



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA**

**O COMPORTAMENTO DO ELÉTRON NA PRESENÇA DE
CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS.**

MATEUS MUSSUNDA LANDA

Redenção-Ceará, dezembro de 2023.

MATEUS MUSSUNDA LANDA

**O COMPORTAMENTO DO ELÉTRON NA PRESENÇA DE CAMPOS
ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em licenciatura em Física
do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza -
ICEN da Universidade da Integração Internacio-
nal da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito
parcial à obtenção do grau de Física em licen-
ciatura em Física. Orientador: Prof. Dr. João
Philippe Macedo Braga

Redenção-Ceará, dezembro de 2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Landa, Mateus Mussunda.

L253c

O comportamento do elétron na presença de campos elétricos e magnéticos / Mateus Mussunda Landa. - Redenção, 2023.
0f: il.

Monografia - Curso de Física, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientador: João Philipe Macedo Braga.

1. Elétron. 2. Mecânica Clássica e Quântica. 3. Campo Elétrico e Magnético. I. Título

CE/UF/Dsibiuni

CDD 000

MATEUS MUSSUNDA LANDA

O COMPORTAMENTO DO ELÉTRON NA PRESENÇA DE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em licenciatura em Física do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - ICEN da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Física:

Data de aprovação:

Banca Examinadora:



Documento assinado digitalmente
JOAO PHILIPPE MACEDO BRAGA
Data: 17/12/2023 18:05:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga (Orientador)
Universidade da integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira-UNILAB



Documento assinado digitalmente
SILVIA HELENA ROBERTO DE SENA
Data: 18/12/2023 09:01:29-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dr. Silvia Helena Roberto de Sena
(Examinadora)

Universidade da integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira-UNILAB



Documento assinado digitalmente
ARISTEU ROSENDO PONTES LIMA
Data: 18/12/2023 10:01:06-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Aristeu Rosendo Pontes Lima (Examinador)
Universidade da integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira-UNILAB

*Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos,
familiares e amigos que me têm apoiado ao
longo desta trajetória.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha profunda gratidão a todas as pessoas que me ajudaram a chegar à conclusão deste Trabalho de Conclusão de Curso. Este projeto representa o resultado de um esforço coletivo com o apoio de muitos indivíduos. Primeiramente, agradeço a Deus todo poderoso, por permitir a concretização desta etapa, aos meus pais, Joaquím Landa e Joaquina Mateus Mussunda, que sempre estiveram ao meu lado me dando apoio. Aos meus irmãos e familiares que sempre me apoiaram e priorizaram a minha formação acadêmica. Ainda os agradeço pela amizade, proteção e atenção dedicadas sempre que precisei.

Agradeço o Professor João Philipe Macedo Braga, meu orientador, por sua orientação sábia, paciência e incentivo constante ao longo deste processo. Seu conhecimento e experiência foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, e sou imensamente grato pela oportunidade de aprender com sua orientação. Também agradeço aos professores por sugestões e críticas construtivas durante as etapas de desenvolvimento do projeto. Suas observações foram essenciais para melhorar a qualidade deste trabalho.

A todos os meus amigos, expresso minha sincera gratidão pelo apoio incondicional. Suas palavras de encorajamento e compreensão foram a luz que me guiou nos momentos difíceis. À minha namorada, Cláudia Pinto Fonseca, agradeço por estar ao meu lado durante essa jornada acadêmica.

Não posso deixar de mencionar meus colegas de curso, Augusto Dala, Eurico Edval, Larysse Santiago, Saulo, Luís Davi, Levi Silva, Raphael Nícolas, Alexsandra Alves e os meus companheiros de fase na UNILAB, que compartilharam experiências, conhecimentos e camaradagem ao longo destes anos. Juntos, enfrentamos desafios e celebramos conquistas, criando memórias que levarei para toda a vida.

Por fim, agradeço à UNILAB, a todos os servidores, dos mais diversos setores, que trabalham incansavelmente para nos proporcionar um ensino de qualidade. Este trabalho não seria possível sem o apoio generoso de todos vocês. Muito obrigado por fazerem parte desta jornada e por contribuírem para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

*“Aprender é a única coisa da qual a mente
nunca se cansa, nunca tem medo e nunca se
arrepende.”*

Leonardo da Vinci,

RESUMO

O estudo do comportamento do elétron ao longo da história da física tem sido uma jornada notável, fixada na compreensão progressiva de sua interação com campos elétricos e magnéticos. No cruzamento entre a física clássica e quântica, a importância do estudo do comportamento do elétron na presença de campos elétricos e magnéticos se destaca, pois a capacidade de prever e manipular o movimento do elétron nesse ambiente é crucial para uma gama diversificada de aplicações científicas e tecnológicas. No presente trabalho, nos propomos a analisar o comportamento do elétron submetido a campos elétricos e magnéticos nas perspectivas da mecânica clássica e quântica. Assim, apresentamos inicialmente uma breve história do elétron, destacando a importância do estudo do seu comportamento quando submetido a campos elétricos e magnéticos. Nessa transição entre a compreensão da mecânica clássica e quântica, discutimos a relação dos campos elétricos e magnéticos com os respectivos potenciais, a força de Lorentz na descrição do movimento no formalismos newtoniano, lagrangiano e hamiltoniano; posteriormente, analisamos essa interação na perspectiva da mecânica quântica, apresentando o análogo clássico da equação do movimento e aplicamos o teorema de Ehrenfest para obtenção dos resultados previstos classicamente. discutimos, ainda, os níveis de Landau, o gauge simétrico, as funções de onda do estado fundamental e a precessão de Spin. Finalmente, percebemos como que diferentes potenciais vetores podem nos levar ao mesmo campo magnético, demonstramos a invariância de gauge e vimos que a escolha do gauge não altera a física do problema, enquanto os campos impactam classicamente o movimento do elétron. Dependendo da configuração de cada sistema, podemos obter movimentos circulares, cicloidais e helicoidais. Na interação quântica, construímos o análogo clássico da equação do movimento e percebemos que difere a menos de um termo, associado ao campo magnético, constatamos que as energias são quantizadas e que apresentam espectro energético similar de um oscilador harmônico, entretanto, a degenerescência para este caso é infinita e está relacionada ao centro da órbita. Discutimos também o gauge simétrico algebricamente e analiticamente, compreendemos que as funções de onda do estado fundamental são infinitas. discutimos no apêndice o spin do elétron, vimos que precessiona quando submetido ao campo magnético externo. Esperamos que essas discussões possam contribuir para a ampliação da nossa compreensão das interações do elétron com campos elétricos e magnéticos e destacar a relevância desses estudos através de um tratamento que passa entre a física clássica e a quântica.

