



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA  
AFRO-BRASILEIRA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MARCELO HENRIQUE FELIX DA SILVA

CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS VIA LEMA DE MORSE

REDENÇÃO

2022

MARCELO HENRIQUE FELIX DA SILVA

CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS VIA LEMA DE MORSE

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO

2022

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Sistema de Bibliotecas da UNILAB  
Catalogação de Publicação na Fonte.

---

Silva, Marcelo Henrique Felix da.

S586c

Classificação de Pontos Críticos Via Lema de Morse / Marcelo Henrique Felix da Silva. - Redenção, 2022.  
55fl: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva.

1. Classificação. 2. Otimização. 3. Pontos Críticos. 4. Singularidades (Matemática). I. Silva, Joserlan Perote da. II. Título.

CE/UF/BSCA

CDD 621.51

---

MARCELO HENRIQUE FELIX DA SILVA

CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS VIA LEMA DE MORSE

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 29 / 07 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

Joseylan Perote da Silva

**Prof. Dr. Joseylan Perote da Silva (Orientador)**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Amanda A. F. Nunes

**Prof.<sup>a</sup> Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

João F<sup>co</sup> da S. Filho

**Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização. Em especial, aos meus pais Eldail e Luzinete por todo apoio e carinho.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por mais uma conquista e mais um sonho realizado.

Aos meus pais Francisco Eldail e Luzinete Felix pelo amor, carinho e educação dados ao longo dos anos. Aos meus irmãos Leandro, Romário e Jorge pelo companheirismo e pelos momentos compartilhados.

À minha tia Lucinete Felix pelo incentivo e apoio.

Ao meu orientador Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, por todo apoio, incentivo e pela excelente orientação, imprescindíveis para a realização deste trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof.<sup>a</sup> Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes e Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores da Graduação em Matemática da Unilab, pelos anos de contribuição em minha formação. Em especial, Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório, Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes e Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima pelas valorosas orientações ao longo de trabalhos em bolsas de Programas na Universidade.

Aos meus colegas de turma, em especial, Abymael, Alan, Aline, Douglas e Mateus, pelos diálogos, experiências e ensinamentos que pudemos compartilhar ao longo da graduação.

À CAPES, CNPq e Unilab, pelo apoio financeiro com a manutenção de bolsas e de auxílio.

“Tudo tem o seu tempo determinado, e há  
tempo para todo o propósito debaixo do céu.”  
Eclesiastes 3:1

## RESUMO

Neste trabalho, iremos tratar sobre a classificação de pontos críticos, tais classificações decorrem de um dos problemas centrais da Teoria de Singularidades. Podemos dizer que singularidade é algo singular, ou seja, que remete à ideia de algo raro, que seja único. Na matemática quando se estuda funções, essa questão se apresenta facilmente, onde é visto como descrever estas funções a partir dos seus pontos críticos. Uma consequência direta que se pode ter nesse estudo é a respeito de como o gráfico de uma determinada função se comporta e em particular é uma ferramenta para a busca na localização de valores máximos e mínimos em funções. Já na prática ocorrem em situações que exigem encontrar a solução para se maximizar ou minimizar alguma coisa, esta última aplicação por sua vez é mais conhecida como problema de otimização que quer dizer, encontrar a melhor maneira para se obter algo.

**Palavras-chave:** Classificação. Otimização. Pontos Críticos.

## ABSTRACT

In this work, we will deal with the classification of critical points, such classifications stem from one of the central problems of the Theory of Singularities. We can say that singularity is something singular, that is, it refers to the idea of something rare, that is unique. In mathematics when studying functions, this question presents itself easily, where it is seen how to describe these functions from their critical points. A direct consequence that can be had in this study is about how the graph of a given function behaves and in particular it is a tool for the search in the location of maximum and minimum values in functions. In practice, however, they occur in situations that require finding the solution to maximize or minimize something, this last application in turn is better known as an optimization problem, which means finding the best way to obtain something.

**Keywords:** Classification. Optimization. Critical Points.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Derivada parcial . . . . .	16
Figura 2 – Gráfico da função $f$ . . . . .	17
Figura 3 – Gráfico da função $g$ . . . . .	19
Figura 4 – Gráfico da função $h$ . . . . .	20
Figura 5 – Gráfico da função $\varphi$ . . . . .	21
Figura 6 – Ponto de Mínimo . . . . .	45
Figura 7 – Ponto de Sela . . . . .	45
Figura 8 – Ponto de Máximo . . . . .	45
Figura 9 – Umbílico elíptico . . . . .	49
Figura 10 – Umbílico hiperbólico . . . . .	49
Figura 11 – Umbílico parabólico . . . . .	49
Figura 12 – Gráfico da função $f$ . . . . .	52

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
Unilab	Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	12
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b> . . . . .	14
2.1	DERIVADAS PARCIAIS . . . . .	14
2.2	DERIVADAS DIRECIONAIS . . . . .	17
2.3	FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS . . . . .	22
2.4	SÉRIES DE TAYLOR . . . . .	31
<b>3</b>	<b>PONTOS CRÍTICOS</b> . . . . .	36
3.1	CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS . . . . .	36
3.2	O LEMA DE MORSE . . . . .	40
3.3	PONTOS CRÍTICOS DEGENERADOS . . . . .	45
3.4	APLICAÇÕES . . . . .	50
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	53
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	54

## 1 INTRODUÇÃO

Um dos mais produtivos e atraentes ramos da matemática nos dias atuais, é a Teoria de Singularidades. A Teoria de Singularidades não é uma teoria no sentido axiomático usual. Na verdade, é precisamente sua dimensão abrangente, suas vagas fronteiras e suas interações com outros ramos, não só da matemática, mas da ciência em geral que a tornam tão atraente.

É comum se pensar que a Teoria de Singularidades é um descendente direto do Cálculo Diferencial e uma vez que este é ferramenta, por excelência, para se estudar física, equações diferenciais e a geometria de curvas e superfícies é de se esperar que a Teoria de Singularidades tenha aplicações nestes ramos.

De certa forma, a Teoria de Singularidades é uma extensão de vasto alcance do estudo de funções em pontos de máximo e mínimo, neste caso as funções são substituídas por famílias de funções.

Hoje a Teoria de Singularidades é uma das sub-áreas mais desenvolvidas da matemática e ainda muito tem a ser feito, além disso, esta teoria possui diversas aplicações em variados campos, como por exemplo, física e robótica.

A melhor maneira de se introduzir a Teoria de Singularidades é mostrando em ação uma situação concreta, onde não há dúvida sobre o que está ocorrendo e também que requeira um mínimo necessário de conhecimento prévio, como por exemplo, em algumas situações geométricas que de uma maneira conveniente serão introduzidas.

Como bem explica Sena (2016), na matemática, há muitas singularidades. Uma singularidade é, por exemplo, o que acontece em situações como a “divisão por zero”. A singularidade marca um ponto de transição entre dois *domínios*, ou dois *mundos*, num ponto ou instante.

A palavra Singularidade é uma noção que tem a sua origem no vocábulo latino: *Singularitate*. Trata-se do estudo das características daquilo que é singular: pouco frequente, fora do comum, ou extraordinário. A singularidade, por conseguinte, é a qualidade que distingue algo de outras coisas do mesmo gênero. Ela pode ser descrita então como a qualidade que uma pessoa ou ser vivo pode possuir para diferenciar-se do restante de seus semelhantes. Por exemplo, podemos falar de singularidade de uma planta que apresenta um tipo de característica diferente do restante do seu tipo, ou de um animal que, por exemplo, em vez de ter uma cor, apresenta uma tonalidade diferente. No caso do ser humano, o conceito de singularidade é muito mais complexo, uma vez que pode ser atribuído às características físicas, bem como aos traços da personalidade e aí o limite é muito subjetivo e difícil de estabelecer.

No estudo de aplicações  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é um aberto do  $\mathbb{R}^n$  e  $f$  é de classe  $C^\infty$ , este conceito aparece naturalmente. Diremos que um ponto  $x \in U$  é um ponto crítico de  $f$  se a matriz das derivadas parciais calculadas nesse ponto  $x$  não tem posto máximo.

O objetivo inicial da Teoria de Singularidades foi justamente estudar esses pontos críticos e suas imagens por  $f$ , que são chamadas de singularidades de  $f$ . Este estudo teve como primeiro objetivo obter uma *classificação* dessas singularidades.

O que seria *classificação*? A classificação é a ação e o efeito de classificar (ordenar ou *dispor por classes*). A classificação biológica, por exemplo, é a *Taxonomia*. No seu sentido mais lato, trata-se da ciência da classificação, que consiste em ordenar os organismos em um sistema de classificação composto por hierarquia de grupos taxonômicos. O principal objetivo da taxonomia é organizar a árvore filogenética em um sistema de classificação. A classificação periódica, por sua vez, é aquela que corresponde à tabela periódica dos elementos. Esta é uma organização que, atendendo a diversos critérios, distribui os distintos elementos químicos de acordo com certas características. A tabela costuma ser atribuída a Dimitri Mendeleiev, quem se lembrou de ordenar os elementos com base na variação computacional das propriedades químicas.

Visto um pouco da aplicabilidade da classificação, agora estamos interessado em analisar o comportamento das funções em seus pontos críticos, fazendo uso de ferramentas que permitem essa análise.

No capítulo 2, deste trabalho apresentamos algumas preliminares que servem como base para a temática central do trabalho, a saber, Derivadas Parciais, Derivadas Direcionais, Funções Diferenciáveis e Séries de Taylor. Tópicos estes que se relacionam com a classificação buscada no capítulo seguinte.

No capítulo 3, abordamos sobre a teoria de pontos críticos, com resultados importantes na classificação de pontos críticos. Com ênfase para a classificação via Lema de Morse para os casos em que os pontos críticos são não degenerados e mencionando o resultado do *Splitting Lemma* para os casos em que os pontos críticos são degenerados.

Ainda no capítulo 3, tratamos de algumas aplicações que surgem diretamente quando tratamos sobre pontos críticos de uma função, que são os problemas de otimização, onde os mesmos são capazes de evidenciar através de problemas do cotidiano situações que recaiam em comportamento de máximos e mínimos de uma função.

## 2 PRELIMINARES

Neste capítulo, abordamos alguns tópicos que servem como base teórica para o estudo central do trabalho, tomando como norte, principalmente as obras de Lima (2015) e Apostol (1988).

### 2.1 DERIVADAS PARCIAIS

Ao nos depararmos com o estudo de funções reais de  $n$  variáveis, ou seja, definidas em subconjuntos do espaço  $\mathbb{R}^n$ , e para essas funções buscarmos uma noção de derivada que tenha propriedades similares às da derivada de uma função definida em um intervalo, a idéia mais comum que se apresenta é a de “derivada parcial”, que exibiremos agora.

No momento de derivação, onde se analisa o acréscimo  $f(a + h) - f(a)$  da função  $f$  com o acréscimo  $h$  dado ao ponto  $a$ , o mais conveniente para o domínio de uma função é considerarmos um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  pois, neste caso, dado  $a \in U$ , tem-se ainda  $a + h \in U$  para todo acréscimo suficientemente pequeno  $h$ .

Dessa forma apresentaremos a seguinte definição:

**Definição 2.1.** Seja,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real, definida em um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Dado o ponto  $a \in U$ , a  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  no ponto  $a$  (onde  $1 \leq i \leq n$ ) é o seguinte limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t},$$

quando esse limite acima existe. Em alguns casos, também se usa a seguinte notação  $\partial_i f(a)$ .

**Observação 2.1.** O uso da notação  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  terá o mesmo significado que  $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ , etc. O que importa nestas notações não é o “nome” da variável, que tanto pode ser  $x$ , como  $y$  ou  $z$ , etc, mas sim o que ela representa. O importante na verdade é o índice  $i$ : que faz menção a derivada de  $f$  em relação à sua  $i$ -ésima variável, independente de qual seja o símbolo usado para indicá-la. Com mais rigor, a melhor notação para se referir a  $i$ -ésima derivada parcial é  $\partial_i f$ , porém adotaremos  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  para manter a notação que é mais tradicional na literatura, também pelo aspecto visual e ainda pelo fato de que com esta notação se torna mais natural certas fórmulas, como por exemplo a Regra da Cadeia.

Na verdade, quando estamos trabalhando nos espaços de dimensões menores adotamos as letras  $x$ ,  $y$  e  $z$  para simbolizarmos as direções e fazemos uso da notação com o índice  $i$  para os casos das funções de muitas variáveis, a fim de facilitar a compreensão e por conveniência já que a quantidade de letras para ser usadas como símbolo são limitadas.

