



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

LEVI SILVA DE OLIVEIRA

ABORDAGEM VARIACIONAL A GASES DE FERMÍ DIPOLARES

REDENÇÃO - CE

2023

LEVI SILVA DE OLIVEIRA

ABORDAGEM VARIACIONAL A GASES DE FERMI DIPOLARES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Física. Área de concentração: Física.

Orientador(a): Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima

REDENÇÃO - CE

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Oliveira, Levi Silva de.

O42a

Abordagem variacional a gases de fermi dipolares / Levi Silva de Oliveira. - Redenção, 2023.

56f: il.

Monografia - Curso de Física, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima.

1. Baixas Temperaturas. 2. Gases Fermiônicos. 3. Interação Dipolo-Dipolo. I. Título

CE/UF/Dsibiuni

CDD 000

LEVI SILVA DE OLIVEIRA

ABORDAGEM VARIACIONAL A GASES DE FERMI DIPOLARES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Física. Área de concentração: Física.

Trabalho aprovado. Redenção, Ceará, 2023:

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 ARISTEU ROSENDO PONTES LIMA
Data: 15/12/2023 16:28:28-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Documento assinado digitalmente
 JOAO PHILIFE MACEDO BRAGA
Data: 15/12/2023 16:13:53-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

F. L. S. O

Prof. Ms. Francisco Lucas Santos Oliveira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a meu Deus, que me deu forças na caminhada. Dedico, também, à minha família, aos amigos e colegas, além dos professores que contribuíram para esse feito.

AGRADECIMENTOS

Expresso meus sinceros agradecimentos a Deus, pois sem Ele, eu não teria chegado até aqui.

Quero também agradecer aos meus pais, Auxiliadora e Nilson, e meus irmãos, Anderson, Arison e Tiago. Sem a ajuda deles, tudo isso teria se tornado inalcançável. Obrigado por tudo. Vocês foram e são minha base. Em especial, agradeço aos meus pais, pois mesmo com as dificuldades que a vida proporciona, fizeram de tudo para dar o melhor de si em busca de uma boa educação para mim e meus irmãos.

Expresso minha gratidão aos meus amigos Isaque, Kleydson e, especialmente, ao meu falecido amigo Luciano Junior. Os estudos que compartilhamos para o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) foram fundamentais para minha aprovação na universidade, e a corajosa batalha do Luciano Junior contra o câncer continua a ser uma fonte de inspiração até os dias de hoje.

Sou grato também pelos amigos que fiz na universidade e que se tornaram tão próximos que os tinha como família: Mateus Sousa, Evenio, Sampaio e Uitelo. Suas companhias tornavam os dias mais leves e engraçados.

Agradeço aos companheiros que estiveram ao meu lado até o final e aos que se juntaram a nós ao longo do percurso da graduação: Larysse, Eurico, Saulo, Nicolas, Mateus Mussunda, Davi e Alessandra. Nosso companheirismo foi fundamental para o meu desenvolvimento a cada semestre que passava.

Sou muito grato ao professor Aristeu, por ter me aceito em seu projeto de pesquisa, na área de matéria condensada e teoria de campos. Graças a este projeto, pude participar de meu primeiro evento internacional, tendo a oportunidade de pela primeira vez conhecer outro estado do Brasil. E também pela orientação concedida durante este trabalho, sem falar também dos desafios propostos, das cobranças, conselhos e incentivos que me trouxeram bastante evolução na área acadêmica e na vida, e por sua experiência compartilhada durante nossas conversas.

Agradeço também ao Grupo de Pesquisa e Popularização da Astronomia e Astrofísica (GEPPA), pelo amor que produziram em mim em querer divulgar a ciência. Em especial, agradeço ao líder do grupo, Prof. Dr. Michel Lopes Granjeiro, o primeiro professor de Física que tive contato durante a graduação, e que se tornou um grande amigo. Sempre disposto a ajudar, foi também um bom professor nas disciplinas.

Manifesto meu reconhecimento a todos os professores que integraram minha jornada na Unilab, em particular àqueles que ainda não foram mencionados, Philippe e Aurélio. Suas lições e a dedicação aos alunos serão eternamente lembradas.

Por fim, mas não menos importante, agradeço aos outros amigos que tive o

privilégio de conhecer no dia a dia da graduação, com destaque para duas grandes amigas, Geissiele e Lúcia, com quem compartilhei momentos de alegria e risos, e ao meu amigo Nilson Neto. Expresso também minha gratidão ao colega Lucas, ora examinador deste Trabalho. Ele foi fundamental para esclarecer algumas dúvidas durante minha pesquisa de iniciação científica.

Meus agradecimentos estendem-se à Unilab, ao Programa Pulsar, à PROGRAD, à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). O apoio por meio de auxílios e bolsas de pesquisa foi crucial para minha capacitação e permanência no ensino superior.

Me glorio em Cristo por esta vitória. Conseguimos!

"O coração do homem planeja o seu caminho, mas o SENHOR lhe dirige os passos."(Provérbios 16:09)

RESUMO

Estudos envolvendo gases quânticos dipolares vem apresentando surpreendente desenvolvimento. Sua importância na área de física de baixas temperaturas, reside nas propriedades especiais advindas da natureza anisotrópica e de longo alcance da interação dipolo-dipolo. Podemos destacar as soluções do tipo gotícula quântica e sua ligação com o fenômeno da supersolidez, para o caso de gases de Bose, e a deformação da superfície de Fermi, propriedades verificadas experimentalmente em investigações recentes, que vem chamando bastante a atenção da comunidade científica. Diante disto, este trabalho tem como foco gases de Fermi dipolares. Iremos fazer uma revisão teórica abordando essa prolífica área da matéria condensada, com a pretensão de entender suas propriedades estáticas e dinâmicas ao considerar a orientação dos dipolos ao longo do eixo z , para assim caracterizar as excitações de baixa energia. Inicialmente, através da explicação estatística do comportamento das partículas em baixa temperatura, abordamos os casos na ausência e na presença de um potencial harmônico, notando a diferença que ocorre na obtenção da densidade de estados para os dois casos. Em seguida, é abordada a situação em que um gás de Fermi dipolar que se encontra aprisionado numa armadilha triaxial, onde através de um ansatz apropriada para a função de Wigner, conseguimos calcular a energia total. Partindo de uma abordagem variacional à teoria semi-clássica, obtivemos equações que nos fornecem os parâmetros variacionais que serão necessários para se entender o comportamento do sistema analisado. Ao introduzirmos uma abordagem de variáveis adimensionais teremos a noção do que ocorre no caso de uma armadilha cilíndrica ao levarmos em conta a presença de um gás de Fermi interagente, nos retornando o caso ideal, quando desconsiderado as interações.

Palavras-chave: Baixas Temperaturas. Gases Fermiônicos. Interação Dipolo-Dipolo.

ABSTRACT

Studies on quantum dipolar gases have shown remarkable progress, particularly in the realm of low-temperature physics, where the unique properties stemming from the anisotropic and long-range nature of dipole-dipole interactions are crucial. Noteworthy developments include solutions like quantum droplets and their association with supersolidity in Bose gases, along with the experimentally confirmed deformation of the Fermi surface, capturing significant attention within the scientific community. This work specifically concentrates on dipolar Fermi gases, offering a comprehensive theoretical review of this prolific area in condensed matter physics. The focus is on understanding the static and dynamic properties, emphasizing the orientation of dipoles along the z -axis to characterize low-energy excitations. Initial exploration involves a statistical explanation of particle behavior at low temperatures, addressing scenarios both in the absence and presence of a harmonic potential. Subsequently, attention is turned to a dipolar Fermi gas confined in a triaxial trap, where the use of a suitable ansatz for the Wigner function facilitates the calculation of total energy. Employing a variational approach to semiclassical theory yields equations providing variational parameters, essential for comprehending the system's behavior. The introduction of dimensionless variables provides insights into the behavior of an interacting Fermi gas in a cylindrical trap, returning to the ideal case when interactions are neglected.

Keywords: Low Temperature. Fermionic Gases. Dipolo-Dipolo Interaction.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1: A imagem apresenta uma forma de se obter a desaceleração atômica usando luz, como vemos as três figuras a seguir: na primeira temos um átomo com velocidade \vec{v} e um fóton com momento $\hbar\vec{k}$, antes de haver a interação; na segunda o fóton é absorvido, com isso há a transferência total de seu momento, e como consequência, o momento do átomo muda pela quantidade mostrada na figura; e por fim, na terceira há a emissão de radiação pelo átomo em uma direção aleatória, de maneira que haja uma desaceleração do mesmo. 15
- Figura 2: Visualização da SFD. (A) Imagem experimental. (B) imagem ajustada. Observação de um maior impulso na parte vermelha devido a orientação do dipolo, do que na parte azul. 17
- Figura 3: Comparação das Funções de Distribuição de um Gás Ideal: Representando a energia no eixo horizontal e a função de distribuição no eixo vertical. a) Quando $\mu = 1$ e $k_B T = 0.01$, as funções de distribuição de Bose-Einstein e Maxwell-Boltzmann exibem comportamentos semelhantes, com todas as partículas convergindo para um mesmo estado de energia, enquanto a função de distribuição de Fermi-Dirac revela que, para cada estado de energia, há uma única partícula ocupando-o. b) Já para $\mu = 1$ e $k_B T = 0.30$, à medida que a energia aumenta, as três funções de distribuição tendem a adotar padrões semelhantes, sugerindo uma convergência nas tendências das distribuições à medida que a energia do sistema se eleva. 20
- Figura 4: Ilustração do Comportamento das Partículas: À temperatura ambiente, as partículas distribuem-se aleatoriamente. No entanto, em baixas temperaturas, os átomos de Bose tendem a se aglutinar no mesmo estado, contrastando com os átomos de Fermi, que, devido ao PEP, se organizam em estados distintos. 21
- Figura 5: Relação de dispersão. Energia em função de momento dado pela Eq.(2.5) em duas dimensões, $\vec{k} = (k_x, k_y)$ 22
- Figura 6: Distribuição de partículas no espaço do momento, nos dando a representação da superfície de Fermi de fermions livres. Em que os estados dentro da esfera estão todos preenchidos, $|k_i| \leq k_f$, onde k_f é o momento de Fermi, já os estados que se encontram em $|k_i| > k_f$, estão todos vazios, ($i = x, y, z$). 23
- Figura 7: Função de anisotropia $f(x, y)$ de (2.35), que é limitada por 1 para valores pequenos de x ou y e por -2 para valores grandes de ambos os argumentos. Nota-se a simetria $f(x, y) = f(y, x)$ e que $f(x, y)$ se reduz a $f_s(x)$ (curva preta) no caso de simetria cilíndrica. 28

Figura 8: Quadro (a): dipolos não polarizados; Quadro (b): dipolos polarizados; Quadro (c): dipolos polarizados interagindo repulsivamente; Quadro (d): dipolos polarizados interagindo atrativamente.	30
Figura 9: Ilustração do sistema de vácuo do experimento da D. S. Jin para a produção de um gás de férmions degenerado com átomos de ^{40}K	31
Figura 10: Imagens bidimensionais em falsa cor das nuvens de ^6Li e ^7Li . Em $T/T_F = 1,0$, as duas nuvens têm aproximadamente o mesmo tamanho, mas à medida que os átomos são resfriados ainda mais, até $T/T_F = 0,56$, o gás de Bose se contrai, enquanto o gás de Fermi exibe apenas mudanças sutis de tamanho. A $T/T_F = 0,25$, a diferença de tamanho entre os dois gases é claramente discernível. A esta temperatura, a imagem ^7Li exibe distorções devido à alta densidade óptica. No entanto, essas distorções estão presentes apenas na direção radial e não afetam as medições.	32

LISTA DE SÍMBOLOS

Θ	Heaviside
V_{dd}	Potencial de interação dipolo-dipolo
μ	Potencial químico
ε_{dd}	Força dipolar adimensional
f	Função de anisotropia
f_s	Função de anisotropia cilíndrica
Ψ	Função de onda
$\langle n_j \rangle_{cl}$	Função de distribuição de Maxwell-Boltzmann
$\langle n_j \rangle_{FD}$	Função de distribuição de Fermi-Dirac
$\langle n_j \rangle_{BE}$	Função de distribuição de Bose-Einstein
k_B	Constante de Boltzmann
ε_f	Energia de Fermi
R_i^0	Raio de Fermi
K_f	Momento de Fermi
$\bar{\omega}$	Frequência média de oscilação da armadilha
ω_i	Frequência de oscilação da armadilha
\hbar	Constante de Planck reduzida
λ	Comprimento de onda
ε_0	Permissividade no vácuo
μ_e	Momento de dipolo elétrico
μ_m	Momento de dipolo magnético

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	10
LISTA DE SÍMBOLOS	12
1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Escopo desta monografia	18
2 GASES DE FERMI DIPOLARES	19
2.1 Estatística quântica	19
2.2 Gás de Fermi homogêneo	21
2.3 Armadilha harmônica cilíndrica	24
2.4 Armadilha harmônica triaxial	26
2.5 Potencial de dipolo-dipolo	29
2.6 Experimentos	30
3 DESCRIÇÃO TEÓRICA	33
3.1 Abordagem variacional para gases de Fermi	33
3.2 Propriedades hidrodinâmicas na representação de Wigner	34
3.3 Ansatz para a função de Wigner	35
3.4 Extremização da ação e equações de movimento	36
3.5 Variáveis adimensionais	38
4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	41
APÊNDICE A - Transformada de Fourier do potencial dipolo-dipolo	43
APÊNDICE B - Cálculo da energia de Hartree	45
APÊNDICE C - Energia de Fock	49
REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

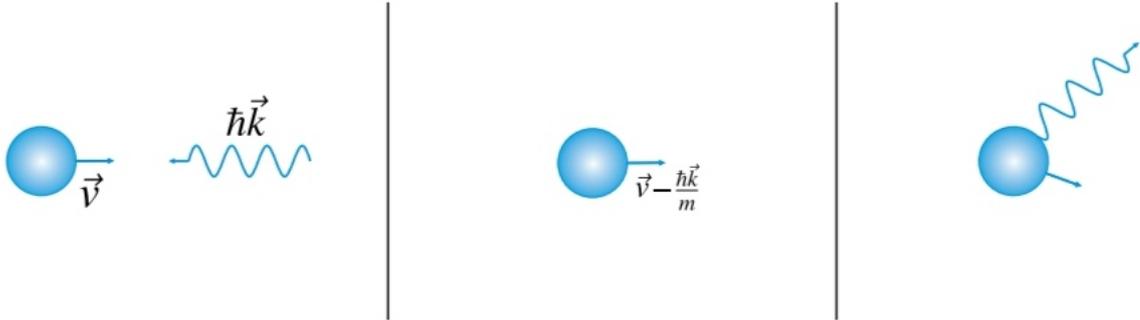
O exame dos distintos estados da matéria tem sido historicamente significativo para a compreensão humana, remontando à Grécia Antiga, notadamente com Demócrito e Leucipo, reconhecidos como os precursores da escola atomista[1]. Esses pensadores foram pioneiros na busca pela compreensão da estrutura da matéria, postulando a divisibilidade da mesma até um ponto limite, denominado átomo[2]. Contudo, avanços nos conhecimentos físicos demonstraram que o átomo não é indivisível; sua estrutura é composta por partículas distintas. Ao longo desse processo, diversas subdisciplinas emergiram, incluindo a física do estado sólido, que visava elucidar e manipular o comportamento mecânico da matéria. À medida que o avanço científico prosseguia, novos sistemas, como metais líquidos, cristais líquidos e o condensado de Bose-Einstein (BEC), foram identificados. Essa evolução levou, em 1978, à alteração da designação para física da matéria condensada pela American Physical Society (APS), refletindo a intenção de abranger não apenas uma vertente, mas todas as áreas desse campo de pesquisa[3].