Palavras-chave: Elétron. Mecânica Clássica e Quântica. Campo Elétrico e Magnético.

ABSTRACT

The trajectory of the electron throughout the history of physics has been a remarkable journey, grounded in the progressive understanding of its interaction with electric and magnetic fields. At the intersection of classical and quantum physics, the importance of studying the electron's behavior in the presence of electric and magnetic fields stands out. The ability to predict and manipulate the electron's movement in this environment is crucial for a diverse range of scientific and technological applications. In this work, we aim to analyze the behavior of the electron subjected to electric and magnetic fields from the perspectives of classical and quantum mechanics. Initially, we present a brief history of the electron, emphasizing the significance of studying its behavior when exposed to electric and magnetic fields, from both classical and quantum perspectives. In the transition between the understanding of classical and quantum mechanics, we discuss the relationship between electric and magnetic fields and their respective potentials, the Lorentz force in the description of motion in Newtonian, Lagrangian, and Hamiltonian formalisms. Subsequently, we analyze the interaction in quantum mechanics, presenting the classical analogue of the motion equation and applying the Ehrenfest theorem to obtain classically predicted results. We delve into gauge invariance, Landau levels, symmetric gauge, ground state wave functions, and spin precession. Finally, we explore how different vector potentials can lead to the same magnetic field, demonstrate gauge invariance, and observe that the choice of gauge does not alter the physics of the problem. We perceive how fields impact the electron's motion classically, resulting in circular, cycloidal, helical, and complex trajectories depending on each system's configuration. In quantum interaction, the classical analogue of the motion equation differs by a term associated with the magnetic field. In this quantum analogy, energies are quantized, presenting the same energy spectrum as a harmonic oscillator, with infinite degeneracy related to the orbit's center. Ground state wave functions are infinite, and the electron's spin precesses when subjected to an external magnetic field. In conclusion, we hope that these discussions contribute to the expansion of knowledge and understanding of electron interactions with electric and magnetic fields, highlighting the relevance of these studies through an approach that bridges classical and quantum physics.

Keywords: Eletron. Classical and Quantum Mechanics. Electric and Magnetic Field.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Movimento de uma partícula na presença de campo elétrico	19
Figura 2.2 – Linhas de campo magnético em um ímã.	20
Figura 2.3 – Partícula em movimento entra em uma região de campo magnético . .	23
Figura 2.4 – Regra da mão direita	24
Figura 2.5 – Partícula carregada positivamente em movimento em uma região de campo eletromagnético	25
Figura 2.6 – Partícula em movimento adentra numa região de campo magnético . .	29
Figura 3.1 – Espectro de energia e momento angular	60

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
TCC	Trabalho de Conclusão do Curso
NBR	Norma Brasileira
QED	Eletrodinâmica Quântica
LHC	Large Hadron Collider (Grande Colisor de Hádrons)

LISTA DE SÍMBOLOS

Γ	Letra grega Gama
λ	Comprimento de onda
$\in$	Pertence
μ	Mi
$\int$	Símbolo de integral
ε	Letra grega epsilon
Σ	Somatória
$\times$	Produto vetorial

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	INTERAÇÃO CLÁSSICA DO ELÉTRON COM CAMPO ELE- TROMAGNÉTICO	18
2.1	CAMPOS E POTENCIAIS	18
2.2	FORMALISMO NEWTONIANO	22
2.2.1	MOVIMENTO CIRCULAR	22
2.2.2	MOVIMENTO CICLÓIDE	24
2.2.3	MOVIMENTO HELICOIDAL	29
2.3	FORMALISMO LAGRANGIANO	32
2.4	FORMALISMO HAMILTONIANO	38
3	INTERAÇÃO QUÂNTICA DO ELÉTRON COM CAMPO ELETROMAGNÉTICO	41
3.1	EQUAÇÃO DO MOVIMENTO. ANÁLOGO CLÁSSICO	41
3.1.1	CÁLCULO DO VALOR ESPERADO DA EQUAÇÃO DE MO- VIMENTO	44
3.2	NÍVEIS DE LANDAU	45
3.3	GAUGE SIMÉTRICO: MÉTODO ALGÉBRICO	50
3.4	GAUGE SIMÉTRICO: MÉTODO ANALÍTICO	62
4	CONCLUSÃO	66
	REFERÊNCIAS	67
4.1	APÊNDICE	69
4.1.1	INVARIÂNCIA DE CALIBRE	69
4.1.2	PRECESSÃO DE SPIN	71

1 INTRODUÇÃO

A história da compreensão do elétron, a partícula fundamental que desempenha um papel importante na estrutura da matéria, remonta ao final do século XIX. A origem dessa descrição está entrelaçada com as investigações iniciais sobre eletricidade e magnetismo. A trajetória investigativa de cientistas como J.J. Thomson e seus experimentos cruciais com tubos de raios catódicos levou à identificação e caracterização do elétron como uma partícula subatômica com carga negativa. Esse marco conceitual representou um passo gingasteco em direção ao entendimento da estrutura interna dos átomos e à emergência da teoria do modelo atômico.[1]

A combinação dos campos elétricos e magnéticos desempenha um papel fundamental na física moderna, proporcionando a base para a eletromagnetismo, dando origem a força eletromagnética, que é uma das quatro forças fundamentais da natureza. Os campos elétricos, resultantes de cargas elétricas, são vetores que exercem forças sobre outras cargas e desempenham um papel crucial nos processos eletroquímicos, na eletrônica e em inúmeras aplicações tecnológicas. Paralelamente, os campos magnéticos, gerados por cargas em movimento e dipolos magnéticos e são essenciais na geração de energia, como nos princípios dos geradores elétricos e nas ressonâncias magnéticas.