Na situação em que  $U \subset \mathbb{R}^2$ , uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é o que se chama uma “função real de duas variáveis reais”. Escrevemos  $f(x, y)$  para designar o seu valor no ponto

$z = (x, y)$ . Assim, sendo as derivadas parciais de  $f$  em um ponto qualquer  $c = (a, b) \in U$  podem ser representadas por  $\frac{\partial f}{\partial x}(c)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(c)$ , em vez de  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_2}(c)$ . Que são os seguintes limites:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b) - f(a, b)}{t} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(c) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t) - f(a, b)}{t}.$$

De modo análogo, podemos estender para o caso em que  $U \subset \mathbb{R}^3$ , uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma “função real de três variáveis reais”. Seu valor em um ponto qualquer  $p = (x, y, z)$  se escreve  $f(x, y, z)$  e suas derivadas parciais no ponto  $q = (a, b, c)$  podem ser denotadas como  $\frac{\partial f}{\partial x}(q)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(q)$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(q)$ , e assim temos os limites abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(q) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b, c) - f(a, b, c)}{t}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(q) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t, c) - f(a, b, c)}{t} \text{ e} \\ \frac{\partial f}{\partial z}(q) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c+t) - f(a, b, c)}{t}. \end{aligned}$$

Tendo em vista os dois casos mais simples, podemos estender essa mesma noção ao caso mais geral, com a seguinte definição:

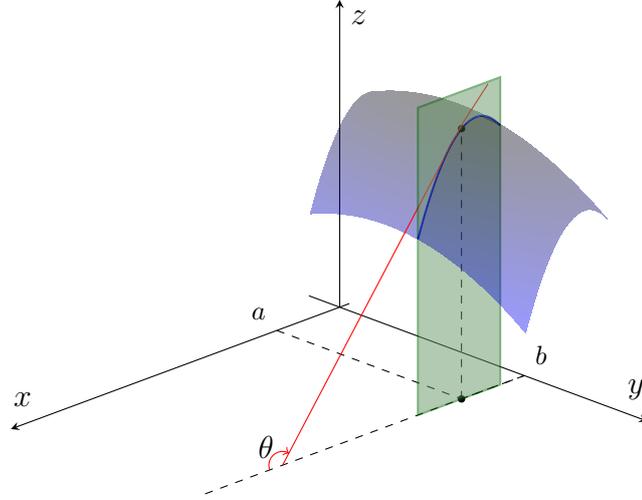
**Definição 2.2.** Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Dados o ponto  $a \in U$  e o inteiro  $i \in [1, n]$ , a imagem do caminho  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda(t) = a + te_i$ , é o que se chama “a reta que passa por  $a$  e é paralela ao  $i$ -ésimo eixo”.

Veja que  $\lambda(0) = a$ . Como  $U$  é aberto, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $-\varepsilon < t < \varepsilon \Rightarrow \lambda(t) = a + te_i \in U$ . A  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  no ponto  $a$  é a derivada, no ponto  $t = 0$ , da função  $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ , ou seja,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$ . Podemos dizer que  $f$ , quando restrita ao segmento de reta aberto  $J = (a - \varepsilon e_i, a + \varepsilon e_i)$ , torna-se uma função real,  $f(a + te_i)$ , da variável real  $t$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  é a derivada dessa função no ponto  $t = 0$ .

No caso, em que  $n = 2$ , o gráfico de  $f$  é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  e a restrição de  $f$  ao segmento de reta que passa pelo ponto  $c = (a, b)$  e é paralelo ao eixo das abcissas tem como gráfico a curva plana obtida nessa superfície fazendo  $y$  constante, igual a  $b$ . Logo  $\frac{\partial f}{\partial x}(c)$  é a inclinação da reta tangente a essa curva, no ponto  $P = (a, b, f(a, b))$ , relativamente ao plano horizontal.

De modo geral, o cálculo da  $i$ -ésima derivada parcial de uma função real  $f(x_1, \dots, x_n)$  é feito considerando todas as variáveis como se fossem constantes, exceto a  $i$ -ésima, e aplicando as regras já conhecidas de derivação com respeito a essa  $i$ -ésima variável.

**Figura 1** – Derivada parcial



Fonte: Próprio Autor (2022).

O comportamento da  $i$ -ésima derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  ao longo de um segmento de reta contido no domínio de  $f$  e paralelo ao  $i$ -ésimo eixo dá informações sobre o crescimento de  $f$  ao longo desse segmento. Assim, por exemplo, se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  está definida em  $U \subset \mathbb{R}^2$ , se o segmento de reta  $J = \{(a, t); 0 \leq t \leq 1\}$ , paralelo ao eixo dos  $y$ , está contido em  $U$  e, além disso  $\frac{\partial f}{\partial y}(z) > 0 \forall z \in J$ , então  $f$  é crescente sobre  $J$ , isto é,  $0 \leq s < t \leq 1 \Rightarrow f(a, s) < f(a, t)$ .

Nesse mesmo contexto, dizemos que uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  não depende da  $i$ -ésima variável quando, dados  $a = (a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$  e  $b = (a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n)$  em  $U$ , tem-se  $f(a) = f(b)$ . Em outras palavras, se  $a, b \in U$  com  $b = a + te_i$  então  $f(a) = f(b)$ .

**Definição 2.3.** Um conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  é chamado de  $i$ -convexo quando dados  $a, b \in U$ , tem-se a seguinte ocorrência  $b = a + te_i \Rightarrow [a, b] \subset U$ .

Resulta das definições acima a seguinte proposição:

**Proposição 2.1.** Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto  $i$ -convexo e  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função tal que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$  para todo  $x \in U$ . Então  $f$  é independente da  $i$ -ésima variável.

**Demonstração:** De fato, se  $a, b \in U$  com  $b = a + te_i$ , então a função  $\xi: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\xi(s) = f(a + se_i)$ , possui derivada  $\xi'(s) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + se_i) = 0 \forall s \in [0, t]$ , logo é constante, e assim  $f(a) = \xi(0) = \xi(t) = f(b)$ . ■

No plano, diz-se *horizontalmente*, ou *verticalmente*, *convexo*, em vez de 1-convexo e 2-convexo, respectivamente.

**Exemplo 2.1.** Seja  $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$  o semi-eixo positivo fechado das abscissas. O aberto  $U = \mathbb{R}^2 - X$  é horizontalmente (mas não verticalmente) convexo. A função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x, y) = x^2$  quando  $x > 0, y > 0$  e  $f(x, y) = 0$  quando  $x \leq 0$  ou  $y \leq 0$ , possui derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  em todos os pontos de  $U$ , mas  $f$  não é independente da segunda variável,  $y$ , pois se tomarmos  $x > 0, y > 0$ , teremos  $f(x, y) = x^2 > 0$  e

$$f(x, -y) = 0.$$

Percebe-se que as derivadas parciais por si só não permitem conclusões a cerca do comportamento “ $n$ -dimensional” da função. Por exemplo, a existência de todas as derivadas parciais em um ponto não implica a continuidade da função nesse ponto, como é o caso da função que veremos a seguir.

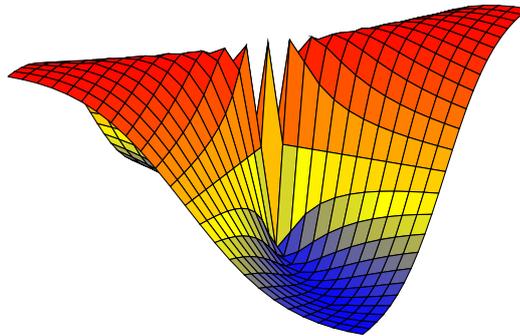
**Exemplo 2.2.** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

Se  $z = (x, y)$  não é a origem, temos  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$ . Na origem, vale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

Dessa forma,  $f$  possui derivadas parciais em todos os pontos do plano, e ainda assim,  $f$  é descontínua na origem. Se  $x^2 + y^2 \neq 0$ , então  $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta \cdot \sin \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo formado pelo semi-eixo positivo das abcissas e a semi-reta que passa na origem e contém o ponto  $(x, y)$ . Ao longo de cada uma dessas semi-retas,  $f(x, y)$  tem valor constante, dependendo da semi-reta, logo não existe  $\lim f(x, y)$  na origem.

**Figura 2** – Gráfico da função  $f$



Fonte: Próprio autor (2022).

## 2.2 DERIVADAS DIRECIONAIS

Observando o fato de que as derivadas parciais, desacompanhadas de hipóteses adicionais, fornecem apenas informações sobre a função ao longo de retas paralelas aos eixos, podemos estender a noção de derivada a outras direções além dessas. A esse estudo com mais direções é o que nos leva ao importante conceito de derivada direcional.

**Definição 2.4.** Sejam  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$  e  $v \in \mathbb{R}^n$ . A *derivada direcional* de  $f$  no ponto  $a$ , segundo o vetor  $v$ , é, por definição, o seguinte limite:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

quando esse limite acima existe.

Vale salientar então que as derivadas parciais tornam-se casos particulares das derivadas direcionais:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \text{derivada direcional de } f \text{ no ponto } a, \text{ segundo o vetor } e_i.$$

A derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$  é a derivada, no ponto  $t = 0$ , da função composta  $f \circ \lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é o caminho retilíneo,  $\lambda(t) = a + tv$ , para o qual se tem  $\lambda(0) = a$  e  $\lambda'(t) = v$  para todo  $t$ . Aqui,  $\varepsilon > 0$  é escolhido tão pequeno de modo que a imagem de  $\lambda$  esteja contida em  $U$ .

A função  $f$  do Exemplo 2.2 possui as derivadas direcionais  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$  para  $v = (\alpha, 0)$  ou  $v = (0, \beta)$ , as quais são nulas, mas, se tomarmos  $v = (\alpha, \beta)$ , com  $\alpha$  e  $\beta \neq 0$ , veremos que não existe  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$  pois, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t\alpha \cdot t\beta}{(t\alpha)^2 + (t\beta)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha \cdot \beta}{t(\alpha^2 + \beta^2)},$$

e o último limite acima, não existe.

Em nossa definição de  $\frac{\partial f}{\partial v}$  não supomos  $|v| = 1$ . Admitimos que  $v \in \mathbb{R}^n$  seja um vetor arbitrário porque desejamos que  $\frac{\partial f}{\partial v}$  dependa linearmente de  $v$ . Vejamos se isto realmente ocorre. Em primeiro lugar, se  $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$  então, existe  $\frac{\partial f}{\partial(\alpha v)}$  em um ponto  $a \in U$  se, e somente se, existe  $\frac{\partial f}{\partial v}$  e, no caso afirmativo, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha v)}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\alpha v) - f(a)}{t} = \alpha \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\alpha v) - f(a)}{t\alpha} = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

Por outro lado, o exemplo abaixo nos mostrará que a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v}$  pode existir em todos os pontos do domínio de  $f$ , segundo todos os vetores  $v \in \mathbb{R}^n$ , sem que se tenha necessariamente a seguinte ocorrência:

$$\frac{\partial f}{\partial(v+w)}(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) + \frac{\partial f}{\partial w}(a).$$

**Exemplo 2.3.** Seja  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Por um cálculo direto, a partir da definição, é possível mostrar que existem as derivadas dire-

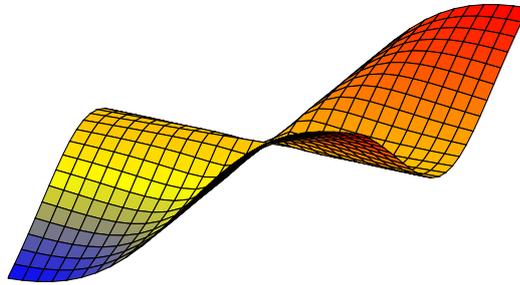
cionais  $\frac{\partial g}{\partial v}$  em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ , segundo qualquer vetor  $v = (\alpha, \beta)$ . Em particular, na origem, temos:

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t\alpha, t\beta)}{t} = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Evidentemente, para  $a = (0, 0)$  não vale  $\frac{\partial g}{\partial(v+w)}(a) = \frac{\partial g}{\partial v}(a) + \frac{\partial g}{\partial w}(a)$ .

A função  $g$  do Exemplo 2.3 é contínua em todos os pontos do plano. Isto é claro em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Na origem, basta observar que  $g(x, y) = y \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$ . Logo  $\lim_{x, y \rightarrow 0} g(x, y) = 0$ .

**Figura 3** – Gráfico da função  $g$



Fonte: Próprio autor (2022).

Note que não é verdade, que a existência das derivadas direcionais garanta a continuidade, como veremos no exemplo a seguir.

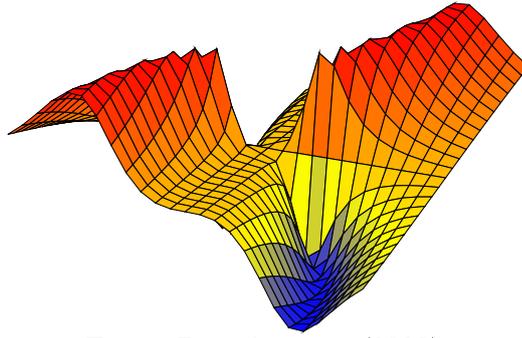
**Exemplo 2.4.** Seja  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Em

$\mathbb{R}^2 - \{0\}$ , a função  $h$  é contínua. Mas, note que,  $h(x, x^3) = \frac{1}{2} \forall x \neq 0$ , vemos que  $h$  é descontínua na origem. Verificando as derivadas direcionais, para todo  $v = (\alpha, \beta)$  temos:

$$\frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t\alpha, t\beta)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 \alpha^3 \beta}{t^7 \alpha^6 + t^3 \beta^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \alpha^3 \beta}{t^4 \alpha^6 + \beta^2} = 0.$$

Dessa forma, todas as derivadas direcionais  $\frac{\partial h}{\partial v}$  na origem existem e dependem linearmente de  $v$ . E o mesmo ocorre nos outros pontos  $c \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ , como se verifica mediante o cálculo elementar de  $\frac{\partial h}{\partial v}(c) = \xi'(0)$ , onde  $\xi(t) = h(c + tv)$ .

