\infty,t_1]}$, $\phi|_{[t_1,t_2]}$, $\ldots, \phi|_{[t_{p-1},t_p]}$ e $\phi|_{[t_p,t_{+\infty}]}$ é uma função semialgébrica (sendo a composição de duas funções semialgébricas). Assim, ϕ é uma função semialgébrica. ■

Lema 2.2. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções polinomiais não constantes. Se f e g são equivalentes Lipschitz, então deg f=deg g.*

Demonstração: Sejam $f(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$ e $g(t) = \sum_{i=0}^{e} b_i t^i$, onde $a_d, b_e \neq 0$. Suponha que f e g são equivalentes de Lipschitz, de modo que $g \circ \phi = c \cdot f$, para alguma função bi-Lipschitz $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e alguma constante $c > 0$. Devemos mostrar que $d = e$.

Seja $\lambda = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\phi(t)}{t}$. Este limite está bem definido na reta real e portanto ϕ é semialgébrico. Além disso, como ϕ é bi-Lipschitz, λ é um número real diferente de zero.

Como $\lim\limits_{|t| \to +\infty} |\phi(t)| = +\infty$, temos:

$$\lim_{|t| \to +\infty} \frac{g(\phi(t))}{\phi(t)^e} = \lim_{|t| \to +\infty} \frac{g(t)}{t^e} = b_e$$

Por outro lado, como $c \cdot f = g \circ \phi$, temos:

$c \cdot \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t^e} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{g(\phi(t))}{(t)^e} = \lim\limits_{|t| \to +\infty} \dfrac{g(\phi(t))}{\phi(t)^e} \cdot \lim\limits_{|t| \to +\infty} \left(\dfrac{\phi(t)}{t} \right)^e$, com estas equações temos:

$\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{f(t)}{t^e} = \dfrac{b_e \cdot \lambda^e}{c}$.

Como $\dfrac{b_e \cdot \lambda^e}{c}$ é um número real diferente de zero, segue-se que $d = e$. ■

Lema 2.3. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções polinomiais de mesmo grau $d > 1$ e suponha que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função bijetiva tal que $g \circ \phi = c \cdot f$ para alguma constante $c > 0$. As seguintes condições são equivalente:*

i. *ϕ é bi - Lepschitz;*

ii. *A multiplicação de f em t é igual a multiplicação de g em ϕ, para todo $t \in \mathbb{R}$ e*

iii. *ϕ é bi-analítica.*

Demonstração: **i** $\Rightarrow$ **ii** : seja $t_0 \in \mathbb{R}$ qualquer ponto. Seja k a multiplicidade de f em t_0, e seja l a multiplicidade de g em $\phi(t_0)$. Para qualquer par de funções $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escrevemos $u \sim v$ perto de t_0 para indicar que existem constantes $A, B > 0$ tais que $A|v(t)| \leq |u(t)| \leq B|v(t)|$, para t suficientemente próximo de t_0. Então, $f(t) - f(t_0) \sim (t - t_0)^k$ próximo de t_0 e $g(s) - g(\phi(t_0)) \sim (s - \phi(t_0))^l$ próximo de $\phi(t_0)$. Como $g \circ \phi = c \cdot f$, isso implica que $(t - t_0)^k \sim (s - \phi(t_0))^l$ próximo de t_0. E como estamos assumindo que ϕ é bi- Lipschitz, segue - se que $(t - t_0)^k \sim (t - t_0)^l$ perto de t_0.

Portanto $k = l$.

ii $\Rightarrow$ **iii** : Escolhendo-se qualquer ponto $t_0 \in \mathbb{R}$. Suponha que $\tilde{f} = cf$ tenha multiplicidade k em t_0. Existe um difeomorfismo analítico crescente $u : I \to (-\epsilon, \epsilon)$ com $t_0 \in I$ e uma