Com a descoberta e formulação teórica do BEC em 1924, a comunidade científica começou a dedicar atenção a esse novo estado da matéria, proposto teoricamente por Albert Einstein com contribuições de Satyendra Nath Bose, que afirmava que as partículas quânticas eram indistinguíveis. Com essa percepção, Einstein propôs que as partículas poderiam ocupar o menor nível de energia, formando assim um novo estado da matéria[4, 5]. Essa ideia derivou de um trabalho de Einstein, que obteve a fórmula de Planck para a densidade espectral da radiação do corpo negro por meio dos princípios de Bohr e resultados gerais da mecânica estatística. Nesta nova dedução, Satyendra Nath Bose, um físico indiano, criticou a utilização da lei de Wien (um resultado clássico) e substituiu seu uso por um tratamento dentro dos cânones da mecânica estatística dos quanta de luz. Einstein reconheceu a importância dessa abordagem, que poderia ser estendida para uma teoria quântica dos gases ideais. Por meio da extensão feita por Einstein do trabalho de Bose, surgiu pela primeira vez o resultado conhecido como BEC, que ocorre a partir de um gás ideal a uma temperatura muito baixa[6].

Experimentalmente, a realização desse novo estado demandou o desenvolvimento de diversas abordagens, destacando-se, entre estas, a proposta por Hans G. Dehmelt e Wolfgang Pauli. Estes cientistas empregaram técnicas fundamentadas no uso de luz para atingir baixas temperaturas, conforme ilustrado na fig.(1), estabelecendo assim um sistema com menor energia. Esse avanço resultou na ocupação de estados quânticos cada vez mais reduzidos pelas partículas em um átomo, culminando na concessão do Prêmio Nobel de Física em 1989[7, 5]. Simultaneamente, em 1968, V. S. Letokhov propôs a possibilidade de aprisionar átomos utilizando a força de dipolo. Ao unir essas inovadoras concepções, Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle e Carl E. Wieman tornaram-se os pioneiros ao obterem com

sucesso esse novo estado da matéria, o BEC, utilizando átomos neutros, alcançando esse feito em 1995[7, 5].

Figura 1: A imagem apresenta uma forma de se obter a desaceleração atômica usando luz, como vemos as três figuras a seguir: na primeira temos um átomo com velocidade \vec{v} e um fóton com momento $\hbar\vec{k}$, antes de haver a interação; na segunda o fóton é absorvido, com isso há a transferência total de seu momento, e como consequência, o momento do átomo muda pela quantidade mostrada na figura; e por fim, na terceira há a emissão de radiação pelo átomo em uma direção aleatória, de maneira que haja uma desaceleração do mesmo.



Fonte: Adaptado de [7].

Iniciando os estudos sobre o BEC, a compreensão deste fenômeno foi estendida posteriormente à investigação dos gases fermiônicos. A obtenção experimental de sua degenerescência só foi concretizada em 1999 pelo grupo liderado por Deborah S. Jin, no JILA, empregando átomos de ^{40}K [8]. A explicação teórica dos férmions foi inicialmente alcançada de maneira independente por dois físicos em 1926, Enrico Fermi e Paul A. M. Dirac, ambos interpretando teoricamente as propriedades desse grupo de partículas na mesma época[5].

A demora na confirmação experimental das previsões teóricas deve-se à dificuldade em atingir temperaturas inferiores à temperatura de Fermi T_f . Isso se deve ao Princípio da Exclusão de Pauli (PEP), que impossibilita o espalhamento de ondas-s (colisões elásticas binárias), tradicionalmente utilizadas para o resfriamento de bósons. Diante desse obstáculo, foram necessárias abordagens inovadoras, incluindo a exploração de mais de um subestado Zeeman para a manipulação dos níveis de energia dos átomos, e a utilização das ressonâncias de Feshbach, destinadas ao controle das interações interatômicas[9]. Essas técnicas serão detalhadamente abordadas no capítulo dois, oferecendo uma compreensão mais completa sobre como alcançar a superfluidade em um gás de Fermi.

Tendo alcançado o objetivo de degenerar ambos os tipos de partículas, bósons e férmions, prosseguiu-se na busca pela compreensão de certos aspectos dessas partículas, destacando-se entre eles a interação dipolo-dipolo. No caso da primeira categoria, há também a consideração da interação de Van der Waals que seria o espalhamento de ondas-s[10]. No entanto, ao lidar com partículas idênticas de spin meio, a interação de curto alcance torna-se inviável devido ao PEP. O PEP impede a colisão entre essas partículas,

conforme mencionado no parágrafo anterior em relação às ondas-s.

As atenções direcionaram-se para os gases dipolares quânticos atômicos devido às suas propriedades notáveis, percebidas durante análises, influenciadas por sua natureza anisotrópica e outros fatores[11]. Entre os desenvolvimentos nessa área da física, destaca-se a instabilidade de Rosensweig em ferrofluidos[12]. Este fenômeno ocorre em fluidos contendo nanopartículas em grandes quantidades, da ordem de 10^{23} por metro cúbico[13]. A instabilidade no caso clássico é atribuída ao aumento da magnetização, resultando na formação de estruturas de gotículas cristalinas. Nos ferrofluidos quânticos, como os BEC, nos quais ocorrem fortes interações dipolares, observa-se também a presença de superfluidez[12]. Esse comportamento despertou, assim, o interesse da comunidade científica para essa forma particular de interação entre partículas.

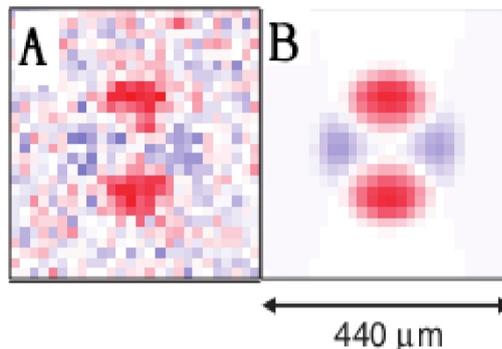
No contexto de moléculas fermiônicas, foram conduzidos estudos com o propósito de descrever as propriedades geradas pela interação de longo alcance em situações em que essa categoria de partículas se encontra em temperaturas extremamente baixas. Nestas circunstâncias, observa-se a ocorrência de atração quando os momentos dipolares das moléculas estão alinhados de cabeça para cauda, enquanto se manifesta uma interação repulsiva em situações em que as cabeças das moléculas estão alinhadas. Para possibilitar a última condição, uma abordagem é a aplicação perpendicular de um campo elétrico externo sobre as moléculas após estas serem confinadas em uma camada bidimensional estreita[14]. Como resultado desse procedimento, emerge a deformação da superfície de Fermi (SFD).

Os efeitos decorrentes da anisotropia que gera a SFD em um gás de Fermi ultrafrio apresentaram desafios para sua observação, sendo concretizados pela primeira vez graças aos avanços alcançados com a utilização de um gás de Fermi degenerado de átomos de Érbio (Er)[15]. Essa realização foi possível devido à interação forte entre dipolos magnéticos e ao PEP.

Teoricamente proposto por Landau, o líquido de Fermi descreve o comportamento de sistemas Fermi interagentes na fase normal. A partir dessa teoria, desenvolve-se a descrição da Superfície de Fermi (SF), cuja existência separa estados ocupados de estados vazios no espaço dos momentos (K). No caso de partículas fermiônicas que interagem isotropicamente, a SF tem a geometria de uma esfera com raio nos momentos de Fermi (K_f), conforme propõe a teoria baseada nela. Compreender a SF possibilita a análise das excitações do sistema e o entendimento do emparelhamento de Cooper em supercondutores. Quando interações complexas estão presentes, a SF pode sofrer deformações. O aprofundamento nos estudos acerca dessa anisotropia, que emerge em gases de Fermi fortemente interagentes, proporcionou contribuições significativas para a descrição da transição de BEC para Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS). Essa transição é caracterizada pelo alargamento da esfera, resultante da interação isotrópica de ondas-s.

Uma abordagem empregada para a descrição da SF envolve o uso de gases quânticos ultrafrios, sendo um dos casos quando partículas de Fermi preenchem progressivamente os estados até K_f , conhecido como mar de Fermi. Alinhando-se de maneira consistente com as propostas teóricas e demonstrando concordância notável com os cálculos previstos pela teoria de Hartree-Fock. Um estudo experimental comprovando a existência da SFD foi feito por meio de uma colaboração entre o Instituto de Física Experimental e Centro de Física Quântica, Universidade de Innsbruck, e o Instituto de Óptica Quântica e Informação Quântica, Academia Austríaca de Ciências. Nesse experimento, realizado pela primeira vez, a SFD foi observada, revelando que sua geometria assume a forma de um elipsóide, conforme podemos ver na fig.(2.B), a SFD no eixo que os dipolos estão orientados. Esta caracterização foi obtida por meio da análise do tempo de voo, que ocorre durante a expansão dinâmica de um gás após sua liberação da armadilha. Vale destacar que a SFD pode ser controlada variando a energia de Fermi, desaparecendo em temperaturas elevadas[15].

Figura 2: Visualização da SFD. (A) Imagem experimental. (B) imagem ajustada. Observação de um maior impulso na parte vermelha devido a orientação do dipolo, do que na parte azul.



Fonte: Adaptado de [5].

No avanço das investigações sobre gases, emerge a capacidade de elucidar o comportamento de objetos astronômicos distantes, exemplificado pela estrela anã branca. Este tipo de estrela, caracteriza-se predominantemente pela presença de carbono, resultante da exaustão de hidrogênio, seguido pela queima de deutério e hélio no estágio final de evolução de estrelas semelhantes ao Sol[22]. Dada a pequena massa desses corpos celestes na escala astrofísica, não há pressão suficiente para instigar reações nucleares adicionais. A ausência das explosões nucleares, que equilibravam a pressão gravitacional nos núcleos estelares, levou à necessidade de uma explicação alternativa para o equilíbrio das anãs brancas. Tal explicação foi pioneiramente proposta por Subrahmanyan Chandrasekhar no início da década de 1930, sugerindo que essas estrelas consistem essencialmente em um gás completamente degenerado de elétrons, cujo PEP impede o colapso gravitacional. É relevante destacar que, até uma densidade de massa específica, este conceito resulta no

limite de Chandrasekhar, indicando que estrelas com até 8 vezes a massa do Sol culminarão sua evolução estelar como anãs brancas [23]. Este entendimento sublinha a importância de aprofundar as pesquisas nesta área, proporcionando uma reprodução mais precisa dos fenômenos que ocorrem a milhares de anos-luz da Terra.

Com o avanço no entendimento das moléculas heteronucleares quanticamente degeneradas, tornou-se imperativa a abordagem de certas propriedades apresentadas por essas entidades. Com esse intuito, este trabalho apresenta uma teoria que oferece uma perspectiva física dos gases de Fermi dipolares no regime hidrodinâmico, permitindo a descrição dos diversos efeitos anisotrópicos resultantes da interação de longo alcance.

1.1 Escopo desta monografia

Esta monografia tem como objetivo realizar um estudo abrangente sobre gases de Fermi ultrafrios. No Capítulo 2, abordaremos os efeitos das interações dipolo-dipolo em um gás. Inicialmente, introduziremos a distinção entre partículas clássicas e quânticas, seguida da apresentação dos cálculos que descrevem a física de um gás ideal no contexto de férmions, desconsiderando a interação entre os átomos. Posteriormente, desenvolveremos, de maneira didática, a compreensão do leitor sobre a implementação de configurações que envolvem uma armadilha harmônica e outra triaxial, possibilitando a realização dos cálculos necessários para descrever suas características e comportamento. Além disso, exploraremos a definição e o conceito das propriedades proporcionadas pelas interações de longo alcance entre as partículas. Por fim, apresentaremos um estudo experimental que culminou na observação do chamado "mar de Fermi".

No Capítulo 3, introduzimos uma abordagem variacional para gases de Fermi dipolares, adotando métodos para encontrar uma equação que descreva as propriedades estáticas do sistema a partir da energia total. Nesse contexto, exploramos a hidrodinâmica na representação de Wigner para embasar nossa pesquisa, apresentando o ansatz que será utilizado. Concluímos esse capítulo com a obtenção das equações de movimento, necessárias para descrever o comportamento do sistema estudado quando ocorre o desligamento da armadilha, retornando ao caso ideal quando a interação dipolo-dipolo é desconsiderada.

Por fim, no capítulo 4 são apresentadas as conclusões e as possibilidades de trabalhos futuros.

2 GASES DE FERMI DIPOLARES

Neste capítulo, procederemos inicialmente com a análise da estatística de um gás quântico, delineando as distinções existentes entre as duas categorias de partículas já mencionadas na introdução: bósons e férmions. Posteriormente, conduziremos uma análise do comportamento de um gás de Fermi homogêneo a uma temperatura de $0K$, explorando suas propriedades. Esta abordagem incluirá uma investigação do comportamento do gás quando confinado em uma armadilha harmônica cilíndrica ou triaxial. Por fim, examinaremos as implicações da introdução de um potencial dipolo-dipolo, além de apresentar experimentos que evidenciam as alterações observadas em um gás de Fermi quando submetido a condições degenerativas.

2.1 Estatística quântica

Na mecânica clássica é possível identificar e distinguir cada partícula de um sistema. Mesmo elas tendo propriedades físicas idênticas, conseguimos "etiquetar" cada uma delas através de suas trajetórias, tornando-as distinguíveis. Já no âmbito da mecânica quântica quando o sistema se encontra com $T \leq T_f$, não é possível distinguir as partículas. Isso ocorre devido ao Princípio da Incerteza, que nega a viabilidade da ideia clássica de partículas com trajetórias precisas. Em vez disso, essa concepção é substituída por uma descrição mais estatística e probabilística. Nesse cenário, não existe um mecanismo que as diferencie umas das outras. Mesmo ao determinarmos a posição de uma partícula em um instante específico, torna-se impossível especificar suas coordenadas no instante subsequente, resultando na indistinguibilidade das partículas [6, 16].