**Figura 4** – Gráfico da função  $h$



Fonte: Próprio autor (2022).

Uma outra propriedade desejável para um conceito adequado de derivada de uma função de  $n$  variáveis é que a composta de duas funções deriváveis seja ainda uma função derivável. O próximo exemplo mostra uma função contínua  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(z)$  existe para todo  $z$  e todo  $v$ , depende linearmente de  $v$ , mas  $\varphi \circ \lambda$  não é diferenciável para um certo caminho diferenciável  $\lambda$ .

**Exemplo 2.5.** Definamos  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Fora da origem, temos:

$$\varphi(x, y) = x \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^4 + y^2}} = x \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^4}}} \cdot \frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{x^4}{y^2} + 1}},$$

logo  $\lim_{x, y \rightarrow 0} \varphi(x, y) = 0$ . Assim,  $\varphi$  é contínua. Além disso, para todo  $v = (\alpha, \beta)$ , temos:

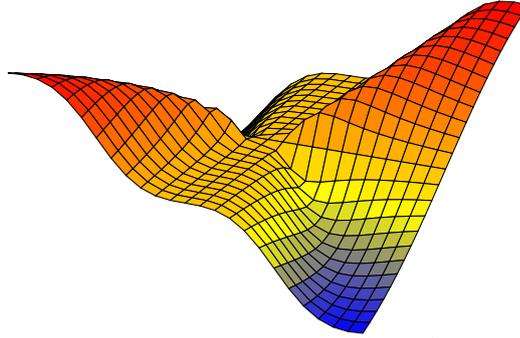
$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t\alpha, t\beta)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\alpha^3 \beta}{t^2 \alpha^4 + \beta^2} = 0.$$

Portanto existem na origem, e dependem linearmente de  $v$ , todas as derivadas direcionais  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ . Nos outros pontos  $c \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  chega-se à mesma conclusão calculando-se  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(c) = \xi'(0)$ , com  $\xi(t) = \varphi(c + tv)$ , por meio das regras básicas de derivação. No entanto, se consideramos o caminho  $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definido por  $\lambda(t) = \left(t, t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ ,  $\lambda(0) = (0, 0)$ , veremos que  $\lambda$  é diferenciável e não existe a derivada  $(\varphi \circ \lambda)'(0)$ . Com efeito, seria:

$$(\varphi \circ \lambda)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi\left(t, t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)}{1 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{t}\right)},$$

porém esse último limite acima não existe.

**Figura 5** – Gráfico da função  $\varphi$



Fonte: Próprio autor (2022).

A hipótese da existência de derivadas direcionais, por mais que seja fraca, não é inteiramente inútil. Ela permite demonstrar o Teorema do Valor Médio, o qual, para funções reais de  $n$  variáveis, é verdadeiro sob a forma de igualdade, como no caso de uma única variável.

**Teorema 2.1. (Teorema do Valor Médio).** *Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Suponhamos que o segmento de reta  $[a, a + v]$  esteja contido em  $U$ , que a restrição  $f|_{[a, a+v]}$  seja contínua e que exista a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ , segundo  $v$ , em todo ponto  $x \in (a, a + v)$ . Então existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que  $f(a + v) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v)$ .*

**Demonstração:** Definamos a função  $\xi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $\xi(t) = f(a + tv)$ . Pelas hipóteses feitas sobre  $f$ ,  $\xi$  é contínua em  $[0, 1]$  e derivável em  $(0, 1)$ . Pelo Teorema do Valor Médio para funções de uma variável real, existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que  $\xi(1) - \xi(0) = \xi'(\theta)$ . Mas  $\xi(1) = f(a + v)$ ,  $\xi(0) = f(a)$  e

$$\begin{aligned} \xi'(\theta) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi(\theta + t) - \xi(\theta)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + (\theta + t)v) - f(a + \theta v)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + \theta v + tv) - f(a + \theta v)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(a + \theta v), \end{aligned}$$

o que demonstra o teorema. ■

**Observação 2.2.** A existência de  $\frac{\partial f}{\partial v}$  em todo ponto de  $(a, a + v)$  assegura apenas a continuidade de  $f|_{(a, a+v)}$  mas não de  $f|_{[a, a+v]}$ , isso porque nem sempre nos extremos do intervalo conseguimos verificar essa possibilidade.

**Corolário 2.1.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e conexo. Se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  possui derivadas direcionais em todo ponto  $x \in U$  e  $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0$  para qualquer vetor  $v$ , então  $f$  é constante.*

**Demonstração:** Com efeito, fixando  $a \in U$ . A existência de  $\frac{\partial f}{\partial v}$  garante a continuidade da restrição  $f|_{[a, b]}$  para todo segmento de reta  $[a, b]$  contido em  $U$ . Resulta então do Teorema do Valor Médio que  $[a, b] \subset U$  implica  $f(b) = f(a)$ . Ora, qualquer ponto  $x \in U$  pode em virtude da conexidade do aberto  $U$  ser ligado ao ponto  $a$  por uma poligonal contida em  $U$ , com vértices  $a_0 = a, a_1, \dots, a_k = x$ . Temos sucessivamente  $f(a) = f(a_1) = \dots = f(x)$ .

Logo  $f(x) = f(a)$  para todo  $x \in U$ , donde  $f$  é constante. ■

### 2.3 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS

A noção de função diferenciável, que apresentaremos agora, é devida a Fréchet e Stolz. Ela constitui, para funções de  $n$  variáveis, a extensão adequada do conceito de função derivável de uma só variável.

**Definição 2.5.** Sejam  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $U \subset \mathbb{R}^n$ , e  $a \in U$ . Diremos que a função  $f$  é *diferenciável* no ponto  $a$  quando existirem constantes  $A_1, \dots, A_n$  tais que, para todo vetor  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ , com  $a + v \in U$ , se tenha:

$$f(a + v) = f(a) + A_1 \cdot \alpha_1 + \dots + A_n \cdot \alpha_n + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

**Definição 2.6.** Quando uma função  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $U$ , dizemos simplesmente que essa função  $f$  é *diferenciável*.

Se  $f$  é *diferenciável* no ponto  $a$  então, tomando  $v = te_i$ , temos  $\alpha_j = 0$  se  $j \neq i$  e  $\alpha_i = t$ . Logo, temos:

$$\frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = A_i + \frac{r(te_i)}{t} = A_i \pm \frac{r(te_i)}{|te_i|}.$$

Fazendo  $t \rightarrow 0$ , vemos que existe cada derivada parcial de  $f$  no ponto  $a$ , sendo  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = A_i$ . A definição abaixo é, portanto, equivalente à anterior.

**Definição 2.7.** Diremos que a função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $a \in U$  quando existirem as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$  e, além disso, para todo vetor  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  tal que  $a + v \in U$ , tivermos:

$$f(a + v) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot \alpha_n + r(v),$$

onde  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ .

Na igualdade acima, o “resto”  $r(v)$  é definido como sendo igual a  $f(a + v) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i$ . Esta definição pode ser dada para qualquer função que possua derivadas parciais. A essência da definição de diferenciabilidade é que, tomando  $r(v)$  desta maneira, tem-se  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ . Esta é a condição crucial, que deve ser verificada direta ou indiretamente sempre que quisermos provar que uma função é diferenciável.

De  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ , concluímos que  $\lim_{v \rightarrow 0} r(v) = 0$  pois  $r(v) = \frac{r(v)}{|v|}|v|$ . Daí resulta que toda função diferenciável em um ponto é contínua nesse ponto. Com efeito, para

$v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , temos:

$$\lim_{v \rightarrow 0} [f(a+v) - f(a)] = \lim_{v \rightarrow 0} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \alpha_i + r(v) \right] = 0.$$

A condição  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$  significa, entretanto, mais do que  $r(v) \rightarrow 0$ , ela quer dizer que  $r(v)$  tende a zero mais rapidamente do que  $v$ , isto é, para valores de  $v$  suficientemente próximos de zero, a norma de  $r(v)$  é uma fração arbitrariamente pequena da norma de  $v$ . Às vezes, isto se exprime dizendo-se que  $r(v)$  é um infinitésimo de ordem superior a  $v$ . Assim,  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  quando o acréscimo  $f(a+v) - f(a)$  é igual a uma função linear de  $v$ ,  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i$ , mais um resto infinitamente pequeno em relação a  $v$ .

Observe que a validade da afirmação  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$  não depende da norma adotada em  $\mathbb{R}^n$ .

Em certas ocasiões, é preferível usar, em vez de  $r(v)$ , a função  $\rho = \rho(v)$ , definida para os valores de  $v$  tais que  $a+v \in U$ , do seguinte modo:  $\rho(v) = \frac{r(v)}{|v|}$  se  $v \neq 0$  e  $\rho(0) = 0$ . Então, a função  $f$  é diferenciável no ponto  $a \in U$  se, e somente se, possui derivadas parciais nesse ponto e, para todo  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a+v \in U$ , vale:

$$f(a+v) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i + \rho(v) \cdot |v|, \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0.$$

Assim,  $f$  é diferenciável no ponto  $a$  se, e somente se, a função real  $\rho = \rho(v)$ , definida pela igualdade acima (se  $v \neq 0$ ) e por  $\rho(0) = 0$ , é contínua no ponto  $v = 0$ .

Para funções  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas num intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$ , diferenciabilidade é o mesmo que derivabilidade, pois de  $f(a+t) = f(a) + A \cdot t + \rho|t|$  se tira:

$$\rho = \pm \left| \frac{f(a+t) - f(a)}{t} - A \right|,$$

logo  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho = 0$  se, e somente se,  $A = f'(a)$ .

Seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável no ponto  $a \in U$ . Já vimos que  $f$  é contínua e possui derivadas parciais nesse ponto. Mostraremos agora que  $f$  admite derivada direcional segundo qualquer vetor  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , e vale a fórmula:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot \alpha_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot \alpha_n.$$

Com efeito, para todo  $t$  suficientemente pequeno, temos  $a + tv \in U$ . Pela

definição de diferenciabilidade, as derivadas parciais sendo consideradas no ponto  $a$  temos:

$$f(a + tv) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot t\alpha_i + \rho(tv) \cdot |t| \cdot |v|,$$

onde,

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \alpha_i \pm \rho(tv) \cdot |v|.$$

Como  $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(tv) = 0$ , segue-se a fórmula enunciada.

Resulta da expressão  $\frac{\partial f}{\partial v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \alpha_i$  que se  $f$  é diferenciável num ponto então

a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v}$ , nesse ponto, depende linearmente de  $v$ , isto é, não somente se tem  $\frac{\partial f}{\partial(\alpha v)} = \alpha \frac{\partial f}{\partial v}$  como também  $\frac{\partial f}{\partial(v+w)} = \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}$ .

Uma propriedade relevante das funções diferenciáveis é dada pela:

**Proposição 2.2. (Regra da Cadeia.)** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  abertos, em que  $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(U) \subset V$  e cada função coordenada  $f_k: U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $a \in U$ . Seja ainda  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável no ponto  $b = f(a)$ . Então a função composta  $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $a$  e suas derivadas parciais são,*

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

**Demonstração:** Seja  $U_0$  o conjunto dos vetores  $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$  tais que  $a+v \in U$ . Para  $v \in U_0$  e  $k = 1, \dots, n$ , temos:

$$f_k(a + v) = f_k(a) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cdot \alpha_i + \rho_k \cdot |v|. \quad (1)$$

onde cada  $\rho_k = \rho_k(v)$  é uma função definida em  $U_0$ , contínua no ponto 0, que se anula quando  $v = 0$ . Acima, e no que se segue, as derivadas  $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y_k}$  são consideradas nos pontos  $a$  e  $b$  respectivamente. Consideremos a aplicação  $w = (\beta_1, \dots, \beta_n): U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , contínua no ponto 0, cujas funções coordenada são definidas por:

$$\beta_k(v) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cdot \alpha_i + \rho_k \cdot |v|. \quad (2)$$

Adotando, por exemplo, a norma da soma, temos  $\frac{|\alpha_i|}{|v|} \leq 1$  se  $v \neq 0$ , logo cada  $\frac{|\beta_k|}{|v|}$ , e portanto a função  $\frac{|w|}{|v|}$ , é limitada numa vizinhança do ponto  $v = 0$ . Podemos afirmar, em virtude de (1), (2) e da diferenciabilidade de  $g$  no ponto  $b = f(a)$ , que, para

todo  $v \in U_0$ , vale:

$$(g \circ f)(a + v) = g(b + w) = g(b) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \beta_k + \sigma \cdot |w|,$$

onde  $\sigma = \sigma(v)$  é uma função real contínua no ponto 0, que se anula no ponto  $v = 0$  pois  $w$  também se anula nesse ponto. Usando a definição de  $\beta_k$ , obtemos,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + v) &= (g \circ f)(a) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k} \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \cdot \alpha_i + \rho_k |v| \right] + \sigma \cdot |w| \\ &= (g \circ f)(a) + \sum_{i=1}^m A_i \cdot \alpha_i + R, \end{aligned}$$

onde  $A_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$  e  $R = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \rho_k \cdot |v| + \sigma |w|$ .