O processo de compreensão do elétron e suas propriedades tem sido uma jornada notável, fixada na compreensão progressiva de sua interação com campos elétricos e magnéticos. Desde os primeiros experimentos com eletricidade estática até os avanços contemporâneos em física de partículas, o elétron tem se destacado como uma peça fundamental do quebra-cabeça da natureza. A emergência das equações de Maxwell no século XIX unificou a descrição dos campos elétricos e magnéticos, revelando a conexão entre eles e estabelecendo as bases para o entendimento da interação com o elétron. A física clássica ofereceu uma representação inicial dessa interação, através das leis de movimento de Newton e das equações de Lorentz, permitindo soluções específicas em regimes macroscópicos [1].

No entanto, à medida que adentramos no mundo das dimensões subatômicas e das classificações de alta energia, a física quântica surge como o quadro teórico principal. A mecânica quântica trouxe consigo uma nova compreensão da natureza dual do elétron, apresentando-o como uma partícula e uma onda simultaneamente. Esse avanço revolucionou a visão sobre a interação do elétron com os campos elétricos e magnéticos, levando à formulação da eletrodinâmica quântica (QED), uma das teorias mais precisas da física atual. Nesse contexto, as interações do elétron com os campos são descritas não apenas

como uma ação mecânica, mas como trocas prováveis de partículas mediadoras, como os fótons, permitindo uma compreensão mais profunda da dinâmica.

É nessa passagem da física clássica para física quântica que a importância do estudo do comportamento do elétron na presença de campos elétricos e magnéticos se destaca. A capacidade de prever e manipular o movimento do elétron nesse ambiente é crucial para uma gama diversificada de aplicações científicas e tecnológicas, como espectroscopia [2], e física do plasma [3]. A compreensão desses estudos é essencial para o funcionamento de dispositivos eletrônicos, desde transistores até circuitos integrados, bem como para a criação de aceleradores de partículas, como o LHC (The Large Hadron Collider). Além disso, a exploração dessa interação fornece visões fundamentais para a compreensão da estrutura da matéria e a busca por partículas desconhecidas até então.

Nesse contexto o presente trabalho propõe analisar o comportamento do elétron na presença de campos elétricos e magnéticos numa perspectiva da física clássica e quântica. Por conseguinte, dividiu-se em 4 capítulos, com objetivo de facilitar o entendimento do leitor, os conteúdos foram desenvolvidos de maneira sequencial, tendo uma certa ligação. O capítulo 1 apresenta uma breve história do elétron, destacando a importância do estudo do comportamento do elétron na transição entre a compreensão da física do ponto de vista clássico e quântico. No capítulo 2, realizou-se um estudo da interação clássica do elétron com campo eletromagnético e com destaque à força de Lorentz, apresentando uma discussão sobre campos elétricos e magnéticos e com os respectivos potenciais, posteriormente, as abordagens nos formalismos Newtoniano, Lagrangiano e Hamiltoniano. No capítulo 3, discutiu-se a interação quântica do elétron com campo magnético, onde começamos construindo os operadores, e na sequência discutisse o análogo clássico da equação do movimento aplicando o teorema de Ehrenfest para obter os valores esperados. Na sequência, os níveis de Landau, o gauge simétrico, as funções de onda do estado fundamental, Finalmente, no capítulo 5, realizou-se a conclusão do trabalho. Na seção de apêndice descreve-se a invariância de calibre e a precessão de Spin.

2 INTERAÇÃO CLÁSSICA DO ELÉTRON COM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

A física clássica é um campo vasto e fascinante, repleto de imensas teorias intrigantes e complexas que desvendam os segredos do universo. Entre essas tendências, a mecânica clássica se destaca, com o teor determinístico do movimento, com ênfase nas leis de Newton que nos permite conhecer o estado de um sistema sem nenhuma restrição imposta. Neste capítulo nos debruçamos sobre o estudo da força de Lorentz para a descrição da interação do elétron submetida aos campos elétricos e magnéticos.

A força de Lorentz, nomeada em homenagem ao físico neerlandês Hendrik Lorentz, é uma força que atua sobre uma partícula específica quando esta se move em um campo magnético e/ou elétrico. Ela desempenha um papel crucial na física, desde a eletricidade estática até o funcionamento de dispositivos eletrônicos complexos.

A expressão matemática para a força de Lorentz é dada por:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1)$$

onde: F é a força de Lorentz, q a carga da partícula, $\vec{E}$ o campo elétrico, $\vec{v}$ a velocidade do elétron, e $\vec{B}$ o campo magnético. Esta descrição revela como a força de Lorentz resultado da combinação de duas forças distintas: a força elétrica $\vec{F} = q\vec{E}$ e a força magnética $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$.