constante $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que $u(t_0) = 0$ e $\tilde{f} \circ u^{-1}(t) = a + \rho t^k$ para $|t| < \epsilon$ onde $a = \tilde{f}(t_0) = g \circ \phi(t_0)$. Como estamos assumindo que **ii)** é valida, a multiplicidade de g no ponto $\phi(t_0)$ também é k. Então, como antes, existam um crescente difeomorfismo analítico $v : J \to (-\epsilon', \epsilon')$ com $\phi(t_0) \in J$ e uma constante $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que $v(\phi(t_0)) = 0$ e $g \circ v^{-1}(t) = a + \sigma t^k$, de $|t| < \epsilon'$. Reduzindo o intervalo I, se é necessário, podemos assumir que $\phi(I) \subseteq J$. Portanto, podemos escrever $\tilde{f} \circ u^{-1}(t_0) = g \circ v^{-1}(\tilde{\phi}(t))$, onde $\tilde{\phi} = v \circ \phi \circ u^{-1} : (-\epsilon, \epsilon) \to (-\epsilon', \epsilon')$; e então segue que $\tilde{\phi}(t) = \nu t$, onde $\nu = |\frac{\rho}{\sigma}|^{\frac{1}{k}}$ dependendo se ϕ está aumentando (sinal positivo) ou diminuindo (sinal negativo). Em particular, isto mostra que $\tilde{\phi}$ é analítica. Portanto $\phi|_I = v^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ u$ é analítica; então ϕ é analítica em t_0. Como $t_0 \in \mathbb{R}$ é arbitrário, segue-se que ϕ é uma função analítica. Para mostrar que ϕ^{-1} também é analítica, observe que $\phi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função bijetiva tal que $f \circ \phi^{-1} = c^{-1}g$, condição satisfatória **(ii)** com f e g trocados: a multiplicidade de g em t é igual a multiplicidade de f em $\phi^{-1}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, pelo que já provamos, segue-se que ϕ^{-1} é analítica.
iii $\to$ **i** : Suponha que ϕ é bi-analítica. Então, em particular, ϕ é um homeomorfismo ou seja ϕ é monótono e $\lim\limits_{|t| \to +\infty} |\phi(t)| = +\infty$. Além disso, pelo **Lema** (2.1), ϕ é uma função semialgébrica. Seja $f(t) = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$ e $g(t) = \sum_{i=0}^{d} b_i t^i$, com $a_d, b_d \neq 0$. Desde $g \circ \phi = c \cdot f$ e $\lim\limits_{|t| \to +\infty} |\phi(t)| = +\infty$, temos,

$$. \lim_{t \to -\infty} \left(\frac{\phi(t)}{t} \right)^d = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\phi(t)}{t} \right)^d = c \cdot \frac{a_d}{b_d} \tag{3}$$

Seja $l_+ = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\phi(t)}{t}$ e $l_- = \lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{\phi(t)}{t}$. Segue-se de **equação** (3) que na verdade tem-se $l_+, l_- \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $|l_+| = |l_-|$. (Observe que para obter esta última igualdade de **equação** (3), use o fato de que $d > 0$). Pela regra de L´Hôpital, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\phi'(t)}{1} = l_+$ e $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{\phi(t)}{1} = l_-$. (A existência destes limites na linha real estendida é garantida pelo fato de que ϕ é semialgébrico então a regra de L´hôpital pode ser aplicada). Por isso, $\lim\limits_{t \to +\infty} |\phi'(t)| = \lim\limits_{t \to -\infty} |\phi'(t)| > 0$; então $|\phi'|$ pode ser continuamente estendido para uma função positiva definida no espaço compacto $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Portanto, existem constantes $A; B > 0$, tais que $A \leqslant |\phi'(t)| \leqslant B$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto ϕ é bi-Lipschitz. ∎

Dos dois últimos lemas, segue-se que se as duas funções polinomiais $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são equivalentes a Lipschitz, então têm o mesmo grau e o mesmo número de pontos críticos. A primeira afirmação é justamente o conteúdo do **Lema** (2.2). A segunda afirmação é uma consequência imediata de **Lema** (2.3): se $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo bi-Lipschtz tal que $g \circ \phi = c \cdot f$, para alguma constante $c > 0$, então ϕ induz uma correspondência 1-1 entre os pontos críticos de f e os pontos críticos de g, porque preserva a multiplicidade.

Os próximos resultados fornecem critérios eficazes para determinar se quaisquer duas dadas funções polinomiais não constantes $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, do mesmo grau, são equivalentes a Lipschitz. No **Teorema**(2.5), abordamos o caso onde f e g não têm pontos críticos.

Teorema 2.5. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, são funções polinomiais de mesmo grau $d \geqslant 1$. Se f e g não têm pontos críticos, então f e g são equivalentes de Lipschitz.*

Demonstração: Se f e g não têm pontos críticos, então ambos são difeomorfismo bi-analíticos. Portanto $f = g \circ \phi$, onde $\phi = g^{-1} \circ f$ é um difeomorfismo bi-analítico. Pelo **Lema** (2.3), ϕ é bi-Lipschitz. ∎

3 RESULTADOS AUXILIARES

Neste capítulo abordaremos as noções de polinômios quase-homogêneos, triângulo de Hölder e função altura. Estes conceitos e resultados são essenciais para desenvolvimento do próximo capítulo o qual tem como base Birbrair, Fernandes e Panazzolo (2009).