Dentre as partículas indistinguíveis, destaca-se um conjunto identificado como bosônicas de spin inteiro, cuja função de onda é simétrica. Por outro lado, há as fermiônicas de spin semi-inteiro, cuja função de onda é antissimétrica, uma vez que seguem o PEP. Este princípio sugere que duas partículas de spin semi-inteiro idênticas não podem ocupar o mesmo estado quântico. A representação matemática das duas formas de função de onda é apresentada na Eq.(2.1) abaixo [17, 18]:

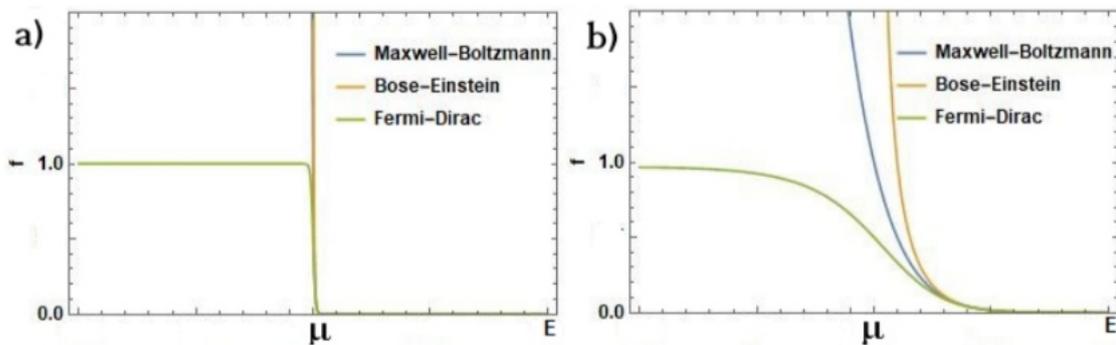
$$\Psi_{\pm}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A[\psi_{n_1}(\vec{r}_1)\psi_{n_2}(\vec{r}_2) \pm \psi_{n_1}(\vec{r}_2)\psi_{n_2}(\vec{r}_1)], \quad (2.1)$$

onde os bósons são representados pelo sinal positivo (+) e os férmions pelo sinal negativo (-), sendo \vec{r}_1 e \vec{r}_2 a representação das coordenadas espaciais das duas partículas do sistema, já n_1 e n_2 representam números quânticos associados aos estados quânticos individuais das partículas. Que nos passa a ideia de que caso $\psi_{n_1} = \psi_{n_2}$ no que concerne há Ψ_- , então

$$\Psi_-(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A[\psi_{n_1}(\vec{r}_1)\psi_{n_1}(\vec{r}_2) - \psi_{n_1}(\vec{r}_2)\psi_{n_1}(\vec{r}_1)] = 0. \quad (2.2)$$

Ou seja, não sobra nenhuma função de onda, o que nos indica que a probabilidade de encontrar dois elétrons no mesmo estado quântico simultaneamente é zero.

Figura 3: Comparação das Funções de Distribuição de um Gás Ideal: Representando a energia no eixo horizontal e a função de distribuição no eixo vertical. a) Quando $\mu = 1$ e $k_B T = 0.01$, as funções de distribuição de Bose-Einstein e Maxwell-Boltzmann exibem comportamentos semelhantes, com todas as partículas convergindo para um mesmo estado de energia, enquanto a função de distribuição de Fermi-Dirac revela que, para cada estado de energia, há uma única partícula ocupando-o. b) Já para $\mu = 1$ e $k_B T = 0.30$, à medida que a energia aumenta, as três funções de distribuição tendem a adotar padrões semelhantes, sugerindo uma convergência nas tendências das distribuições à medida que a energia do sistema se eleva.



Fonte: Adaptada de [5].

As distinções entre os dois grupos mencionados tornam-se observáveis apenas em temperaturas bastante baixas, da ordem da temperatura de Fermi T_f [5]. Ao contrário dos férmions, os bósons têm a capacidade de ocupar o estado de energia mais baixo, uma vez que não seguem PEP. Conseqüentemente, quando um sistema de partículas de spin inteiro é resfriado, reduzindo-se assim a sua temperatura e, por conseguinte, a energia do sistema, surgem diferenças no comportamento entre essas duas categorias. No limite clássico, representado pelo modelo do gás de Boltzmann, o comportamento das partículas é definido pela seguinte expressão:

$$\langle n_j \rangle_{cl} = \exp[-\beta(\varepsilon_j - \mu)], \quad (2.3)$$

onde j é referente ao estado quântico de um orbital, e n_j nos diz a quantidade de partículas no orbital j , já $\beta = 1/k_B T$, sendo k_B a constante de Boltzmann, T a temperatura em Kelvin e μ o potencial químico.

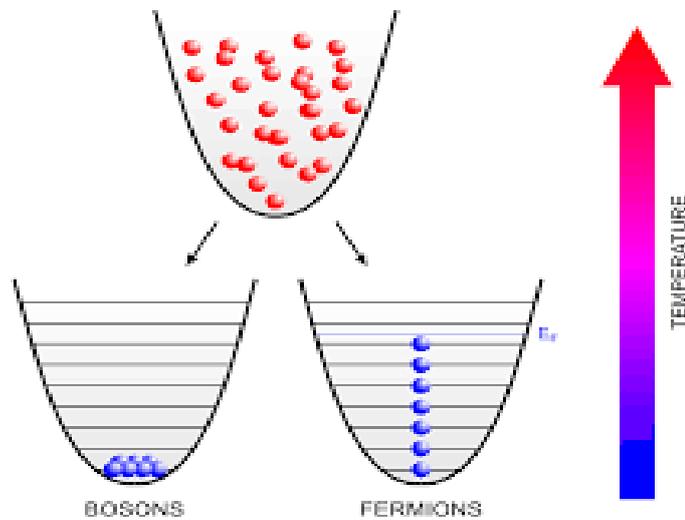
Já para os bósons e férmions em baixas temperaturas a função de distribuição que descreve seus comportamentos é:

$$\langle n_j \rangle_{FD, BE} = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_j - \mu)] \pm 1}, \quad (2.4)$$

onde o sinal $+$ é referente aos férmions e o sinal $-$ a bósons, em que FD e BE nos informa

a estatísticas de Fermi-Dirac e Bose-Einstein. Nota-se que na Eq.(2.4) se $\mu \rightarrow 0_-$ no caso das partículas bosônicas, ocorre o fenômeno da BEC, já para as fermiônicas, n só assume os valores 0 ou 1, para que assim entre em concordância com o PEP, onde podemos ver a ilustração do comportamento tanto do caso clássico, quanto das partículas de Fermi e de Bose na fig. (3) e (4)[18].

Figura 4: Ilustração do Comportamento das Partículas: À temperatura ambiente, as partículas distribuem-se aleatoriamente. No entanto, em baixas temperaturas, os átomos de Bose tendem a se aglutinar no mesmo estado, contrastando com os átomos de Fermi, que, devido ao PEP, se organizam em estados distintos.



Fonte: Adaptada de [20].

2.2 Gás de Fermi homogêneo

Nesta seção daremos uma introdução sobre o estado fundamental de um gás de Fermi homogêneo, e seus efeitos. Para isso, primeiramente iremos descrever um gás ideal de Fermi, que está relacionado com a não interação entre as partículas, e abordaremos o caso de a temperatura sendo nula, só então poderemos entender as propriedades físicas de um gás não ideal. O sistema a ser estudado, será considerado N férmions, e levando em conta que estão livres, sem interação com campos eletromagnéticos, o espectro de energia é[18]:

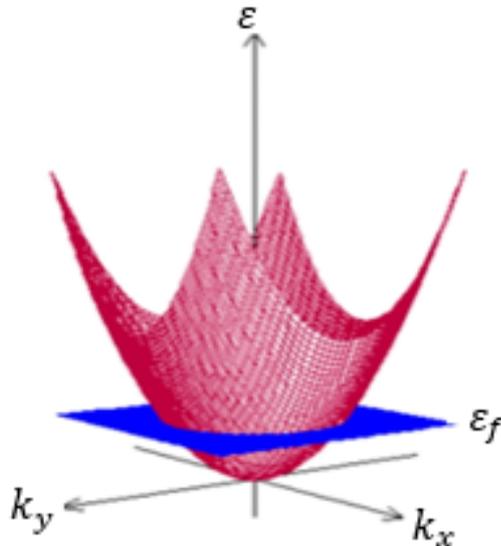
$$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{|\vec{k}|^2}{2m}, \quad (2.5)$$

onde \vec{k} é o momento da partícula.

A representação gráfica da Eq.(2.5) pode ser observada na fig.(5), proporcionando uma compreensão do comportamento das partículas em relação aos estados de energia. Nessa representação, evidencia-se uma distinção entre os estados ocupados ($\varepsilon_k < \varepsilon_f$) e desocupados ($\varepsilon_k > \varepsilon_f$) no espaço k , denominada superfície de Fermi, ocorrendo

quando $\varepsilon_k = \varepsilon_f$ [21, 17]. Aqui, ε_f representa a energia de Fermi, que corresponde à energia da partícula mais energética no sistema. Vale ressaltar que devido ao PEP, só pode existir duas partículas com o mesmo valor de momento, uma com spin $1/2$ e a outra com $-1/2$.

Figura 5: Relação de dispersão. Energia em função de momento dado pela Eq.(2.5) em duas dimensões, $\vec{k} = (k_x, k_y)$.



Fonte: Adaptada de [21].

Através da função heaviside, conhecida também como número de ocupação do estado fundamental, é possível descrever matematicamente o que é passado na fig.(5)[21]. Representando a diferença dos estados ocupados para os estados desocupados

$$\Theta(\varepsilon_f - \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \leq \varepsilon_f \\ 0, & \varepsilon > \varepsilon_f \end{cases} . \quad (2.6)$$

É possível calcular o número de partículas através da Eq.(2.7), para isso levaremos em conta as três dimensões conforme ilustrado na fig.(6), e o limite de volume sendo muito grande, tornando o espectro não mais um somatório e sim uma integral:

$$N(\varepsilon) = \int \frac{d^3r d^3k}{(2\pi)^3} \Theta[\varepsilon_f - \varepsilon]. \quad (2.7)$$

Dado que $|\vec{k}| = \hbar k$, ao substituir a Eq.(2.5) na Eq.(2.7), tal substituição implica:

$$N(\varepsilon) = \int \frac{d^3r d^3k}{(2\pi)^3} \Theta \left[\varepsilon_f - \frac{(\hbar k)^2}{2m} \right]. \quad (2.8)$$

Para dar prosseguimento, sabemos que no espaço real teremos o volume da SF, o chamando

de V , passando para coordenadas esféricas a integral em k , temos:

$$N(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^\infty dk k^2 \Theta \left[\varepsilon_f - \frac{(\hbar k)^2}{2m} \right], \quad (2.9)$$

e pelo fato de não haver partículas após a SF, teremos a atuação da heaviside que nos proporciona a integral até SF:

$$N(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{\sqrt{2M\varepsilon_f}/\hbar} dk k^2 = \frac{(2M)^{\frac{3}{2}} V}{6\pi^2 \hbar^3} \varepsilon_f^{\frac{3}{2}}. \quad (2.10)$$

Obtendo a expressão para o número de partículas, isolando ε_f , o teremos como:

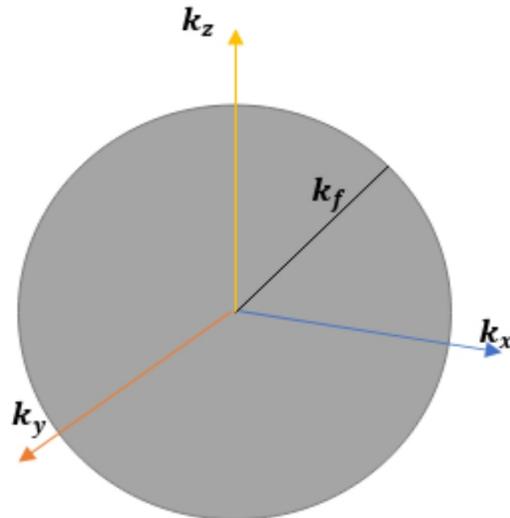
$$\varepsilon_f = \frac{\hbar^2}{2M} (6\pi^2)^{\frac{2}{3}} (n)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.11)$$

sendo $n = N/V$, que se refere a densidade de partículas. Note que nem foi preciso definir o potencial químico, mas a título de curiosidade, ele será igual a ε_f , por estarmos analisando o estado fundamental. Agora, conseguiremos determinar k_f através do resultado de ε_f com a seguinte expressão:

$$k_f = \left(\frac{2M\varepsilon_f}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} = (6n\pi^2)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.12)$$

Dando prosseguimento, vamos agora definir a densidade de estados para que após possamos

Figura 6: Distribuição de partículas no espaço do momento, nos dando a representação da superfície de Fermi de fermions livres. Em que os estados dentro da esfera estão todos preenchidos, $|k_i| \leq k_f$, onde k_f é o momento de Fermi, já os estados que se encontram em $|k_i| > k_f$, estão todos vazios, ($i = x, y, z$).



Fonte: Própria autoria.

encontrar a energia total do gás:

$$g(\varepsilon) = \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{VM^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (2.13)$$

Com isso temos que a energia total do gás é

$$U = \int d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) \Theta(\varepsilon) = \frac{VM^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \int_0^{\varepsilon_f} d\varepsilon \varepsilon^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{5} N \varepsilon_f. \quad (2.14)$$

Desta forma conseguimos encontrar a pressão de um gás ideal,

$$PV = \frac{2U}{3} \Rightarrow P = \frac{2}{5} n \varepsilon_f. \quad (2.15)$$

Por fim, poderemos assim a partir de ε_f também, definir a temperatura de Fermi (T_f)

$$T_f = \frac{\varepsilon_f}{K_B} = \frac{\hbar^2}{2MK_B} (6\pi^2)^{\frac{2}{3}} (n)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.16)$$

que está relacionado com a partícula do último nível ocupado, onde se encontra o estado mais energético denominado energia de Fermi, sendo correspondente ao limite clássico $T \gg T_f$.

Este resultado é exclusivo de um gás ideal de Fermi, sendo totalmente diferente do resultado de um gás ideal clássico ou mesmo no caso de bósons, pois mesmo a uma temperatura nula, ainda há a existência de uma pressão, que já em bósons ela é nula [5, 18, 19].

Considerando as circunstâncias em $T = 0K$ no caso ideal, torna-se pertinente abordar as interações entre partículas, as quais refletem a realidade física. Ao contemplarmos o comportamento da SF, antecipadamente, é válido ressaltar que esta persiste mesmo em contextos fortemente interativos. Diversos experimentos foram conduzidos, corroborando a sua existência mesmo em sistemas com interações significativas, embora manifestando apenas ligeira deformação na distribuição de partículas no estado fundamental[21]. Tais deformações podem ocorrer em decorrência tanto do potencial que o gás estar interagindo, ou quando as interações de longo alcance estão atuando, que será melhor introduzido nas próximas duas seções.