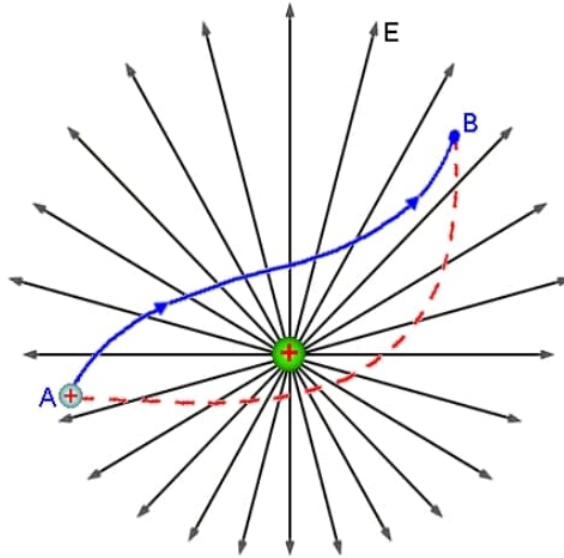
A primeira depende da carga da partícula (elétron, para o nosso caso) e do campo elétrico ao seu redor, enquanto a segunda depende da carga, da velocidade da partícula e do campo magnético.

2.1 CAMPOS E POTENCIAIS

Para entender melhor a força de Lorentz, é crucial compreender os campos elétricos e magnéticos que os influenciam. Por conseguinte, é conveniente pensarmos o campo elétrico $\vec{E}$ como sendo uma entidade física real, que preenche o espaço em torno de qualquer carga elétrica do espaço. [4]. Ele é gerado por cargas elétricas e se estende indefinidamente no espaço. A força elétrica que age sobre uma carga específica q em um campo elétrico é dado por $\vec{F} = q\vec{E}$. Uma forma de entender o campo elétrico é imaginar que ele atribua um valor a cada ponto do espaço, estabelecendo a força que uma carga unitária positiva experimental se colocada nesse ponto. O potencial elétrico ϕ é uma quantidade relacionada ao campo elétrico e desempenha um papel importante na física. Ele é definido como energia potencial elétrica por unidade de carga. Em outras

palavras, o potencial elétrico nos diz quanto trabalho deve ser realizado para mover uma carga unitária de um ponto A para um ponto B no campo elétrico; como mostra figura 2.1.

Figura 2.1 – Movimento de uma partícula na presença de campo elétrico



Fonte: Figura retirada da ref. [5].

A relação entre o campo elétrico $\vec{E}$ e o potencial elétrico φ na eletrostática é dado por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi. \quad (2)$$

Essa relação mostra como o campo elétrico é derivado do potencial elétrico e fornece uma maneira alternativa de entender e trabalhar com campos elétricos.

Lembrando que o potencial escalar φ não estava completamente especificado pela sua definição, se encontrarmos φ para algum problema, podemos sempre encontrar um outro φ' igualmente apropriado, pela adição de uma constante, que fornecerá o mesmo campo elétrico [6]. Note que,

$$\varphi' = \varphi + c \quad (3)$$

fornece o mesmo campo, uma vez que o gradiente da constante c é zero, então,

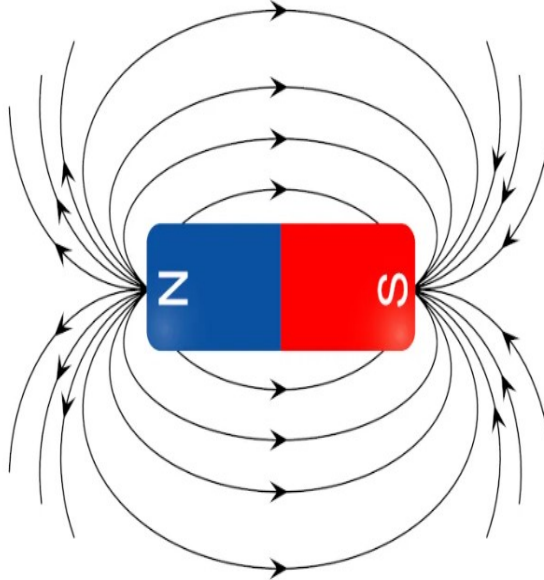
$$\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi' = \vec{\nabla}(\varphi + c) = \vec{\nabla}\varphi \quad (4)$$

ou seja, φ e φ' representam a mesma física.

O campo magnético interage com partículas carregadas em movimento, como elétrons em um fio condutor. Ao contrário do campo elétrico, não há cargas magnéticas isoladas (monopolos magnéticos) observadas na natureza. Os ímãs têm sempre um polo

norte e um polo sul, de forma que os campos magnéticos formam linhas fechadas, como mostra a figura 2.2.

Figura 2.2 – Linhas de campo magnético em um ímã.



Fonte: Figura retirada da ref. [7].

O potencial vetor magnético $\vec{A}$ é uma quantidade que desempenha um papel importante na descrição dos campos magnéticos. Ele é usado principalmente em contextos amplos da teoria eletromagnética, tal como na formulação de Maxwell das equações eletromagnéticas. O potencial magnético não é tão diretamente observável quanto ao campo elétrico, mas é útil para simplificar a descrição de sistemas complexos.

Em eletrostática sabemos que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$; que nos possibilitou escrever E como o gradiente de um potencial escalar $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, mas na eletrodinâmica isso não é verdadeiro, já que o rotacional de $\vec{E}$ não é nulo. Entretanto, é verdade que o divergente de $\vec{B}$ é sempre nulo, pois não há carga magnética. Sabemos também que todo campo com divergência nula pode ser colocado na forma do rotacional de um vetor, assim

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0. \quad (5)$$

Logo

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (6)$$

Analogamente ao caso elétrico, aqui podemos ter diferentes potenciais vetores que $\vec{A}$ que fornecem os mesmos campos magnéticos. Ele possui uma liberdade ainda maior, podemos adicionar à $\vec{A}$ qualquer campo que seja o gradiente de algum campo escalar sem

alterar a física. Note que se

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' - \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (\vec{A}' - \vec{A}) = 0 \quad (8)$$

se o rotacional de um vetor vale zero, ele deve ser o gradiente de algum escalar.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A}' - \vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{A}' - \vec{A} = \vec{\nabla}\mu, \quad (9)$$

então se $\vec{A}$ for um potencial vetor satisfatório para algum problema, então para qualquer μ

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\mu, \quad (10)$$

será um potencial igualmente satisfatório, conduzindo ao mesmo campo magnético $\vec{B}$.