Daí,

$$\frac{R}{|v|} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k} \rho_k + \sigma \cdot \frac{|w|}{|v|}.$$

Quando  $v$  tende a zero, sabemos que cada função  $\rho_k$  tende a zero, que o quociente  $\frac{|w|}{|v|}$  é limitado e que  $\lim_{v \rightarrow 0} \sigma = 0$ . Segue-se que  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{R}{|v|} = 0$ . Isto mostra que  $g \circ f$  é diferenciável no ponto  $a$  e suas derivadas parciais são os números  $A_i$ . ■

**Observação 2.3.** A notação clássica do Cálculo Diferencial, às vezes imprecisa porém bastante sugestiva, além de compatível com a prática então universal de enfatizar *grandezas* (“ $y$  é uma função de  $x$ ”) em vez de *aplicações* (“ $f$  leva  $x$  em  $y$ ”), seria a seguinte, para a Regra da Cadeia: os pontos de  $U$  seriam escritos como “ $x$ ” e os de  $V$  como “ $y$ ”; as funções  $f_k$  seriam escritas como  $y_k = y_k(x)$ . A derivada  $\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}$  seria a “derivada de  $g$  em relação à variável  $x_i$ ”, indicada com  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ . A Regra da Cadeia seria então:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i}.$$

**Corolário 2.2.** Se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $b$  e se  $\lambda: (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  é um caminho diferenciável no ponto  $a$ , com  $\lambda(a) = b$  e  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ , então a função composta  $f \circ \lambda: (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $a$ , e tem-se,

$$(f \circ \lambda)'(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(b) \cdot \lambda'_i(a).$$

Se escrevermos  $\lambda(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  então:

$$\lambda'(t) = \left( \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right).$$

Indicando com  $\frac{df}{dt}$  a derivada da função composta,  $f \circ \lambda: (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(\lambda(t)) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ , a Regra da Cadeia assume a forma clássica:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}.$$

**Corolário 2.3.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável no ponto  $a$ , com  $f(U) \subset I$ ,  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável no ponto  $b = f(a)$ . Então  $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $a$ , para cada  $i = 1, \dots, n$  vale:*

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = g'(b) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

**Demonstração:** Decorre da Regra da Cadeia que, se  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no ponto  $a \in U$ , ao calcularmos a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (f \circ \lambda)'(0)$ , não é necessário tomar  $\lambda(t) = a + tv$ . Em vez de nos restringirmos a um caminho retilíneo, podemos considerar qualquer caminho  $\lambda: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ , diferenciável no ponto  $a$ , com  $\lambda(0) = a$  e  $\lambda'(0) = v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e teremos ainda,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (f \circ \lambda)'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\lambda(t)) - f(a)}{t}.$$

Com efeito, pela Regra da Cadeia,

$$(f \circ \lambda)'(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \lambda'_i(0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot \alpha_i = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

■

Revejamos agora os Exemplos 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 à luz da definição de diferenciabilidade. As funções que examinamos foram as seguintes:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Nenhuma dessas funções é diferenciável na origem de  $\mathbb{R}^2$ :  $f$  porque não é contínua nem possui derivada direcional segundo todo vetor;  $g$  porque, embora sendo contínua e existindo  $\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0)$  segundo todo vetor  $v \in \mathbb{R}^2$ , esta derivada não depende linearmente de  $v$ ;  $h$  possui derivadas direcionais  $\frac{\partial h}{\partial v}$ , que dependem linearmente de  $v$ , mas não é contínua na origem; finalmente,  $\varphi$  é contínua em todo o plano, admite derivadas direcionais em todos os pontos do plano  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  que dependem linearmente de  $v$ , mas contraria a Regra da Cadeia porque, considerando o caminho  $\lambda(t) = \left(t, t^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{t}\right)\right)$ , a composta  $\varphi \circ \lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  não é derivável no ponto  $t = 0$ .

Estas são razões indiretas pelas quais as quatro funções acima não são diferenciáveis. A razão real é que, embora cada uma delas possua derivadas parciais na origem, elas não cumprem a condição:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[ f(\alpha, \beta) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \alpha - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \beta \right] = 0,$$

onde as derivadas parciais são tomadas no ponto  $(0, 0)$ . Acima,  $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |v|$  é a norma euclidiana do vetor  $v = (\alpha, \beta)$ .

**Definição 2.8.** Uma função complexa  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , definida num aberto  $U \subset \mathbb{C}$ , diz-se *derivável* no ponto  $z = x + iy \in U$  quando existe o seguinte limite,

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(z + H) - f(z)}{H} = A,$$

o quociente acima sendo tomado no sentido dos números complexos. O número complexo  $A = f'(z)$  chama-se a *derivada* da função complexa  $f$  no ponto  $z$ . A derivabilidade de  $f$  no ponto  $z = x + iy$  equivale a dizer que:

$$f(z + H) = f(z) + A \cdot H + r(H), \text{ onde } \lim_{H \rightarrow 0} \frac{r(H)}{|H|} = 0.$$

Sejam  $A = a + ib$ ,  $H = h + ik$  e  $r = r_1 + ir_2$ . Então  $f$  é derivável no ponto  $z = x + iy$  se, e somente se,

$$f(z + H) = f(z) + (ah - bk) + i(bh + ak) + r_1(H) + i \cdot r_2(H), \quad (3)$$

$$\text{onde } \lim_{H \rightarrow 0} \frac{r_1(H)}{|H|} = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{r_2(H)}{|H|} = 0.$$

Sejam  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  as partes real e imaginária de  $f$ , ou seja  $f(z) = u(z) + iv(z)$ . Separando a parte real e a parte imaginária na igualdade (3) acima, obtemos:

$$u(x+h, y+k) = u(x, y) + ah - bk + r_1(h, k), \text{ onde } \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{r_1(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

$$v(x+h, y+k) = v(x, y) + bh + ak + r_2(h, k), \text{ onde } \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{r_2(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Assim, se a função complexa  $f = u + iv$  é derivável no ponto  $z = x + iy$  então sua parte real  $u$  e sua parte imaginária  $v$  são diferenciáveis no ponto  $(x, y)$  e, além disso, cumprem as condições  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -b$  nesse ponto. Estas são as chamadas *equações de Cauchy-Riemann*.

Reciprocamente, se  $u, v: U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis no ponto  $z = (x, y)$  e satisfazem nesse ponto as equações de Cauchy-Riemann  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  e  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ , então podemos reverter cada passo do argumento anterior e concluir que a função complexa  $f = u + iv$  possui, no ponto  $z = x + iy$ , uma derivada complexa  $f'(z)$ , com  $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ .

**Definição 2.9.** A função complexa  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  diz-se *holomorfa* quando possui derivada  $f'(z)$  em todos os pontos do aberto  $U$ .

**Definição 2.10.** Uma função real  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , diz-se de *classe*  $C^1$  quando existem, em cada ponto  $x \in U$ , as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$  e as  $n$  funções  $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow \mathbb{R}$ , assim definidas, são contínuas.

De forma geral, para  $k$  inteiro maior que 0, temos

**Definição 2.11.** Uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é de *classe*  $C^k$  quando ela possuir derivadas parciais em todos os pontos de  $U$  e as funções  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}: U \rightarrow \mathbb{R}$  forem de *classe*  $C^{k-1}$ .

Usaremos a notação  $f \in C^k$ . Diremos que uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é de *classe*  $C^0$  quando ela for contínua. Escreveremos também  $f \in C^\infty$ , e diremos que  $f$  é de *classe*  $C^\infty$ , quando  $f \in C^k$  para todo  $k \geq 0$ . Evidentemente  $C^0 \supset C^1 \supset \dots \supset C^k \supset \dots \supset C^\infty$ , sendo todas estas inclusões estritas.

**Teorema 2.2.** *Se uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  possui derivadas parciais em todos os pontos do aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e cada uma delas é contínua no ponto  $c$ , então a função  $f$  é diferenciável no ponto  $c$ .*

**Demonstração:** Por simplicidade, consideraremos o caso  $n = 2$ . A situação geral se trata de modo análogo, apenas com notação mais complicada. Fixemos  $c = (a, b) \in U$  e

tomemos  $v = (h, k)$  tal que  $c + v \in U$ .

Seja,

$$r(v) = r(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}h - \frac{\partial f}{\partial y}k,$$

onde as derivadas são calculadas no ponto  $c = (a, b)$ . Podemos escrever:

$$r(v) = f(a + h, b + k) - f(a, b + k) + f(a, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}h - \frac{\partial f}{\partial y}k.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para funções reais de uma variável real, existem  $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$  tais que:

$$r(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 h, b + k) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b + \theta_2 k) \cdot k - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{r(v)}{|v|} &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta_1 \cdot h, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right] \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \\ &\quad + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b + \theta_2 \cdot k) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right] \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}. \end{aligned}$$

Ora,  $\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$  e  $\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$  estão, em valor absoluto, compreendidos entre 0 e 1. Com isso a continuidade das derivadas parciais nos dá então  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ , logo  $f$  é diferenciável. ■

**Corolário 2.4.** *Toda função de classe  $C^1$  é diferenciável.*

**Demonstração:** Segue imediatamente pelo Teorema 2.2. ■

**Observação 2.4.** Escrevendo,

$$r(v) = f(a + h, b + k) - f(a, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + f(a, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k,$$

vemos que existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que,

$$\frac{r(v)}{|v|} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \right] \frac{h}{|v|} + \left[ \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right] \frac{k}{|v|}.$$

Como  $\frac{h}{|v|}$  e  $\frac{k}{|v|}$  têm valor absoluto menor do que um, a primeira parcela da soma acima tem limite zero quando  $|v| \rightarrow 0$ , desde que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  seja contínua no ponto  $(a, b)$ . A segunda parcela também tem limite zero, em virtude da definição de derivada, sem que seja preciso supor  $\frac{\partial f}{\partial y}$  contínua. Assim, para que uma função  $f$ , de duas variáveis,

seja diferenciável num ponto, é suficiente que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  exista numa vizinhança do ponto e seja contínua no ponto, e que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  apenas exista no ponto em questão. Para funções de  $n$  variáveis, a diferenciabilidade num ponto é assegurada quando  $n - 1$  das suas derivadas parciais são contínuas no ponto e a derivada parcial restante apenas existe ali.

**Exemplo 2.6.** Um polinômio em duas variáveis é uma função  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , do tipo  $p(x, y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x^i y^j$ . Todo polinômio é evidentemente uma função contínua e possui

derivadas parciais  $\frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{i,j=1}^n i a_{ij} x^{i-1} y^j$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = \sum_{i,j=1}^n j a_{ij} x^i y^{j-1}$ . Tais derivadas são ainda

polinômios e portanto são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ . Logo todo polinômio  $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1$ . Então as derivadas de  $p$ , sendo polinômios, são de classe  $C^1$ , portanto  $p \in C^2$ . Repetindo o mesmo argumento, concluímos que  $p \in C^k$  para todo  $k$ , logo todo polinômio é, na realidade, uma função de classe  $C^\infty$ . Afirmações semelhantes podem ser feitas sobre um polinômio a  $n$  variáveis, que é uma função  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , do tipo  $p(x) = \sum_{i=1}^n a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ .

Sejam as funções  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^k$ , tal que  $U \subset \mathbb{R}^n$ , a soma  $f + g$ , o produto  $f \cdot g$  e o quociente  $\frac{f}{g}$  (se  $g(x) \neq 0$  para todo  $x$  no domínio de  $g$ ), são ainda funções de classe  $C^k$ .

**Exemplo 2.7.** Como exemplo de função diferenciável que não é de classe  $C^1$ , tomemos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(x) = x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  se  $x \neq 0$ , e  $f(0) = 0$ , lembrando que, para funções de uma variável, diferenciabilidade é o mesmo que existência da derivada.

**Exemplo 2.8.** O produto interno  $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , sendo um polinômio em  $2m$  variáveis, é uma função de classe  $C^\infty$ . Também é de classe  $C^\infty$  a função  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = |x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ , por ser ainda um polinômio, em  $n$  variáveis.

Pela Regra da Cadeia, a norma Euclidiana  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ , é de classe  $C^\infty$  quando restrita a  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . Na origem, a norma euclidiana não é diferenciável, nem sequer existem as derivadas parciais:  $\frac{\partial h}{\partial x_i}(0^+) = 1$  e  $\frac{\partial h}{\partial x_i}(0^-) = -1$ . Derivadas parciais laterais diferentes. Quanto às normas que não provêm de um produto interno, elas podem não ser diferenciáveis mesmo em pontos  $x \neq 0$ . Por exemplo, seja  $\xi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a norma da soma,  $\xi(x, y) = |x| + |y|$ . Nos pontos  $(x, 0)$  não existe  $\frac{\partial \xi}{\partial y}$  e nos pontos  $(0, y)$  não existe  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ .

Para concluir, registremos um importante corolário do Teorema 2.2 (e da Regra da Cadeia), segundo o qual  $g \circ f \in C^k$  desde que  $g \in C^k$  e cada função coordenada de  $f$

também seja de classe  $C^k$ .

