



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL  
DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA – UNILAB  
INSTITUTO DE ENGENHARIAS E DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL  
BACHARELADO EM ENGENHARIA DE ENERGIAS**

**GABRIELLY RODRIGUES LIMA**

**FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: CONCEITOS E APLICAÇÕES  
NO ESTUDO DA CATENÁRIA**

**REDENÇÃO**

**2021**

**GABRIELLY RODRIGUES LIMA**

**FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: CONCEITOS E APLICAÇÕES  
NO ESTUDO DA CATENÁRIA**

Monografia apresentada como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Energias, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.

**Orientadora:** Profa. Dra. Sílvia Helena Dantas de Lima.

**REDENÇÃO  
2021**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Sistema de Bibliotecas da UNILAB  
Catalogação de Publicação na Fonte.

---

Lima, Gabrielly Rodrigues.

L696f

Funções hiperbólicas: conceitos e aplicações no estudo da  
catenária / Gabrielly Rodrigues Lima. - Redenção, 2021.  
47f: il.

Monografia - Curso de Engenharia de Energias, Instituto de  
Engenharias e Desenvolvimento Sustentável, Universidade da  
Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção,  
2021.

Orientador: Profa. Dra. Sílvia Helena Dantas de Lima.

1. Funções hiperbólicas. 2. Linhas de transmissão. I. Título

CE/UF/BSP

CDD 515.353

---

**GABRIELLY RODRIGUES LIMA**

**FUNÇÕES HIPERBÓLICAS: CONCEITOS E APLICAÇÕES  
NO ESTUDO DA CATENÁRIA**

Monografia apresentada como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Energias, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira.


Aprovada em: 20 / 08 / 2021.

**BANCA EXAMINADORA**




**Profa. Dra. Sílvia Helena Dantas de Lima (Orientadora)**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB



**Profa. Dra. Rejane Félix Pereira**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira – UNILAB



**Prof. Dr. Marcus Vinícius Sousa Rodrigues**

Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA

Dedico aos meus pais, Carlos e Geilza, que souberam me aconselhar em meus momentos mais difíceis e me ensinaram sobre o valor da educação.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Deus por me dar forças, sabedoria e paciência ao longo dessa jornada.

Agradeço à Unilab por me proporcionar um ambiente de aprendizado e de constante troca de experiências, não somente em minha área de atuação como também no âmbito social.

Agradeço à minha orientadora, Sílvia Helena, por me guiar através de tantos percalços durante a realização deste trabalho e por me acolher desde o momento em que adentrou nessa instituição.

E por último, agradeço aos meus amigos e companheiros de curso, em especial Cícero Neto, Edvay Oliveira, Ivan Vieira e Yuri Maia. Vocês estiveram presentes quando eu mais precisava, tornaram tudo mais leve e muito mais divertido.

## RESUMO

A necessidade de entender como ocorre um fenômeno físico e o porquê ele ocorre, é o que move a ciência. Os modelos matemáticos surgem como ferramenta na busca por essas respostas, como por exemplo, as funções hiperbólicas e as equações diferenciais que integram o processo de modelagem do comportamento de um cabo flexível suspenso entre dois pontos, sustentando apenas o seu peso. Esse problema que é descrito por uma catenária, por vezes foi confundido com a parábola até o seu entendimento completo, tratando-se de uma função hiperbólica. Utilizada em diversas aplicações, como na arquitetura e na engenharia, a catenária é parte fundamental no dimensionamento das linhas de transmissão, sobretudo nas definições de distâncias e faixas mínimas de segurança. Este trabalho vem mostrar uma breve trajetória do estudo da catenária, a modelagem matemática e física do problema e as suas diferenças em relação a parábola. Culminando na resolução de um exercício de dimensionamento e na modelagem gráfica da curva. Os resultados foram de acordo com o esperado, conseguindo demonstrar o papel e a importância da utilização da catenária na definição dos parâmetros de segurança em projetos de linhas de transmissão.

**Palavras-chave:** Catenária. Funções hiperbólicas. Linhas de transmissão.

## ABSTRACT

To understand how and why a physical phenomenon occurs it is what moves science. The mathematical models emerge as a tool in the search for these answers. As an example, the hyperbolic functions and differential equations. These functions integrate the modeling movements process of a flexible cable suspended between two points and that sustains its own weight. In addition, the modeling used a catenary, which was usually confused with a parabola, until grasped that it was a hyperbolic function. Used in several applications such as architecture and engineering, the catenary is a fundamental part of the dimensioning of transmission lines, especially in the definition of distances and minimum safety ranges. This paper will bring a brief trajectory of the study of the catenary, the mathematical and physical modeling of the problem., and its differences concerning the parabola. It culminates in the resolution of a sizing exercise and the graphical modeling of the curve. The results were as expected, demonstrating the role and importance of using the catenary to define the safety parameters in transmission line projects.

**Keywords:** Catenary. Hyperbolic functions. Transmission lines.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 01</b> - Hipérbole .....	14
<b>Figura 02</b> - Distância entre um ponto e os focos da hipérbole .....	14
<b>Figura 03</b> - Hipérbole equilátera.....	15
<b>Figura 04</b> - Triângulo da hipérbole.....	17
<b>Figura 05</b> - Triângulo da hipérbole em eixo rotacionado .....	19
<b>Figura 06</b> - Seno, cosseno e tangente hiperbólicos .....	21
<b>Figura 07</b> - Seno, cosseno e tangente hiperbólicos inversos .....	23
<b>Figura 08</b> - Catenária em linhas de transmissão.....	25
<b>Figura 09</b> - Catenária genérica .....	27
<b>Figura 10</b> - Diagrama de forças da catenária.....	27
<b>Figura 11</b> - Curvas da catenária e da parábola .....	31
<b>Figura 12</b> - Faixa de servidão de uma LT aérea .....	33
<b>Figura 13</b> - Faixa de servidão para condutores dispostos horizontalmente.....	34
<b>Figura 14</b> - Parâmetro K para determinação do ângulo de balanço .....	34
<b>Figura 15</b> - Faixa de servidão para torres, em LTs de 500, 230 e 138 kV .....	35
<b>Figura 16</b> - Distância de segurança .....	36
<b>Figura 17</b> - Curva do condutor em catenária.....	40
<b>Figura 18</b> - Curva do condutor parabólico .....	41
<b>Figura 19</b> - Curvas do condutor em catenária e parabólico.....	42
<b>Figura 20</b> - Cabo em catenária.....	43
<b>Figura 21</b> - Curva do cabo em catenária.....	44
<b>Fotografia 01</b> - Teia de Aranha .....	25
<b>Fotografia 02</b> - Ponte Juscelino Kubitschek.....	26
<b>Fotografia 03</b> - Fachada da Paixão, Basílica da Sagrada Família .....	26

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 01</b> - Funções trigonométricas.....	18
<b>Tabela 02</b> - Propriedades das funções trigonométricas .....	18
<b>Tabela 03</b> - Derivadas de funções hiperbólicas e hiperbólicas inversas.....	23
<b>Tabela 04</b> - Integrais de funções hiperbólicas .....	24
<b>Tabela 05</b> - Distâncias básicas .....	37

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos.....</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>Um Breve Histórico das Funções Hiperbólicas .....</b>	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>Hipérbole.....</b>	<b>13</b>
<b>2.3</b>	<b>Funções Hiperbólicas .....</b>	<b>16</b>
2.3.1	Funções hiperbólicas e funções exponenciais .....	19
2.3.2	Funções hiperbólicas inversas .....	22
2.3.3	Tabela de derivadas das funções hiperbólicas.....	23
2.3.4	Tabela de integrais das funções hiperbólicas .....	24
<b>2.4</b>	<b>Catenária.....</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>32</b>
<b>3.1</b>	<b>Faixa de Servidão .....</b>	<b>32</b>
<b>3.2</b>	<b>Distância Mínima do Condutor .....</b>	<b>35</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>38</b>
<b>4.1</b>	<b>Catenária em Linhas de Transmissão .....</b>	<b>38</b>
<b>4.2</b>	<b>Cabo em Catenária.....</b>	<b>42</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>46</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A necessidade de entender e explicar fenômenos físicos é algo intrínseco ao ser humano, desde a era pré-histórica é possível notar os efeitos da curiosidade humana no curso da sociedade. Com o tempo foram desenvolvidos métodos mais eficientes de se estudar esses fenômenos, sendo bastante influenciado pelas escolas filosóficas gregas. Constituindo assim o pensamento crítico, a formulação e a comprovação de hipóteses, ferramentas fundamentais para a modelagem de problemas. Problemas estes solucionados através de modelagens físicas e matemáticas.

Modelos matemáticos são frequentemente utilizados em diversas áreas do conhecimento tais como nas engenharias, na arquitetura e em ciências da natureza. No processo de modelagem de sistemas físicos, as equações diferenciais desempenham papel fundamental tendo em vista que muitas leis e relações físicas surgem matematicamente sob a forma desta classe de equações (KREYSZIG, 1986).

As equações diferenciais possuem uma aplicabilidade em significantes problemas na engenharia, como por exemplo, escoamentos de fluidos, problemas de condução de calor, sistemas de vibrações mecânicas e em modelos que descrevem o comportamento de um cabo flexível e homogêneo suspenso entre dois pontos (ZILL, 2001).

O problema de determinar a forma tomada por um cabo flexível, suspenso em dois pontos e sujeito ao seu próprio peso desafiou alguns matemáticos por um longo período. De acordo com Talavera (2008), o estudo da curva, atualmente conhecida como catenária, teve início com o matemático Galileu Galilei (1564 – 1642), o qual acreditava erroneamente que tal curva se tratava de uma parábola. Por volta de 1690, Jakob Bernoulli chamou a atenção da comunidade matemática para o problema. Sendo ele solucionado por seu irmão Johann Bernoulli, Huygens e Leibniz que deu o nome de catenária à curva ocupada pelo cabo.

O problema da catenária é modelado por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, cuja solução é descrita por funções hiperbólicas. O estudo destas funções é deveras relevante, haja vista que as catenárias podem ser encontradas na natureza, em projetos arquitetônicos, em construções de pontes pênséis e no dimensionamento das linhas aéreas de transmissão de energia elétrica. Sendo fundamental para a determinação do comportamento de fios e cabos em diferentes cenários, servindo de parâmetro para a realização de projetos em suas diversas áreas de aplicação.