Normalmente é conveniente reduzir a liberdade de $\vec{A}$ impondo arbitrariamente que ele obedeça algumas condições. Ora, do curso de eletrodinâmica, por exemplo, é conveniente fixar o potencial escalar ϕ como sendo zero a longas distâncias, assim, é possível também restringir $\vec{A}$ escolhendo arbitrariamente seu divergente, é possível sempre fazer isto sem afetar $\vec{B}$. Isso ocorre porque embora $\vec{A}'$ e $\vec{A}$ possuam o mesmo rotacional e fornecem o mesmo $\vec{B}$, eles não precisam ter o mesmo divergente.[6]

De fato

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \mu \quad (11)$$

para a escolha de μ adequada, podemos fazer $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'$, igual a qualquer valor que desejarmos.

Para $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ a escolha é feita de acordo a alguma conveniente matemática e do problema que esteja sendo abordado. No caso da magnetostática, a escolha é $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, que nos será útil mais adiante com a escolha do gauge simétrico.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (12)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (13)$$

Das equações de Maxwell do eletromagnetismo, é sabido que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (14)$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (15)$$

por conseguinte, substituindo essa equação (13) na equação (14), teremos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}), \quad (16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \quad (17)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (18)$$

notemos que, todo campo com rotacional nulo pode ser escrito na forma de gradiente de uma função escalar. Logo,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \varphi. \quad (19)$$

Se $\vec{A} = 0$ ou $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ caímos na situação eletrostática, por conseguinte, estamos em condições de escrever o nosso campo elétrico em função dos potenciais. Isolando $\vec{E}$ da equação (19), temos

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (20)$$

Essa forma de expressar os campos em função dos potenciais será bastante útil para determinarmos a equação a lagrangiana mais na frente.

2.2 FORMALISMO NEWTONIANO

As trajetórias do elétron na presença de campos elétricos e magnéticos dependem das relações entre esses campos e a velocidade inicial do elétron. A partir do momento em que sabe-se como um campo magnético é formado e as definições da força e do campo magnético, passa-se agora ao estudo da interação eletromagnética com o elétron a partir da força de Lorentz.

Assim, partindo da segunda lei de Newton, a equação de movimento de um elétron na presença de campos elétricos e magnéticos é

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (21)$$

Nesta tópico, vamos apresentar a solução de três problemas relacionados ao movimento da partícula em um campo eletromagnético, sendo que esses problemas são apresentados em [4]; sendo que aqui usamos essa revisão como uma etapa que complementa o aprendizado. Com essa investigação queremos compreender como a trajetória do elétron é afetada quando sujeito a campos elétricos e magnéticos.

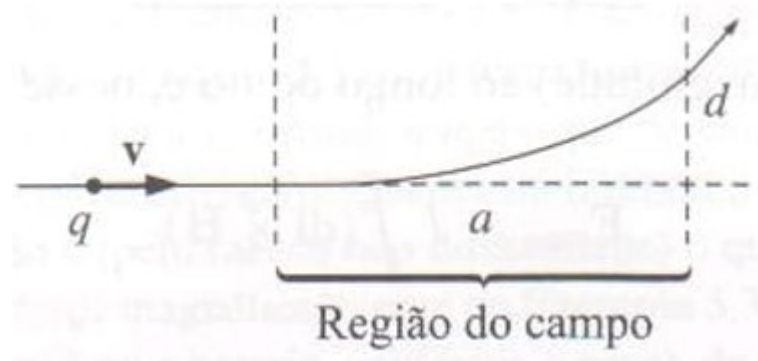
2.2.1 MOVIMENTO CIRCULAR

Nesta seção, vamos descrever esse movimento partindo do seguinte problema: Em 1897 J.J Thomson ‘descobriu’ o elétron medindo a razão carga-por-massa de uma partícula de ‘raios catódicos’ (na realidade, feixe de elétrons, com carga e massa) como se segue.

(a) – Primeiro ele passou o feixe através de campos cruzados E e B (mutuamente perpendiculares e ambos perpendiculares ao feixe), e foi ajustando o campo elétrico até atingir deflexão zero. Qual seria, então, a velocidade das partículas (em termos de E e B)?

(b) – Ele, então, desligou o campo elétrico e mediu o raio da curvatura, R , do feixe, sujeito apenas à deflexão do campo magnético. Em termos de E , B e R , qual a razão entre carga e massa $\frac{e}{m}$ das partículas? Consideremos a figura 2.3

Figura 2.3 – Partícula em movimento entra em uma região de campo magnético



Fonte: Figura retirada da ref. [4].

Analisando a primeira região, considerando agora o elétron com carga $-e$ e massa m , animada de certa velocidade $\vec{v}$ medida em relação ao referencial inercial. Nesta região temos o campo elétrico uniforme orientado verticalmente para baixo e campo magnético uniforme que está perpendicularmente a $\vec{E}$ e a $\vec{v}$, entrando no plano.

Como o campo elétrico é ajustado para que a trajetória do elétron não sofra deflexão, então, o elétron passa por essa região descrevendo uma trajetória retilínea com velocidade constante.