**Corolário 2.5.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  abertos,  $f = (f_1, \dots, f_n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f(U) \subset V$  e cada função coordenada  $f_j: U \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^k$ . Seja ainda  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^k$ . Então a função composta  $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^k$ .*

**Demonstração:** Com efeito, pelo Corolário 2.4,  $g$  e cada  $f_j$  são diferenciáveis. (Estamos supondo  $k \geq 1$  pois o Corolário 2.5 é simples se  $k = 0$ .) Podemos então aplicar a Regra da Cadeia, segundo a qual, para todo  $i = 1, \dots, m$  e todo  $x \in U$ :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x),$$

ou seja, vale a igualdade de funções,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^n \left( \left( \frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) (x).$$

Suponhamos, por indução, que o Corolário 2.5 foi provado para classe  $C^{k-1}$ . Então, para cada  $j = 1, \dots, n$ , a função composta  $\frac{\partial g}{\partial y_j} \circ f$  é de classe  $C^{k-1}$ , o mesmo ocorrendo com  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  para todo  $i$ , já que  $f \in C^k$ . Como o produto de funções de classe  $C^{k-1}$  é ainda desta classe, cada parcela da soma acima é de classe  $C^{k-1}$ , donde a soma também é. Assim, todas as derivadas parciais de  $g \circ f$  são de classe  $C^{k-1}$ , portanto  $g \circ f \in C^k$ . ■

## 2.4 SÉRIES DE TAYLOR

Nesta seção abordaremos as Séries de Taylor em dois casos, inicialmente para funções de uma variável. Suponhamos que  $f$  admite derivadas até à ordem  $n$  no ponto  $x = 0$ , sendo  $n \geq 1$ , e tentemos determinar um polinômio  $P$  que coincida com  $f$  no ponto  $x = 0$ , bem como as respectivas derivadas até à ordem  $n$ . Devem então ser verificadas  $n + 1$  condições, a saber:

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0), \dots, P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0), \quad (4)$$

e assim ensaiamos um polinômio de grau  $n$  por exemplo:

$$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n, \quad (5)$$

com  $n + 1$  coeficientes a serem determinados servindo-nos das condições (4).

Primeiramente fazemos  $x = 0$  em (5) e determinamos  $P(0) = c_0$ , pelo que  $f(0) = c_0$ . Em seguida derivamos ambos os membros de (5), fazendo depois  $x = 0$  para determinamos  $P'(0) = c_1$ ; daqui resulta que  $c_1 = f'(0)$ . Derivando novamente (5) e

fazendo  $x = 0$ , obtemos  $P''(0) = 2c_2$  e assim  $c_2 = \frac{f''(0)}{2}$ . Depois de ter derivado  $k$  vezes, determinamos  $P^k = k!c_k$ , donde resulta a fórmula:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad (6)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . [Quando  $k = 0$ , interpretamos  $f^{(0)}(0)$  como significado  $f(0)$ ]. Este raciocínio prova que se existe um polinômio de grau menor ou igual à  $n$  que satisfaz a (4), então os seus coeficientes são necessariamente definidos por (6). (O grau de  $P$  será igual a  $n$  se e só se  $f^{(n)}(0) \neq 0$ ). Inversamente, é fácil verificar que o polinômio  $P$  cujos coeficientes são definidos por (6) satisfazem a (4) e por conseguinte temos o teorema seguinte.

**Teorema 2.3.** *Se  $f$  é uma função admitindo derivadas até à ordem  $n$  no ponto  $x = 0$ , então existe um e um só polinômio  $P$  de grau menor ou igual à  $n$  o qual satisfaz às  $n + 1$  condições:*

$$P(0) = f(0), P'(0) = f'(0), \dots, P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0).$$

Este polinômio é definido pela fórmula:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Do mesmo modo, podemos mostrar que existe um e um só polinômio de grau menor ou igual à  $n$  que coincide com  $f$  e as suas  $n$  primeiras derivadas num ponto  $x = a$ . Com efeito, em vez de (5), podemos escrever  $P$  ordenado segundo potências de  $(x - a)$  e proceder como antes. Se calculamos as derivadas em  $a$  em vez de 0, somos conduzidos ao polinômio,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k. \quad (7)$$

Este é o único polinômio de grau menor ou igual à  $n$  que verifica as condições:

$$P(a) = f(a), P'(a) = f'(a), \dots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a),$$

e chama-se o *polinômio* de Taylor em honra ao matemático Brook Taylor (1685-1731). Com maior rigor dizemos que o polinômio (7) é o *polinômio de Taylor de grau  $n$  gerado por  $f$  no ponto  $a$* .

É conveniente usar uma notação que indique a dependência do polinômio de Taylor  $P$  a respeito de  $f$  e  $n$ . Indicaremos esta dependência escrevendo  $P = T_n f$  ou  $P = T_n(f)$ . O símbolo  $T_n$  é chamado o operador de Taylor de grau  $n$ . O valor desta função em  $x$  representa-se por  $T_n f(x)$  ou por  $T_n[f(x)]$ . Se desejamos também indicar a

dependência a respeito de  $a$ , escrevemos  $T_n f(x; a)$ , em vez de  $T_n f(x)$ .

**Exemplo 2.9.** Quando  $f$  é a função exponencial,  $f(x) = E(x) = e^x$ , temos  $E^{(k)}(x) = e^x$  para todo o  $k$ , pelo que  $E^{(k)}(0) = e^0 = 1$  e o polinômio de Taylor de grau  $n$  gerado por  $E$  em 0 é dado pela fórmula:

$$T_n E(x) = T_n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Se desejamos um polinômio que coincide com  $E$  e as suas derivadas no ponto  $a = 1$ , temos  $E^{(k)}(1) = e$  para todo o  $k$ , pelo que (7) nos dá,

$$T_n E(x; 1) = \sum_{k=0}^n \frac{e}{k!} (x-1)^k.$$

**Exemplo 2.10.** Quando  $f(x) = \text{sen } x$ , temos  $f'(x) = \cos x$ ,  $f''(x) = -\text{sen } x$ ,  $f'''(x) = -\cos x$ ,  $f^{(4)}(x) = \text{sen } x$ , etc., de maneira que  $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$  e  $f^{(2n)}(0) = 0$ . Assim aparecem somente potências ímpares de  $x$  nos polinômios de Taylor gerados pela função seno em 0. O polinômio de Taylor de grau  $2n + 1$  tem a forma:

$$T_{2n+1}(\text{sen } x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

**Exemplo 2.11.** Argumentando como no Exemplo 2.10, verificamos que o polinômio de Taylor gerado pelo cosseno em 0 contém unicamente potências pares de  $x$ . O polinômio de grau  $2n$  é dado por:

$$T_{2n}(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Observa-se que o polinômio de Taylor  $T_{2n}(\cos x)$  é a derivada do polinômio de Taylor  $T_{2n+1}(\text{sen } x)$ . Isto deve-se ao fato de que o próprio cosseno é a derivada do seno.

Agora continuaremos a tratar sobre Séries de Taylor, para o caso em que as funções são de duas variáveis, caso seja necessário se trabalhar com as Séries de Taylor para funções de três ou mais variáveis o raciocínio segue de maneira análoga.

**Definição 2.12.** Seja  $A \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto,  $(x_0, y_0) \in A$ . Consideremos uma função  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^{n+1}$  em  $A$ . Definimos o **polinômio de Taylor de grau  $n$**  associado a função  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  como sendo o polinômio dado por:

$$p_n(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) \quad (8)$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j}(x_0, y_0) (x - x_0)^{n-j} (y - y_0)^j.$$

**Observação 2.5.**

- (a) A expressão (8) é conhecida como **Fórmula de Taylor** de ordem  $n$  associado a função  $f$  no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ .
- (b) Note que o polinômio de Taylor de grau 1 associado a função  $f$  no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  será dado por:

$$p_1(x, y) = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0),$$

cujo gráfico é o gráfico do plano tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ .

- (c) Já o polinômio de Taylor de grau 2 associado a função  $f$  no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  será dado por:

$$p_2(x, y) = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)(y - y_0)^2 \right),$$

que será a quádrlica que melhor aproxima o gráfico da função  $f$  perto do ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ .

**Exemplo 2.12.** Encontre o polinômio de Taylor de ordem 2,  $p_2(x, y)$ , associado a função  $f$  no ponto  $P_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$ , onde a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x, y) = x \operatorname{sen}(y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Solução:** A função acima é de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$ . Logo podemos considerar o polinômio de Taylor de qualquer ordem associado a função  $f$  em qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$ . Em particular, consideraremos o polinômio de Taylor de ordem 2 associado a função  $f$  no ponto  $P_0$  acima fixado.

Para isto precisamos calcular todas as derivadas parciais da função  $f$  até a segunda ordem no ponto  $P_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$ . Fazendo isso, teremos:

$$\begin{aligned} f(x, y) = x \operatorname{sen}(y) &\Rightarrow f(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sen}(y) &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \operatorname{cos}(y) &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0 &\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \cos(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x \operatorname{sen}(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Assim,

$$p_2(x, y) = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) \\ + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)(y - y_0)^2 \right),$$

e que ao aplicarmos no ponto  $P_0 = (0, 0)$  irá resultar em:

$$p_2(0, 0) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y \\ + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right) = \frac{1}{2}(2xy) = xy, \text{ onde } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

■

### 3 PONTOS CRÍTICOS

Um dos problemas centrais da Teoria de Singularidades é a classificação de tipos de pontos críticos, neste capítulo inicia-se esta classificação provando-se o Lema de Morse, que classifica pontos críticos para qualquer número de variáveis. Estes pontos críticos serão chamados pontos críticos de Morse.

#### 3.1 CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$ , isto é, uma função que possui derivada de todas as ordens e cada uma dessas derivadas é uma função contínua.

**Definição 3.1.** Um ponto  $u \in \mathbb{R}^n$  é dito um ponto crítico de  $f$  se as derivadas parciais de  $f$  se anulam em  $u$ , isto é, se  $\frac{\partial f(u)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(u)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(u)}{\partial x_n} = 0$ , onde  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . O valor  $f(u)$  é então chamado um valor crítico de  $f$ .

Geometricamente, pontos críticos ocorrem quando o gráfico de  $f$  possui uma tangente horizontal. Se  $n = 1$ , ou seja, tem-se uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , os pontos críticos de  $f$  são classificados como máximo local, mínimo local e pontos de inflexão.

Para  $n = 2$ , quando  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , existem mais possibilidades. Os mais comuns são os máximos, mínimos e as selas. Exemplos destes casos são dados respectivamente por,  $f(x, y) = -x^2 - y^2$ ;  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

Observe que nestes três casos o ponto crítico é a origem. Já que se calcularmos as derivadas parciais e verificarmos as condições, percebemos que em  $(0, 0)$  é justamente onde se tem essa ocorrência. Faremos essa verificação a seguir de que os pontos críticos ocorrem de fato na origem.

**Exemplo 3.1.** Considere a função  $f(x, y) = -x^2 - y^2$  e verifiquemos a ocorrência de pontos críticos.

Para esta função  $f(x, y) = -x^2 - y^2$ , temos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

e de fato, temos que a condição de zerar as derivadas parciais ocorrem quando:

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } -2y = 0 \Rightarrow y = 0,$$

e assim, mostrando que a origem é o ponto crítico para função  $f(x, y) = -x^2 - y^2$ .

De modo, análogo ao caso da função acima, podemos mostrar que a origem é de fato onde se localiza os pontos críticos para as demais funções mencionadas anteriormente. Vejamos a seguir:

**Exemplo 3.2.** Considere a função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e verifiquemos a ocorrência de pontos críticos.

Para esta função  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , temos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

e de fato, temos que a condição de zerar as derivadas parciais ocorrem quando:

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } 2y = 0 \Rightarrow y = 0,$$

e assim, mostrando que a origem é o ponto crítico para função  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Por fim, examinaremos o último destes exemplos que foi mencionado.

**Exemplo 3.3.** Considere a função  $f(x, y) = x^2 - y^2$  e verifiquemos a ocorrência de pontos críticos.

Para esta função  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , temos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

e de fato, temos que a condição de zerar as derivadas parciais ocorrem quando:

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } -2y = 0 \Rightarrow y = 0,$$

e assim, mostrando que a origem é o ponto crítico para função  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

Existe, entretanto uma grande variedade de tipos mais complicados de funções, onde a análise de pontos críticos não é tão simples. Por exemplo, as funções  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ;  $f(x, y) = x^2$ ;  $f(x, y) = x^2y^2$ .

Destes três últimos a função  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  é a menos complicada, no sentido de que o ponto crítico é isolado, ou seja, suficientemente próximo a ele não existe outro ponto crítico.

Nos outros dois casos, a origem não é um ponto crítico isolado: no caso  $f(x, y) = x^2$  tem-se uma reta de pontos críticos e no caso  $f(x, y) = x^2y^2$  têm-se duas retas de pontos críticos.

Vejamos com mais detalhes esses exemplos a seguir:

**Exemplo 3.4.** Considere a função  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  e verifiquemos a ocorrência de pontos críticos.