2.3 Armadilha harmônica cilíndrica

Agora vamos adotar o caso de um gás fermiônico aprisionado em uma armadilha harmônica com simetria cilíndrica, ao longo do eixo z . Teremos que o potencial da armadilha é dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} M \omega_r^2 (x^2 + y^2 + \lambda z^2), \quad (2.17)$$

onde M é a massa dos férmions, já ω_r e ω_z são as frequências da armadilha nos eixos radiais e axial. Em que se definiu $\lambda = \omega_z/\omega_r$, pelo fato de as frequências da armadilha serem dadas por $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega_r, \omega_r, \omega_z)$. Logo o hamiltoniano do sistema é dado por

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{k}^2}{2M} + V(\vec{r}). \quad (2.18)$$

É possível encontrar os níveis de energia de cada partícula por meio dos autovalores do oscilador harmônico $\varepsilon_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega_r(n_x + n_y + \lambda n_z + 3/2)$, sendo n_x , n_y e n_z pertencente aos inteiros positivos. Levando em conta para esta ocasião, a energia térmica sendo muito maior que o espaçamento entre os níveis de energia, poderemos substituir o espectro discreto por algo contínuo. Com isso obteremos o número de partículas e a densidade de estados da mesma forma que encontramos no caso do gás ideal harmônico, e através da implementação do potencial da armadilha teremos a seguinte expressão:

$$N(\varepsilon) = \int \frac{d^3r d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(\varepsilon - H(\vec{r}, \vec{p})), \quad (2.19)$$

resolvendo primeiramente no espaço do momento, temos:

$$N(\varepsilon) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty dk k^2 \Theta\left(\varepsilon - \frac{(\hbar k)^2}{2M} - \frac{M\omega_r^2 \rho^2}{2}\right), \quad (2.20)$$

em que $\rho \equiv (x^2 + y^2 + \lambda z^2)^{\frac{1}{2}}$. Através de uma análise da função heaviside, definimos os limites de integração, obtendo:

$$N(\varepsilon) = \frac{4\pi(2M)^{\frac{2}{3}}}{3} \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \left(\varepsilon - \frac{M\omega_r^2 \rho^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \Theta\left(\varepsilon - \frac{M\omega_r^2 \rho^2}{2}\right), \quad (2.21)$$

com isso, ao ser solucionado a integral no espaço real:

$$N(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^3}{6(\hbar\omega_r)^3}, \quad (2.22)$$

já a densidade de estados, é expressa por

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2\lambda(\hbar\omega_r)^3}. \quad (2.23)$$

Notamos então a diferença da Eq.(2.23) para a Eq.(2.13), como era de se esperar. Foi abordado ao final da seção anterior, ao ser implementado interações, que neste caso estar relacionado ao potencial da armadilha, há uma deformação na SF. A base física subjacente a esse fenômeno reside na restrição de estados no espaço de fase, ocasionada pelo confinamento

especial induzido pelo potencial de aprisionamento[5]. Portanto, considerando a Eq.(2.13), em que a SF era originalmente representada como uma esfera, podemos inferir que a introdução de um potencial externo ao sistema resulta em uma SFD. A partir da seguinte abordagem, encontraremos ε_f

$$N = \int_0^{\infty} d\varepsilon g(\varepsilon) \Theta(\varepsilon_f - \mu), \quad (2.24)$$

nos resultando

$$\varepsilon_f = \hbar\bar{\omega}(6N)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.25)$$

Em ocasião disso, ao ser encontrado a ε_f , poderemos obter o tamanho típico de um gás de Fermi degenerado, aprisionado em uma armadilha harmônica, que é tido como:

$$\varepsilon_f = \frac{1}{2}M\omega_r^2 R_F^2 \Rightarrow R_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_f}{M\omega_r^2}} \Rightarrow R_i^{(0)} = a_{0h}(48N_f)^{\frac{1}{6}}, \quad (2.26)$$

onde $a_{0h} = \sqrt{\hbar/M\omega_i}$ está relacionado com o comprimento característico do oscilador harmônico, sendo $\omega_i = (\omega_r^2\omega_z)^{\frac{1}{3}}$.

A densidade de um gás de Fermi degenerado pode ser calculado a partir da distribuição de Fermi-Dirac, integrando a função no espaço real e no espaço dos momentos, no caso de $T = 0K$, tendo;

$$n(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta[\varepsilon_f - H(\vec{r}, \vec{k})] = \frac{8N}{R^3\pi^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{R_f^2}\right)^{\frac{3}{2}} \Theta\left(1 - \frac{\rho^2}{R_f^2}\right), \quad (2.27)$$

para o espaço real, e já a distribuição de momento é dado por

$$n(\vec{k}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi)^3} \Theta[\varepsilon_f - H(\vec{r}, \vec{k})] = \frac{8N}{K_F^3\pi^2} \left(1 - \frac{k^2}{K_f^2}\right)^{\frac{3}{2}} \Theta\left(1 - \frac{k^2}{K_f^2}\right), \quad (2.28)$$

sendo $K_f = \sqrt{2M\varepsilon_f}/\hbar$. Um fato curioso é que a distribuição de momento deste gás fermiônico degenerado é isotrópica, apesar de a armadilha ser anisotrópica, por conta do mesmo só depender do módulo de \vec{k} [8, 5].

2.4 Armadilha harmônica triaxial

Abordaremos agora a teoria para gases de Fermi dipolares em um caso geral de uma armadilha triaxial, com o objetivo de entender aspectos físicos importantes, que seria sua energia total neste caso[24]. Será preciso a utilização de métodos do princípio variacional para se chegar a alguns resultados obtidos, porém essa abordagem será melhor explicada no capítulo 3, por enquanto estaremos apenas com foco em trazer a explicação

do que foi expresso como objetivo.

Considerando um gás fermiônico em um sistema aprisionado harmonicamente com N partículas de massa M , polarizados na direção z os seus respectivos momentos de dipolo elétrico ou magnético[24]. A energia total do sistema é dada pela soma da energia cinética, energia de aprisionamento, energia direta de Hartree e energia de troca de Fock. As duas últimas, especificamente, são atribuídas às interações dipolo-dipolo entre as partículas que estamos levando em conta nesta ocasião. Tais grandezas podem ser obtidas utilizando uma abordagem semiclássica e expressas por meio da função Wigner[25].

$$E_{total} = E_c + E_a + E_H + E_F. \quad (2.29)$$

Em que cada uma tem suas particularidades. Para esta ocasião iremos adotar a seguinte Heaviside:

$$f(\vec{r}, \vec{k}) = \Theta \left(1 - \sum_i \frac{r_i^2}{R_i^2} - \sum_i \frac{k_i^2}{K_i^2} \right), (i = x, y, z), \quad (2.30)$$

utilizada para a resolução da função de Wigner semiclássica, sendo uma abordagem simplificada[5, 25] para lidar com um problema tão complexo ao qual iremos trabalhar.

A primeira, energia cinética após seu cálculo, é dada em termos do momento de Fermi:

$$E_c = \int \frac{d^3r d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2 k^2}{2M} f(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{N}{8} \sum_i \frac{\hbar^2 k_i^2}{2M}. \quad (2.31)$$

A energia da armadilha é expressa em termos do raio de Thomas Fermi:

$$E_a = \int \frac{d^3r d^3k}{(2\pi)^3} V_a(\vec{r}) f(\vec{r}, \vec{k}) = \int \frac{d^3r d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\omega_r^2 r^2 M}{2} \right) f(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{N}{8} \frac{M}{2} \sum_i \omega_i^2 R_i^2, \quad (2.32)$$

em que $V_a(\vec{r})$ se trata do potencial de aprisionamento.

Já as energias de Hartree-Fock são induzidas por conta da interação dipolar, a última é devido a anti-simetria das funções de onda dos férmions. Inicialmente, temos que ao calcularmos a expressão de Hartree, obteremos:

$$E_H = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' n(r) V_{dd}(r - r') n(r') = -\frac{48N^2 C_0}{8\bar{R}^3} f \left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z} \right), \quad (2.33)$$

onde $V_{dd}(r - r')$ se trata do potencial de interação dipolo-dipolo, e $C_0 = 2^{10} C_{dd} / (3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \pi^3)$. Ver apêndice B o cálculo da Eq.(2.33) detalhado.

O termo de troca de Fock:

$$\begin{aligned}
 E_F &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \int d^3r d^3r' V_{dd}(\vec{r}) \exp^{i\vec{r}\cdot(\vec{k}-\vec{k}')} f(\vec{r}, \vec{k}) f(\vec{r}', \vec{k}') \\
 &= \frac{48N^2C_0}{8\bar{R}^3} f\left(\frac{K_z}{K_x}, \frac{K_z}{K_y}\right),
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

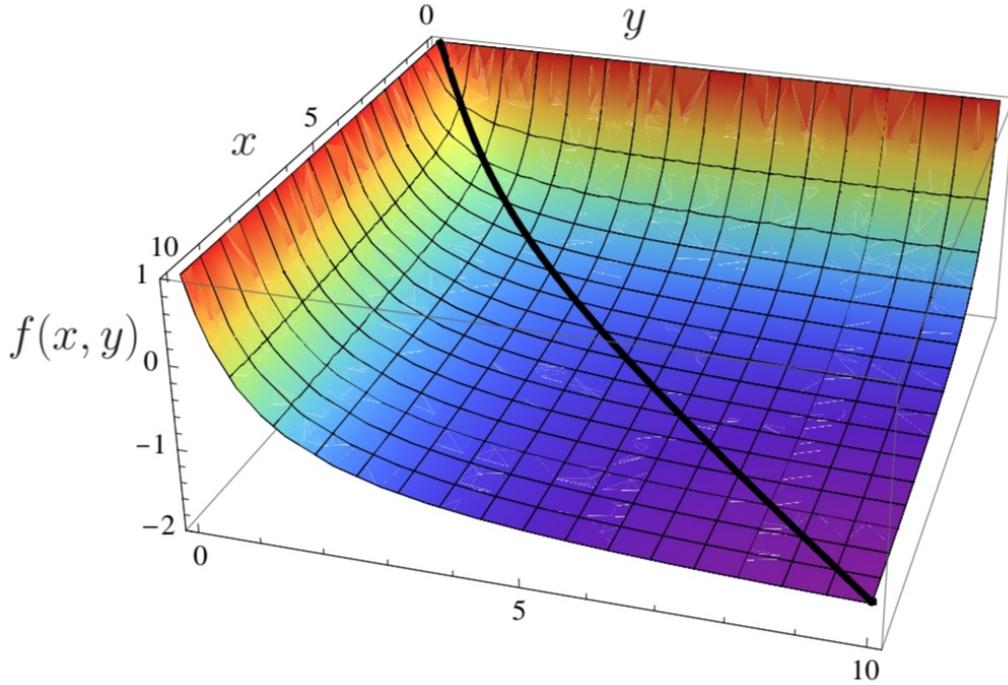
no apêndice C temos o cálculo da Eq.(2.34) detalhado[25, 26].

Os dois últimos termos da energia total dependem de aspectos dos momentos e dos raios de Thomas-Fermi, e por meio da função de anisotropia $f(x, y)$ definida por[27]

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\phi \sin\phi \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{3x^2y^2 \cos^2\phi}{y^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + x^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + x^2y^2 \cos^2\phi} - 1 \right), \tag{2.35}$$

se é possível obter uma análise correta para a resolução das expressões de Hartree-Fock.

Figura 7: Função de anisotropia $f(x, y)$ de (2.35), que é limitada por 1 para valores pequenos de x ou y e por -2 para valores grandes de ambos os argumentos. Nota-se a simetria $f(x, y) = f(y, x)$ e que $f(x, y)$ se reduz a $f_s(x)$ (curva preta) no caso de simetria cilíndrica.



Fonte: Retirada de [28].

Onde $f(x, y)$ tem suas limitações entre 1 e -2 , passando por 0 em $x = y = 1$. Isto se deve ao fato de ser parcialmente atrativa e repulsiva a interação dipolo-dipolo, dependendo se os dipolos estiverem, frente a frente ou lado a lado. Num sistema de simetria cilíndrica e para polarização ao longo do eixo de simetria, a interação é predominantemente atrativa nos

sistemas em forma de cilindro (prolato), representado na fig.(8.d), e repulsiva nos sistemas em forma de panqueca (oblato) como vemos na fig.(8.c). Sendo melhor ilustrado na fig.(7) a análise de $f(x, y)$ [28].

Logo, realizando a soma de cada expressão dos respectivos termos de energia, teremos o resultado da Eq.(2.29):

$$E_{total}(R_i, K_i, \phi, \theta) = \frac{N}{8} \left[\sum_i \frac{\hbar^2 k_i^2}{2M} + \frac{M}{2} \sum_i \omega_i^2 R_i^2 \right] - \frac{48N^2 C_0}{8R^3} \left[f\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right) - f\left(\frac{K_x}{K_z}, \frac{K_y}{K_z}\right) \right]. \quad (2.36)$$

2.5 Potencial de dipolo-dipolo

Agora vamos analisar e melhor introduzir o potencial dipolo-dipolo de um gás atômico, que já se utilizou nas energias de Hartree-Fock, onde o mesmo se dá por conta da interação do dipolo magnético com o campo magnético criado por um segundo dipolo magnético[29].

A interação dipolo-dipolo tem suas particularidades, em que sua interação, diferente da de contato que tem caráter isotrópico e de curto alcance, ela é de longo alcance e também depende do ângulo entre os dipolos como ilustrado na fig.(8), que resulta em um comportamento anisotrópico[30, 31]. Temos que o potencial dado para um sistema de duas partículas separados por uma distância \vec{r} , com dipolos com orientação arbitrária é:

$$V_{dd}(\vec{r}) = \frac{C_{dd}}{4\pi} \frac{(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2) \mathbf{r}^2 - 3(\hat{e}_1 \cdot \vec{r})(\hat{e}_2 \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|^5}, \quad (2.37)$$

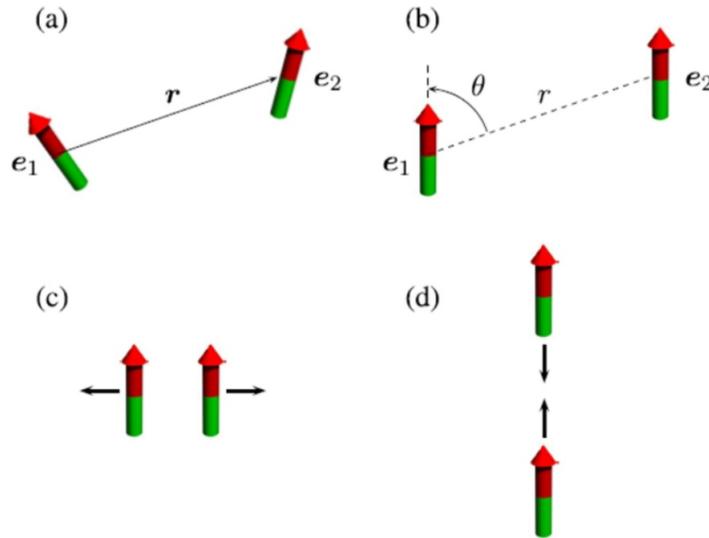
onde \hat{e}_1 e \hat{e}_2 são vetores unitários, em que \vec{e} é o vetor de momento de dipolo, já C_{dd} é uma constante que nos dá a magnitude da interação dipolo-dipolo. Sendo $C_{dd}^m = \mu_0 \mu_m^2$, e μ_0 a permeabilidade magnética no vácuo e μ_m o momento de dipolo magnético. Já para dipolos elétricos, $C_{dd}^e = \mu_e^2 / \epsilon_0$, em que μ_e é o momento de dipolo elétrico e ϵ_0 a permissividade do vácuo[5]. A utilização deste potencial se deu desde a observação da condensação do átomo de ^{48}Cr pela equipe de Jürgen, et al[31].

Considerando que os momentos estão paralelos, ilustrado na fig.(8.c), temos então que se trata de um gás de Fermi polarizado, de modo que o potencial de interação, considerando que estar ao longo do eixo z , o mesmo é dado por

$$V_{dd}(\vec{r}) = \frac{C_{dd}}{4\pi |\vec{r}|^3} (1 - 3 \cos^2 \theta). \quad (2.38)$$

Determinado a interação que há no espaço real, já no espaço dos momentos o

Figura 8: Quadro (a): dipolos não polarizados; Quadro (b): dipolos polarizados; Quadro (c): dipolos polarizados interagindo repulsivamente; Quadro (d): dipolos polarizados interagindo atrativamente.