Assim determinando as forças que atuam no elétron, pela regra da mão direita, podemos orientar a força magnética agindo no elétron. Usando a figura 2.4. Podemos afirmar que a força magnética atua verticalmente para baixo devido ao sinal negativo da carga. Como o elétron passa nessa região sem alteração na sua trajetória.

$$\vec{F}_m = \vec{F}_e, \quad (22)$$

$$e\vec{E} = e\vec{v} \times \vec{B}, \quad (23)$$

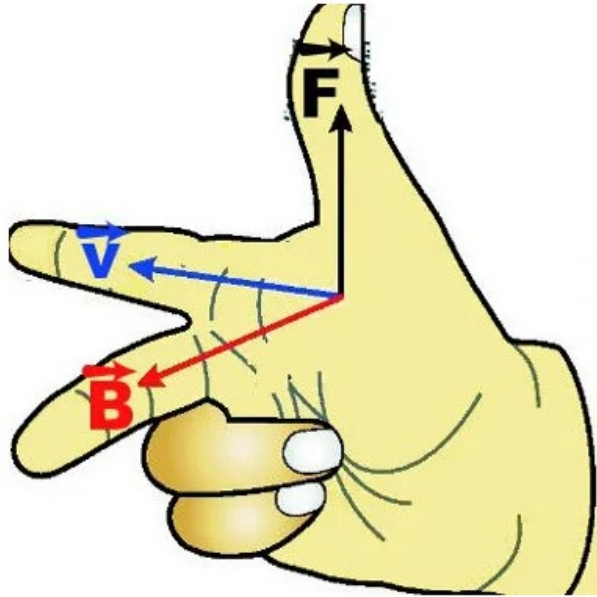
então,

$$eE = evB \sin 90, \quad (24)$$

que nos fornece

$$v = \frac{E}{B}. \quad (25)$$

Figura 2.4 – Regra da mão direita



Fonte: Figura retirada da ref. [9]

Para resolvermos a segunda parte do problema, vamos analisar a região onde a partícula descreve um movimento circular uniforme.

Bom, a força magnética representa nesse movimento a resultante centrípeta,

$$\vec{F}_m = \vec{F}_c, \quad (26)$$

assim,

$$e|\vec{v} \times \vec{B}| = m \cdot \frac{\vec{v}^2}{R}, \quad (27)$$

tirando em módulo

$$e \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{R}, \quad (28)$$

temos então a razão carga massa

$$e \cdot B = m \cdot \frac{v}{R}, \quad (29)$$

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{B \cdot R}, \quad (30)$$

como v permanece constante ao longo de todo movimento, e podemos substituir sua intensidade $v = \frac{E}{B}$; finalmente:

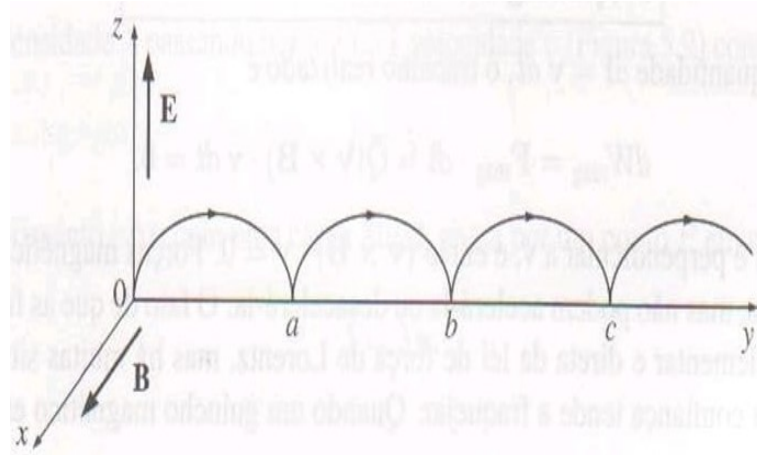
$$\frac{e}{m} = \frac{E}{B^2 R}. \quad (31)$$

2.2.2 MOVIMENTO CICLÓIDE

Uma trajetória mais exótica ocorre se incluirmos um campo elétrico uniforme formando um ângulo reto com o campo magnético. Suponhamos, por exemplo, que $\vec{B}$

aponta na direção x e $\vec{E}$ na direção z , como mostra a figura 2.5. Uma partícula em repouso é liberada da origem; qual será o seu caminho? [4]

Figura 2.5 – Partícula carregada positivamente em movimento em uma região de campo eletromagnético



Fonte: Figura retirada da ref. [4]

Inicialmente, fazendo uma análise qualitativa da trajetória executada pela partícula de carga e . Ora bem, no instante $t = 0$ ela está em repouso na origem do sistema de coordenada adotado, conseqüentemente a força magnética tem intensidade nula, no entanto, a força elétrica vai acelerar a partícula na mesma direção e sentido do vetor campo elétrico. Vamos assumir a carga da partícula positiva, sem perda de generalidade.[4]

Assim, o módulo da velocidade da partícula aumenta nesses instantes iniciais do movimento, a partir daí, surge a força magnética. Ao compor esses dois movimentos, ao mesmo tempo que a partícula se movimenta a favor do eixo z , ela é puxada para direita devido a ação da força magnética, logo ela descreve uma curva no plano yz , podemos então concluir que o movimento da partícula esta confinado a ocorrer apenas nesse plano. Assim, quantitativamente, como não há força na direção x , a posição da partícula em qualquer instante t pode ser descrita pelo vetor:

$$\vec{r}(t) = (0, \vec{y}(t), \vec{z}(t)), \quad (32)$$

a velocidade é, portanto

$$\vec{v}(t) = 0\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}. \quad (33)$$

Retomando a análise qualitativa, se a partícula está acelerada, o módulo da sua velocidade aumenta, aumentando assim a intensidade da força magnética que está puxando a partícula para direita, conseqüentemente, a trajetória da partícula vai sendo cada vez mais defletida em relação ao eixo Z de forma que em certo tempo do movimento, ela começa

a retornar para o eixo Y , e nesse intervalo do movimento ela se move em oposição à força elétrica, passando a ser desacelerada, o módulo da velocidade agora diminui, diminuindo assim a intensidade da força magnética, fazendo prevalecer a força elétrica, que desacelerar a partícula, por consequência, o módulo da sua velocidade vai diminuindo até ela atingir novamente o eixo $0y$, no ponto a (em repouso) trazendo a carga ao repouso, Ali o processo reinicia levando a partícula ao ponto b , assim sucessivamente. Temos então os campos:

$$\vec{E} = 0\hat{x} + 0\hat{y} + E\hat{z}, \quad (34)$$

$$\vec{B} = B\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}. \quad (35)$$