Tal aplicação demonstra-se relevante devido a crescente utilização de energia desde o início da revolução industrial até a era globalizada, sendo ela atrelada ao desenvolvimento

da sociedade. Em um país continental como o Brasil, fez-se necessário a utilização de grandes linhas aéreas de transmissão, visando atender o máximo de pessoas e levar a energia elétrica para lugares mais afastados dos grandes centros urbanos. Torna-se um grande desafio para engenheiros e engenheiras, projetar essas linhas de forma que sejam economicamente viáveis, não tenham grandes perdas de energia e sejam seguras em seus entornos.

## **1.1 Objetivos**

Desse modo, este trabalho tem como objetivo principal apresentar um estudo das funções hiperbólicas mostrando algumas aplicações na modelagem de problemas de engenharia e arquitetura, com ênfase no estudo das linhas de transmissão.

Para tal, os objetivos específicos são:

- Estudar os principais conceitos das funções hiperbólicas;
- Mostrar o estudo da catenária como modelo de utilização destas funções;
- Mostrar a importância da catenária no dimensionamento das linhas aéreas de transmissão de energia.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo serão expostos os principais elementos para a condução deste trabalho. Será abordado o histórico do estudo das funções hiperbólicas e da catenária, a função que dá origem a esses estudos e as ferramentas desenvolvidas através dela. Destacando a catenária como uma aplicação das ferramentas abordadas.

### 2.1 Um Breve Histórico das Funções Hiperbólicas

Em sua obra, Maor (2008) afirmou que: “Entre os notáveis problemas que ocuparam a comunidade matemática, nas décadas que se seguiram à invenção do cálculo, estava o problema da catenária”. As discussões a respeito da hipérbole e de suas características, foram bastante recorrentes no meio científico. Determinar a curva que descreve o formato de um cabo, uma corda ou mesmo uma corrente, flexível suspenso por dois pontos foi um tanto quanto desafiador para estudiosos como Leonardo da Vinci e Galileu, que acreditavam que essa curva era descrita como uma parábola (TALAVERA, 2008).

Ainda de acordo com Talavera (2008), esse problema só alcançou sua solução final graças a Huygens, Leibniz e Johann Benoulli em 1691, que demonstraram de forma geométrica e analítica que a curva assumida não correspondia à uma parábola, e sim a outro tipo de curva, a qual Leibniz denominou como catenária. Vasconcelos (2013) cita que outros matemáticos também debruçaram-se nos estudos das funções hiperbólicas, como o italiano Vincenzo Riccati que descobriu as fórmulas de adição e subtração das funções hiperbólicas e sua relação com a função exponencial e suas derivadas. Porém os estudos dessas funções e de suas aplicações não pararam por aí, eles acompanharam a evolução da tecnologia e das grandes invenções, como telefones e motores, além da criação de redes de distribuição de energia elétrica que cruzavam cidades e estados.

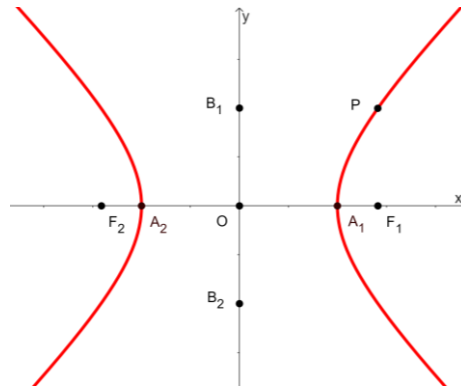
### 2.2 Hipérbole

De acordo com Vasconcelos (2013) e Santos (2015), a hipérbole é definida como um conjunto de pontos de um plano cartesiano  $\alpha$ , cuja a diferença das distâncias entre um ponto qualquer da curva e os pontos  $F_1$  e  $F_2$ , em valores absolutos, seja uma constante. Essa constante é igual a  $2a$ , onde  $a$  será o ponto médio entre os vértices da hipérbole. Sendo  $P$  um ponto qualquer da hipérbole, a expressão que descreve a hipérbole será:

$$h = \{P \in \alpha / |PF_1 - PF_2| = 2a\} \quad (2.1)$$

Na Figura 01, está representada uma hipérbole no plano  $xy$ . Onde,  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da hipérbole,  $A_1$  e  $A_2$  são os vértices do eixo real da hipérbole, e  $B_1$  e  $B_2$  representam os vértices do eixo imaginário.

**Figura 01 - Hipérbole**

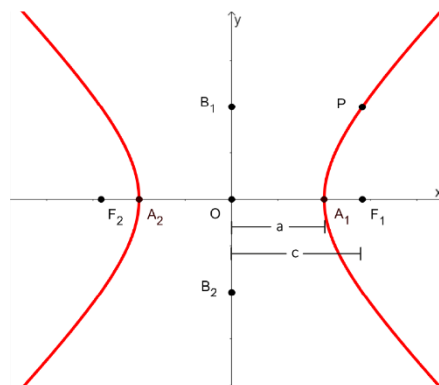


Fonte: Adaptada de Vasconcelos (2013, p. 16).

A distância entre os vértices  $A_1$  e  $A_2$  é igual a  $2a$ , enquanto a distância entre os focos corresponde a  $2c$ , sendo  $2c > 2a$ . As linhas pontilhadas  $d_1$  e  $d_2$  simbolizam os intervalos entre o ponto  $P$  da hipérbole e os focos da equação, como mostra a Figura 02, portanto:

$$|PF_1 - PF_2| = d_1 - d_2 = |-2a| = 2a \quad (2.2)$$

**Figura 02 - Distância entre um ponto e os focos da hipérbole**

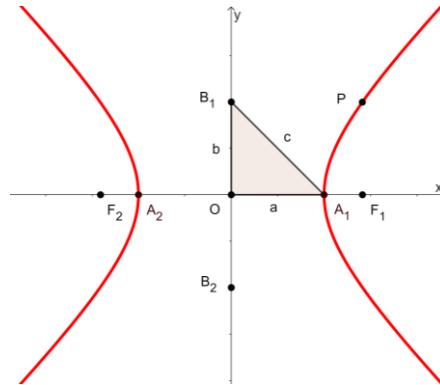


Fonte: Adaptada de Vasconcelos (2013, p. 19).

Considerando que a hipérbole ilustrada acima (Figura 02) é equilátera, sendo caracterizada pela igualdade entre os valores de  $a$  e  $b$ , é possível obter a equação reduzida

da hipérbole. A Figura 03 demonstra de modo genérico esta função, com seus focos localizados no eixo x.

**Figura 03 - Hipérbole equilátera**



Fonte: Adaptada de Vasconcelos (2013, p. 17).

Partindo da relação fundamental  $a^2 + b^2 = c^2$ , e considerando as coordenadas  $(c, 0)$  e  $(-c, 0)$  para os pontos  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente, é alcançado a partir da expressão 2.2:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

Após a retirada do módulo, desloca-se o segundo radical para o outro lado da igualdade, de modo que seja obtido:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, alcança-se a expressão a seguir:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a * \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a * \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

Isolando o termo com radical e dividindo a equação por 4, é alcançada a expressão:

$$xc - a^2 = \pm a * \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevam-se mais uma vez a equação ao quadrado, para obter:

$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2 * (x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$



$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(c^2 - a^2) * x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2) * a^2$$

De acordo com a relação fundamental da hipérbole, sabe-se que:

$$c^2 - a^2 = b^2$$

Substituindo a relação na expressão obtida anteriormente, chega-se a:

$$b^2 * x^2 - a^2y^2 = b^2 * a^2$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por  $b^2a^2$ , é obtida a equação reduzida da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.3)$$

Caso os focos da hipérbole estejam situados no eixo y, a equação reduzida também poderá ser obtida através do mesmo processo. Sendo ela:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (2.4)$$

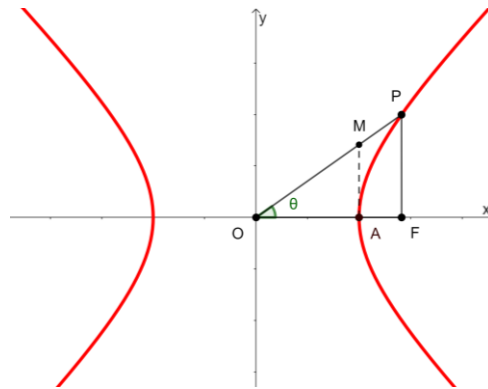
### 2.3 Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são combinações das funções exponenciais  $e^x$  e  $e^{-x}$  devido às suas frequentes aparições em estudos matemáticos e aplicações, e para fins de simplificação, elas receberam nomes especiais (FLEMMING; GONÇALVES, 2014). De acordo com Stewart (2013, p. 232), “Elas são análogas, de muitas maneiras, às funções trigonométricas e possuem a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo”. No entanto, para compreendê-las de fato é necessário conhecer suas relações com a hipérbole.

Utilizando uma hipérbole unitária da função  $x^2 - y^2 = 1$ , retratada na Figura 04, serão determinadas as funções hiperbólicas seguindo os mesmos passos que constroem as funções trigonométricas. Cabe ressaltar que essa hipérbole é equilátera e seu foco está situado no eixo x, e por isso foi escolhida para tais determinações.

Seja P um ponto sobre a hipérbole de forma que a área do setor OAP tenha valor igual a  $\frac{\theta}{2}$ , onde  $\theta$  é o ângulo hiperbólico e  $\overline{AM}$  é uma reta tangente a curva no ponto A.

**Figura 04** - Triângulo da hipérbole



Fonte: Adaptada de Vasconcelos (2013, p. 21).

Dito isso, é possível determinar as funções hiperbólicas básicas, como seno e cosseno, e a partir delas definir as demais funções. Seguindo o mesmo raciocínio utilizado na obtenção das funções trigonométricas, demonstradas nas equações:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \quad (2.5)$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \quad (2.6)$$

conclui-se que as funções hiperbólicas básicas serão:

$$\text{senh}(\theta) = \frac{FP}{OA} \quad (2.7)$$

$$\text{cosh}(\theta) = \frac{OF}{OA} \quad (2.8)$$

Tendo em vista que se trata de uma função hiperbólica equilátera, como demonstra a Figura 4, sabe-se que o segmento  $\overline{OA}$  tem comprimento igual a 1. Assim, elas se tornarão:

$$\text{senh}(\theta) = FP \quad (2.9)$$

$$\text{cosh}(\theta) = OF \quad (2.10)$$

Utilizando o conceito das demais funções trigonométricas, serão obtidas a tangente, a secante, a cotangente e a cossecante hiperbólicas. As funções encontradas estão presentes na Tabela 01.