Fonte: Retirada de [31].

potencial dipolo-dipolo é escrito como:

$$\tilde{V}_{dd}(\vec{k}) = \frac{C_{dd}}{3} \left[\frac{3(\vec{e} \cdot \vec{k})^2}{k^2} - 1 \right], \quad (2.39)$$

onde os passos precisos para se chegar nesse resultado está descrito no apêndice A. Essa aplicação da transformada de Fourier do espaço das posições para o espaço dos momentos, será de grande importância, pois só assim poderemos dar andamento na descrição de aspectos físicos[5] de grandezas como foi preciso nas energias de Hartree-Fock.

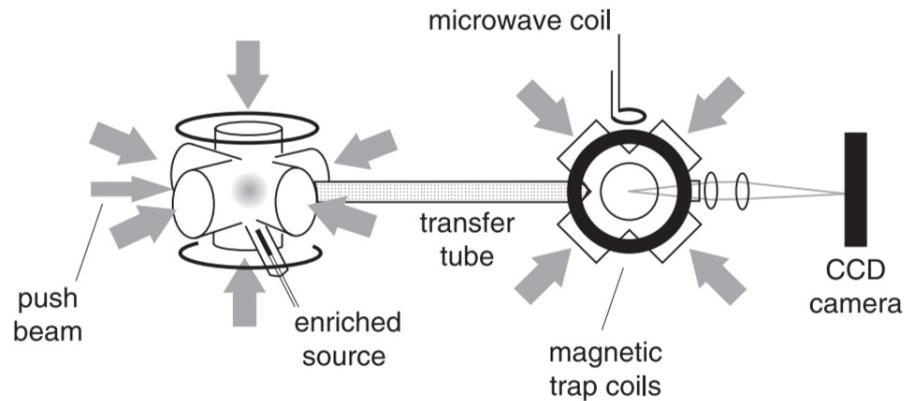
2.6 Experimentos

Nesta seção, será discutido o primeiro experimento conduzido para induzir a degenerescência de um gás de férmions, realizado por Deborah S. Jin no JILA em 1999. No referido experimento, um gás constituído por átomos de ^{40}K foi confinado em uma armadilha magnética do tipo QUIC (*Quadrupole-Ioffe Configuration*). Nesse ambiente, as partículas foram preparadas em dois estados de spin distintos, nomeadamente $|F = 9/2, m_F = 9/2\rangle$ e $|F = 9/2, m_F = 7/2\rangle$. Ao serem submetidas a temperaturas inferiores a 300 nK, observou-se comportamentos consistentes com as previsões da estatística de FD por meio da análise das imagens obtidas durante o tempo de voo do sistema[8].

Inicialmente, átomos de ^{40}K são recolhidos e inseridos em um magneto-óptico trap (MOT), onde passam por pré-arrefecimento. No primeiro MOT, compostos por átomos de potássio são capturados e, por meio de interações com pulsos de luz, transferidos para uma segunda célula. Nessa etapa, ocorre resfriamento por sub-Doppler, atingindo uma

temperatura de aproximadamente $150\mu K$, antes de serem realocados em uma armadilha magnética. Essa armadilha produz um potencial harmônico cilíndrico simétrico, com frequências de $\omega_r = 2\pi \times 19.5$ Hz ao longo da direção axial. Esse arranjo é ajustado para adequar-se ao tempo de vida exponencial dos átomos na armadilha magnética, que é da ordem de 300 s, facilitando assim a evaporação forçada dos átomos no sistema [8].

Figura 9: Ilustração do sistema de vácuo do experimento da D. S. Jin para a produção de um gás de férmions degenerado com átomos de ^{40}K .

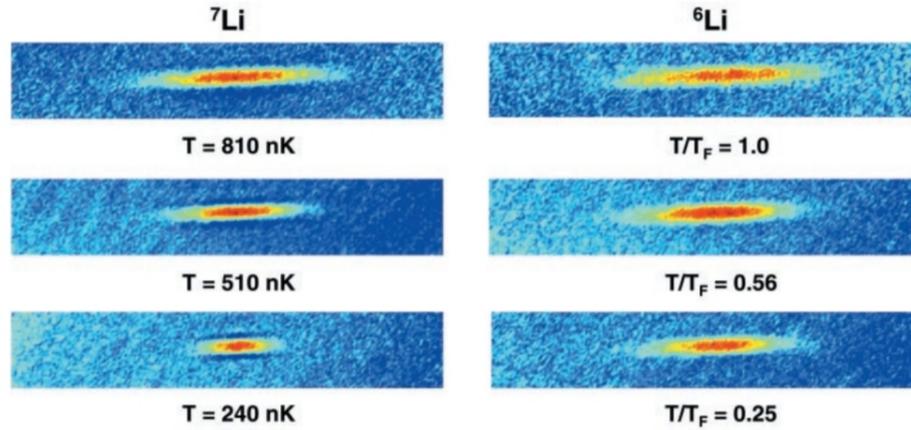


Fonte: Retirada de [8].

Estando já localizados os átomos na armadilha magnética, o resfriamento evaporativo até a degenerescência quântica apresenta complicações devido a estatística de FD, pois se baseia em colisões elásticas binárias, que torna possível a remoção dos átomos mais energéticos. Por conta que entre os férmions idênticos a característica de onda-S é proibida, que seria as colisões citadas acima, em uma certa temperatura da ordem de $100\mu K$. Então para que houvesse o resfriamento do ^{40}K , foi preciso o aprisionamento de dois estados de spin das espécies fermiônicas, podendo assim ter o espalhamento de onda-S[9]. Na fig.(9), apresentamos a ilustração do sistema utilizado no primeiro experimento para se obter a degenerescência de um gás de Fermi.

Desde então, outros experimentos foram feitos, podendo citar um de grande importância também, liderado por R. G. Hulet, que se utilizou de um gás de bósons de 7Li como forma de se chegar a degenerescência de um fermiônico 6Li , por meio do contato entre eles. Se utilizando do uso de uma técnica de resfriamento simpatético (do inglês, *sympathetic cooling*), foi possível observar a pressão de Fermi com uma melhor precisão, que é responsável por assegurar um raio mínimo para o gás[8]. Na fig.(10), ilustramos a distinção entre os gases de Bose e Fermi quando submetidos a temperaturas extremamente baixas.

Figura 10: Imagens bidimensionais em falsa cor das nuvens de ${}^6\text{Li}$ e ${}^7\text{Li}$. Em $T/T_F = 1,0$, as duas nuvens têm aproximadamente o mesmo tamanho, mas à medida que os átomos são resfriados ainda mais, até $T/T_F = 0,56$, o gás de Bose se contrai, enquanto o gás de Fermi exibe apenas mudanças sutis de tamanho. A $T/T_F = 0,25$, a diferença de tamanho entre os dois gases é claramente discernível. A esta temperatura, a imagem ${}^7\text{Li}$ exibe distorções devido à alta densidade óptica. No entanto, essas distorções estão presentes apenas na direção radial e não afetam as medições.



Fonte: Retirada de [32].

3 DESCRIÇÃO TEÓRICA

No capítulo anterior, foram exploradas questões relacionadas às propriedades de um gás de Fermi em condições homogêneas, sem interações, e também sob a influência de interações entre partículas introduzidas por um potencial dipolo-dipolo. Essas interações resultam na SFD de uma esfera para um elipsóide. O presente capítulo introduzirá uma abordagem variacional para descrever as propriedades estáticas de gases de Fermi interagentes a uma temperatura de zero Kelvin. Esta abordagem incorporará variáveis adimensionais para descrever a dinâmica de um gás de Fermi dipolar confinado em uma armadilha triaxial. No final, serão discutidos os resultados referentes ao caso ideal, quando se desconsideram os efeitos das interações de longo alcance.

3.1 Abordagem variacional para gases de Fermi

A abordagem variacional realizada no capítulo anterior, da função de Wigner, é baseada na aproximação de Hartree-Fock de campo médio. Onde por meio das grandezas encontradas para se ter a energia total do sistema estudado, que no caso foi de um gás aprisionado em uma armadilha triaxial, podemos então obter expressões para os parâmetros variacionais, porém para isso temos que minimizar a energia total[34], extremando a ação:

$$\mathcal{A} = -M \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left\{ \dot{\chi}(\vec{r}, t) n_0(\vec{r}, t) + \frac{n_0(\vec{r}, t)}{2} [\nabla \chi(\vec{r}, t)]^2 \right\} - \int_{t_1}^{t_2} dt \langle \Phi_0 | \hat{H} | \Phi_0 \rangle, \quad (3.1)$$

em que os dois primeiros termos se referem às propriedades dinâmicas do sistema, e terão importância significativa como geradores das derivadas temporais nas equações de movimento. Analisando a integração por parte, notamos que o primeiro termo mostra que a fase comum $\chi(\vec{x}, t)$ pode ser vista como o momento conjugado à densidade $n_0(\vec{x}, t)$, que representa a densidade de partículas:

$$-M \int d^3r n_0(\vec{r}, t) \dot{\chi}(\vec{r}, t) = -\frac{M N}{8} \sum_i \dot{\alpha}_i R_i^2, \quad (3.2)$$

o segundo termo descreve a energia associada ao movimento, ou seja, a energia do fluxo, que é representada da seguinte forma:

$$E_f(t) = -\frac{M N}{8} \sum_i \alpha_i^2 R_i^2, \quad (3.3)$$

na qual foi adotado um ansatz para o potencial de velocidade harmônica na forma:

$$\chi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} [\alpha_x(t) x^2 + \alpha_y(t) y^2 + \alpha_z(t) z^2], \quad (3.4)$$

onde sua aplicação se deve para que possamos implementar uma abordagem variacional, que nos trás uma maneira capaz de capturar os modos de excitação monopolo, quadrupolo e quadrupolo bidimensional individualmente caracterizados pela relação entre os parâmetros α em diferentes direções.

Já o último termo se trata da energia total, já demonstrada anteriormente, que também pode ser descrita da seguinte forma:

$$\langle \Phi_0 | \hat{H} | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | \hat{H}_c | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | \hat{H}_a | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | \hat{H}_{int} | \Phi_0 \rangle. \quad (3.5)$$

Por meio da Eq.(3.1), teremos como encontrar os parâmetros variacionais R_i e K_i , que servirá para descrever o tempo de voo, quando há o desligamento da armadilha[28].

3.2 Propriedades hidrodinâmicas na representação de Wigner

Na seção anterior, foram derivadas equações que possibilitam a investigação das excitações hidrodinâmicas. No entanto, as equações de Euler, empregadas para adotar uma abordagem variacional e atingir o fechamento necessário ao extremar a ação, constituem uma estratégia simplificada que proporciona o conhecimento dos termos diagonais e não diagonais da matriz de densidade. Essa simplificação é realizada por meio da introdução de quantidades variacionais apropriadas. Embora o procedimento adotado acarrete na perda de informação, não sendo tão preciso quanto a resolução da equação mais complexa, ele nos conduz a uma solução aceitável de maneira mais acessível e clara.

Adotando quantidades variacionais apropriadas para extremar a ação, para isso há uma mudança para a representação de Wigner, pois se mostrou mais apropriado. Introduzindo a matriz de densidade de um corpo no tempo de acordo com:

$$V_0(\mathbf{R}, \mathbf{p}; t) = \int d^3 s n_0^{(1)} \left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{s}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{s}}{2}; t \right) e^{-ip \cdot s / \hbar}, \quad (3.6)$$

juntamente com a transformação correspondente:

$$n_0^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} v_0 \left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}, \mathbf{p}; t \right) e^{ip \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') / \hbar}. \quad (3.7)$$

Com a ajuda da Eq.(3.6) as grandezas de interesse podem ser expressas em termos da função de Wigner no tempo par, e devido a transformada adotada na referência [28], $n^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \sum_{i=1}^N |\phi_i(\mathbf{x}, t)| |\phi_i^*(\mathbf{x}', t)|$, a densidade de partículas de tempo par, será dada por

$$n_0(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t), \quad (3.8)$$

que nos passa a informação da não alteração da energia potencial de aprisionamento após a transformada. Indo adiante, temos uma próxima grandeza importante, que seria a

distribuição de momento de tempo par, que será expressa através de:

$$n_0(\mathbf{p}, t) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} v_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t). \quad (3.9)$$

Com a ausência do campo de velocidade na equação acima, os devidos valores esperados de potenciais ímpares de \mathbf{p} (momento) desaparecem imediatamente baseado na referência [28]. Já os valores dos termos pares de \mathbf{p}^2 diferem de zero. Dando a nós a energia cinética e a energia de aprisionamento, que podem ser apresentadas como:

$$E_c(t) = \int \frac{d^3r d^3k}{(2\pi)^3} v_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) \frac{\mathbf{p}^2}{2m}. \quad (3.10)$$

Dado o que foi desenvolvido em [28], os termos de Hatre e Fock, não são afetados pela a fatoração. Logo, temos como expressar eles em termos da função de Wigner de tempo par, implicando:

$$\begin{aligned} E_{int}^{Dir}(t) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3r d^3p d^3r' d^3p'}{(2\pi\hbar)^6} v_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}; t) V_{int}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') v_0(\mathbf{r}', \mathbf{p}'; t), \\ E_{int}^{EX}(t) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3R d^3p d^3s d^3p'}{(2\pi\hbar)^6} v_0(\mathbf{R}, \mathbf{p}; t) V_{int}(\mathbf{s}) v_0(\mathbf{R}, \mathbf{p}; t) e^{is(\mathbf{p}-\mathbf{p}')}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

completando assim a descrição de cada componente do Hamiltoniano, em termos de uma função de Wigner de tempo par.

Fundamentado na teoria delineada por [28], empregamos um método variacional que se utiliza do potencial de velocidade e da função de Wigner de tempo par. Este método foi aplicado para estudar a hidrodinâmica de gases de Fermi. Por meio de um ansatz, a qual será abordada com maior detalhamento posteriormente, torna-se possível analisar as excitações de menor energia em um gás de Fermi com interação dipolo-dipolo, alinhando-se assim com os objetivos finais estabelecidos.

3.3 Ansatz para a função de Wigner

Frequentemente, deparamo-nos com problemas nos quais a função analítica não é conhecida. Diante dessa circunstância, recorreremos a um ansatz, que se assemelha a uma forma de "adivinhação"[33], para especular a configuração espacial da solução. Nesse contexto, utilizamos, nesta bibliografia, uma hipótese variacional para determinar a função de Wigner de equilíbrio. Através da Eq.(2.28), é possível aproximar a configuração adequada de um gás de Fermi não interagente a $T = 0K$, por meio de uma abordagem semiclássica, retomando-a:

$$f(\vec{r}, \vec{k}) = \Theta \left(1 - \sum_i \frac{r_i^2}{R_i^2} - \sum_i \frac{k_i^2}{K_i^2} \right), (i = x, y, z),$$

em que R_i e K_i estão relacionados ao espaço real e ao espaço de momento, que são precisos para determinar a extensão da superfície de Fermi em equilíbrio. Onde a interação dipolo-dipolo é responsável por esticar a distribuição de momento na direção de polarização, que levamos em consideração por meio de uma anisotropia dos parâmetros de momento K_i . Logo a normalização de $f(\vec{r}, \vec{k})$ é dado por

$$N = \int \frac{d^3r d^3k}{(2\pi)^3} f(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{\overline{R^3} \overline{K^3}}{48}, \quad (3.12)$$

sendo $R = (R_x R_y R_z)^{\frac{1}{3}}$ conhecido como média geométrica. Onde R_i e K_i serão responsáveis por minimizar a energia, juntamente com a conservação do número de partículas na Eq.(3.12), conseguiremos chegar às equações que determinam esses parâmetros[35].