Para esta função  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ , temos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy,$$

e teremos que a condição de zerar as derivadas parciais ocorrem quando:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 0 \\ -6xy = 0 \end{cases},$$

e assim, implicando que a única solução para esse sistema é na origem, e que neste caso é o ponto crítico para função  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .

**Exemplo 3.5.** Considere a função  $f(x, y) = x^2$  e verifiquemos a ocorrência de pontos críticos.

Para esta função  $f(x, y) = x^2$ , temos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

e assim, temos que a condição de zerar as derivadas parciais ocorrem quando:

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0,$$

e dessa forma, mostrando que não só a origem é ponto crítico mas todos os pontos do eixo  $y$  são pontos críticos para a função  $f(x, y) = x^2$ , e com isso concluimos que a origem se trata de um ponto crítico não isolado.

**Exemplo 3.6.** Considere a função  $f(x, y) = x^2y^2$  e verifiquemos a ocorrência de pontos críticos.

Para esta função  $f(x, y) = x^2y^2$ , temos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y,$$

e assim, temos que a condição de zerar as derivadas parciais ocorrem quando:

$$\begin{cases} 2xy^2 = 0 \\ 2x^2y = 0 \end{cases},$$

e dessa forma, a origem é uma solução para esse sistema, logo em  $(0, 0)$  temos um ponto crítico, mas também se tivermos pontos na forma  $(x, 0)$  e  $(0, y)$  estes também serão solução para o sistema e assim mostrando que não só a origem é ponto crítico mas todos os pontos dos eixos  $x$  e  $y$  são pontos críticos para a função  $f(x, y) = x^2y^2$ , e com isso concluimos que a origem se trata de um ponto crítico não isolado.

Apesar de aparecerem em situações tão simples e corriqueiras, os pontos críticos não isolados não ocorrem com frequência nas aplicações, e além disso, o estudo de pontos críticos não isolados possui um nível de complexidade elevado, assim aqui nesse trabalho trataremos as situações em que as singularidades são isoladas.

A distinção mais importante, entretanto, se faz entre pontos críticos não degenerados e pontos críticos degenerados.

**Definição 3.2.** Seja  $u \in \mathbb{R}^n$  e  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Considere que  $u$  seja um ponto crítico de  $f$ . Se a matriz Hessiana de  $f$  em  $u$  possui determinante não-nulo, então  $u$  é um ponto crítico não degenerado de  $f$ . Caso contrário,  $u$  é um ponto crítico degenerado de  $f$ .

A matriz Hessiana de  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  em um ponto  $u \in \mathbb{R}^n$  é a matriz quadrada de ordem  $n$  dada por,

$$Hess(f)_u = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j} \right|.$$

**Exemplo 3.7.** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Assim, a matriz que faremos uso para obter o determinante será:

$$Hess(f)_u = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \quad (9)$$

onde,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \text{ e as derivadas segundas serão,}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2,$$

logo, o determinante será dado pela seguinte matriz:

$$Hess(f)_u = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},$$

mas como já sabemos que o ponto crítico dessa função ocorre na origem pelo exemplo 3.2, temos que a matriz Hessiana da função  $f$  calculada na origem será:

$$Hess(f)_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Esta matriz tem determinante igual a quatro, então pela Definição 3.2 a origem é um ponto crítico não degenerado da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Por outro lado, se considerarmos o seguinte exemplo:

**Exemplo 3.8.** Seja a função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .

De modo, análogo ao que fizemos no exemplo acima, fazendo uso do modelo de determinante (9), precisaremos das derivadas parciais de segunda ordem da função, que obteremos a seguir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy \text{ e as derivadas segundas serão,}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6y \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x,$$

assim, a matriz que nos permitirá a classificação será:

$$Hess(f)_u = \begin{vmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{vmatrix},$$

pelo exemplo 3.4, sabemos que o ponto crítico dessa função ocorre na origem, logo aplicando esse determinante na origem segue que:

$$Hess(f)_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

cujo determinante é nulo.

Desta forma pela definição 3.2 a origem é um ponto crítico degenerado para a função  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .

Pode-se provar que pontos críticos não degenerados são sempre isolados, porém a recíproca não é verdadeira, ou seja, nem toda singularidade isolada se trata de um ponto crítico não degenerado.

### 3.2 O LEMA DE MORSE

Os pontos críticos não degenerados são completamente classificados por um teorema, conhecido na literatura matemática como Lema de Morse.

**Teorema 3.1. (Lema de Morse):** *Seja  $u \in \mathbb{R}^n$  um ponto crítico não degenerado da função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ . Então existe uma mudança de coordenadas  $\psi$  em  $\mathbb{R}^n$ , isto é, uma função  $\psi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $U$  é uma vizinhança do ponto  $u$ , tal que a função  $f \circ \psi: U \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por,*

$$(f \circ \psi)(u) = f(u) - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_l^2 + y_{l+1}^2 + \cdots + y_n^2,$$

para todo  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in U$ ,  $1 \leq l \leq n$ .

Antes de provar o Lema de Morse, enunciaremos um lema que será usado na demonstração do mesmo.

**Lema 3.1.** *Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$  em uma vizinhança da origem, com  $f(0) = 0$ . Então existem funções  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ , definidas em uma vizinhança da origem tais que  $f = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  com  $f_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} = 0$ .*

A seguir, enunciaremos e provaremos o lema que contempla o Lema 3.1 para o caso em que  $n = 2$ .

**Lema 3.2.** *Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$  em uma vizinhança da origem.*

1. *Se  $f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  em  $(0, 0)$ , então existem funções  $g_1, g_2, g_3$ , definidas*

em uma vizinhança de  $(0, 0)$ , tais que  $f = x^2g_1 + xyg_2 + y^2g_3$ , para  $x, y \in \mathbb{R}$ .

2. Se  $f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  em  $(0, 0)$ , então existem funções  $g_1, g_2, g_3, g_4$ , definidas em uma vizinhança de  $(0, 0)$ , tais que  $f = x^3g_1 + x^2yg_2 + xy^2g_3 + y^3g_4$ , para  $x, y \in \mathbb{R}$ .

3. Se  $f$  é como no item 2, então existem funções  $g_1, g_2$ , definidas em uma vizinhança de  $(0, 0)$ , tais que  $f = x^2g_1 + y^2g_2$ .

**Demonstração:**

1. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  em  $(0, 0)$ , para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Pelo Lema 3.1 existem funções  $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas em uma vizinhança da origem tais que  $f = xf_1 + yf_2$ , com  $f_1(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$  e  $f_2(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$ .

Agora, pode-se aplicar o Lema 3.1 à função  $f_1$ , obtendo-se funções  $f_{11}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_{12}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas em uma vizinhança de  $(0, 0)$  tais que  $f_1 = xf_{11} + yf_{12}$ . Analogamente, aplicando o Lema 3.1 à função  $f_2$ , tem-se  $f_2 = xf_{21} + yf_{22}$ .

Assim,

$$f = x(xf_{11} + yf_{12}) + y(xf_{21} + yf_{22}) = x^2f_{11} + xyf_{12} + xyf_{21} + y^2f_{22},$$

e portanto resultando em

$$f = x^2f_{11} + xy(f_{12} + f_{21}) + y^2f_{22}.$$

Desta maneira, existem funções  $g_1, g_2, g_3$ , definidas em uma vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^2$  tais que  $f = x^2g_1 + xyg_2 + y^2g_3$ , que é o resultado desejado.

2. Tem-se agora  $f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  em  $(0, 0)$ , para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Do item anterior tem-se que  $f = x(xf_{11} + yf_{12}) + y(xf_{21} + yf_{22})$ . Desta forma  $f_{11}(0) = \frac{\partial f_1(0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^2} = 0$ , por hipótese. Aplicando o Lema 3.1 à função  $f_{11}$ , consegue-se obter funções  $\bar{f}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\bar{f}_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definidas em uma vizinhança de  $(0, 0)$  tais que  $f_{11} = x\bar{f}_1 + y\bar{f}_2$ .

Temos  $f_{12}(0) = \frac{\partial f_1(0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x \partial y}$ , pois  $f$  é de classe  $C^2$ .

Assim  $f_{12}(0) = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x \partial y} = 0$ , por hipótese. Aplica-se, então, o Lema 3.1 à função  $f_{12}$ ; logo se escreve  $f_{12} = x\bar{f}_{11} + y\bar{f}_{12}$ , onde  $\bar{f}_{11}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\bar{f}_{12}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são definidas em uma vizinhança de  $(0, 0)$ .

Também  $f_{21}(0) = \frac{\partial f_2(0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(0)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x \partial y} = 0$ , por hipótese. Pelo Lema 3.1 aplicado à função  $f_{21}$ , tem-se  $f_{21} = x\bar{f}_{21} + y\bar{f}_{22}$ , onde  $\bar{f}_{21}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\bar{f}_{22}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são definidas em uma vizinhança de  $(0, 0)$ .

Finalmente,  $f_{22}(0) = \frac{\partial f_2(0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(0)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial y^2} = 0$ , por hipótese. Então pelo Lema 3.1 escreve-se  $f_{22} = x\widehat{f}_1 + y\widehat{f}_2$ , onde  $\widehat{f}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\widehat{f}_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são definidas em uma vizinhança de  $(0, 0)$ .

Daí,

$$f = x(x\overline{f}_1 + y\overline{f}_2) + y(x\overline{f}_{11} + y\overline{f}_{12}) + y(x\overline{f}_{21} + y\overline{f}_{22}) + y(x\widehat{f}_1 + y\widehat{f}_2),$$

trabalhando-se esta expressão, teremos:

$$f = x(x^2\overline{f}_1 + xy\overline{f}_2 + yx\overline{f}_{11} + y^2\overline{f}_{12}) + y(x^2\overline{f}_{21} + xy\overline{f}_{22} + yx\widehat{f}_1 + y^2\widehat{f}_2),$$

$$f = x^3\overline{f}_1 + x^2y\overline{f}_2 + x^2y\overline{f}_{11} + xy^2\overline{f}_{12} + x^2y\overline{f}_{21} + xy^2\overline{f}_{22} + xy^2\widehat{f}_1 + y^3\widehat{f}_2,$$

$$f = x^3\overline{f}_1 + x^2y(\overline{f}_2 + \overline{f}_{11} + \overline{f}_{21}) + xy^2(\overline{f}_{12} + \overline{f}_{22} + \widehat{f}_1) + y^3\widehat{f}_2,$$

e portanto se observa que existem funções  $g_1, g_2, g_3, g_4$ , definidas em uma vizinhança da origem, tais que  $f = x^3g_1 + x^2yg_2 + xy^2g_3 + y^3g_4$ , como se queria demonstrar.

**3.** Tem-se  $f$  como no item anterior. Desta forma pode-se escrever  $f$  da seguinte maneira,  $f = x^2(xg_1 + yg_2) + y^2(xg_3 + yg_4)$ .

Então existem funções  $g_1, g_2$  definidas em uma vizinhança de  $(0, 0)$  tais que  $f = x^2g_1 + y^2g_2$ , o que demonstra o item 3. ■

Agora faremos a demonstração do Lema de Morse para o caso em que  $n = 2$ , o caso geral segue exatamente a mesma linha de raciocínio.

**Demonstração:** Pode-se supor, sem perda de generalidade, que o ponto crítico não degenerado  $u \in \mathbb{R}^2$  é a origem, ou seja,  $u = (0, 0)$ .

Como  $u$  é um ponto crítico da função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  deve-se ter  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  em  $(0, 0)$ . Desenvolvendo a função  $f$  em série de Taylor, até a ordem 2, em torno do ponto  $(0, 0)$  obtém-se (note que  $f$  é de classe  $C^\infty$ ):

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}(y-0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2}(x-0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}(xy-0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}(yx-0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2}(y-0)^2 + g(x, y),$$

como  $f$  é de classe  $C^\infty$ , vamos ter que  $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}(xy-0) = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}(yx-0)$ , logo:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}(x-0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}(y-0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2}(x-0)^2 + 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}(xy-0) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2}(y-0)^2 + g(x, y),$$

Assim,

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}(x - 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}(y - 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2}(x - 0)^2 \\ + \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}(xy - 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2}(y - 0)^2 + g(x, y),$$

onde  $g(x, y)$  são os termos de ordem superior no desenvolvimento.

Como  $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$ , tem-se  $f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + g(x, y)$ , onde  $a = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2}$ ,  $b = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}$  e  $c = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2}$ . Observe que como  $f$  é de classe  $C^2$ , se tem que  $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}$ .

Note que  $f(0, 0) = f(0, 0) + g(0, 0)$ , logo  $g(0, 0) = 0$ . Note também que

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial y} \text{ e portanto } \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} = 0$$

$$\text{e } \frac{\partial g(0, 0)}{\partial y} = 0. \text{ Temos também, } \frac{\partial^2 g(0, 0)}{\partial x^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 g(0, 0)}{\partial y^2} = 0.$$

Assim,  $g$  e todas as suas derivadas de primeira e segunda ordem se anulam em  $(0, 0)$ .