**Tabela 01** - Funções trigonométricas

Trigonométrica Circular	Trigonométrica Hiperbólica
$tg(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}$	$tgh(\theta) = \frac{FP}{OF}$
$sec(\theta) = \frac{1}{cos(\theta)}$	$sech(\theta) = \frac{1}{OF}$
$cotg(\theta) = \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$	$cotgh(\theta) = \frac{OF}{FP}$
$csc(\theta) = \frac{1}{sen(\theta)}$	$csch(\theta) = \frac{1}{FP}$

Fonte: Adaptada de Santos (2015, p. 52).

Como dito anteriormente  $\overline{AM}$  é uma reta tangente, dada a semelhança entre os triângulos OAM e OFP, a tangente hiperbólica também será:

$$\frac{AM}{OA} = \frac{PF}{OF}$$

Sendo o segmento OA igual a 1, a tangente será igual a

$$tgh(\theta) = \overline{AM} \quad (2.11)$$

Assim como as funções trigonométricas circulares, as funções hiperbólicas também possuem algumas propriedades, na Tabela 02 é mostrado o paralelismo entre essas relações.

**Tabela 02** - Propriedades das funções trigonométricas

Trigonométricas Circulares	Trigonométricas Hiperbólicas
$cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1$	$cosh^2(\theta) - senh^2(\theta) = 1$
$tg^2(\theta) + 1 = sec^2(\theta)$	$1 - tgh^2(\theta) = sech^2(\theta)$
$1 + cotg^2(\theta) = csc^2(\theta)$	$cotgh^2(\theta) - 1 = csch^2(\theta)$

Fonte: Adaptada de Santos (2015, p. 51).

É importante salientar que apesar de inúmeras semelhanças, essas funções têm diferenças, principalmente no que tange a sua periodicidade e a sua imagem. As funções hiperbólicas não são periódicas e não são limitadas a pequenos intervalos. Assim, de acordo

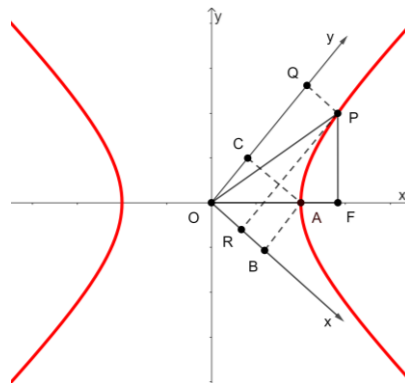
com Freitas (2015), o seno hiperbólico varia de  $-\infty$  até  $\infty$ , enquanto o cosseno hiperbólico tem a imagem definida pelo intervalo  $[1, +\infty)$ . A exceção nesse caso, é da tangente hiperbólica, que se limita ao intervalo entre -1 e 1, diferente de sua homônima trigonométrica.

### 2.3.1 Funções hiperbólicas e funções exponenciais

Como citado anteriormente, as funções hiperbólicas são vistas como combinações de funções exponenciais recorrentes. De posse das funções hiperbólicas genéricas, é possível ir mais a fundo nas relações entre a hipérbole e as funções exponenciais.

Na Figura 05, a hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$  é representada nos eixos X,Y e nos eixos rotacionados x,y. A rotação desse novo eixo é dada pelo ângulo  $\beta$  e se aplica a hipérboles fora dos eixos adotados.

**Figura 05** - Triângulo da hipérbole em eixo rotacionado



Fonte: Adaptada de Vasconcelos (2013).

Com essa mudança, faz-se necessário a conversão das coordenadas dos pontos para o novo sistema. As relações entre as coordenadas  $(x,y)$  e  $(X,Y)$  são dadas pelas seguintes equações:

$$x = X * \cos(\beta) - Y * \sin(\beta) \quad (2.12)$$

$$y = X * \sin(\beta) + Y * \cos(\beta) \quad (2.13)$$

Para o ponto P, as coordenadas nos eixos x,y são  $x = \overline{OR}$  e  $y = \overline{RP} = \overline{OQ}$ . Enquanto nos eixos X,Y são  $X = \overline{OF} = \cosh(\theta)$  e  $Y = \overline{FP} = \sinh(\theta)$ . Sendo  $\beta = 45^\circ$ , têm-se que:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))$$

Como se trata de uma hipérbole equilátera, o ponto A possui coordenadas (1,0) em X,Y e  $x = \overline{OB}$ ,  $y = \overline{OC}$  em x,y. Portanto, suas coordenadas serão:

$$x = \overline{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A partir daí, é possível calcular as áreas sob a curva, mais especificamente as áreas dos setores CAPQ e RBAP. Ambas são dadas, respectivamente, pelas equações:

$$A_{CAPQ} = \frac{1}{2} \ln \frac{OQ}{OC} \quad (2.14)$$

$$A_{RBAP} = \frac{1}{2} \ln \frac{OB}{OR} \quad (2.15)$$

Substituindo os valores já obtidos nas equações (2.14) e (2.15). elas serão:

$$A_{CAPQ} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right] = \frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))$$

$$A_{RBAP} = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))} \right] = -\frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

Sabe-se que a área do setor OSA é igual a  $\frac{\theta}{2}$ , como dito na seção 2.3, de posse desta informação e dada a similaridade com os setores CAPQ e RBAP, é determinado que:

$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) + \sinh(\theta))$$

$$\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh(\theta) - \sinh(\theta))$$

Redistribuindo as equações, chega-se a:

$$e^{\theta} = (\cosh(\theta) + \sinh(\theta)) \quad (2.16)$$

$$e^{-\theta} = (\cosh(\theta) - \sinh(\theta)) \quad (2.17)$$

Assim, o seno será dado pela subtração das equações (2.16) e (2.17), enquanto o cosseno será dado pela soma de ambas. Elas serão, respectivamente:

$$\sinh(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \quad (2.18)$$

$$\cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \quad (2.19)$$

Utilizando o Quadro 02, é possível encontrar as demais funções hiperbólicas, em termos de exponenciais. Sendo elas:

$$\tanh(\theta) = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} \quad (2.20)$$

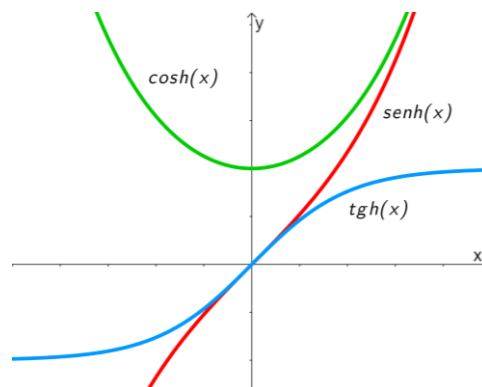
$$\operatorname{sech}(\theta) = \frac{2}{e^{\theta} + e^{-\theta}} \quad (2.21)$$

$$\operatorname{cotgh}(\theta) = \frac{e^{2\theta} + 1}{e^{2\theta} - 1} \quad (2.22)$$

$$\operatorname{csch}(\theta) = \frac{2}{e^{\theta} - e^{-\theta}} \quad (2.23)$$

A Figura 06 demonstra o seno, o cosseno hiperbólico e a tangente hiperbólica, permitindo uma comparação entre as curvas e os seus limites de atuação.

**Figura 06 - Seno, cosseno e tangente hiperbólicos**



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

### 2.3.2 Funções hiperbólicas inversas

De acordo com Flemming (2014), é natural deduzir que as funções hiperbólicas possuem suas versões inversas, a grande maioria delas possuem um valor de  $y$  em sua imagem, que por sua vez correspondem a apenas um valor  $x$  no domínio. Fogem à regra o cosseno e a secante hiperbólicos, que possuem dois valores de  $x$  em seus domínios, e por isso têm seus domínios restringidos à valores positivos.

Como as funções hiperbólicas podem ser expressas em termos da função exponencial, é possível utilizar essas relações e expressar as suas inversas em termos de logaritmos naturais, uma vez que são tratadas como opostas. Desta maneira, as equações 2.24 a 2.29 apresentam as funções hiperbólicas inversas e as suas definições em logaritmos naturais.

$$\operatorname{senh}^{-1}(\theta) = \ln (\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}), \text{ para qualquer valor de } \theta; \quad (2.24)$$

$$\operatorname{cosh}^{-1}(\theta) = \ln (\theta + \sqrt{\theta^2 - 1}), \quad \theta \geq 1; \quad (2.25)$$

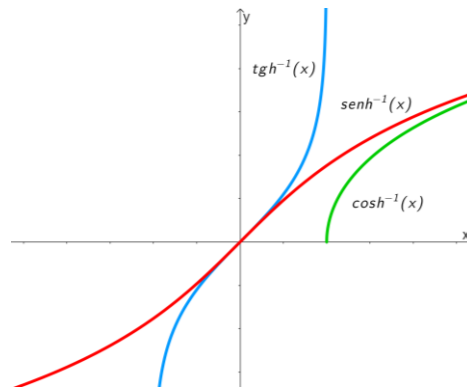
$$\operatorname{tgh}^{-1}(\theta) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \right), \quad -1 < \theta < 1; \quad (2.26)$$

$$\operatorname{sech}^{-1}(\theta) = \ln \left( \frac{\theta + \sqrt{1 - \theta^2}}{\theta} \right), \quad 0 < \theta \leq 1; \quad (2.27)$$

$$\operatorname{cotgh}^{-1}(\theta) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\theta + 1}{\theta - 1} \right), \quad |\theta| > 1; \quad (2.28)$$

$$\operatorname{csch}^{-1}(\theta) = \ln \left( \frac{1}{\theta} + \frac{\sqrt{1 + \theta^2}}{|\theta|} \right), \quad \theta \neq 0. \quad (2.29)$$

Na Figura 07 são expostas as representações gráficas das funções hiperbólicas inversas do seno, cosseno e da tangente. Percebe-se a restrição imposta ao cosseno hiperbólico inverso, uma vez que apenas metade de seu arco é utilizado.

**Figura 07** - Seno, cosseno e tangente hiperbólicos inversos

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

### 2.3.3 Tabela de derivadas das funções hiperbólicas

A Tabela 03 relaciona as principais funções hiperbólicas e hiperbólicas inversas, com as suas respectivas derivadas.