3.1 POLINÔMIOS QUASE-HOMOGÊNEOS

Seja $\mathbb{K}[x_1; x_2; ...; x_n]$ o anel dos polinômios nas variáveis $x_1; x_2; ...; x_n$ com coeficientes no corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: A cada variável x_i associamos um número inteiro positivo ω_i; chamado peso de x_i:

Definição 3.1. *Um polinômio* $f(x) = \sum\limits_{a \in I} \alpha_a x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ *em* $\mathbb{K}[x_1; ...; x_n]$ *é dito* ***homogêneo de grau d*** *se todos seus monômios têm grau d. Isto é, se* $f(x) = \sum\limits_{a \in I \subset \mathbb{N}^n} \alpha_a x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$, *então* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = d$, $\forall a \in I$ *com* $\alpha_a \neq 0$.

Definição 3.2. *Um polinômio* $p(x, y)$ *é homogêneo de grau d se*

$$f(x, y) = \sum_{a=0}^{d} \alpha_a x^a y^{d-a}.$$

Por exemplo, os polinômios homogêneos de grau ≤ 2 *tais que* α_a *é sempre 1 são:*
$f(x, y) = 1$
$f(x, y) = x + y$
$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
Note que binômios de Newton são também polinômios homogêneos:
$f(x, y) = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$f(x, y) = (x + y)^d = \sum_{a=0}^{d} \binom{d}{a} x^a y^{d-a}$

Exemplo 3.1. $f(x, y) = x^3 - xy^2 + y^3$ é homogêneo de grau 3.

Definição 3.3. *Um polinômio* $f(x) = \sum\limits_{a \in \mathbb{I}} \alpha_a x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ *em* $\mathbb{K}[x_1...x_n]$ *é dito* ***quase-homogêneo de grau d*** *com relação ao peso* $\omega = (\omega_1, \omega_1, ..., \omega_n)$ *se* $\omega \cdot a = (\omega_1 \cdot a_1 + \omega_2 \cdot a_2 + ... + \omega_n \cdot a_n) = d$ $\forall a \in \mathbb{I} \subset \mathbb{N}^n$.

Exemplo 3.2. O polinômio,

$$f(x, y, z) = x^2y^2 + x^4y + y^3 + xyz^3 + z^6.$$

é quase-homogêneo com pesos $w = (1, 2, 1)$ e de grau $d = 6$.

Observação 3.1. Muitas vezes usamos a notação $d = deg_\omega(f)$ e as vezes omitimos ω. Um polinômio quase-homogêneo como na observação anterior é dito quase-homogêneo do tipo $(\omega_1, ...\omega_n; d)$ ou $(\omega; d)$.

Proposição 3.1. *Fixado o peso* $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$*, seja* $S_d = \{$ *os polinômios quase-homogêneos de grau d com relação ao peso* $(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)\} \cup \{0\}$*. Então* S_d *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*.*

Demonstração: Dados $f(x) = \sum \alpha_a x_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ e $g(x) = \sum \beta_b x_1^{b_1}...x_n^{b_n}$ e $r \in \mathbb{K}$ tem-se que $h(x) = f(x) + r \cdot g(x) = \sum \alpha_a x_1^{a_1}...x_n^{a_n} + \sum r\beta_b x_1^{b_1}...x_n^{b_n}$ é claramente quase-homogêneo do tipo $(w_1, ..., w_n; d)$. Portando temos que $h \in S_d$. ■

Proposição 3.2. *Um polinômio* $f(x) \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ *quase-homogêneo do tipo* $(w_1, ..., \omega_n; d)$ *se, e somente se,* $f(tx) = f(t^{\omega_1}x_1, ..., t^{\omega_n}x_n) = t^d f(x)$*, onde* $(tx) = (t^{\omega_1}x_1, ..., t^{\omega_n}x_n)$*.*

Demonstração: $\Rightarrow|$ Se f e quase-homogêneo do tipo (ω, d), então, $a_1\omega_1 + ...a_n\omega_n = d$, $\forall a = (a_1, ..., a_n) \in I$. Logo: $f(tx) = f(t^{\omega_1}x_1, ..., t^{\omega_n}x_n) = \sum \alpha_a (t^{\omega_1}x_1)^{a_1}...(t^{\omega_n}x_n)^{a_n} = \sum \alpha_a t^{a_1\omega_1 + ... + a_n w_n} x_1^{a_1}...x_n^{a_n} = t^d \sum \alpha_a x_1^{a_1}...x_n^{n} = t^d f(x)$.