3.4 Extremização da ação e equações de movimento

Agora inserindo o resultado das expressões (2.31)–(34) e a (3.2) e (3.3) na ação (3.1). Onde para que haja a conservação do número total de partículas como expresso na Eq.(3.12), será introduzido um potencial químico μ como parâmetro de Lagrange. Logo temos que a ação será dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{N}{8} \left\{ \frac{M}{2} \sum_i (\dot{\alpha}_i + \alpha_i^2 + \omega_i^2) R_i^2 + \sum_i \frac{\hbar^2 K_i^2}{2M} + c_0 \overline{K^3} \left[f\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right) - f\left(\frac{K_x}{K_z}, \frac{K_y}{K_z}\right) \right] \right\} \\ & - \int_{t_1}^{t_2} dt \mu(t) \left(\frac{\overline{R^3} \overline{K^3}}{48} - N \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Que por meio da ação (3.13), encontraremos as equações de movimento R_i e K_i e também o multiplicador de Lagrange μ , através da aplicação das equações de Euler-Lagrange. Com isso, realizando apenas uma manipulação matemática das funções obtidas, iremos ter que o potencial químico é dado por

$$\mu = \frac{1}{12} \sum_i \frac{\hbar^2 K_i^2}{2M}. \quad (3.14)$$

Consequiremos então após substituições, realizando uma álgebra simples, as seguintes

equações:

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar^2 K_x^2}{2M} &= \frac{1}{3} \sum_i \frac{\hbar^2 K_i^2}{2M} + \frac{48Nc_0}{2\bar{R}^3} \frac{K_z}{K_x} f_1 \left(\frac{K_z}{K_x}, \frac{K_z}{K_y} \right), \\
\frac{\hbar^2 K_y^2}{2M} &= \frac{1}{3} \sum_i \frac{\hbar^2 K_i^2}{2M} + \frac{48Nc_0}{2\bar{R}^3} \frac{K_z}{K_y} f_2 \left(\frac{K_z}{K_x}, \frac{K_z}{K_y} \right), \\
\frac{\hbar^2 K_z^2}{2M} &= \frac{1}{3} \sum_i \frac{\hbar^2 K_i^2}{2M} - \frac{48Nc_0}{2\bar{R}^3} \frac{K_z}{K_x} f_1 \left(\frac{K_z}{K_x}, \frac{K_z}{K_y} \right) - \frac{48Nc_0}{2\bar{R}^3} \frac{K_z}{K_y} f_2 \left(\frac{K_z}{K_x}, \frac{K_z}{K_y} \right).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Nos fazendo notar a dependência que há entre os momentos de Fermi K_i em função dos raios de Thomas-Fermi (TF) R_i . Mesmo tais equações não sendo independentes uma das outras, no entanto, há princípio temos três equações independentes para resolver para três variáveis.

Já as equações de movimento em relação aos parâmetros de α_i é expresso como:

$$\alpha_i = \frac{\dot{R}_i}{R_i}, \tag{3.16}$$

que por meio deste resultado, substituindo na Lagrangiana poderemos encontrar os parâmetros com relação a R_i :

$$\ddot{R}_i = -\omega_i^2 R_i + \sum_j \frac{\hbar^2 K_j^2}{3M^2 R_i} - \frac{48Nc_0}{Mc_d} Q_i(\mathbf{R}, \mathbf{K}). \tag{3.17}$$

Tendo as funções auxiliares $Q_i(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ dadas pela função de anisotropia $f(x, y)$ e suas derivadas como:

$$\begin{aligned}
Q_x(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \frac{c_d}{x^2 y z} \left[f \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) - \frac{x}{z} f_1 \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) - f \left(\frac{k_z}{k_x}, \frac{k_z}{k_y} \right) \right], \\
Q_y(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \frac{c_d}{x y^2 z} \left[f \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) - \frac{y}{z} f_2 \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) - f \left(\frac{k_z}{k_x}, \frac{k_z}{k_y} \right) \right], \\
Q_z(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \frac{c_d}{x y z^2} \left[f \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) + \frac{x}{z} f_1 \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) + \frac{y}{z} f_2 \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) - f \left(\frac{k_z}{k_x}, \frac{k_z}{k_y} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Onde a constante c_d é:

$$c_d = \frac{2^{\frac{38}{3}}}{3^{\frac{23}{6}} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \pi^2} \approx 0,2791. \tag{3.19}$$

Em que cada termo do lado direito da Eq.(3.17), estar relacionado com diferentes propriedades do sistema, o primeiro devido a armadilha harmônica, o segundo está ligado a pressão de Fermi, e o terceiro vem da contribuição da interação dipolo-dipolo[28].

3.5 Variáveis adimensionais

Encontrado as equações de movimento, e analisando para o caso de uma distribuição de momento esfericamente simétrica, que seria ao negligenciarmos as interações de troca, fixando em zero os termos que envolvem $f(K_z/K_x, K_z/K_y)$ e suas derivadas, interpretaremos fisicamente as Eqs. (3.12), (3.15) e (3.17). Então, dada as Eqs. (3.12) e (3.15) suas resoluções seriam possíveis para o momento de Fermi, obtendo o seguinte:

$$K_x = K_y = K_z = K_f = \frac{\sqrt[3]{48N}}{R}. \quad (3.20)$$

A partir desse resultado, ao incorporarmos na Eq.(3.17) um conjunto de equações de movimento para os raios de TF gerados devido a um potencial $V(R_x, R_y, R_z)$, obtemos uma análise do movimento de uma partícula fictícia sob a influência desse potencial. Entretanto, as resoluções das Eqs. (3.12) e (3.15) não podem ser diretamente determinadas, uma vez que é necessário buscar a solução simultânea com a Eq.(3.17), devido à presença do termo Fock. Isso implica uma modificação anisotrópica nas restrições, tornando necessário abandonar a noção de um potencial subjacente $V(R_x, R_y, R_z)$. A presença da interação de Fock é responsável pela deformação da esfera de Fermi, conferindo-lhe uma forma geométrica elipsoidal no caso de uma armadilha cilíndrica simétrica. Essa deformação persistirá em armadilhas triaxiais e será de considerável importância para a análise das propriedades de equilíbrio e dinâmicas do sistema.

Agora iremos discutir e analisar o caso de que não há interação, obtendo assim unidades adequadas para as quantidades de nosso interesse, para que então possamos explorar as consequências físicas das equações de movimento para um gás de Fermi dipolar aprisionado. Com isso, poderemos expressar o raio TF R_i em unidades de $R_i^{(0)}$ e o momento de Fermi K_i em unidades de K_f , onde $R_i^{(0)}$ e K_f foram demonstrados no Cap.2. Definindo $\tilde{R}_i \equiv R_i/R_i^{(0)}$ e $\tilde{K}_i \equiv K_i/K_f$, teremos a conservação do número de partículas reduzido há:

$$\frac{\tilde{R}_i^3}{\tilde{K}_i^3} = 1. \quad (3.21)$$

Logo, teremos em notação adimensional, as equações de movimento para os raios TF, postas a partir da seguinte relação:

$$\frac{R_i}{R_j} = \frac{\tilde{R}_i}{\tilde{R}_j} \lambda_i, \quad (3.22)$$

onde as relações de frequência de armadilha é $\lambda_x = \omega_z/\omega_x$ e $\lambda_y = \omega_z/\omega_y$.

Através das implicações feitas, tomando coordenadas adimensionais, é possível se ter informações importantes por meio da energia total no caso estático, (ou seja, com o potencial de velocidade χ definida como zero). Considerando a simetria do problema,

podemos escrever E_{Total} da seguinte forma:

$$\frac{E}{N\varepsilon_f} = \frac{1}{8} \left\{ \sum_i (\tilde{K}_i^2 + \tilde{R}_i^2) - \frac{2\varepsilon_{dd}c_d}{\tilde{R}^3} \left[f\left(\frac{\tilde{R}_x\lambda_x}{\tilde{R}_z}, \frac{\tilde{R}_y\lambda_y}{\tilde{R}_z}\right) - f\left(\frac{\tilde{K}_z}{\tilde{K}_x}, \frac{\tilde{K}_z}{\tilde{K}_y}\right) \right] \right\}, \quad (3.23)$$

onde a força dipolar sem dimensão ε_{dd} é dada por:

$$\varepsilon_{dd} = \frac{C_{dd}}{4\pi} \left(\frac{M^3\bar{\omega}}{\hbar^5} \right)^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{6}}. \quad (3.24)$$

Dado que a função de anisotropia é simétrica, isto é, $f(x, y) = f(y, x)$, a energia expressa na Eq.(3.23) apresentará a mesma simetria tanto no espaço K quanto no espaço R . Nesse contexto, em uma armadilha cilíndrico-simétrica, onde $\lambda_x = \lambda_y$, o sistema satisfará $R_x = R_y$. Consequentemente, devido à ausência de influência da geometria da armadilha na contribuição de troca da energia total, conclui-se que a distribuição de momento de um gás de Fermi dipolar permanece cilíndrico-simétrica, mesmo no caso de uma geometria de armadilha triaxial (ou seja, $K_x = K_y$), assumindo que os dipolos estão alinhados ao longo do eixo z . Dessa forma, a expressão $f(\tilde{K}_z/\tilde{K}_x, \tilde{K}_z/\tilde{K}_y)$ pode ser simplificada para $f_s(\tilde{K}_z/\tilde{K}_x)$ sem perda de generalidade. Ao examinarmos os limites, por meio da seguinte identidade matemática:

$$\lim_{y \rightarrow x} x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow x} y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -1 + \frac{(2+x^2)f_s(x)}{2(1-x^2)}. \quad (3.25)$$

Em vista disto, a Eq.(3.15) se reduz à seguinte condição:

$$\tilde{K}_z^2 - \tilde{K}_x^2 = \varepsilon_{dd}C(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{K}_x, \tilde{K}_z), \quad (3.26)$$

sendo:

$$C(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{K}_x, \tilde{K}_z) = \frac{3c_d}{\tilde{R}^3} \left[-1 + \frac{(2\tilde{K}_x^2 + \tilde{K}_z^2)f_s(\tilde{K}_z/\tilde{K}_x)}{2(\tilde{K}_x^2 - \tilde{K}_z^2)} \right]. \quad (3.27)$$

Enfatizando que a simetria cilíndrica também é válida no espaço dos momentos, para o caso dinâmico, já que mesmo desligando a armadilha ou modulando sua frequência, não teremos a uniformidade afetada do termo de troca.

Portanto, a Eq.(3.17) para o raio de Thomas-Fermi na i -ésima direção pode, assim, ser escrita como:

$$\frac{1}{\omega_i^2} \frac{d^2 \tilde{R}_i}{dt^2} = -\tilde{R}_i + \sum_j \frac{\tilde{K}_j^2}{3\tilde{R}_i} - \varepsilon_{dd}Q_i(\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{K}_x, \tilde{K}_z), \quad (3.28)$$

com as devidas simplificações em Q_i

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_x(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \frac{c_d}{x^2 y z} \left[f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) - \frac{x}{z} f_1\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) - f_s\left(\frac{k_z}{k_x}\right) \right], \\
\tilde{Q}_y(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \frac{c_d}{x y^2 z} \left[f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) - \frac{y}{z} f_2\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) - f_s\left(\frac{k_z}{k_x}\right) \right], \\
\tilde{Q}_z(\mathbf{r}, \mathbf{k}) &= \frac{c_d}{x y z^2} \left[f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) + \frac{x}{z} f_1\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) + \frac{y}{z} f_2\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) - f_s\left(\frac{k_z}{k_x}\right) \right].
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Tais Eqs. (3.21), (3.26) e (3.28), nos dá as propriedades estáticas e dinâmicas de um gás de Fermi dipolar, aprisionado triaxialmente no regime hidrodinâmico nos dando o principal resultado desta monografia[36].

E ao analisarmos para o caso que não há interação dipolo-dipolo, notamos que a Eq.(3.17) cai no caso ideal. Sendo $c_0 = 0$, tendo simetria cilíndrica $R_x = R_y$ e $K_x = K_y$, e pegando o ponto de equilíbrio onde não há derivada segunda da posição:

$$\omega_i^2 R_i^2 = \sum_j \frac{\hbar^2 K_j^2}{3M^2}, \tag{3.30}$$

então veremos que $\omega_x R_x = \omega_z R_z$ o que implica em $K_x = K_z$. Nos dando que:

$$\tilde{R}\tilde{K} = 1 \Rightarrow KR = \sqrt[3]{48\lambda_i N}, \tag{3.31}$$

sendo $\lambda_i = \omega_j/\omega_i$. Logo, o caso ideal nos retorna que os parâmetros K e R dependem apenas do numero de partículas e da frequência da armadilha.

4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Devido aos progressos substanciais alcançados, tanto no âmbito experimental quanto teórico, em relação a gases quânticos diluídos considerando interações de longo alcance e anisotropia, fomos motivados a examinar as propriedades hidrodinâmicas de gases fermiônicos. O propósito desta monografia é proporcionar, de maneira didática, uma síntese do conhecimento já estabelecido na literatura, visando oferecer aos estudantes interessados em abordar esse campo de pesquisa altamente dinâmico e promissor uma base sólida para a construção de seu entendimento.

Iniciamos apresentando um contexto histórico que delinea a evolução nessa área de pesquisa desde as primeiras proposições que endossaram a concepção de um novo estado da matéria. Posteriormente, destacamos experimentos-chave que possibilitaram a confirmação da validade dessa teoria na descrição do comportamento das partículas em temperaturas extremamente baixas.

Com o propósito de empreender investigações mais robustas e avançadas, o Capítulo 2 é inaugurado delineando a evolução do comportamento das partículas à medida que a temperatura diminui. Ao atingir uma região de temperatura específica, observa-se uma transição do comportamento clássico para fenômenos característicos do domínio quântico. Posteriormente, abordamos a estatística que governa os férmions, direcionando a análise para os casos em que não há presença de uma armadilha harmônica e nos casos em que ela está presente. Destacamos as discrepâncias na densidade de estados entre essas duas situações.

Apresentamos, em seguida, os resultados obtidos para a energia total de um sistema gerado a partir de uma armadilha triaxial, considerando as interações dipolares. Concluimos o capítulo proporcionando uma compreensão mais aprofundada do potencial de interação dipolo-dipolo, examinando suas propriedades em diversas configurações. Notamos seu papel na deformação da superfície de Fermi ao longo da direção do dipolo. Além disso, discutimos dois experimentos relevantes para o avanço do entendimento de gases ultrafrios.

No Capítulo 3, adotamos uma abordagem variacional com o propósito de derivar expressões para as equações que governam os parâmetros variacionais no espaço dos momentos e das posições. Introduzimos um ansatz para o potencial de velocidade harmônica, buscando realizar a extremização da ação. Após uma breve exposição das propriedades hidrodinâmicas na representação de Wigner, desenvolvidas e utilizadas para dar continuidade a esta monografia, demos uma pequena explicação de como se deu a construção de cada equação correspondente aos termos da energia total, conforme apresentado no capítulo anterior.

O encerramento do capítulo consistiu na descrição da finalidade do ansatz em

cada termo da energia total, proporcionando a representação da função de Wigner no estado fundamental de um gás de Fermi dipolar, com orientação ao longo do eixo z . A subsequente apresentação das equações de movimento foi derivada a partir da lagrangiana do sistema. A introdução da ideia de variáveis adimensionais permitiu a obtenção dos principais resultados desta monografia, que visa descrever as propriedades estáticas e dinâmicas do sistema estudado, culminando no caso ideal quando as interações entre as partículas são desconsideradas.