**Tabela 03** - Derivadas de funções hiperbólicas e hiperbólicas inversas

$f(\theta)$	$\frac{d}{dx} f(\theta)$	$f(\theta)$	$\frac{d}{dx} f(\theta)$
$senh(\theta)$	$cosh(\theta)$	$senh^{-1}(\theta)$	$\frac{1}{\sqrt{\theta^2 + 1}}$
$cosh(\theta)$	$senh(\theta)$	$cosh^{-1}(\theta)$	$\frac{1}{\sqrt{\theta^2 - 1}}$
$tgh(\theta)$	$sech^2(\theta)$	$tgh^{-1}(\theta)$	$\frac{1}{1 - \theta^2}$
$sech(\theta)$	$-sech(\theta) * tgh(\theta)$	$sech^{-1}(\theta)$	$\frac{-1}{\theta\sqrt{1 - \theta^2}}$
$cotgh(\theta)$	$-csch^2(\theta)$	$cotgh^{-1}(\theta)$	$\frac{1}{1 - \theta^2}$
$csch(\theta)$	$-csch(\theta) * cotgh(\theta)$	$csch^{-1}(\theta)$	$\frac{-1}{ \theta \sqrt{1 + \theta^2}}$

Fonte: Elaborada pela autora (2021).



### 2.3.4 Tabela de integrais das funções hiperbólicas

Na Tabela 04 encontram-se as integrais das funções hiperbólicas mais utilizadas, sendo possível utilizar as suas identidades para a obtenção das demais.

**Tabela 04** - Integrais de funções hiperbólicas

$f(\theta)$	$\int f(\theta) d\theta$	$f(\theta)$	$\int f(\theta) d\theta$
$\operatorname{senh}(\theta)$	$\operatorname{cosh}(\theta) + C$	$\operatorname{sech}(\theta)$	$\operatorname{arg\,tg}(\operatorname{senh}(\theta)) + C$
$\operatorname{cosh}(\theta)$	$\operatorname{senh}(\theta) + C$	$\operatorname{cotgh}(\theta)$	$\ln(\operatorname{senh}(\theta)) + C$
$\operatorname{tgh}(\theta)$	$\ln(\operatorname{cosh}(\theta)) + C$	$\operatorname{csch}(\theta)$	$\ln\left(\operatorname{tgh}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + C$

Fonte: Elaborada pela autora (2021).

As funções hiperbólicas inversas são mais frequentes como resultado da integração de funções irracionais, e por isso, suas integrais não estão presentes na tabela logo acima (Tabela 04). São algumas dessas funções irracionais:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \quad a > 1; \quad (2.30)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \operatorname{cosh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \quad u > a > 0; \quad (2.31)$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \quad \text{se } |u| < a; \quad (2.32)$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{cotgh}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \quad \text{se } |u| > a; \quad (2.33)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \quad 0 < u < a; \quad (2.34)$$

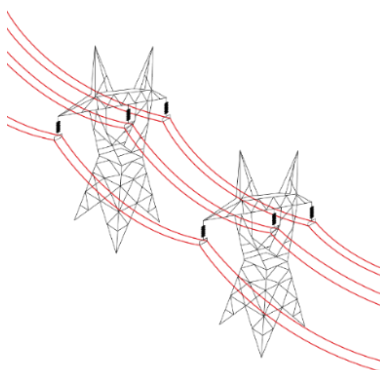
$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C, \quad a \neq 0; \quad (2.35)$$

## 2.4 Catenária

O entendimento da catenária foi uma absoluta incógnita ao longo de décadas, rondando o imaginário de grandes nomes do meio científico. Determinar qual função descrevia tal problema era um desafio diante de suas semelhanças com outra função já estudada, a parábola.

Em suma, a catenária é definida como um cabo flexível suspenso em dois pontos de seu comprimento, sustentando apenas o seu próprio peso. (TALAVERA, 2008). A Figura 08 representa esse problema, em uma de suas principais aplicações, os cabos de transmissão de energia ou linha de transmissão (LT). A catenária também pode ser encontrada em outras aplicações na arquitetura e na engenharia, como em pontes pênses e linhas de telefônicas. Para além disso, seu formato também pode ser observado na natureza, como é o caso da teia de aranha, exibida na Fotografia 01, e do contorno de asas de uma borboleta.

**Figura 08** - Catenária em linhas de transmissão



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

**Fotografia 01** - Teia de Aranha



Foto: Stebra (2005)

Apesar do problema ser descrito e ilustrado como uma curva com a concavidade voltada para cima, a catenária também pode ser encontrada com a concavidade voltada para baixo, principalmente em suas aplicações na arquitetura. A chamada catenária invertida, pode ser encontrada, de acordo com Freitas (2015), em diversas obras arquitetônicas, como a Ponte Juscelino Kubitschek em Brasília e os arcos na Basílica da Sagrada Família em Barcelona, projetada pelo arquiteto espanhol Antônio Gaudí (1823-1926). As Fotografias 02 e 03 mostram uma visão panorâmica desses monumentos e possibilitam a visualização da catenária nessas aplicações.

**Fotografia 02** - Ponte Juscelino Kubitschek



Foto: Ortiz (2007).

**Fotografia 03** - Fachada da Paixão, Basílica da Sagrada Família

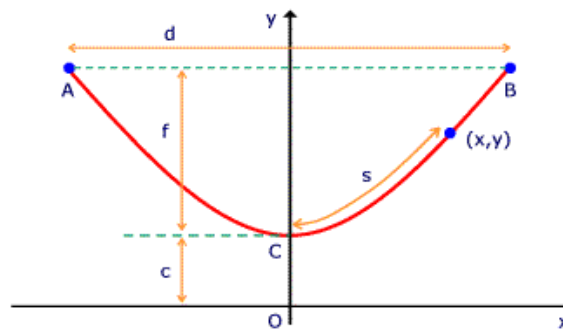


Foto: Daudé (2018).

De acordo com Santos (2015), Leibniz propôs em seus estudos que a catenária também fosse aplicada no cálculo, como uma espécie de tabela logarítmica. Porém, mostrando-se contrária ao seu ideal, a catenária não poderia ser representada por uma função logarítmica, mas sim por um cosseno hiperbólico. Como já é sabido, as funções hiperbólicas podem ser descritas como funções exponenciais e as suas inversas são representadas por funções logarítmicas, o que poderia justificar tal proposta.

A Figura 09 apresenta os elementos de uma catenária, onde  $f$  é a flecha máxima, ou seja, a distância entre o ponto médio  $C$  e o eixo imaginário dos pontos de suspensão  $A$  e  $B$ . A letra  $s$  representa o comprimento do fio entre o ponto médio e um ponto genérico de tração  $T$ , e  $d$  é a distância entre os dois pontos que suspendem o cabo, em outras palavras, o vão livre da catenária. A distância entre a catenária e o eixo  $x$ , é representada por  $c$ .

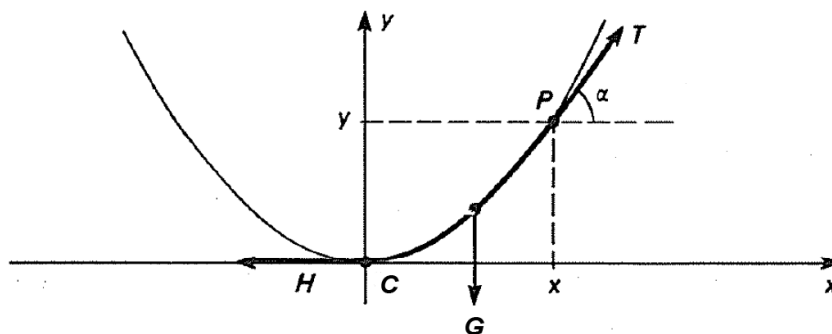
**Figura 09** - Catenária genérica



Fonte: Soares (2008).

Pelo diagrama de forças que atuam sobre o cabo flexível, sabe-se que ele sofre apenas com a gravidade agindo sobre o seu próprio peso e com o tensionamento do cabo ou corda, além da ação do vento em certas aplicações. Em regiões mais afastadas da linha do equador, também é necessário levar em conta o peso da neve sobre ele, uma preocupação sazonal para projetos de pontes pênsis e linhas de transmissão. Na Figura 10 é representado um diagrama dessas forças atuantes, considerando que a densidade é uniforme e desconsiderando qualquer ação do vento.

**Figura 10** - Diagrama de forças da catenária



Fonte: Adaptada de Bassanezi (1988, p. 91).

Considerando a origem das coordenadas  $x$  e  $y$  no ponto mais baixo da curva, o ponto  $C$ , o eixo  $y$  irá coincidir com a flecha máxima da catenária.  $P$  representa um ponto qualquer na curva, onde  $T$  será a tração que atua tangencialmente no ponto, formando o ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo  $x$ . No arco  $CP$  a força atuante é  $G$ , sendo  $G = ps$ , onde  $p$  é o peso do cabo por unidade de comprimento e  $s$  é o comprimento do arco. Já no ponto  $C$  a tração atua horizontalmente e é representada por  $H$ .