$|\Leftarrow$ $f(tx) = t^d f(x) \Rightarrow \sum \alpha_a (t^{\omega_1}x_1)^{a_1}...(t^{\omega_n}x_n)^{a_n} = t^d \sum \alpha_a x_1^{a_1}...x_n^{a_n} \Rightarrow t^{a_1\omega_1 + ... + a_n\omega_n} = t^d$, $\forall t \Rightarrow w_1a_1 + ... + w_na_n = d$,$\forall a \in I$. $\Rightarrow f(x)$ é quase-homogêneo do tipo $(\omega_1, ..., \omega_n; d)$. ■

Definição 3.4. *Seja* β *um número racional positivo. Dizemos que o polinômio* $F(X, Y)$ *é* β*-quase homogêneo de grau d se para todo* $t \geq 0$ *temos:*

$$F(tx, t^\beta y) = t^d F(x, y),$$

tal que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*.*

Exemplo 3.3. O polinômio $F(x, y) = x^2 + xy^4$ é 4-quase-homogêneo de grau 8.
De fato, $F(t^4x, ty) = (t^4x)^2 + t^4x(ty)^4 = t^8(x^2 + xy^4) = t^8 F(x, y)$.

3.2 TRIÂNGULO DE HÖLDER

Definição 3.5. *O triângulo de Hölder* $\mathrm{T}_\beta \subset \mathbb{R}^2$ *é um conjunto semialgébrico definido de seguinte forma:*

$$\mathrm{T}_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y \leq x^\beta\},$$

Onde β *é um número racional positivo.*

Definição 3.6. *Dizemos que um polinômio* $F(x, y)$ *é admissível em relação a* T_β *se a fronteira* $\partial\mathrm{T}_\beta$ *é um subconjunto de* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$*.*

Definição 3.7. *Um polinômio* $F(x, y)$ *é reduzível em* T_β *se* $F(x, y)$ *é admissível em relação a* T_β *e* $F(x, y) \neq 0$ *para todos* $(x, y) \in int(\mathrm{T}_\beta)$*.*

Definição 3.8. *Dois polinômios* $F(x, y)$ *e* $G(x, y)$*, admissíveis em relação a* T_β*, são ditos* $\mathcal{R}$ *semialgebricamente Lipschipz equivalentes em* T_β *se existir um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz semialgébrico* $\Phi : (\mathrm{T}_\beta, 0) \to (\mathrm{T}_\beta, 0)$ *tal que* $F = G \circ \Phi$*.*

Definição 3.9. *Dois polinômios $F(x,y)$ e $G(x,y)$ admissíveis em relação a T_β, são semi-algebricamente Lipschitz equivalentes em relação T_β se existir um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz semialgébrico $\Phi : (\mathrm{T}_\beta, 0) \to (\mathrm{T}_\beta, 0)$ e um homeomorfismo bi-Lipschitz semialgébrico $l : [0,\epsilon) \to [0,\epsilon)$ tal que $l(0)$ e $l \circ F = G \circ \Phi$*

Observação 3.2. Uma aplicação é dito semialgébrico se seu gráfico é um conjunto semi-algébrico.

3.3 FUNÇÃO ALTURA

Seja $F(x,y)$ um polinômio reduzido β-quase homogêneo em T_β. A função altura f associada a F é a restrição de F ao conjunto de T_β definido por $\{(x,y) \in \mathrm{T}_\beta : x = 1\}$. Uma função de altura pode ser considerada como uma função polinomial $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(1) = 0$.

Dizemos que duas funções tais que $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ são lipschitz equivalentes se existem um homeomorfismo bi-lipschitz $\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ e uma constante positiva c tal que $c \cdot f = g \circ \phi$.

Lema 3.1. *Sejam $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ duas funções polinomiais. Seja $\phi : [0,1] \to [0,1]$ um homeomorfismo tal que $f = g \circ \phi$. Se g é uma função não constante, então ϕ é semialgébrico.*

Demonstração: Seja

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = 1,$$

uma partição $[0,1]$ tal que g é monótono em cada subintervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Suponha que ϕ seja um homeomorfismo positivo. Neste caso, temos

$$0 = s_0 < s_1 < ... < s_p = 1,$$

seja uma partição do intervalo $[0,1]$ tal que $\phi(s_i) = t_i$. Então, em cada subintervalo $[s_i, s_{i+1}]$ temos $\phi = g^{-1} \circ f$. Como f e g são polinômios, vemos que $g^{-1} \circ f$ é uma função semialgébrica. No caso em que ϕ é negativo homeomorfismo é semelhante. ∎

4 RESULTADO PRINCIPAL

Neste capítulo estudaremos o Teorema Principal deste trabalho para o qual usaremos como ferramentas os conteúdos trabalhados até aqui. Neste sentido, seria bom o leitor ler as preliminares, pois serão as principais ferramentas para demonstração do Teorema.