Determinando a equação da trajetória matematicamente, assim, se os campos são uniformes:

$$\vec{F} = eB\dot{z}\hat{y} + (eE - eB\dot{y})\hat{z}, \quad (36)$$

de acordo com a segunda lei de Newton,

$$m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}) = eB\dot{z}\hat{y} + (eE - eB\dot{y})\hat{z}, \quad (37)$$

vamos igualar as componentes vetoriais correspondentes, teremos:

$$\begin{cases} m\ddot{y} = eB\dot{z}, \\ m\ddot{z} = eE - eB\dot{y}. \end{cases} \quad (38)$$

Temos aqui duas equações diferenciais acopladas, para resolver esse problema, primeiramente é determina-se a componente da trajetória no eixo y e depois em z . Vamos isolar $\ddot{y}$ e $\ddot{z}$, temos

$$\begin{cases} \ddot{y} = -\frac{eB}{m}\dot{z} \\ \ddot{z} = \frac{eE}{m} - \frac{eB}{m}\dot{y} \end{cases} \quad (39)$$

derivando em relação ao tempo a primeira equação do sistema, e substituir $\ddot{z}$ da segunda equação na primeira equação do mesmo sistema.

$$eB \left(\frac{eE}{m} - \frac{eB}{m}\dot{y} \right) = m\ddot{\dot{y}}, \quad (40)$$

$$\ddot{\dot{y}} + \left(\frac{e^2 B^2}{m^2} \right) \dot{y} - \frac{e^2 EB}{m^2} = 0, \quad (41)$$

$$\ddot{\dot{y}} + \left(\frac{e^2 B^2}{m^2} \right) \dot{y} = \frac{e^2 EB}{m^2}, \quad (42)$$

Tem-se uma equação diferencial não homogênea de terceira ordem com coeficientes constantes. Vamos obter a solução da parte homogênea.

$$\ddot{y} + \left(\frac{e^2 B^2}{m^2}\right) \dot{y} = 0, \quad (43)$$

a solução para esta parte homogênea é escrita como :

$$y(t) = c_1 \exp(\lambda t) \cos \mu t + c_2 (\exp \lambda t) \sin \mu t + C_3 \exp ht, \quad (44)$$

ficamos com :

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + C_3, \quad (45)$$

determinando agora a solução da particular,

$$\ddot{y} + \omega^2 \dot{y} = \frac{e^2 EB}{m^2}, \quad (46)$$

fazendo

$$\frac{e^2 EB}{m^2} = k^2, \quad (47)$$

$$\ddot{y} + \omega^2 \dot{y} = k^2, \quad (48)$$

$$y_p(t) = \frac{k^2}{\omega^2} t = \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 t, \quad (49)$$

rescrevendo a solução geral, temos

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + C_3 + \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 t. \quad (50)$$

Resolvendo a equação diferencial associada a cordenada z recorrendo ao sistema de equações diferenciais acopladas. Derivando a segunda equação do no sistema em relação ao tempo e relacinando com a primeira equação do mesmo sistema, obtemos;

$$\ddot{z} + \omega^2 \dot{z} = 0, \quad (51)$$

analogamente ao movimento na direção y , teremos como solução da nossa equação

$$z(t) = c_4 \cos \mu t + c_5 \sin \mu t + C_6. \quad (52)$$

Finalmente temos as soluções do movimento em função do tempo nas cordenadas y e z :

$$\begin{cases} y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + C_3 + \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 t \\ z(t) = c_4 \cos \omega t + c_5 \sin \omega t + C_6 \end{cases} \quad (53)$$

Vamos agora aplicar as condições de contorno para determinar as nossas constantes, derivando as duas soluções em relação ao tempo, obtemos:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -c_1\omega \sin \omega t + c_2\omega \cos \omega t + \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \\ \dot{z}(t) = -c_4\omega \sin \omega t + c_5\omega \cos \omega t \end{cases} \quad (54)$$

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -c_1\omega \sin \omega t - \left(\frac{k^2}{\omega^3}\right)\omega \cos \omega t + \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \\ \dot{z}(t) = -c_4\omega \sin \omega t \end{cases} \quad (55)$$

derivando mais uma vez $\dot{y}(t)$,

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -c_1\omega^2 \cos \omega t - \left(\frac{k^2}{\omega^3}\right)\omega^2 \sin \omega t + 0 \\ \dot{z}(t) = -c_4\omega \sin \omega t \end{cases} \quad (56)$$

vamos substituir a primeira equação de (56) na primeira equação do sistema (39), obtemos

$$-\frac{eB}{m}c_4\omega \sin \omega t = -c_1\omega^2 \cos \omega t - \left(\frac{k^2}{\omega^3}\right)\omega^2 \sin \omega t, \quad (57)$$

desta feita, a solução fica:

$$\begin{cases} y(t) = -\left(\frac{k^2}{\omega^3}\right) \sin \omega t + \left(\frac{k^2}{\omega^3}\right)t \\ z(t) = -\left(\frac{k^2}{\omega^3}\right) \cos \omega t + \left(\frac{k^2}{\omega^3}\right) \end{cases} \quad (58)$$

para visualizar melhor essa trajetória, relacionamos as duas equações, isolando seno e cosseno.

$$\begin{cases} y(t) - \left(\frac{k^2}{\omega^3}\right)t = -\left(\frac{k^2}{\omega^3}\right) \sin \omega t \\ z(t) - \left(\frac{k^2}{\omega^3}\right) = -\left(\frac{k^2}{\omega^3}\right) \cos \omega t \end{cases} \quad (59)$$

$$\begin{cases} -y(t) \left(\frac{\omega^3}{k^2}\right) + \omega t = \sin \omega t \\ -z(t) \left(\frac{\omega^3}{k^2}\right) + 1 = \cos \omega t \end{cases} \quad (60)$$

esta expressão $\left(\frac{\omega^3}{k^2}\right) = \frac{\omega B}{E}$ assumindo que $\frac{\omega B}{E} = \frac{1}{R}$ e explorando a identidade trigonométrica,