Para obter a equação geral da catenária parte-se do princípio de equilíbrio estático do cabo, onde a soma das forças atuantes e a soma dos momentos é nula. Assim, os somatórios das forças serão:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0$$

Desta maneira, o somatório de forças nos eixos  $x$  e  $y$  será:

$$\sum F_x = -H + T \cos \alpha = 0 \quad (2.36)$$

$$\sum F_y = -G + T \operatorname{sen} \alpha = 0 \quad (2.37)$$

Redistribuindo os membros das expressões obtêm-se:

$$T = \frac{H}{\cos \alpha}$$

$$T = \frac{G}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Assim, igualando as expressões e substituindo  $G$  pela equação correspondente, chega-se a:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{H} * s \quad (2.38)$$

Observando que  $p$  e  $H$  são constantes, é possível simplificar a equação 2.38 fazendo uso da constante  $K$ , conhecida como a Constante de Especificidade do Cabo, onde  $K = p/H$ . Outro ponto a se observar é a tangente, que é dada por:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

Portanto, a expressão 2.38 será:

$$y' = K * s \quad (2.39)$$

Derivando ambos os lados da igualdade em relação a  $x$ , será obtido:

$$y'' = K * \frac{ds}{dx} \quad (2.40)$$

De acordo com Bassanezi (1988) e Vasconcelos (2013), a partir do comprimento de um arco chega-se a:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} \quad (2.41)$$

Substituindo a expressão em 2.40, chega-se a equação diferencial da catenária:

$$y'' = K * \sqrt{1 + (y')^2} \quad (2.42)$$

Para a resolução de 2.42 é necessário introduzir a variável  $r$  como um artifício, sendo  $r = \frac{dy}{dx}$ . Desta forma a expressão será:

$$\frac{dr}{dx} = K * \sqrt{1 + r^2}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{1 + r^2}} = K * dx \quad (2.43)$$

Através da Tabela 03 sabe-se que o lado esquerdo da igualdade é a derivada do  $\sinh^{-1}(r)$ , realizando a integração da expressão 2.43, chega-se a:

$$\sinh^{-1}(r) = Kx + c_1 \quad (2.44)$$

Como mencionado na subseção 2.3.2, as funções inversas podem ser expressas em termos de funções logarítmicas. Sendo assim, pela equação 2.24:

$$\ln\left(r + \sqrt{r^2 + 1}\right) = Kx + c_1 \quad (2.44)$$

A partir da Figura 10 é possível identificar que para  $x = 0$ , a variável  $r$  será  $r(0) = y'(0) = 0$ . O que leva a dedução da constante  $c_1$ , que deverá ser igual a zero para satisfazer as condições. Logo, após o rearranjo dos membros, a expressão 2.44 poderá ser escrita como:

$$r + \sqrt{r^2 + 1} = e^{Kx} \quad (2.45)$$

Retirando a raiz presente em um dos lados da igualdade, torna-se viável isolar a variável  $r$ . Desta forma:

$$r^2 + 1 = e^{2Kx} - 2r * e^{Kx} + r^2$$

$$r = \frac{1}{2}(e^{Kx} - e^{-Kx}) \quad (2.46)$$

Revertendo a mudança de variáveis utilizada como artifício para a resolução dessa diferencial de segunda ordem, serão alcançadas as expressões:

$$y = \frac{1}{2} \int (e^{Kx} - e^{-Kx}) dx$$

$$y = \frac{1}{2K}(e^{Kx} + e^{-Kx}) + c_2 \quad (2.47)$$

Para satisfazer a condição inicial,  $y(0) = 0$ , a constante da expressão 2.47 deverá ser  $c_2 = -\frac{1}{K}$ . Analisando a expressão é possível identificar a presença de uma combinação de exponenciais já conhecidas, o cosseno hiperbólico. Substituindo a constante e a equação 2.19 em 2.47, chega-se a equação da catenária:

$$y = \frac{1}{K}(\cosh(Kx) - 1) \quad (2.48)$$

Sabendo que  $x$  representa a distância entre o eixo das abscissas e um ponto  $P$  no cabo. A flecha no ponto mais baixo da curva, para um vão de comprimento  $d$  será:

$$f = \frac{1}{K} \left( \cosh \left( \frac{d}{2} * K \right) - 1 \right) \quad (2.49)$$

De acordo Pinto (2014), em um cabo suspenso por dois apoios no mesmo nível, a relação flecha-vão é determinante na caracterização da curva como uma catenária. Pois segundo ele, quando a flecha é muito pequena em relação ao vão entre os apoios a curva é caracterizada como uma parábola. Quando a relação flecha-vão é menor que 0,5, é possível utilizar as equações para um cabo parabólico sem grandes perdas por aproximação.

De acordo com Labegalini *et al.* (1992), para estes casos em que a curva assume o formato parabólico, as equações da curva, da flecha e do comprimento do cabo serão respectivamente:

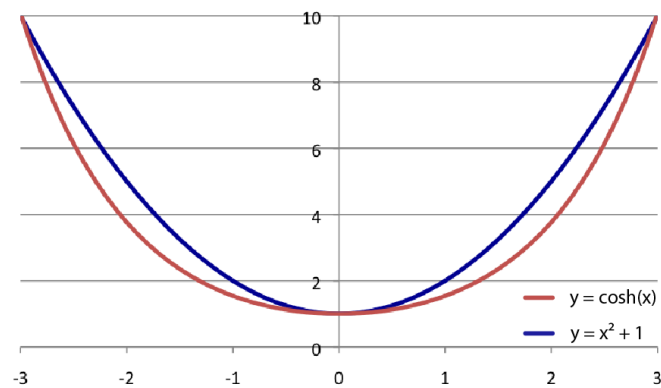
$$y(x) = \frac{px^2}{2H} \quad (2.50)$$

$$f = \frac{pd^2}{8H} \quad (2.51)$$

$$s = d + \frac{8f^2}{3d} \quad (2.52)$$

Evidenciando assim a diferença entre as curvas, como demonstra a Figura 11 para as curvas de um cosseno hiperbólico e de uma parábola. De acordo com Talavera (2008), essa diferença reside na formulação do problema, onde a parábola descreve a atuação de cargas uniformemente distribuídas ao longo de uma linha horizontal, o que não é o caso da catenária. A catenária descreve a distribuição de cargas, ao longo de um cabo, correspondentes ao seu próprio peso. Para além disso, segundo Vasconcelos (2013), a catenária transcende a modelagem polinomial da parábola para se tornar uma curva modelada a partir do cosseno hiperbólico. Assim, apesar de serem visualmente similares, é possível distinguir as curvas há muito tempo estudadas.

**Figura 11** - Curvas da catenária e da parábola



Fonte: Adaptada de Hubbard (2013).



### **3 METODOLOGIA**

Atualmente, uma das principais aplicações da catenária reside no campo da transmissão de energia, via linhas aéreas. Ela determina o comportamento de uma linha de transmissão (LT), flechas máximas e mínimas, distanciamento entre as fases, a altura das torres, entre outros fatores. A flecha da catenária é um parâmetro importante em diversos fatores no dimensionamento de uma LT, como as faixas de passagem e de segurança.

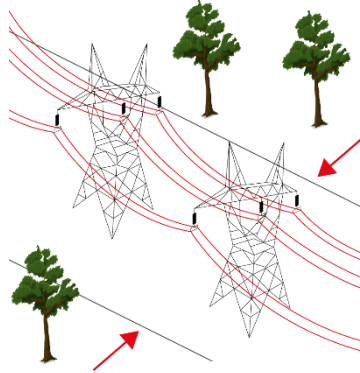
Para reduzir perdas, efeitos elétricos e aumentar a segurança ao longo de toda a extensão da rede de distribuição, existem normas que limitam cada um desses parâmetros. Dentre essas normas, é possível citar a NBR 5422 de fevereiro de 1985, que trata das condições básicas para a realização de um projeto de linhas aéreas de transmissão de energia elétrica. Essas condições variam de acordo com o local de realização do projeto, o clima na região, o porte da linha de transmissão, a presença de obstáculos e centros urbanos, entre outros. Ainda assim, fica a critério da concessionária responsável pela construção da LT os parâmetros a serem seguidos tomando como base a NBR 5422/1985.

Nessa norma também são tratados os afastamentos mínimos entre condutores e seus acessórios energizados e quaisquer partes, sejam elas energizadas ou não, da própria linha, do terreno ou dos obstáculos que venham a ser atravessados pela LT.

#### **3.1 Faixa de Servidão**

A faixa de terra abaixo de uma LT aérea, por razões de segurança, não deve conter obstáculos maiores como árvores, construções e arbustos. Para isso é delimitada uma zona de exclusão nas suas proximidades, chamada de faixa de servidão. Também é vetada a construção de edificações nessa zona após a instalação das LTs, a depender dos níveis de tensão da linha, como é ilustrado na Figura 12.

**Figura 12** - Faixa de servidão de uma LT aérea



Fonte: Elaborada pela autora (2021)<sup>1</sup>.

De acordo com Moura (2019), a largura dessa faixa irá depender dos efeitos elétricos, do movimento dos cabos advindo da ação do vento e do posicionamento das fundações de suportes e estais da LT. Para dimensioná-la é necessário já ter realizado o flechamento desses cabos, ou seja, já ter determinado as flechas máximas e mínimas do condutor. Esse processo ocorre após a determinação da catenária, como mostrado na seção 2.4, e também leva em consideração fatores climáticos que afetam o comportamento dos cabos.

Existem também outras duas faixas, a de segurança e a de passagem, o que as difere é o nível de atividade permitida em cada uma e questões legais a respeito dos direitos à propriedade. A faixa de segurança tem tamanho menor ou igual a de passagem ou servidão, de acordo com NBR 5422/1985 a sua largura para uma LT única é dada pela equação:

$$L = 2(b + d + D) \quad (\text{m}) \quad (3.1)$$

Onde,  $b$  é a distância horizontal entre o eixo central da estrutura e o ponto de fixação do condutor mais afastado,  $d$  é o resultado da soma das projeções horizontais dos comprimentos da flecha e da cadeira de isoladores ( $l_i$ ) considerando seu deslocamento angular  $\beta$  devido à ação do vento, e  $D$  é um parâmetro determinado de acordo com a tensão máxima de operação da LT (kV). As equações abaixo (Equações 2.37 e 2.38) demonstram a determinação dos parâmetros  $d$  e  $D$ , respectivamente.

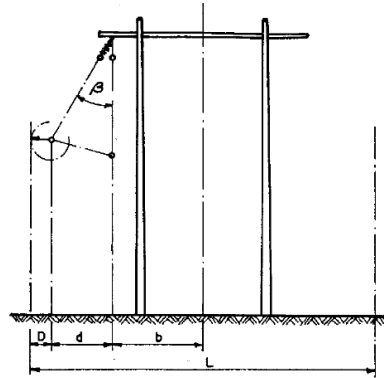
$$d = (f + l_i) * \text{sen}(\beta) \quad (\text{m}) \quad (3.2)$$

$$D = \frac{V_{\text{máx}}}{150} \quad (\text{m}) \quad (3.3)$$

<sup>1</sup> Árvore criada por OpenClipart-Vectors. Disponível em: <https://pixabay.com/pt/vectors/árvore-floresta-porta-malas-576850/>. Acesso em: 12 jul. 2021

A Figura 13 ilustra esses elementos para LT descrita. É importante reforçar que o nível de tensão da LT também irá influenciar na largura da faixa e em outros fatores, como é percebido ao se observar o parâmetro  $D$ .