Teorema 4.1. *Seja $\beta > 1$ um número racional. Dois polinômios β-quase homogêneos reduzidos em T_β são $\mathcal{R}$-semialgebricamente Lipschitz equivalentes se, e somente se, eles têm o mesmo grau e as funções altura correspondentes são Lipschitz equivalentes . Além disso, esses polinômios são semialgebricamente Lipschitz equivalentes em T_β se, e somente se, eles são $\mathcal{R}$-semialgebricamente Lipschitz equivalentes em T_β.*

Demonstração: Sejam $F(x, y)$ e $G(x, y)$ dois polinômios β-quase homogêneos reduzidos em T_β de grau d. Suponha que as funções altura f e g correspondentes sejam Lipschitz equivalentes. Pelo **Lema** (3.1), existe uma constante positivo c e um homeomorfismo bi-Lipschitz semialgébrico $\Phi : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $c \cdot f = g \circ \phi$. Seja (x, tx^β) um ponto de T_β. Definindo

$$\Phi(x, tx^\beta) = (\lambda x, \phi(t)(\lambda x)^\beta), \tag{4}$$

onde $\lambda^d = c^{-1}$. Claramente, Φ é semialgébrico. Como $c \cdot f = g \circ \phi$, temos $G \circ \Phi(x, tx^\beta) = G(\lambda x, \phi(t)(\lambda x)^\beta) = [(\lambda x)^d G(1, \phi(t)] = (\lambda x)^d g(\phi(t)) = (\lambda x)^d cf(t) = (\lambda x)^d cF(1, t) = c\lambda^d x^d F(1, t) = c\lambda F(x, tx^\beta) = F(x, tx^\beta)$, ou seja, $F = G \circ \Phi$ em T_β. Por outro lado, a aplicação inversa de Φ pode ser construída da mesma forma como em (4), e concluímos que Φ é homeomorfismo bi-Lipschitz semialgébrico. Vemos que F e G são $\mathcal{R}$ - semialgebricamente Lipschitz equivalente em T_β e, portanto eles são semialgebricamente Lipschitz equivalente em T_β.

Suponha agora que existe um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz semialgébrico $\Phi : (\mathrm{T}_\beta, 0) \to (\mathrm{T}_\beta, 0)$ e um homeomorfismo bi-Lipschitz semiagébrico $l : C \to (0, \epsilon)$ tal que $l(0) = 0$ e $l \circ F = G \circ \Phi$. A aplicação Φ pode ser escrito na forma $\Phi(x, y) = (\phi_1(x, y), \phi_2(x, y))$. Dois casos são possíveis.

Caso 1: $\Phi(x, 0) = (\varphi(x), 0)$ e $\Phi(x, x^\beta) = (\delta(x), [\delta(x)]^\beta)$.

Caso 2: $\Phi(x, 0) = (\delta(x), [\delta(x)]^\beta)$ e $\Phi(x, x^\beta) = (\varphi(x), 0)$.

Primeiro, estudamos o **caso 1**. Considere $\gamma_t(x) = (x, tx^\beta)$ onde $t \in [0, 1]$.

Proposição 4.1. *O germe da curva $\Phi(\gamma_t(x))$ em 0 pode ser apresentado da seguinte maneira:*

$$\Phi(\gamma_t(x)) = (\lambda x + r_1(t, x), (\lambda x)^\beta a(t) + r_2(t, x)),$$

onde $\lim_{x \to 0^+} \frac{r_1(t, x)}{x} = 0$ *e* $\lim_{x \to 0^+} \frac{r_2(t, x)}{x^\beta} = 0$. *Além disso, o valor λ não depende da escolha de t.*

Demonstração: Como Φ é um homeomorfismo bi-lipschitz semiálgebrico, segue que $\phi_1(\gamma_t(x)) = \lambda x + r_1(t,x)$ com $\lambda \neq 0$, onde $\lim_{x\to 0^+} \frac{r_1(t,x)}{x} = 0$. Em seguida, como Φ é Lipschitz, temos uma constante positiva k tal que,

$$|\Phi(x,0) - \Phi(x,tx^\beta)| \leq k \cdot |(x,0) - (x,tx^\beta)| = ktx^\beta.$$