Como perspectiva futura, almejamos realizar uma minimização numérica da energia total, incorporando o termo de tamanho finito decorrente do baixo número de partículas presentes neste tipo de sistema.

APÊNDICE A - TRANSFORMADA DE FOURIER DO POTENCIAL DIPOLO-DIPOLO

Iremos agora calcular a transformada de Fourier do potencial de dipolo-dipolo, em que nesta situação temos que a interação entre dois férmions polarizados tem seus momentos de dipolo magnético iguais. Logo o potencial é expresso como[4]:

$$V_{dd}(\vec{r}) = -\frac{C_{dd}}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{e})^2 - r^2 \vec{e}^2}{|\vec{r}|^5} \right), \quad (.1)$$

onde \vec{e} e \vec{r} podem ser escritos como

$$\vec{e} = e \begin{pmatrix} \text{sen} \alpha \cos \beta \\ \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \\ \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad \vec{r} = r \begin{pmatrix} \text{sen} \theta \cos \phi \\ \text{sen} \theta \text{sen} \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (.2)$$

Logo, para o produto $|\vec{r} \cdot \vec{e}|^2$, temos

$$|\vec{r} \cdot \vec{e}|^2 = e^2 r^2 (\text{sen} \alpha \cos \beta \text{sen} \theta \cos \phi + \text{sen} \alpha \text{sen} \beta \text{sen} \theta \text{sen} \phi + \cos \alpha \cos \theta)^2. \quad (.3)$$

Substituindo o resultado da Eqs. (.3) e (.4) em (.1) teremos, então,

$$V_{dd}(\vec{r}) = -\frac{C_{dd}}{4\pi |\vec{r}|^3} [3 \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \theta (\cos^2 \beta \cos^2 \phi + 2 \text{sen} \phi \text{sen} \beta \cos \beta \cos \phi + \text{sen}^2 \beta \text{sen}^2 \phi) + 6 \text{sen} \alpha \text{sen} \theta \cos \alpha \cos \theta (\cos \beta \cos \phi + \text{sen} \beta \text{sen} \phi) + 3 \cos^2 \alpha \cos^2 \theta - 1]. \quad (.4)$$

Para obter a transformada

$$\tilde{V}_{dd}(\vec{k}) = \int d^3 r V_{dd}(\vec{r}) \exp^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (.5)$$

passaremos para coordenadas esféricas (r , θ e ϕ):

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{dd}(\vec{k}) &= -\frac{C_{dd} m^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta \exp^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} (3 \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \theta + 6 \cos^2 \alpha \cos^2 \theta - 2) \pi \\ &= -\frac{C_{dd} m^2}{4} (1 - 3 \cos^2 \alpha) \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\pi d\theta \text{sen} \theta \exp^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} (1 - 3 \cos^2 \theta). \end{aligned} \quad (.6)$$

Note que as integrais em ϕ envolvendo $\cos \phi$ ou $\text{sen} \phi$ se anulam. Resolvendo a integral em θ ,

$$\tilde{V}_{dd}(\vec{k}) = \frac{C_{dd} m^2}{4} (1 - 3 \cos^2 \alpha) \int_0^\infty \frac{dr}{r} \left[\frac{(4k^2 r^2 - 12) \text{sen} kr + 12kr \cos kr}{k^3 r^3} \right]. \quad (.7)$$

Além disso, o resultado da integral radial

$$\tilde{V}_{dd}(\vec{k}) = C_{dd}m^2(1 - 3\cos^2\alpha) \left[\frac{kr \cos(kr) - \text{sen}kr}{k^3r^3} \right]_0^\infty. \quad (.8)$$

Para avaliar a integral, é preciso tomar os limites $r \rightarrow \infty$ e $r \rightarrow 0$. O primeiro se anula e o segundo é dado por

$$\tilde{V}_{dd}(\vec{k}) = C_{dd}m^2(1 - 3\cos^2\alpha) \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{kr \cos(kr) - \text{sen}kr}{k^3r^3} \right]. \quad (.9)$$

Ao aplicarmos a regra de L'Hospital obtemos a expressão igual a $-1/3$. Com isso, o resultado final, assumindo que $\cos\alpha = \vec{e} \cdot \vec{k} / \vec{e} \cdot \vec{k}$, será

$$\tilde{V}_{dd}(\vec{k}) = \frac{C_{dd}}{3} \left[\frac{3(\vec{e} \cdot \vec{k})^2}{\vec{k}^2} - 1 \right]. \quad (.10)$$

APÊNDICE B - CÁLCULO DA ENERGIA DE HARTREE

Para a resolução deste cálculo utilizaremos de um truque das transformadas de Fourier, para que apenas 3 integrais tenham de ser calculadas, é por meio delas que será desacoplado as funções de distribuição e o potencial de interação em relação às suas variáveis espaciais. Assim, posso reescrever o termo de Hartree por meio da transformada de Fourier do potencial de acordo com

Inicialmente temos:

$$E_H = \frac{1}{2} \int d^3r d^3r' n(r) V_{dd}(r-r') n(r'), \quad (.11)$$

em que:

$$n(r) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{N}(K), \quad (.12)$$

e

$$V_{dd}(r-r') = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp^{-ik(r-r')} \tilde{V}_{dd}(k). \quad (.13)$$

Realizando as devidas substituições e aplicando a transformada de Fourier, temos que:

$$E_H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{N}(k) \tilde{V}_{dd}(-k) \tilde{N}(-k). \quad (.14)$$

Onde \tilde{N} é a densidade de partículas nos espaços do momento, que se dá por

$$\tilde{N}(K) = \int d^3r \exp^{ikr} N(K), \quad (.15)$$

sendo:

$$N(K) = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} f(\vec{r}, \vec{k}'), \quad (.16)$$

obtendo:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(K) &= \frac{\overline{K}^3}{6\pi^2} \int dx dy \exp^{i(k_x x + k_y y)} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp^{ik_z z} \\ &\times \left[1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right]^{\frac{3}{2}} \Theta \left[1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right]. \end{aligned} \quad (.17)$$

Pela a equação de Euler, podemos realizar a devida substituição, e ao integrar veremos que por simetria a função seno, o termo $i \sin(k_z z)$ será igual a zero. Para que se dê prosseguimento, é preciso fazer uma análise da função Heaviside, na qual teremos ela igual a 1, quando $|z| = R_z \sqrt{1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}}$, e zero caso contrário. A manipulação utilizada nesta monografia para se dar andamento foi $|z| = R_z \sqrt{1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}} \cos\theta$. Chamando a integral

em z de I .

$$I = 2R_z \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}\right)^2 \Theta \left[1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}\right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^4(\theta) \cos \left[k_z R_z \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta) \right], \quad (.18)$$

Ao resolvermos a integral em θ , foi preciso utilizar as relações das funções trigonométricas com as funções de Bessel[[37](3.715.20)]. Chamando de I_θ a integral em θ , temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \cos(x)) \sin^{2v}(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^v \Gamma(v + \frac{1}{2}) J_v(z) \text{ para } Re V > -\frac{1}{2}, \quad (.19)$$

obtemos o seguinte resultado:

$$I_\theta = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{k_z^2 R_z^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}\right)} J_2 \left[k_z R_z \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (.20)$$

De forma semelhante vamos realizar os mesmos passos da função Heaviside que foi utilizado na variável z para as demais coordenadas:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(k) &= \frac{\bar{K}^3}{2K_z^2 R_z \pi} \int dx \exp^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dy \cos(k_y y) \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}\right) \\ &\times J_2 \left[k_z R_z \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \Theta \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2}\right). \end{aligned} \quad (.21)$$

Através dos passos feitos analisando a Heaviside, temos que a integral em y em que vamos chamar de II :

$$\begin{aligned} II &= 2R_y \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \Theta \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^3 \theta \\ &\times \cos \left(k_y R_y \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right) J_2 \left(k_y R_y \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (.22)$$

Utilizando a relação das funções trigonométricas com as funções de Bessel[[37](6.688.2)]. Chamando de I_θ a integral em θ , temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{v+1}(x) \cos(\beta \cos x) J_v(\alpha \sin x) dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha^v (\alpha^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}v - \frac{1}{4}} J_{v+\frac{1}{2}}[(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}], \quad (.23)$$

para $Re v > -1$,

encontraremos:

$$II_\theta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[K_z^2 R_z^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) \left[K_z^2 R_z^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) \right] + K_y^2 R_y^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) \right]^{-\frac{5}{4}} \times J_{\frac{5}{2}} \left\{ \left[K_z^2 R_z^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) + K_y^2 R_y^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (.24)$$

implica que:

$$\tilde{N}(k) = \frac{\bar{K}^3 R_y \sqrt{\pi} R_z}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(K_x x) \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right)}{\left[K_z^2 R_z^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) + K_y^2 R_y^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) \right]^{\frac{5}{4}}} \times J_{\frac{5}{2}} \left\{ \left[K_z^2 R_z^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) + K_y^2 R_y^2 \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \Theta \left[1 - \frac{x^2}{R_x^2} \right]. \quad (.25)$$

Agora para se obter o resultado da integral em x onde chamaremos de III , realizando alguns passos temos:

$$III = 2R_x \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{\text{sen}^6 \theta \text{sen}^{-\frac{5}{2}} \theta \cos(K_x R_x \cos \theta)}{(K_z^2 R_z^2 + K_y^2 R_y^2)^{\frac{5}{4}}} J_{\frac{5}{2}} \left[(K_z^2 R_z^2 + K_y^2 R_y^2)^{\frac{1}{2}} \text{sen} \theta \right], \quad (.26)$$

se utilizando da integral tabelada, na qual usamos para obter II_θ , obteremos:

$$III I_\theta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[(K_z^2 R_z^2 + K_y^2 R_y^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{5}{2}} [K_z^2 R_z^2 + K_y^2 R_y^2 + K_x^2 R_x^2]^{-\frac{3}{2}} \times J_3 [(K_z^2 R_z^2 + K_y^2 R_y^2 + K_x^2 R_x^2)^{\frac{1}{2}}], \quad (.27)$$

efetuando as devidas substituições, vamos encontrar que:

$$\tilde{N}(K) = \bar{K}^3 \bar{R}^3 \frac{J_3 \left[\left(\sum_i K_i^2 R_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left[\sum_i K_i^2 R_i^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (.28)$$

Portanto temos:

$$E_H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{N}(k) \tilde{V}_{dd}(-k) \tilde{N}(k) = \frac{\bar{K}^6 \bar{R}^6 C_{dd}}{48\pi^3} \int d^3 k \left(\frac{3k_z^2}{k^2} - 1 \right) \frac{1}{\left[\sum_i K_i^2 R_i^2 \right]^3} J_3^2 \left[\left(\sum_i K_i^2 R_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (.29)$$

Realizando uma substituição $k_i R_i = u_i$, e fazendo uma mudança para coordenadas esféricas, a integral em k na qual chamarei de IV , teremos o seguinte:

$$IV = \int_0^\pi d\phi \sin\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty du \frac{u^{-4}}{\bar{R}^3} \left(\frac{3 \cos^2 \phi}{\left(\frac{R_z}{R_x}\right)^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \left(\frac{R_z}{R_y}\right)^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi} - 1 \right). \quad (.30)$$

Utilizando mais uma identidade das funções de Bessel[[37](6.574.2)]:

$$\int_0^\infty dt J_v(\alpha t) J_u(\alpha t) t^{-\lambda} = \frac{\alpha^{\lambda-1} \Gamma(\lambda) \Gamma\left(\frac{v+u-\lambda+1}{2}\right)}{2^\lambda \Gamma\left(\frac{-v+u+\lambda+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v+u+\lambda+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v-u+\lambda+1}{2}\right)}, \quad (.31)$$

para $Re(v+u+1) > Re(\lambda) > 0, \alpha > 0$.

Portanto, com a definição da função anisotrópica, Eq.(2.35) a expressão para a energia de Hartree é:

$$E_{dd}^D = -\frac{48N^2 C_0}{8\bar{R}^3} f\left(\frac{R_x}{R_z}, \frac{R_y}{R_z}\right), \quad (.32)$$

onde $C_0 = 2^{10} C_{dd} / (3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \pi^3)$.

APÊNDICE C - ENERGIA DE FOCK

A resolução do cálculo de Fock, é a mais complicada dentre os quatro termos de energia. No entanto, é possível calculá-lo também usando as transformadas de Fourier. O truque é trocar as variáveis de espaço e o momento das funções de Wigner através de duas transformadas de Fourier. Assim, o termo de Fock pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E_F &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \int d^3 r d^3 r' V_{dd}(\vec{r}) \exp^{i\vec{r} \cdot (\vec{k} - \vec{k}')} f(\vec{r}, \vec{k}) f(\vec{r}', \vec{k}'), \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \int d^3 r' \tilde{V}_{dd}(-\vec{k}') \exp^{i\vec{r}' \cdot \vec{k}'} \bar{f}(-\vec{k}', \vec{k}) \bar{f}(\vec{k}', \vec{k}), \end{aligned} \quad (.33)$$

onde:

$$\bar{f}(-\vec{k}', \vec{r}') = \int \frac{d^3 k}{2\pi} \exp^{i\vec{r}' \cdot \vec{k}'} \bar{f}(-\vec{k}', \vec{k}), \quad (.34)$$

que por sua vez:

$$\bar{f}(-\vec{k}', \vec{k}) = \int d^3 r \exp^{i(\vec{k}'_x \vec{x} + \vec{k}'_y \vec{y} + \vec{k}'_z \vec{z})} \Theta \left[h(\vec{k}') - \sum_i \frac{r_i^2}{R_i^2} \right], \quad (.35)$$

e $h(\vec{k}') = 1 - \sum \frac{k_j'^2}{K_j^2}$. Como as transformadas são em relação a posição, será considerado esta abreviação. Resolvendo $\bar{f}(-\vec{k}', \vec{k})$ com relação a coordenada z se utilizando das relações trigonométricas das funções de Bessel da Eq.(20), o resultado da coordenada z em que iremos chamar de "a" é:

$$a = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{2}}{(k'_z R_z)^{\frac{1}{2}} \left[h(\vec{k}') - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} \right]^{\frac{1}{4}}} J_{\frac{1}{2}} \left[k'_z R_z \left(h(\vec{k}') - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (.36)$$

assim, substituindo o resultado e realizando passos semelhantes para as demais coordenadas, com a utilização da Eq.(24) para a coordenada y e x , chegaremos ao seguinte resultado:

$$\bar{f}(-\vec{k}', \vec{k}) = \frac{\bar{R}^3 (2\pi)^{\frac{3}{2}} h(\vec{k}')^{\frac{3}{4}}}{\left(\sum_i k_i'^2 R_i^2 \right)^{\frac{3}{4}}} J_{\frac{3}{2}} \left[h(\vec{k}')^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i k_i'^2 R_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \Theta[h(\vec{k}')]. \quad (.37)$$