**Figura 13** - Faixa de servidão para condutores dispostos horizontalmente



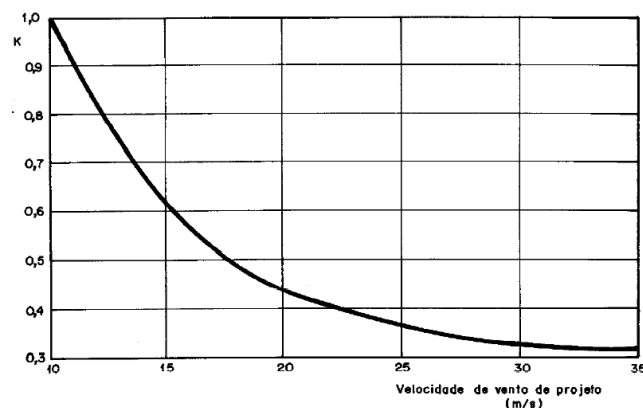
Fonte: NBR 5422 (1985, p 42).

De acordo com a NBR 5422, a determinação do deslocamento angular ( $\beta$ ) da cadeia de isoladores, resultado da ação do vento sobre os cabos, é feita a partir da equação:

$$\beta = \text{tg}^{-1}(K * \text{tg} \beta_R) \quad (3.4)$$

Onde o parâmetro  $K$  é dado através de um gráfico, demonstrado pela Figura 14, que relaciona os valores dessa constante com a velocidade do vento de projeto adotado.

**Figura 14** - Parâmetro K para determinação do ângulo de balanço



Fonte: NBR 5422 (1985, p 21).

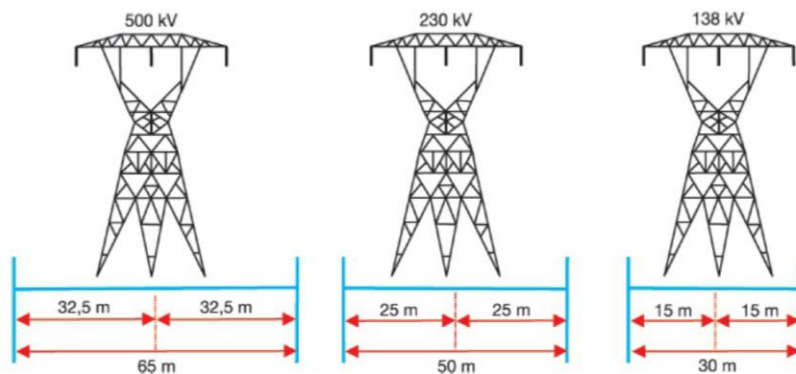
E o ângulo de balanço teórico  $\text{tg } \beta_R$  é obtido através da expressão 3.5.

$$\text{tg } \beta_R = \frac{q_o * d}{p * (V/H)} \quad (3.5)$$

Sendo  $q_o$  a pressão dinâmica de referência ( $\text{N/m}^2$ ),  $d$  o diâmetro do condutor (m),  $p$  é o peso unitário do condutor ( $\text{N/m}$ ),  $V$  o vão de peso (m) e  $H$  é o vão de vento (m). Cabe ressaltar que o vão de peso e vão de vento são definidos, respectivamente, como a média aritmética dos vãos adjacentes ao suporte e a distância entre os pontos com tangente horizontal das catenárias nos vãos adjacentes, segundo a NBR 5422/85.

Na Figura 15 são mostradas as dimensões de algumas LTs no Brasil. Vale salientar que as dimensões podem variar de acordo com os critérios mínimos da concessionária responsável pela construção da LT.

**Figura 15** - Faixa de servidão para torres, em LTs de 500, 230 e 138 kV

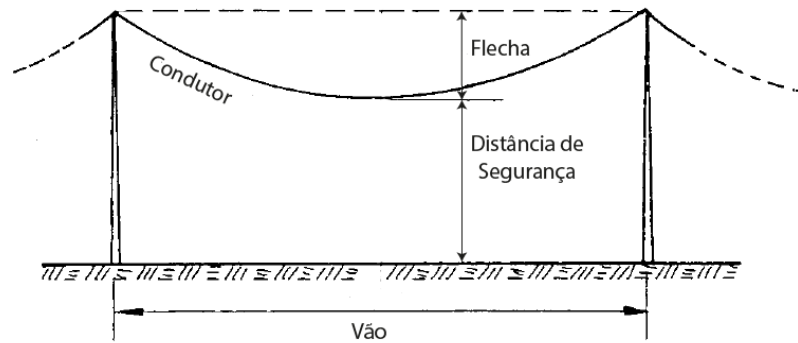


Fonte: Pinto (2014, p 21).

### 3.2 Distância Mínima do Condutor

O cabo condutor de uma linha de transmissão deve ter uma margem de afastamento de quaisquer elementos da natureza ou obstáculos localizados nos arredores ou abaixo dessa linha. Para isso são determinadas distâncias mínimas, visando garantir a segurança de todos os envolvidos e o bom funcionamento da LT ao longo da sua vida útil. A Figura 16 ilustra essa distância entre o ponto mais baixo do condutor e esses elementos ou apenas o terreno, como é o caso.

**Figura 16 - Distância de segurança**



Fonte: Adaptada de Labegalini *et al.* (1992).

A NBR 5422/85 considera dois métodos para a determinação das distâncias mínimas entre o condutor e o solo, ou obstáculo. Neste trabalho será abordado o método convencional estabelecido pela norma, assim as distâncias de segurança serão obtidas através das equações 3.6 e 3.7. Para uma LT com uma tensão máxima superior a de 87 kV, a distância será:

$$D = a + 0,01 * \left( \frac{D_v}{\sqrt{3}} - 50 \right) \quad (3.6)$$

Já para uma linha com uma ordem de grandeza inferior ou igual a 87 kV, a distância de segurança será:

$$D = a \quad (3.7)$$

Onde,  $D_v$  representa uma distância, em metros, numericamente igual a tensão máxima de operação da linha (kV). A constante  $a$  representa a distância básica entre o condutor e quaisquer elementos sob ele ou próximos, determinada pela Tabela 05 e  $D$  é a distância de segurança.

Para água navegáveis, o parâmetro  $H$  a ser utilizado é a altura, em metros, do maior mastro e deve ser fixada pela autoridade responsável pela navegação da via. Também deve se levar em consideração o nível máximo de cheia nos últimos 10 anos (NBR 5422, 1985).

**Tabela 05** - Distâncias básicas

Natureza da região ou obstáculos	$a$ (m)	Natureza da região ou obstáculos	$a$ (m)
Locais acessíveis apenas a pedestres	6,0	Águas não navegáveis	6,0
Locais onde circulam máquinas agrícolas	6,5	Linhas de energia elétrica	1,2
Rodovias, ruas e avenidas	8,0	Linhas de telecomunicações	1,8
Ferrovias não eletrificadas	9,0	Telhados e terraços	4,0
Ferrovias eletrificadas ou com previsão de eletrificação	12,0	Paredes	3,0
Suporte de linha pertencente à ferrovia	4,0	Instalações transportadoras	3,0
Águas navegáveis	$H + 2,0$	Veículos rodoviários e ferroviários	3,0

Fonte: Adaptada da NBR 5422 (1985, p. 25)

Em regiões com altitudes superiores a 1000 metros em relação ao nível do mar, o segundo termo da equação 3.6 recebe um acréscimo de 3% a cada 300 metros acima dos 1000 metros iniciais. Para áreas com acesso restrito a pessoal autorizado, é permitido que sejam utilizadas distâncias menores que as determinadas pelas fórmulas (NBR 5422, 1985).

Outro ponto a ser citado é a existência de outra LT nas proximidades, a norma estabelece que a distância vertical entre quaisquer partes dessas LTs é determinada utilizando termos da expressão 3.6, acrescida da distância básica. Entre outras determinações e casos específicos de obstáculos próximos, é salientável a distância dos condutores às paredes cegas, onde não é autorizada a abertura de qualquer tipo de acesso a LT. Sendo essa distância determinada através equação 3.3.

Cabe ressaltar que o método alternativo, de acordo com Pinto (2014), é utilizado para calcular as distâncias de segurança em LTs que possuem o nível de tensão fase-fase acima de 169 kV e em situações que o fator de manobra é conhecido. Ainda segundo Pinto (2014), os valores obtidos nesse método devem ser superiores aos valores calculados pelo método convencional. Caso sejam inferiores é estabelecido pela norma que devem ser adotadas as distâncias do método convencional para tensões superiores à 169 kV.

## 4 RESULTADOS

Diante de tudo que foi apresentado, pretende-se determinar a curva característica de um condutor, a sua flecha, a altura mínima de fixação dos suportes e a largura da faixa de servidão mínima para essa linha de transmissão. Para tanto, serão utilizados dados fornecidos em exemplos sugeridos por Labegalini *et al.* (1992) e por Meriam (2011).

### 4.1 Catenária em Linhas de Transmissão

Tomando como base uma linha de transmissão descrita por Labegalini *et al.* (1992) em seu exemplo 3.1, serão solucionados os exemplos 3.3 e 3.4 deste mesmo livro. Esses exemplos determinam a os valores da flecha e do comprimento do cabo para vãos de 350 e 1000 metros, utilizando as equações para cabos parabólicos e para cabos em catenária. Labegalini *et al.* (1992) também faz uso de uma expansão da série de Taylor nesses exemplos, para mostrar a convergência dessas curvas e provar que é válido empregar as equações para cabos parabólicos como forma de aproximação e simplificação do problema. Para isso é calculado também o erro entre os valores obtidos, como forma de demonstrar a eficácia dessa aproximação.

Neste trabalho será adotado apenas o vão de 350m para a determinação da curva, da flecha, do comprimento deste cabo, da distância de segurança e da faixa de servidão dessa linha, para ambas as curvas que esse condutor pode assumir. Desta forma, serão aplicadas as equações apresentadas nas seções 2.4 e 3.2. Vale ressaltar que esta LT está suspensa entre dois suportes rígidos em uma mesma altura e assume-se que em um dado ponto dessa linha há uma rodovia sob ela.

Dados:

- Linha de transmissão de 138 kV;
- Cabo Oriole (CAA);
- Seção do cabo – 210,3 mm<sup>2</sup>;
- Carga de ruptura – 7735 kgf;
- Peso (p) – 0,7816 kgf/m;
- Tração horizontal (H) – 1545 kgf;
- Vão (d) – 350 m.