Como $\Phi(x,0) = (\lambda_0 x + o(x), 0)$ e $\beta > 1$, concluímos que $\lambda = \lambda_0$. Por outro lado,

$$\phi_2(x,tx^\beta) \leq |\Phi(x,0) - \Phi(x,tx^\beta)| \leq ktx^\beta.$$

Como ϕ_2 é uma função semialgébrica, vemos que $\phi_2(\gamma_t(x)) = a(t)(\lambda x)^\beta + o(x^\beta)$. Que prova Proposição. ∎

Proposição 4.2. *A função $a(t)$ é Lipschitz.*
Demonstração: Considere duas curvas γ_t e γ_s

$$|\Phi(\gamma_t(x)) - \Phi(\gamma_s(x))| \leq k|t-s|x^\beta.$$

Portanto,

$$|\phi_2(\gamma_t(x)) - \phi_2(\gamma_s(x)| \leq k|t-s|x^\beta.$$

Mas,

$$\phi_2(\gamma_t(x)) = a(t)\lambda^\beta x^\beta + o(x^\beta).$$

Como,

$$|a(t)\lambda^\beta x^\beta - a(s)\lambda^\beta x^\beta| = \lambda^\beta x^\beta |a(t) - a(s)| \leq 2k|t-s|x^\beta,$$

para $x > 0$ suficientemente pequeno. Portanto,

$$|a(t) - a(s)| \leq \frac{2k}{\lambda^\beta}|t-s|.$$

∎

Proposição 4.3. *Sejam f e g as funções altura correspondentes a F e G. Então, existe um número positivo c tal que $c \cdot f = g \circ a$, onde a é a função definida acima.*
Demonstração: Como F é β-quase homogêneo, temos

$$x^{dF} f(t) = x^{dF} F(1,t) = F(x,tx^\beta),$$

onde dF é o grau de β-quase homogeneidade de F. Como F e G são semialgebricamente

Lipschitz equivalente, pelas proposições 4.1 e 4.2, temos:

$$l(F(x,tx^\beta)) = G(\Phi(x,tx^\beta)) = G(\lambda x + r_1(t,x), (\lambda x)^\beta a(t) + r_2(tx))$$

e como $\lim_{x\to 0^+} \frac{r_1(t,x)}{x} = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \frac{r_2(t,x)}{x^\beta} = 0$, então $l(F(x,tx^\beta)) = G(\lambda x + o(x), a(t)(\lambda x)^\beta + o(x^\beta))$.

Para u suficientemente próximo de 0, temos $l(u) = \tilde{c}u + o(u)$, pois l é um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz semialgébrico, onde $\tilde{c}$ é uma constante positiva. Portanto

$$\tilde{c}x^{dF}F(1,t) + o(x^{dF}) = \lambda^{dG}x^{dG}G\left(1 + \frac{o(x)}{\lambda x}, a(t) + \frac{o(x^\beta)}{(\lambda x)^\beta}\right),$$

onde dG é o grau β-quase homogêneo de G. Claramente, $dF = d = dG$. Agora, passando ao limite quando $x \to 0^+$, obtemos

$$\tilde{c}F(1,t) = \lambda^d G(1, a(t)).$$

Tomando $c = \frac{\tilde{c}}{\lambda^d}$, obtemos a proposição. ■

Agora finalizaremos a prova do Teorema. Como F e G são semialgebricamente Lipschitz equivalentes, temos que $l^{-1}G = F \circ \Phi^{-1}$ onde $\Phi^{-1} = (\psi_1, \psi_2)$. Pela Proposição 4.1, $\Phi^{-1}(\gamma_s(x))$ pode ser escrita na seguinte forma:

$$\Phi^{-1}(\gamma_s(s)) = (\tilde{\lambda}x + o(x), (\tilde{\lambda}x)^\beta\ \tilde{a}(s) + o(x^\beta)).$$

Claramente $\tilde{\lambda} = \lambda^{-1}$.

Pela Proposição (4.2), $\tilde{a}(s)$ é uma função Lipschitz. Pela proposição 4.3, temos $c^{-1}g = f \circ \tilde{a}$. Assim, $\tilde{a} = a^{-1}$, isso significa que a e $\tilde{a}$ são aplicações bi-lipschitz.

Usando os mesmos argumentos, podemos provar o resultado no caso 2.