A hipótese de que  $u = (0, 0)$  é um ponto crítico não degenerado de  $f$  é equivalente à condição  $b^2 - ac \neq 0$ , uma vez que:

$$Hess(f)_{(0,0)} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix},$$

então o determinante de  $Hess(f)_{(0,0)}$  é igual a  $ac - b^2$  que é diferente de zero, pois  $(0, 0)$  é ponto crítico não degenerado. Observe que  $ac - b^2 \neq 0$  equivale a  $b^2 - ac \neq 0$ .

Assim, se  $a \neq 0$  pode-se completar quadrados na parte quadrática de  $f$  obtendo-se,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a \left( x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{a} \right) y^2.$$

Também se  $c \neq 0$ , tem-se:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = c \left( y + \frac{b}{c}x \right)^2 + \left( a - \frac{b^2}{c} \right) x^2.$$

Se  $a = c = 0$ , então  $b \neq 0$  e assim pode-se escrever,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 2bxy = \frac{b}{2} [(x+y)^2 - (x-y)^2].$$

No caso em que  $a \neq 0$ , faz-se a seguinte mudança de coordenadas,

$$X = \left(x + \frac{b}{a}y\right) \sqrt{a}, \quad Y = y \left| \frac{ac - b^2}{a} \right|^{\frac{1}{2}},$$

e então a parte quadrática de  $f$  toma a forma  $\pm X^2 \pm Y^2$ .

Tem-se que a aplicação  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\phi(x, y) = (X, Y)$  é invertível. Na verdade  $\phi$  é um difeomorfismo, ou seja, que é diferenciável, invertível e sua inversa é diferenciável.

Fórmulas semelhantes se verificam para os outros dois casos; assim deduz-se que existe uma mudança de coordenadas  $\psi$  em  $\mathbb{R}^2$  (ou seja, um difeomorfismo local) tal que a composta  $f \circ \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tem a forma  $(x, y) \mapsto d \pm x^2 \pm y^2 + h(x, y)$ , onde  $d = f(0, 0)$ .

Observe que os sinais  $\pm$  são independentes e, portanto existem quatro casos. Também se tem que  $h$  e todas as suas derivadas de ordem 1 e 2 se anulam em  $(0, 0)$ .

Aplicando o item 3 do Lema 3.2 à função  $h$ , obtêm-se funções  $h_1$  e  $h_2$  definidas em uma vizinhança de  $(0, 0)$  tais que  $h = x^2 h_1 + y^2 h_2$  e então a expressão acima de  $f \circ \psi$  se torna:

$$(x, y) \mapsto d \pm x^2(1 + h_1) \pm y^2(1 + h_2),$$

onde  $h_1$  e  $h_2$  se anulam em  $(0, 0)$ .

Para valores pequenos de  $x$  e  $y$ ,  $1 + h_1(x, y)$  e  $1 + h_2(x, y)$  são não nulos. Colocando  $X = x\sqrt{1 + h_1(x, y)}$  e  $Y = y\sqrt{1 + h_2(x, y)}$ , tem-se que a aplicação  $f \circ \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $(x, y) \mapsto d \pm X^2 \pm Y^2$  é um difeomorfismo em uma vizinhança de  $(0, 0)$ .

Usando esta mudança de coordenadas obtêm-se as seguintes formas normais:

$$(x, y) \mapsto d + X^2 + Y^2,$$

$$(x, y) \mapsto d + X^2 - Y^2,$$

$$(x, y) \mapsto d - X^2 - Y^2,$$

onde  $d = f(0, 0)$ . Isto conclui a demonstração. ■

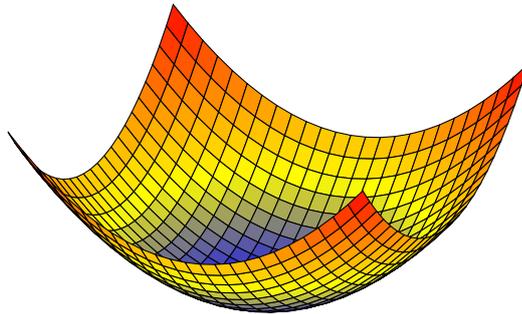
Veja a seguir algumas observações referentes ao Lema de Morse.

**Observação 3.1.** Não é necessário incluir a forma  $d - X^2 + Y^2$ , pois  $(x, y) \mapsto (y, x)$  é uma mudança de coordenadas, o que significa que se trocando  $x$  por  $y$  e  $y$  por  $x$  se tem o mesmo resultado.

**Observação 3.2.** Os três casos do Lema de Morse correspondem, respectivamente, a um

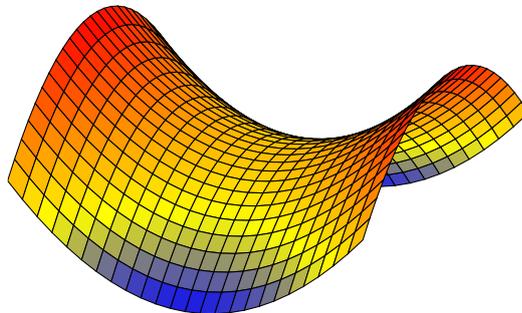
mínimo (figura 6), uma sela (figura 7) e um máximo (figura 8) para a função  $f$  em  $(0, 0)$ .

**Figura 6** – Ponto de Mínimo



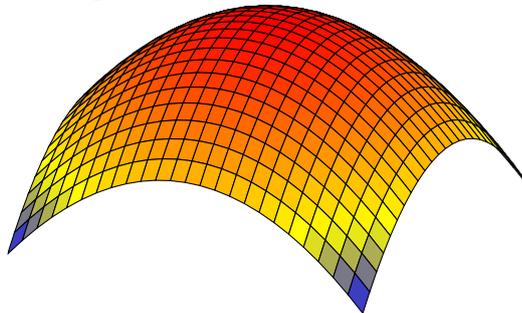
Fonte: Próprio Autor (2022).

**Figura 7** – Ponto de Sela



Fonte: Próprio Autor (2022).

**Figura 8** – Ponto de Máximo



Fonte: Próprio Autor (2022).

**Observação 3.3.** O Lema de Morse diz que a função não apenas se comporta como uma das três formas normais acima, além disso,  $f$  é igual a uma delas a menos de uma mudança de coordenadas no plano.

### 3.3 PONTOS CRÍTICOS DEGENERADOS

Os pontos críticos não degenerados são completamente classificados pelo Lema de Morse. Quanto aos pontos críticos degenerados, a situação é diferente.

Inicia-se nesta seção o estudo dos pontos críticos degenerados no caso mais simples, ou seja, de uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Assume-se que  $f$  tem um ponto crítico na origem e que  $f(0) = 0$ . Desta maneira, deve-se ter  $f'(0) = 0$ .

Pelo que foi visto, a origem é ponto crítico não degenerado da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se,  $f''(0) \neq 0$ , uma vez que  $Hess(f)_0 = f''(0)$ .

Pelo Lema de Morse existe uma mudança de coordenadas  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida em uma vizinhança  $U$  da origem tal que  $f \circ \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $(f \circ \psi)(0) = f(0) \pm x^2$ , e como  $f(0) = 0$  se tem que  $(f \circ \psi)(0) = f(0) \pm x^2$ .

Neste caso,  $(f \circ \psi)(0) = x^2$ , se  $f''(0) > 0$  e  $(f \circ \psi)(0) = -x^2$ , se  $f''(0) < 0$ .

Entretanto, se  $f''(0) = 0$ , obtém-se uma classificação mais refinada tomando-se mais termos da série de Taylor de  $f$ . Esta classificação, porém, não diz nada sobre funções tais como  $\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$  para as quais a série de Taylor é zero.

**Nota 3.1.** Considere a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

Expandindo esta função em série de Taylor em torno do ponto  $x = 0$  obtém-se que todos os termos da expansão são iguais à zero, visto que qualquer derivada da função  $f$  no ponto  $x = 0$  é igual à zero (a função  $f$  definida desta forma é conhecida como função chata). Por esta razão se diz que a série de Taylor desta função  $f$  é zero.

**Lema 3.3.** *Seja  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$  tal que,  $q(0) = q'(0) = q''(0) = \dots = q^{(k)}(0) = 0$ . Então em alguma vizinhança da origem, existe uma função  $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  tal que  $q(x) = x^{k+1}l(x)$  e, além disso, se  $q^{(k+1)}(0) \neq 0$ , então  $l(0) \neq 0$ .*

**Demonstração:** A prova é feita por indução sobre  $k$ . Quando  $k = 0$ , o Lema 3.1 se aplica e segue o resultado.

Para  $k \neq 0$ , usa-se o mesmo lema para mostrar que  $q(x) = xl_1(x)$ , onde  $l_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$ .

Como  $q$  é de classe  $C^\infty$ , diferenciando esta relação  $m$  vezes, obtém-se que  $q^{(m)}(x) = xl_1^{(m)}(x) + ml_1^{(m-1)}(x)$ .

Observe que esta relação é obtida uma vez que,

$$\begin{aligned} q'(x) &= l_1(x) + xl_1'(x); \\ q''(x) &= l_1'(x) + l_1'(x) + xl_1''(x); \\ q'''(x) &= l_1''(x) + l_1''(x) + l_1''(x) + xl_1'''(x); \\ &\vdots \\ q^{(m)}(x) &= xl_1^{(m)}(x) + ml_1^{(m-1)}(x). \end{aligned}$$

Fazendo  $x = 0$  deduz-se que  $l_1(0) = l_1'(0) = l_1''(0) = \dots = l_1^{(k-1)}(0) = 0$ .

Como a função  $l_1$  satisfaz a hipótese de indução, tem-se que em alguma vi-

zinhança da origem, existe uma função  $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  tal que  $l_1(x) = x^k l(x)$ . Assim,  $q(x) = x x^k l(x) = x^{k+1} l(x)$ .

Note que,

$$q'(x) = x^k((k+1)l(x) + xl'(x)),$$

$$q''(x) = kx^{k-1}((k+1)l(x) + xl'(x)) + x^k(l'(x)(k+2) + xl''(x)),$$

⋮

$$q^{(k+1)}(x) = (k+1)!l(x) + (k+1)!x^k l^{(k)}(x) + x^k(l^{(k)}(x)(2k+1) + x^k l^{(k+1)}(x)),$$

logo,  $q^{(k+1)}(0) = (k+1)!l(0)$  e daí, se  $q^{(k+1)}(0) \neq 0$  segue que  $l(0) \neq 0$ . Isto conclui a demonstração. ■

Com este Lema em mãos, pode-se enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 3.2.** *Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$ , tal que  $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$ , mas  $f^{(k)}(0) \neq 0$ . Então existe uma mudança de coordenadas sob a qual  $f$  toma a forma  $x^k$ , se  $k$  é ímpar, e  $x^k$  ou  $-x^k$ , se  $k$  é par.*

**Demonstração:** Pelo Lema 3.3 tem-se que  $f(x) = x^k l(x)$ , com  $l(0) \neq 0$ .

Considere os casos:

1.  $k$  é ímpar: Defina  $h(x) = x(l(x))^{1/k}$ . Observe que  $h'(x) = (l(x))^{1/k} + x(1/k)(l(x))^{(1-k)/k} l'(x)$ , logo  $h'(0) = (l(0))^{1/k} \neq 0$ , então  $h$  é um difeomorfismo em alguma vizinhança da origem.

Além disso, se tem que  $(h(x))^k = x^k l(x) = f(x)$ . Desta maneira segue que a composta  $(f \circ h^{-1})(x) = f(h^{-1}(x)) = x^k$ , visto que colocando  $y = h^{-1}(x)$ , tem-se  $f(y) = (h(y))^k$ , logo  $(f \circ h^{-1})(x) = (h(y))^k = (h(h^{-1}(x)))^k = (Id(x))^k = x^k$ .

2.  $k$  é par: Têm-se duas possibilidades:

a)  $l(x) > 0, \forall x$ : neste caso, define-se  $h(x) = x(l(x))^{1/k}$ , e o resultado segue como no item 1, isto é,  $f$  se transforma em  $x^k$ .

b)  $l(x) < 0, \forall x$ : neste caso, define-se  $h(x) = x(-l(x))^{1/k}$ . Desta maneira  $(h(x))^k = x^k(-l(x)) = -x^k l(x) = -f(x)$ . Assim, tem-se que a composta  $(f \circ h^{-1})(x) = f(h^{-1}(x)) = -x^k$ , visto que colocando  $z = h^{-1}(x)$ , tem-se  $f(z) = -(h(z))^k$ , logo  $(f \circ h^{-1})(x) = f(h^{-1}(x)) = -(h(z))^k = -(h(h^{-1}(x)))^k = -(Id(x))^k = -x^k$ .

Estes dois casos concluem a demonstração. ■

O Teorema 3.1 (Lema de Morse) e o Teorema 3.2 motivam uma importante noção.

**Definição 3.3.** Sejam  $u_1 \in \mathbb{R}^n, u_2 \in \mathbb{R}^n, U_1 \subset \mathbb{R}^n, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  onde  $U_1, U_2$  são vizinhanças dos pontos  $u_1, u_2$ , respectivamente. Diz-se que  $f_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções  $\mathbb{R}$ -equivalentes se existirem vizinhanças  $V_i \subset U_i$ , com  $u_i \in V_i, i = 1, 2$ , um difeomorfismo  $h: V_1 \rightarrow V_2$  e uma constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $h(u_1) = u_2$  e  $f_1(u) = f_2(h(u)) + c, \forall u \in V_1$ .