De acordo com a seção 2.4, a curva do condutor em catenária será descrita pela equação 2.48, assim têm-se que

$$y(x) = \frac{1545}{0,7816} * \left[ \cosh\left(\frac{0,7816}{1545} * x\right) - 1 \right] \quad (4.1)$$

Sabendo que o vão adotado é de 350 m e fazendo uso da equação 2.49, a flecha do condutor será:

$$f = \frac{1545}{0,7816} * \left[ \cosh\left(\frac{0,7816}{1545} * \frac{350}{2}\right) - 1 \right] = 7,7515 \text{ m}$$

Considerando utilização de uma torre de transmissão com estrutura autoportante de 30 metros de altura, onde a LT localiza-se sobre uma rodovia, a distância entre o condutor e o solo será de 17 metros. Vale ressaltar que são consideradas nessa estimativa as distâncias entre o condutor e a sustentação do suporte, além do restante da armação acima dos cabos. Supondo que essas estruturas totalizam cerca de 5 metros e somando a flecha, chega-se ao resultado apresentado.

A distância mínima entre o condutor e a rodovia, é dada pela equação 3.6, onde  $a$  é igual a 8,0 m de acordo com a Tabela 05. Dessa forma a distância mínima de segurança, será aproximadamente:

$$D = 8,0 + 0,01 * \left( \frac{138}{\sqrt{3}} - 50 \right) \cong 8,3 \text{ m}$$

Distância muito inferior a estimada para essa LT, o que indica uma boa margem de segurança e o correto dimensionamento da linha de acordo com os cálculos realizados. É necessário considerar que essa diferença se dará pela estrutura adotada, sendo preciso uma distância vertical de pelo menos 16,05 m entre o solo e o ponto de fixação do suporte.

O comprimento do cabo é determinado a partir da equação 2.41, para tanto será necessário derivar a catenária desse condutor. Assim,

$$y'(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1545}{0,7816} * \left[ \cosh\left(\frac{0,7816}{1545} * x\right) - 1 \right] \right\} = \sinh\left(\frac{0,7816}{1545} * x\right)$$

Integrando ambos os lados da equação 2.41, que determina o comprimento de um arco, será obtido do comprimento desse condutor para um vão de 350 m. Assim, chega-se a expressão:

$$s = 2 * \int_0^x \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (4.2)$$



A derivada da catenária que descreve esse problema, é obtida através da Tabela 03, sendo ela

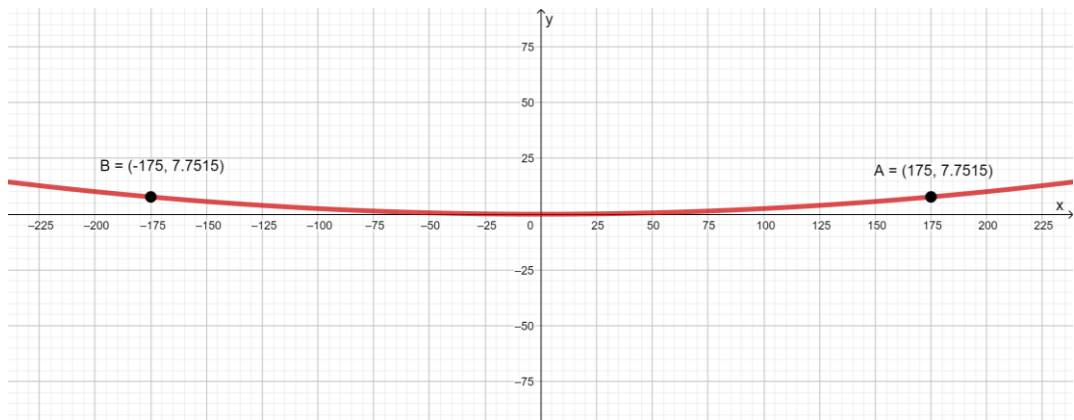
$$\frac{d}{dx} * \left\{ \frac{1545}{0,7816} \left[ \cosh \left( \frac{0,7816}{1545} * x \right) - 1 \right] \right\} = \sinh \left( \frac{0,7816x}{1545} \right)$$

Substituindo os valores na equação 4.2, têm-se que o comprimento do condutor será aproximadamente:

$$s = 2 * \int_0^{175} \sqrt{1 + \left[ \sinh \left( \frac{0,7816x}{1545} \right) \right]^2} dx = 350,4574 \text{ m}$$

Os resultados são confirmados pelos exemplos propostos por Labegalini *et al.* (1992) e pela simulação da curva obtida, demonstrada na Figura 17, que apresentam os mesmos resultados para os valores de flecha. Sendo A e B os pontos de fixação do cabo nas estruturas.

**Figura 17** - Curva do condutor em catenária



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Para uma linha de 138 kV, segundo Pinto (2014), a faixa de servidão será 30 m de largura, como mostra a Figura 15, que apresenta exemplos de valores da faixa de servidão no Brasil, para diferentes valores de tensão.

Ao assumir o condutor descrito no exemplo como um cabo parabólico, será preciso dimensioná-lo de acordo com as equações que regem seus parâmetros. Assim, a curva deste condutor será descrita pela equação 2.50 como:

$$y(x) = \frac{0,7816 * x^2}{2 * 1545} \quad (4.3)$$

Para a determinação da flecha deste condutor, utiliza-se a equação 2.51. Desta forma, para um vão de 350 m, ela será:

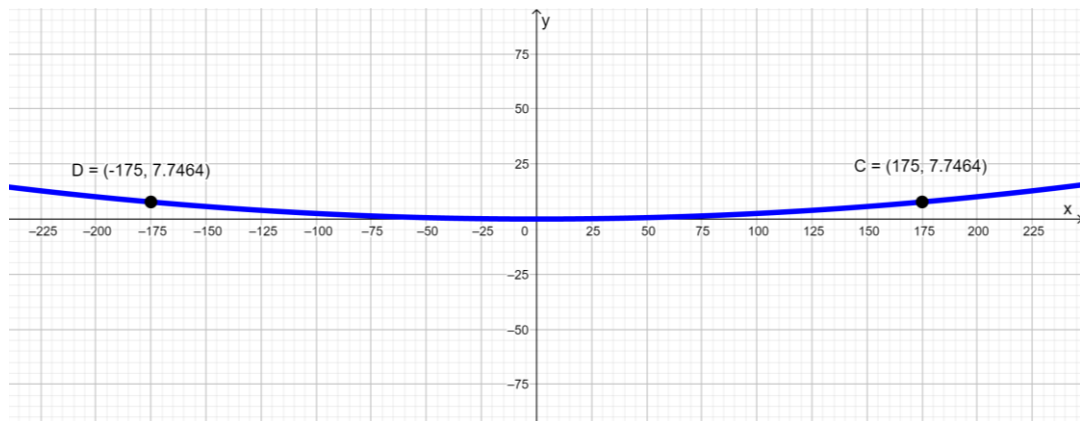
$$f = \frac{0,7816 * (350)^2}{8 * 1545} = 7,7464 \text{ m}$$

Conforme a equação 2.52, o comprimento deste cabo parabólico é igual a:

$$s = 350 + \frac{8 * (7,746)^2}{3 * 350} = 350,4572 \text{ m}$$

A Figura 18 apresenta o gráfico simulado da equação que descreve essa parábola, atestando o valor de flecha obtido, onde C e D são os pontos de fixação do condutor na estrutura de suporte.

**Figura 18** - Curva do condutor parabólico



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Apesar de possuírem valores um pouco diferentes dos parâmetros obtidos para um cabo em catenária, as distâncias mínimas de segurança e da faixa de servidão não se alteram. Assim como a estimativa para a altura da estrutura de suporte dessa linha. No exemplo abordado, a diferença entre os valores é mínima e representa um erro de aproximadamente

$$E_f = \frac{(7,7515 - 7,7464)}{7,7515} * 100 = 0,0658\%$$

no caso dos valores de flecha. Para os valores de comprimento, o erro será de:

$$E_s = \frac{(350,4574 - 350,4572)}{350,4574} * 100 = 0,00006\%$$

Isso ocorre devido a relação entre a flecha e o vão. De acordo com o que é dito na seção 2.4, é preciso que essa relação ultrapasse valores de 0,5 para que o erro tenha uma

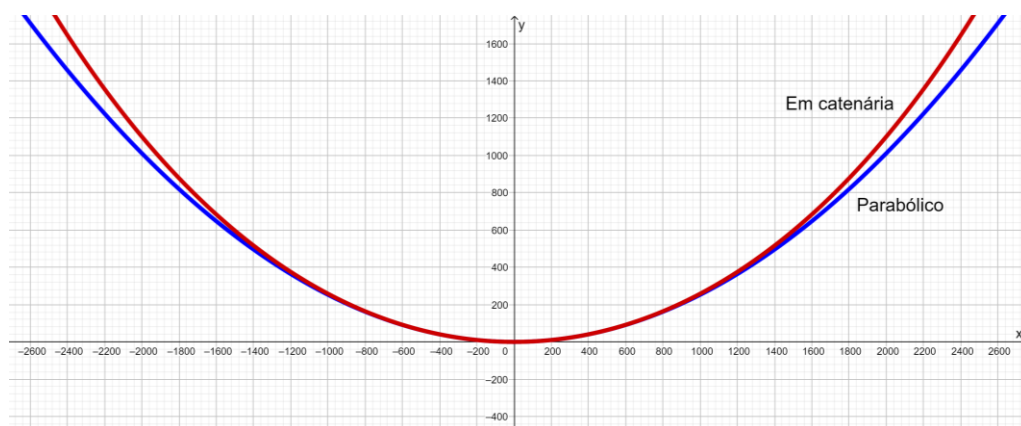
influência maior nos valores de flecha e de comprimento obtidos. Nesse caso, a relação será de:

$$\frac{7,7515}{350} = 0,022$$

Labegalini *et al.* (1992), confirma essa diferença mínima, apesar de obter um resultado diferente em relação ao erro para os valores de comprimento. Em seus exemplos é demonstrado através da série de Taylor que há de fato uma convergência entre essas curvas e que a utilização dessa aproximação através das equações para um cabo parabólico é válida.

Para fins de comparação, a Figura 19 mostra as duas curvas para esse condutor sobrepostas. Confirmando tudo que foi discutido neste trabalho, sobretudo na seção 2.4.