Provamos que se F e G são semialgebricamente Lipschitz equivalentes, então as funções altura correspondentes são Lipschitz equivalentes. Mas também provamos que a equivalência Lipschitz de funções altura implica $\mathcal{R}$-semialgebricamente Lipschitz equivalente de F e G. Essas afirmações concluem a prova do Teorema. ■

4.1 SÍMBOLOS DE MULTIPLICIDADE

Definição 4.1. *Um símbolo de multiplicidade* (a,μ) *consiste em uma sequência finita* $a_0, a_1, \cdots, a_p$ *de números reais pertencentes ao intervalo* $[0,1]$ *e uma função* $\mu : \{0,1,\cdots,p\} \to \mathbb{Z}_+$ *que satisfazem as seguintes condições:*

(1) $a_i = 0$ *se, e somente se,* $i \in \{0,p\}$*;*

(2) $a_i \neq a_{i+1}$ *para todo* $i = 0,1,\cdots,p-1$*;*

(3) Se $a_{i-1} < a_i < a_{i+1}$ *ou* $a_{i-1} > a_i > a_{i+1}$*, então* $\mu(i)$ *é um número par;*

(4) Se $a_{i-1} < a_i$ *e* $a_i > a_{i+1}$ *ou* $a_{i-1} > a_i$ *e* $a_i < a_{i+1}$*, então* $\mu(i)$ *é um número ímpar;*

(5) $\mu(i)$ *pode ser igual a zero apenas para* $i = 0$ *ou para* $i = p$

(6) Existe $0 < i < p$ *tal que* $a_i = 1$.

Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função analítica não negativa tal que $f(0) = f(1) = 0$ e $f(t) > 0$ para $t \in (0,1)$. Um símbolo de multiplicidade associado a f é construído da seguinte maneira. Seja $\tilde{f}(t) = \dfrac{f(t)}{\max(f)}$, onde $\max(f) = \max\{f(t) : t \in [0,1]\}$, e seja $t_1, \cdots, t_{p-1}$ a sequência de todos os pontos críticos de $\tilde{f}$ pertencentes a $(0,1)$. Seja $t_0 = 0$ e $t_p = 1$. Coloque $a_i = \tilde{f}(t_i)$ e seja $\mu(i)$ a multiplicidade de $\tilde{f}$ no ponto t_i. Defina $a = (a_i)_i$. Claramente, (a,μ) é um símbolo de multiplicidade. Neste caso, (a,μ) é chamado de símbolo de multiplicidade correspondente a f.

Teorema 4.2. *Duas funções polinomiais* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0, f(t) > 0$ *e* $g(t) > 0$ *para* $t \in (0,1)$*, são Lipschitz equivalentes se, e somente se, os símbolos de multiplicidade correspondentes são iguais. Além disso, se os símbolos de multiplicidade correspondentes* f *e* g *são iguais, então* f *e* g *são* $C^\infty-$ *equivalentes.*

Demonstração: Seja (a,μ) o símbolo de multiplicidade correspondente a f e g. Considere a partição

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p-1} < t_p = 1,$$

do intervalo $[0,1]$ tal que $t_1, \cdots, t_{p-1}$ são pontos críticos de f em $(0,1)$. Seja

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{p-1} < s_p,$$

seja uma partição semelhante de $[0,1]$ correspondente a g. Definimos uma função ϕ : $[0,1] \to [0,1]$ da seguinte maneira:

$$\phi|_{[t_i,t_{i+1}]} = \tilde{g}^{-1}|_{[a_i,a_{i+1}]} \circ \tilde{f}|_{[t_i,t_{i+1}]}.$$

Claramente, $\phi|_{[t_i,t_{i+1}]}$ é uma função analítica. Pelos resultados clássicos sobre A_K- singularidades , ϕ é uma função C^∞ perto de cada t_i, pois a multiplicidade de $\tilde{f}$ em t_i é igual a multiplicidade $\tilde{g}$ em s_i. Por construção, ϕ é uma função monótona e $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \phi$ em $[0,1]$. Portanto, f e g são Lipschitz equivalentes.

Suponha agora que f e g são Lipschitz equivalentes, isto é, $c \cdot f = g \circ \phi$ para alguma constante positiva c e um homeomorfismo bi-Lipschitz $\phi : [0,1] \to [0,1]$. É claro que $\tilde{f} = \tilde{g} \circ \phi$ em $[0,1]$.