**Nota 3.2.** Seja  $u_0 \in \mathbb{R}^n$ . Então  $f: \mathbb{R}^n, u_0 \rightarrow \mathbb{R}$  denota uma função definida em alguma vizinhança de  $u_0$ . Duas tais funções são equivalentes se elas coincidem em alguma vizi-

nhança de  $u_0$ .

A sentença,  $f \approx g \Leftrightarrow$  as funções  $f$  e  $g$  coincidem em uma vizinhança de  $u_0$ , é uma relação de equivalência (é reflexiva, simétrica e transitiva). Para mais detalhes sobre relação de equivalência consultar Gonçalves (2006).

As funções que se relacionam com  $f$  segundo  $\approx$ , formam uma classe de equivalência que é chamada um germe de  $f$  em  $u_0$ .

**Definição 3.4.** Suponha que  $f: \mathbb{R}, t_0 \rightarrow \mathbb{R}$  seja  $A$  - equivalente a  $\pm x^{k+1}$ . Então, para  $k \geq 0$ , dizemos que  $f$  tem tipo  $A_k$  em  $t_0$ , ou uma  $A_k$  singularidade em  $t_0$ .

Por exemplo, tipo  $A_0$  significa simplesmente que  $f'(t_0) \neq 0$ .

Um dos problemas centrais na Teoria de Singularidades é classificar funções segundo  $R$  - equivalência. Um exemplo disto já foi feito no Lema de Morse, onde uma função  $f$  definida em uma vizinhança de um ponto crítico não degenerado é  $R$  - equivalente à função  $g$  dada por:

$$g = -y_1^2 - \cdots - y_l^2 - y_{l+1}^2 + \cdots + y_n^2.$$

No Teorema 3.2, se tem que uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com série de Taylor não nula é equivalente a  $\pm x^k$  para algum  $k$ .

Como existe o Lema de Morse para pontos críticos não degenerados, também se tem um resultado para os pontos críticos degenerados, que permite encontrar formas normais para uma função  $f$  em uma vizinhança de tal ponto em dimensões maiores que 1. Este resultado é conhecido como *Splitting lemma* e é enunciado a seguir.

**Teorema 3.3. (*Splitting lemma*):** *Seja  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^\infty$ , com derivadas parciais de primeira ordem iguais a zero na origem e cuja matriz Hessiana na origem tem posto  $r$ . Então  $f$  é  $R$  - equivalente, na origem, a uma função da forma:*

$$\pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_r^2 + g(x_{r+1}, \dots, x_n),$$

onde  $g: \mathbb{R}^{n-r} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^\infty$ .

Este teorema mostra que o comportamento de uma função próximo a um ponto crítico degenerado pode ser determinado estudando-se uma função envolvendo um número de variáveis menor (igual a  $n - r$ : este número é chamado o coposto (ou corank) de  $f$ ). Esta redução do número de variáveis é que torna o *Splitting lemma* tão útil e surpreendente. Uma prova desse resultado por ser encontrada em Dimca (1987).

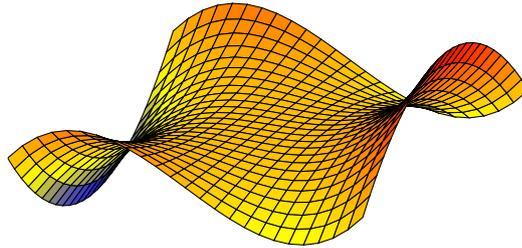
**Exemplo 3.9.** Seja uma função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , com a origem sendo um ponto crítico degenerado, sob certas condições pode-se mostrar com o auxílio do *Splitting lemma*, que esta função é  $R$  - equivalente a uma das seguintes formas normais:

$$(x, y) \mapsto x^3 - xy^2 \text{ (umbílico elíptico),}$$

$$(x, y) \mapsto x^3 + y^3 \text{ (umbílico hiperbólico),}$$

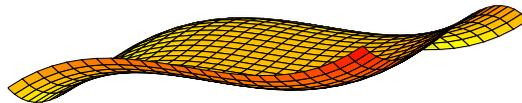
$$(x, y) \mapsto x^2y - y^4 \text{ (umbílico parabólico).}$$

**Figura 9** – Umbílico elíptico



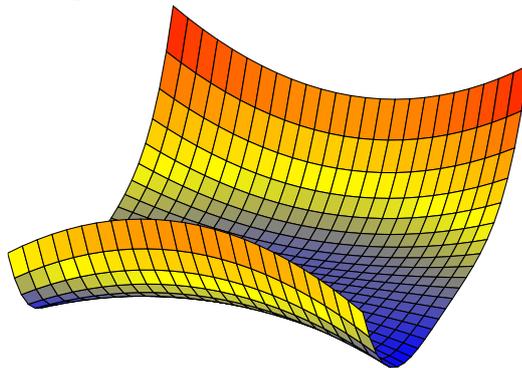
Fonte: Próprio Autor (2022).

**Figura 10** – Umbílico hiperbólico



Fonte: Próprio Autor (2022).

**Figura 11** – Umbílico parabólico



Fonte: Próprio Autor (2022).

### 3.4 APLICAÇÕES

Apesar do foco maior neste trabalho ser a classificação de pontos críticos via Lema de Morse, neste capítulo, será apresentado problemas de otimização que recaiam na classificação de pontos críticos, usaremos o conceito de derivada para funções, para determinarmos esses pontos críticos, quando houver.

O ato de classificar é importante pois nos permite agrupar algo por meio de características similares, após ver como classificar alguns tipos de pontos críticos no capítulo anterior, podemos ver em situações práticas o que acontece na realidade com esse tipo de problema. Para mais aplicações neste sentido, consultar Stewart (2013), Freitas (2017) e também Tognon e Nogueira (2007).

**Exemplo 3.10.** Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R\$ 30,00 mais R\$ 1,00 por lugar vago. Vamos determinar o número de passageiros que deverão ir à excursão para que a empresa tenha o maior lucro possível.

**Solução:** Sendo  $x$  o número de lugares vagos e  $R(x)$  o valor arrecadado pela empresa em função dos lugares vagos, escrevemos a função  $R(x) = (x + 30) \cdot (40 - x)$  e então  $R(x) = -x^2 + 10x + 1200$ .

Logo,  $R'(x) = -2x + 10$  e obtemos que para  $x = 5$  ocorre o valor máximo. Portanto, como o lucro máximo ocorre quando há 5 lugares vagos, então, deverão ir na excursão 35 pessoas. ■

**Exemplo 3.11.** Para construir uma caixa retangular sem tampa será usado um papelão de formato quadrado de  $1 \text{ m}^2$  de área, de modo que o volume da caixa seja o maior possível. Vamos determinar as dimensões dessa caixa para que o volume seja máximo.

**Solução:** Representando o volume da caixa por  $V(x)$ , temos  $V(x) = x \cdot (1 - 2x) \cdot (1 - 2x)$  e então  $V(x) = 4x^3 - 4x^2 + x$ . Logo,  $V'(x) = 12x^2 - 8x + 1$  e então para  $12x^2 - 8x + 1 = 0$  temos  $x_1 = \frac{1}{2}$  e  $x_2 = \frac{1}{6}$ .

Determinando as dimensões, para  $x_1 = \frac{1}{2}$ , temos  $1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$ , o que não é possível pela condição de existência da caixa. Para  $x_2 = \frac{1}{6}$ , temos  $1 - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ .

Portanto, as dimensões da caixa para que o volume seja máximo são  $\frac{2}{3}m$ ,  $\frac{2}{3}m$  e  $\frac{1}{6}m$ . ■

**Exemplo 3.12.** Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com  $12m^2$  de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

**Solução:** Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  o comprimento, a largura e a altura da caixa em metros. Então, o volume da caixa é:

$$V = xyz.$$

Podemos expressar  $V$  como a função só de  $x$  e  $y$  usando o fato de que a área dos quatro

lados e do fundo da caixa é:

$$2xz + 2yz + xy = 12.$$

Isolando  $z$  nessa equação, obtemos  $z = \frac{12 - xy}{2(x + y)}$ , e  $V$  fica:

$$V = xy \frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}.$$

Calculando as derivadas parciais, temos:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \text{ e } \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}.$$

Se  $V$  é um máximo, então  $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ , mas  $x = 0$  ou  $y = 0$  dá  $V = 0$ , de modo que precisamos resolver as equações:

$$12 - 2xy - x^2 = 0 \text{ e } 12 - 2xy - y^2 = 0.$$

Isso implica que  $x^2 = y^2$  e, portanto,  $x = y$ . Perceba que ambos devem ser positivos neste problema, para que o volume faça sentido. Se colocarmos  $x = y$  em qualquer uma das equações obtemos  $12 - 3x^2 = 0$ , o que dá  $x = 2$ ,  $y = 2$  e  $z = \frac{12 - 2 \cdot 2}{2(2 + 2)} = 1$ . Assim,  $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ , e o volume máximo da caixa é  $4m^3$ . ■

**Exemplo 3.13.** Seja  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 3xy$  e sendo  $z = f(x, y)$ , vamos mostrar que a função é de Morse e classificar o ponto crítico.

**Solução:** Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 + 3y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 + 3x.$$

As derivadas parciais se anulam para  $x = 0$  e  $y = 1$ .

As derivadas de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3.$$

$$\text{Logo, } Hess(f)_{(0,1)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5.$$

Como  $Hess(f)_{(0,1)} = -5$ , temos um ponto de sela. Substituindo  $(x, y) = (0, 1)$  em  $z = f(x, y)$ , obtemos o ponto  $P = (0, 1, -1)$ , que é ponto de sela da superfície  $S$ .

Escrevendo o polinômio  $h$  referente à matriz Hessiana, tal que,

$$h = 2x^2 + 2 \cdot 3xy + 2y^2$$

e fazendo o completamento de quadrados, temos:

$$h = 2x^2 + 2 \cdot 3xy + 2y^2 = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \left(2 - \frac{9}{2}\right)y^2$$

e assim chegamos em:

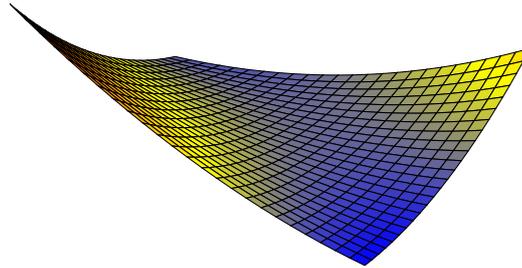
$$h = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{2}y^2.$$

Então,  $f \circ \psi - f(0, 1) = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{2}y^2$ . Tomando então,

$$X^2 = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 \text{ e } Y^2 = \frac{5}{2}y^2,$$

a forma quadrática fica  $f \circ \psi - f(0, 1) = X^2 - Y^2$  e portanto, a função  $f$  é de Morse, tendo apenas um ponto crítico não degenerado, que é o ponto de sela  $P = (0, 1, -1)$ . ■

**Figura 12** – Gráfico da função  $f$



Fonte: Próprio autor (2022).

## 4 CONCLUSÃO

Inicialmente, mostramos alguns tópicos que servem de base para a temática central do trabalho, permitindo ao leitor entender as ferramentas matemáticas necessárias para o estudo dos pontos críticos a partir da classificação que vem a ser estabelecida no trabalho.

Assim conseguimos através deste trabalho, entender como ocorre a classificação de pontos críticos não degenerados e degenerados a partir dos resultados de Lema de Morse e Splitting Lemma respectivamente, e ainda sendo mais específico percebendo que é possível estabelecer uma classificação em valores máximos e mínimos de uma função.

Conseguimos ainda, perceber aplicações diretas que tratam da classificação de pontos críticos, por meio de alguns problemas simples do cotidiano, mas que pelo senso comum muitas vezes se passa despercebido e que se olharmos em uma perspectiva matemática, entendemos belíssimas explicações para fenômenos em que o nosso interesse é maximizar ou minimizar alguma situação. Espero que este trabalho possa servir de motivação e, ao mesmo tempo, contribuir para quem buscar estudar sobre essa temática.

## REFERÊNCIAS

- APOSTOL, Tom M. **Cálculo com funções de uma variável com uma introdução à Álgebra Linear**. Editora Reverté, Rio de Janeiro, 1988.
- DIMCA, A. **Topics on Real and Complex Singularities**. Friedr Vieweg & Sohn, 1987.
- FREITAS, Antonio dos Santos de. **Uma abordagem de pontos críticos e as funções de Morse**. 2017. 77 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/150828>. Acesso em: 21 jun. 2022.
- GONÇALVES, Adilson. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. *vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- SENA FILHO, Edvalter da Silva. **Finitude para pares de germes de aplicações Bi-K-bi-Lipschitz equivalentes**. 2016. 61 f. Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2016. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/21530>. Acesso em: 21 jun. 2022.
- STEWART, James. **Cálculo**. *vol.2*. tradução EZ2 Translate. – São Paulo : Cengage Learning, 2013.
- TOGNON, Carlos Henrique; NOGUEIRA, Antônio Carlos. Uma Introdução a Teoria de Pontos Críticos. **FAMAT em Revista**, , n. 9, p. 13–24, 2007.