Aplicando novamente a transformada de Fourier da função de Wigner para se encontrar $\bar{f}(-\vec{k}', \vec{x})$:

$$\bar{f}(-\vec{k}', \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{2\pi} \exp^{i\vec{r}' \cdot \vec{k}'} \frac{\bar{R}^3 (2\pi)^{\frac{3}{2}} h(\vec{k}')^{\frac{3}{4}}}{\left(\sum_i k_i'^2 R_i^2 \right)^{\frac{3}{4}}} J_{\frac{3}{2}} \left[h(\vec{k}')^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i k_i'^2 R_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \Theta[h(\vec{k}')], \quad (.38)$$

fazendo $\sum_i k_i^2 R_i^2 = g(\vec{k}'')$. Substituindo $k_z = K_z \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2}} \cos \theta$, podemos então obter o seguinte:

$$\begin{aligned} \bar{f}(-\vec{k}'', \vec{x}') &= \frac{\bar{R}^3}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} g(\vec{k}'')^{\frac{3}{4}}} \int dk_x dk_y \exp^{i(xk_x + yk_y)} \Theta \left(1 - \frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2} \right) \left(1 - \frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2} \right)^{\frac{5}{4}} \\ &\times 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{\frac{5}{2}} \theta K_z \cos \left[z K_z \left(1 - \frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \right] J_{\frac{3}{2}} \left[g(\vec{k}'')^{\frac{3}{4}} \left(1 - \frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \theta \right]. \end{aligned} \quad (.39)$$

Utilizando as relações trigonométricas com as funções de Bessel da Eq.(.24), chamando o resultado da integral em θ de "b" teremos:

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[g(\vec{k}'')^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{3}{2}} \\ &\times \frac{J_2 \left\{ \left[g(\vec{k}'') \left(1 - \frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} + z^2 K_z^2 \left(1 - \frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}}{\left\{ \left[g(\vec{k}'')^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 + \left[z K_z \left(1 - \frac{k_x^2}{K_x^2} - \frac{k_y^2}{K_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \right\}}, \end{aligned} \quad (.40)$$

realizando as devidas substituições, a transformada de Fourier é:

$$\bar{f}(-\vec{k}'', \vec{x}') = \frac{\bar{R}^3 \bar{K}^3}{[g(\vec{k}'') + x^2 K_x^2 + y^2 K_y^2 + z^2 K_z^2]^{\frac{3}{2}}} J_3 \{ [g(\vec{k}'') + x^2 K_x^2 + y^2 K_y^2 + z^2 K_z^2]^{\frac{1}{2}} \}. \quad (.41)$$

A partir deste resultado, a Eq.(.34) será:

$$E_F = -\frac{1}{2} \int d^3 r' \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3} \tilde{V}_{dd} \exp^{i\vec{r}' \cdot \vec{k}''} \frac{\bar{R}^6 \bar{K}^6 J_3^2 \{ [g(\vec{k}'') + x^2 K_x^2 + y^2 K_y^2 + z^2 K_z^2]^{\frac{1}{2}} \}}{[g(\vec{k}'') + x^2 K_x^2 + y^2 K_y^2 + z^2 K_z^2]^3}. \quad (.42)$$

Podemos representar essa função de Bessel elevada ao quadrado na forma integral pela relação[[37](6.519.2.2)]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2v}(2z \text{sent}) dt = \frac{\pi}{2} J_v^2(z), \text{ para } \text{Re } v > -\frac{1}{2} \quad (.43)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow J_3^2 \{ [g(\vec{k}'') + x^2 K_x^2 + y^2 K_y^2 + z^2 K_z^2]^{\frac{1}{2}} \} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt J_6 \{ 2 \text{sent} [g(\vec{k}'') + x^2 K_x^2 + y^2 K_y^2 + z^2 K_z^2]^{\frac{1}{2}} \}. \end{aligned} \quad (.44)$$

Analisando a variável r e partindo da coordenada z , vamos encontrar sua solução, fazendo com que $u_z = zK_z$ (as demais coordenadas são análogas) e se utilizando da função[[37](6.726.2)]:

$$\int_0^{\infty} (x^2 + b^2)^{-\frac{v}{2}} J_v(a\sqrt{x^2 + b^2}) \cos(cx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a^{-v} b^{-v+\frac{1}{2}} (a^2 - c^2)^{\frac{1}{2}v-\frac{1}{4}} J_{v-\frac{1}{2}}(b\sqrt{a^2 - c^2}),$$

$$\begin{aligned} & \text{para } 0 < c < a, b > 0, \operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}, \\ & = 0 \text{ para } 0 < a < c, b > 0, \operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (.45)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & \int d^3 r' \bar{f}^2(\vec{k}'', \vec{r}') \exp^{i\vec{r}'' \cdot \vec{k}''} = \bar{R}^6 \bar{K}^6 \int d^3 r' \exp^{i\vec{k}'' \cdot \vec{r}'} \\ & \times \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3} \frac{J_6\{2\operatorname{sent}[g(\vec{k}'') + x^2 K_x^2 + y^2 K_y^2 + z^2 K_z^2]^{\frac{1}{2}}\}}{[g(\vec{k}'') + x^2 K_x^2 + y^2 K_y^2 + z^2 K_z^2]^3}. \end{aligned} \quad (.46)$$

Fazendo $u_z = zk_z$ e chamando a integral em z de c :

$$\begin{aligned} \Rightarrow c = & \frac{4\bar{R}^6 \bar{K}^6}{\pi K_z} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int dx' dy' \exp^{i(x' k_x' + y' k_y')} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \frac{\left(4\operatorname{sen}^2 t - \frac{k_z'^2}{K_z^2}\right)^{\frac{11}{4}} \Theta\left(2\operatorname{sent} - \sqrt{\frac{k_z'^2}{K_z^2}}\right)}{(2\operatorname{sent})^6 [x'^2 K_x^2 + y'^2 K_y^2 + g(\vec{k}'')]^{\frac{11}{2}}} \\ & \times J_{\frac{11}{2}} \left\{ \left(4\operatorname{sen}^2 t - \frac{k_z'^2}{K_z^2}\right)^{\frac{1}{2}} [x'^2 K_x^2 + y'^2 K_y^2 + g(\vec{k}'')] \right\}. \end{aligned} \quad (.47)$$

A função Heaviside aparece para que a Eq.(.24) seja satisfeita. De mesma forma calculamos as demais integrais, obtendo:

$$\begin{aligned} c = & \frac{2(2\pi)^{\frac{3}{2}} \bar{R}^6 \bar{K}^3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(2\operatorname{sent})^6} \frac{\left(4\operatorname{sen}^2 t - \frac{k_z'^2}{K_z^2} - \frac{k_y'^2}{K_y^2} - \frac{k_x'^2}{K_x^2}\right)^{\frac{9}{4}}}{g(\vec{k}'')^{\frac{9}{4}}} \\ & \times J_{\frac{9}{2}} \left[g(\vec{k}'') \left(4\operatorname{sen}^2 t - \frac{k_z'^2}{K_z^2} - \frac{k_y'^2}{K_y^2} - \frac{k_x'^2}{K_x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \Theta\left(2\operatorname{sent} - \sqrt{\frac{k_z'^2}{K_z^2} - \frac{k_y'^2}{K_y^2} - \frac{k_x'^2}{K_x^2}}\right). \end{aligned} \quad (.48)$$

Agora iremos calcular a integral em k'' . Para isso substituiremos $u_i = k_i'' R_i$, usando simetria esférica e a relação[[37](6.561.17)]:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_v(ax)}{x^{v-q}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\right)}{2^{v-q} a^{v-q+1} \Gamma\left(v - \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\right)}, \text{ para } -1 < \operatorname{Re} q < \operatorname{Re} v - \frac{1}{2}, \quad (.49)$$

o resultado para a integral em k'' que chamaremos de $I_{k''}$, é:

$$I_{k''} = \frac{4\pi}{3^3} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2^{\frac{5}{2}} \left(4\text{sen}^2 t - \sum_i \frac{k_i^2}{K_i^2}\right)^{-\frac{3}{4}} \Gamma(4)}. \quad (.50)$$

Portanto, temos agora apenas a integral em k' . Para resolver realizamos uma substituição de $u_i = k'_i R_i$ e se utilizando de coordenadas esféricas:

$$E_{ex} = -\frac{4(2\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \bar{R}^3 \bar{K}^6 C_{dd}}{\Gamma(4) \cdot 2^{\frac{5}{2}} \cdot (2\pi)^6 \cdot 3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \text{sen}\theta$$

$$\times \left(\frac{3 \cos^2 \theta}{\frac{K_x^2}{K_z} \text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi + \frac{K_y^2}{K_z} \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \phi + \cos^2 \theta} - 1 \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(2\text{sen}t)^6} \int_0^{2\text{sen}t} du u^2 (4\text{sen}^2 t - u^2)^3, \quad (.51)$$

onde as integrais em θ e ϕ são da definição da função de anisotropia, definida na Eq.(2.35) e a definição de C_0 no termo de Hartree, já u e t , podem ser resolvidas sem qualquer dificuldade. A solução para o termo de Forck é:

$$E_F = \frac{48N^2 C_0}{8\bar{R}^3} f\left(\frac{K_z}{K_x}, \frac{K_z}{K_y}\right). \quad (.52)$$

REFERÊNCIAS

- [1] Brasil Escola. **Leucipo e Demócrito**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/leucipo-democrito.htm>. Acesso em: 20, ago. 2023.
- [2] GONÇALVES, Luis Felipe Barbosa Faria. **Construção de uma armadilha de dipolo tipo QUEST para átomos de Rydberg**. 2012. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- [3] BRUM, José Antônio. **F888-Introdução à Física do Estado Sólido**. 2010.
- [4] GALVÃO, Maria José de Souza. **Estado fundamental de gotículas quânticas dipolares**. Trabalho de conclusão de curso - Curso de Licenciatura em Física, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Acarape, 2021.
- [5] OLIVEIRA, Francisco Lucas Santos. **Gases de Fermi dipolares**. Trabalho de conclusão de curso - Curso de Licenciatura em Física, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Acarape, 2021.
- [6] PIZA, Antonio Fernando Ribeiro de Toledo. **Mecânica Quântica**. São Paulo: Editora XPTO, 2001.
- [7] MIGUEZ, Maria Luiza. **Técnicas de resfriamento e aprisionamento de átomos aplicadas a átomos de estrôncio**. 2013. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.
- [8] CASTILHO, P. C. M. **Gás de Férmions Degenerados**. 2012.
- [9] DEMARCO, Brian; JIN, Deborah S. **Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas**. *science*, v. 285, n. 5434, p. 1703-1706, 1999.
- [10] BARANOV, Mikhail A. **Theoretical progress in many-body physics with ultracold dipolar gases**. *Physics Reports*, v. 464, n. 3, p. 71-111, 2008.
- [11] SOGO, T. et al. **Dynamical properties of dipolar Fermi gases**. *New Journal of Physics*, v. 11, n. 5, p. 055017, 2009.
- [12] KADAU, Holger et al. **Observing the Rosensweig instability of a quantum ferrofluid**. *Nature*, v. 530, n. 7589, p. 194-197, 2016.
- [13] FREDERICO, Maria Nilde Fernandes Barreto et al. **Existência de soluções fortes T-periódicas para um sistema magneto-elástico e para um sistema de ferrofluidos**. 2018.

- [14] MIKELSONS, Karlis; FREERICKS, J. K. **Density-wave patterns for fermionic dipolar molecules on a square optical lattice: Mean-field-theory analysis.** *Physical Review A*, v. 83, n. 4, p. 043609, 2011.
- [15] AIKAWA, K. et al. **Observation of Fermi surface deformation in a dipolar quantum gas.** *Science*, v. 345, n. 6203, p. 1484-1487, 2014.
- [16] ZETTILI, Nouredine. **Quantum Mechanics: Concepts and Applications.** 2. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.
- [17] GRIFFITHS, David J.; SCHROETER, Darrell F. **Introduction to quantum mechanics.** Cambridge University Press, 2018.
- [18] SALINAS, Francisco. **Introdução à Física Estatística.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2003.
- [19] MALAVAZI, André Hernandes Alves. **Estatística quântica gás de fermi.** Citado, v. 2, p. 55, 2017.
- [20] RECATI, Alessio. **Ultra-cold gases.** TRENTO. CNR-INFN BEC Center/Dip. Fisica, Univ. di Trento (I) & Dep. Physik, TUM (D), 2013.
- [21] AQUINO, Rui; BARCI, Daniel G. **Uma introdução à Teoria de Landau para Líquidos de Fermi.** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 42, 2020.
- [22] PERCY, John. **Evolução das estrelas.** 2012.
- [23] EVANGELISTA, E. de F. D. **Dedução do limite de Chandrasekhar: uma abordagem didática dos trabalhos originais do autor.** *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 41, n. 2, p. 6, 2019.
- [24] LIMA, Aristeu R. P.; PELSTER, Axel. **Dipolar Fermi gases in anisotropic traps.** *Phys. Rev. A*, v. 81, p. 063629, 2010. Data de publicação: 23 de junho de 2010.
- [25] MIYAKAWA, Takahiko; SOGO, Takaaki; PU, Han. **Phase-space deformation of a trapped dipolar Fermi gas.** *Physical Review A*, v. 77, p. 061603(R), 2008. Publicado em 9 de junho de 2008.
- [26] GÓRAL, Krzysztof; ENGLERT, Berthold-Georg; RZAZEWSKI, Kazimierz. **Semi-classical theory of trapped fermionic dipoles.** *Physical Review A*, v. 63, n. 3, p. 033606, 2001.
- [27] WÄCHTLER, Falk; LIMA, Aristeu R. P.; PELSTER, Axel. **Low-lying excitation modes of trapped dipolar Fermi gases: From the collisionless to the hydrodynamic regime.** *Physical Review A*, v. 96, p. 043608, 2017. Publicado em 10 de outubro de 2017.

- [28] LIMA, Aristeu Rosendo Pontes. **Hydrodynamic studies of dipolar quantum gases**. Dissertationsschrift, Freie Universität Berlin, 2010.
- [29] SEBASTIÃO, Rita de Cássia de Oliveira; BRAGA, João Pedro. **Operador dipolo-dipolo na base de momento angular: um complemento ao estudo de ressonância magnética nuclear**. Química Nova, v. 31, p. 1058-1061, 2008.
- [30] GUIMARÃES, Francisco Mateus Alves. **Abordagem variacional às gotículas quânticas dipolares**. Trabalho de conclusão de curso - Curso de Licenciatura em Física, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Acarape, 2020.
- [31] PAES, RENAN PEREIRA; CAMPO GRANDE, M. S. **ESTUDO TEÓRICO DE GASES QUÂNTICOS DILUÍDOS ULTRAFRIOS APRISIONADOS POR REDES ÓPTICAS QUASE PERIÓDICAS**. 2018.
- [32] TRUSCOTT, Andrew G. et al. **Observation of Fermi pressure in a gas of trapped atoms**. Science, v. 291, n. 5513, p. 2570-2572, 2001.
- [33] LÔBO, Adriano Malta et al. **Solução variacional para um condensado atrativo e colapsante**. 2009.
- [34] VELJIĆ, Vladimir. **Quantum kinetic theory for ultracold dipolar Fermi gases**. Универзитет у Београду, 2019.
- [35] WÄCHTLER, Falk. **Hartree-Fock Theory of Dipolar Fermi Gases**. 2011. Tese de Doutorado. Doktorska disertacija. Universität Potsdam, Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam, Germany.
- [36] LIMA, Aristeu RP; PELSTER, Axel. **Dipolar Fermi gases in anisotropic traps**. Physical Review A, v. 81, n. 6, p. 063629, 2010.
- [37] GRADSHTEYN, Izrail Solomonovich; RYZHIK, Iosif Moiseevich. **Table of integrals, series, and products**. Academic press, 2014.