Agora, do Lema (3.1) concluímos que ϕ é semialgébrico. Como ϕ é um homeomorfismo bi-Lipschitz, vemos que se $t_1, \cdots, t_{p-1}$ são pontos críticos de $\tilde{f}$, então $\phi(t_1), \cdots, \phi(t_{p-1})$ são pontos críticos de $\tilde{g}$. Como ϕ é um homeomorfismo bi- Lipschitz, segue-se que para todo t_i, a multiplicidade de $\tilde{f}$ em t_i é igual a multiplicidade de $\tilde{g}$ em $\phi(t_i)$. Portanto, f e g têm o mesmo símbolo de multiplicidade. ∎

Usando os resultados obtidos, chegamos ao seguinte Teorema de classificação:

Teorema 4.3. *Seja $\beta > 1$ um número racional. Dois polinômios $\beta-$quase-homogêneos reduzidos em T_β são semialgebricamente Lipschitz equivalentes se, e somente se, eles têm o mesmo grau e os símbolos de multiplicidade das funções altura correspondentes são iguais.*

Demonstração: Sejam F e G dois polinômios β-quase homogêneos reduzidos em T_β. Pelo Teorema (4.1), o spolinomios tem o mesmo grau d e as funções altura correspondentes f e g são Lipschitzes equivalentes. Do Lema (3.1) e do Teorema 4.2 os símbolos de multiplicidade das funções altura f e g são iguais. Reciprocamente, sejam f e g as funções altura correspondentes aos polinômios F e G β-quase homogêneos reduzidos em T_β com o mesmo grau d. Suponhamos que os símbolos de multiplicidade das funções altura f e g são iguais. Pelo Teorema 4.2 as funções f e g são Lipschitz equivalentes e pelo Teorema(4.1) os polinômios F e G são semialgebricamente Lipschitz equivalentes. ∎

5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, revisamos o conceito de aplicações suaves, germes de funções e algumas relações de equivalências importantes. Além de termos trabalhado com a equivalência Lipschitz das funções polinomiais de uma variável. Abordamos também os conceitos de conjuntos, algébricos e semialgébricos.

No terceiro capítulo falamos de alguns conceitos e resultados auxiliares como por exemplo, Polinômios quase-homogêneo, triângulo de Hölder e função Altura.

Finalizamos o trabalho demonstrando a relação que existe entre dois polinômios β-quase Homogêneo reduzidos no T_β com mesmo grau d e os Símbolos de Multiplicidade das funções Altura correspondentes.

Enfatizamos a importância do estudo de germes de funções com ênfase na classificação Lipschitz de funções, em particular classificação Lipschitz de funções no triângulo de Hölder. Dessa forma, esperamos que este trabalho sirva de fonte de pesquisa para os discentes interessados no assunto

REFERÊNCIAS

APOSTOL, Tom M. **Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra linear, com aplicações ás equações diferenciais e ás probabilidades**. Editora Reverté, Rio de Janeiro, 1993.

BENEDETTI, R.; SHIOTA, M. **Finiteness of semialgebraic types of polynomial functions.** Math. Z. 208, 1991. No. 4, 589–596.

BIRBRAIR, Lev. **Local bi-Lipschitz classification of 2-dimensional semialgebraic sets**, 1999. Houston J. Math. 25, no. 3, 453–472.

BIRBRAIR, Lev; FERNANDES, Alexandre; PANAZZOLO, Daniel. Lipschitz classification of functions on a Hölder triangle. **St. Petersburg Mathematical Journal,**, v. 20, n. 5, p. 681–686, 2009.

CORREIA, Sergio Alvares Araujo. **Semialgebraic Lipschitz Equivalence of Polynomial Functions.** 2021. 100 f. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021.

COSTA, João Carlos Ferreira. **Equivalências de contato topológica e bi-Lipschitz de germes de aplicações diferenciáveis.** 2005. Tese de Doutorado – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

COSTE, Michel. **An introduction to semialgebraic geometry**. 2000.

DIMCA, Alexandru. **Singularities and topology of hypersurfaces**. New York: Springer-Verlag, 1992.

EBELING, Wolfgang. **Functions os several complex variable and their singularities**Tradução de Philip Spain. Providence: American Mathematical Society, 1992.

GIBSON, C. G. **Singular Points of Smooth Mappings**. Pitman, 1979.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de Cálculo**. vol. 2. LTC, 2001.

LIMA, E. L. **Curso de Análise** - Volume 2. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MANCINI, S.; TADINI, W. M.; MENDES, C. M.; SILVA, E. A. D. **Conjuntos algébricos, conjuntos semi-algébricos, conjuntos semi-analíticos**. 1980.

SAIA, Marcelo José. **Uma introdução à teoria de singularidades**. 2011.

SENA FIlHO, Edvalter da Silva. **Quando a equivalência de contato implica na**

R-equivalência. 2012. 66 f. Dissertação (Pós-Graduação em Matemáticatica) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2012.

SILVA, Marcelo Henrique Felix da. **Classificação de Pontos Críticos via Lema de Morse.** 2022. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade da Intagração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2022.