**Figura 19** - Curvas do condutor em catenária e parabólico



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

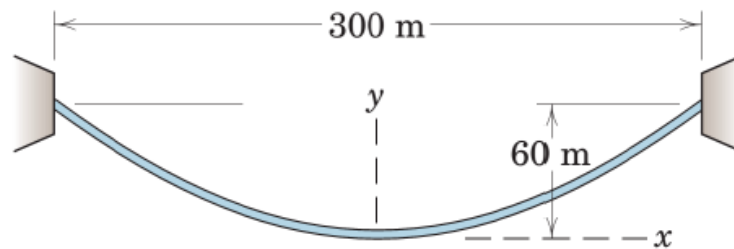
Cabe considerar que para notar tal diferença fez-se necessária a observação das curvas para grandes valores de x e y. Além disso, ao se analisar as curvas para valores de x próximos aos das Figuras 17 e 18, não é perceptível tal diferença e as curvas se sobrepõem. Porém, pelos valores de flecha é possível notar que apesar de próximos, os pontos de apoio têm valores diferentes de altura, desconsiderados após o arredondamento dos valores para duas casas decimais.

## 4.2 Cabo em Catenária

Utilizando os dados presentes em todo o exemplo 5/17, proposto por Meriam (2011), serão obtidos neste trabalho: a curva; a flecha e o comprimento de um cabo descrito como uma catenária. Esse problema é ilustrado através da Figura 20 e originalmente o objetivo

desse exemplo é a obtenção da tração máxima, da tração na metade do comprimento e do comprimento total do cabo em catenária. Para isso, Meriam (2011) faz uso da equação da catenária (Eq. 2.48) para obter o valor da tração mínima de forma gráfica e a partir desse valor encontrar a tração máxima. Também é utilizado em seu exemplo a equação do comprimento do cabo (Eq. 4.2) para determinar o comprimento desse cabo em catenária.

**Figura 20** - Cabo em catenária



Fonte: Meriam (2011, p. 220).

Assim, para um cabo suspenso entre dois pontos e sustentando apenas o seu próprio peso, os dados serão:

- Massa – 12 Kg;
- Vão – 300 m;
- Tração mínima na metade do comprimento – 23,2 kN

Antes de determinar a curva do cabo, será preciso obter o seu peso em kN/m. Desta forma:

$$p = 12 * 9,81 = 117,72 \text{ N/m} = 0,1177 \text{ kN/m}$$

Seguindo os mesmos passos da resolução anterior, utiliza-se a equação 2.48 para obter a equação que descreve a curva desse cabo em catenária. Sendo ela

$$y(x) = \frac{23,2}{0,1177} * \left[ \cosh\left(\frac{0,1177}{23,2} * x\right) - 1 \right] \quad (4.4)$$

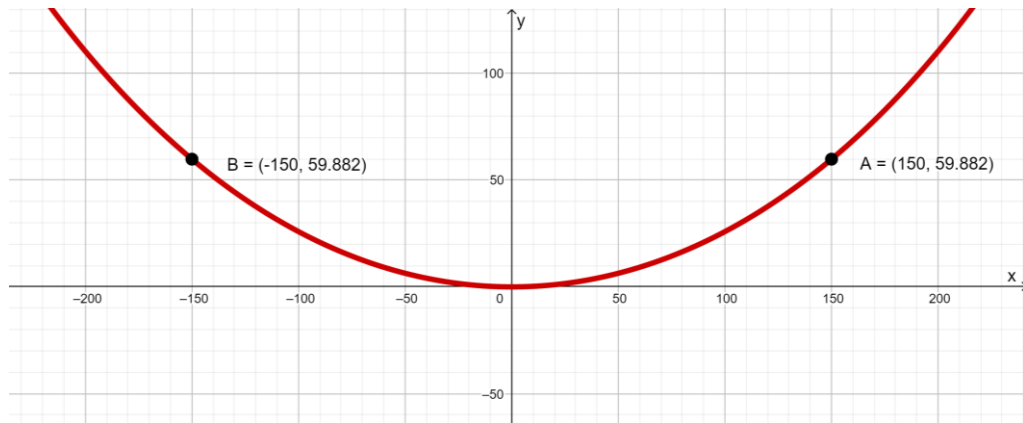
Da mesma forma, a flecha será:

$$f = \frac{23,2}{0,1177} * \left[ \cosh\left(\frac{0,1177}{23,2} * \frac{300}{2}\right) - 1 \right] = 59,882 \text{ m} \quad (4.4)$$

Resultado muito próximo ao valor de flecha utilizado no exemplo base, mostrado na Figura 20, tendo um erro aproximado de 0,2% em relação ao valor de flecha utilizado no

exemplo. Esse erro advém do arredondamento realizado por Meriam (2011), utilizando valores inteiros, no caso da flecha e do comprimento desse cabo. A Figura 21 demonstra a representação gráfica da curva descrita acima, equação 4.4, para este cabo e endossa os resultados obtidos até o momento.

**Figura 21** - Curva do cabo em catenária



Fonte: Elaborada pela autora (2021).

Dando sequência, o comprimento deste cabo será dado pela equação 4.2. Sendo a derivada da curva igual a

$$\frac{dy(x)}{dx} = \sinh\left(\frac{0,1177}{23,2} * x\right)$$

Assim, o comprimento deste cabo em catenária é aproximadamente

$$s = 2 * \int_0^{150} \sqrt{1 + \left[\sinh\left(\frac{0,1177x}{23,2}\right)\right]^2} dx = 329,806 \text{ m}$$

Valor muito próximo ao alcançado por Meriam (2011) em seu exemplo. A diferença ocorre por questões de arredondamento e não representam grandes prejuízos nesse caso, uma vez que ao arredondar o valor obtido, de modo a torna-se um inteiro, o valor será igual ao apontado por Meriam (2011).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através deste trabalho evidencia-se as contribuições substanciais que as funções hiperbólicas realizam em suas diversas aplicações, destacando a curva catenária em linhas de transmissão aéreas. Demonstrando-se presente e efetiva em diversos parâmetros que definem o dimensionamento de um projeto de linha de transmissão.

Também é importante destacar as diferenças pontuais entre a parábola e a catenária, que apesar de serem bastante aproximadas quando a relação entre flecha e vão é muito pequena se diferem bastante quando são definidas pela distribuição de forças em suas curvas.

A utilização incorreta das equações que delimitam um cabo parabólico, quando a relação entre a flecha e o vão é considerável, pode acarretar no mal dimensionamento de cabos e em casos de linhas de transmissão pode trazer prejuízos a saúde e a segurança dos indivíduos que habitam naquela região. Por isso é fundamental entender as suas diferenças e até que ponto é possível aproximar uma catenária de uma parábola.

Entender não só quais funções utilizar, como também compreender os fundamentos por trás dela e a sua origem é algo intrínseco a engenharia. É o que a torna única e faz com que a sociedade possa se desenvolver sobre bases fortes, garantindo a segurança e o bom convívio social.

## REFERÊNCIAS

- ABNT. **ABNT NBR 5422**: Projeto de linhas aéreas de transmissão de energia elétrica. Rio de Janeiro, 1985.
- BASSANEZI, Rodney Carlos; FERREIRA JUNIOR, Wilson Castro. **Equações diferenciais com aplicações**. 1. ed. São Paulo: Harbra, 1988.
- DAUDÉ, Pep. **Façana de la Passió des de un terrat del carrer Sicília**. 21 nov. 2018. 1 fotografia, 1280 x 773 pixels, 300 dpi, 603 Kb, RGB, formato jpeg. Disponível em: <https://sagradafamilia.org/galeria-fotografica>. Acesso em: 16 ago. 2021.
- FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2014.
- FREITAS, Maria do Bom Conselho da Silva Beserra. **As funções hiperbólicas e suas aplicações**. 2015. 60 f. Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7640/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2021
- HUBBARD. **Catenary and parabola**. 2013. 1 figura, 754 x 454 pixels, 38.2 Kb, formato png. Disponível em: <http://mathyear2013.blogspot.com/2013/07/the-catenary-and-parabola.html>. Acesso em: 13 ago. 2021
- KREYSZIG, E. **Matemática superior 1**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1986.
- LABEGALINI, Paulo Roberto et al. **Projetos mecânicos das linhas áreas de transmissão**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1992.
- MAOR, Eli. **e: a história de um número**. 5. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.
- MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para engenharia: estática, volume 1**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.
- MOURA, Aílsson P. de; MOURA, Adriano Aron F. de; ROCHA, Ednardo P da. **Engenharia de sistemas de potência: transmissão de energia elétrica em corrente alternada**. Fortaleza, CE: Ed. UFC, 2019.
- ORTIZ, Mario Roberto Duran. **BSB\_Ponte\_JK\_Panorama\_05\_2007\_266**. 20 maio 2007. 1 fotografia, 1200 x 502 pixels, 150 dpi, 579 Kb, sRGB, formato jpeg. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2475903>. Acesso em: 16 ago. 2021
- PINTO, Milton de Oliveira. **Energia elétrica: geração, transmissão e sistemas interligados**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

SANTOS, Jonas José Cruz dos. **Estudo e aplicações das funções hiperbólicas**. 2015. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional) - Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9335/2/arquivototal.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2021

SOARES, Marco. **cplan02\_1**. 2008. 1 figura, 340 x 200 pixels, 5.63 Kb, formato png. Disponível em: <https://www.mspc.eng.br/dir40/cplan02.php>. Acesso em: 25 jul. 2021

STEBRA. **Spinnennetz im Gegenlicht**. 18 set. 2005. 1 fotografia, 850 x 567 pixels, 72 dpi, 191 Kb, sRGB, formato jpeg. Disponível em: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=581605>. Acesso em: 16 ago. 2021

STEWART, James. **Cálculo**: volume 1. 7. ed. norte-americana. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TALAVERA, Leda Maria Bastoni. **Parábola e catenária**: história e aplicações. 2008. 96 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2008. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-17062008-135338/>. Acesso em: 09 jun. 2021.

VASCONCELOS, Jerry Gleison Salgueiro Fidanza. **Funções hiperbólicas**: história, conceito e aplicação. 2013. 66 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, AM, 2013. Disponível em: <https://tede.ufam.edu.br/bitstream/tede/4962/2/Dissertação%20-%20Jerry%20Gleison%20S.%20F.%20Vasconcelos.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2021.

ZILL, Dennis G. CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**, Vol. 1. 3 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.