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1 \quad (61)$$

ficamos com:

$$\left(-\frac{y(t)}{R} + \omega t\right)^2 + \left(-\frac{z(t)}{R} + 1\right)^2 = 1, \quad (62)$$

determinando o denominador comum, chegamos finalmente

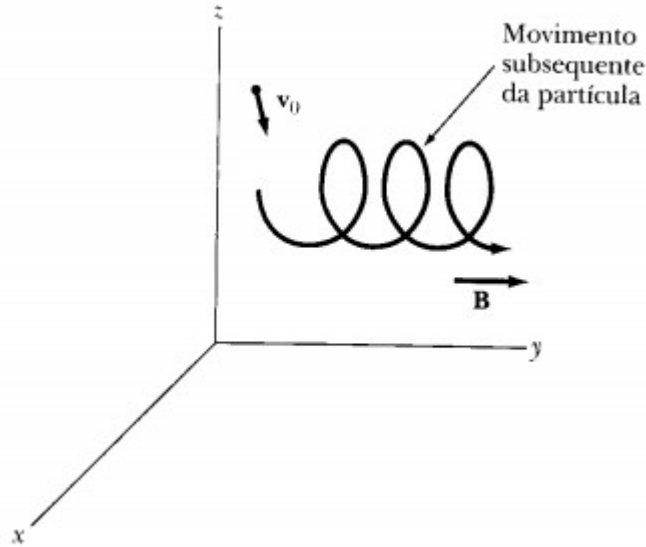
$$(y(t) - \omega R t)^2 + (z(t) - R)^2 = R^2, \quad (63)$$

esta é a equação de uma circunferência de raio $R = \frac{E}{\omega B}$, centro $C(0, \omega R t, R)$ e $v = \omega R$. a partícula se move como se estivesse na beira de uma roda, rolando pelo eixo y à velocidade v .

2.2.3 MOVIMENTO HELICOIDAL

Consideremos uma partícula carregada entrando em uma região de campo magnético uniforme B - por exemplo, o campo da Terra - como mostra a Figura. Determine seu movimento subsequente.[10]

Figura 2.6 – Partícula em movimento adentra numa região de campo magnético



Fonte: Figura retirada da ref. [4]

Solução: Escolhemos um sistema de coordenadas cartesianas com o seu eixo z paralelo ao campo magnético. Se e é a carga da partícula; v , sua velocidade; a , sua aceleração; e B , o campo magnético da Terra, então:

$$\vec{v} = \dot{x}_i + \dot{y}_j + \dot{z}_k, \quad (64)$$

$$\vec{a} = \ddot{x}_i + \ddot{y}_j + \ddot{z}_k, \quad (65)$$

$$\vec{B} = B_0 j, \quad (66)$$

a força magnética é :

$$m\vec{a} = e(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (67)$$

$$m(\ddot{x}_i + \ddot{y}_j + \ddot{z}_k) = q(\dot{x}_i + \dot{y}_j + \dot{z}_k) \times (B_0 j). \quad (68)$$

bem, tendo determinado o produto vetorial, a nossa equação do movimento fica:

$$m(\ddot{x}_i + \ddot{y}_j + \ddot{z}_k) = eB_0(\dot{x}_k - \dot{z}_i), \quad (69)$$

igualando as componentes vetoriais correspondentes, teremos:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -eB_0\dot{z} \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = eB_0\dot{x} \end{cases} \quad (70)$$

a integração da segunda dessas equações, $m\ddot{y} = 0$ produz:

$$\dot{y} = \dot{y}_0, \quad (71)$$

onde $\dot{y}_0$ é uma constante e é o valor inicial de $\dot{y}$. Integrando novamente, temos,

$$y = \dot{y}_0 t + y_0, \quad (72)$$

onde y_0 também é uma constante. Assim, nos resta as duas equações diferenciais acopladas

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -eB_0\dot{z} \\ m\ddot{z} = eB_0\dot{x} \end{cases} \quad (73)$$

vamos isolar $\ddot{x}$ e $\ddot{z}$, obtemos:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{eB_0}{m}\dot{z} \\ \ddot{z} = \frac{eB_0}{m}\dot{x} \end{cases} \quad (74)$$

vamos chamar $\frac{eB_0}{m} = \omega$, então, e substituir na equação diferencial.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega\dot{z} \\ \ddot{z} = \omega\dot{x} \end{cases} \quad (75)$$

Para resolver essas s equações diferenciais acopladas vamos primeiramente derivar em função do tempo a primeira e substituir na segunda.

$$\begin{cases} \dot{\ddot{x}} = \omega\ddot{z} = -\omega^2\dot{x} \\ \dot{\ddot{z}} = -\omega\ddot{x} = -\omega^2\dot{z} \end{cases} \quad (76)$$

de modo que ,

$$\begin{cases} \dot{\ddot{x}} + \omega^2\dot{x} = 0 \\ \dot{\ddot{z}} + \omega^2\dot{z} = 0 \end{cases} \quad (77)$$

Temos duas equações diferenciais homogêneas de terceira ordem com coeficientes constantes. Elas têm a mesma forma de solução. Vamos resolver primeiramente em x .

$$\dot{\ddot{x}} + \omega^2\dot{x} = 0, \quad (78)$$

A a solução para esta equação diferencial homogênea é escrita como :

$$x(t) = A_1 \exp(\lambda t) \cos \mu t + B_1 (\exp \lambda t) \sin \mu t + C_1 \exp ht, \quad (79)$$

ficamos com a solução geral no eixo x

$$x = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + x_0, \quad (80)$$

analogamente, para z , temos como solução

$$z = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t + z_0, \quad (81)$$

Onde A_1, A_2, B_1, B_2, x_0 e z_0 são constantes de integração determinadas pela posição e velocidade iniciais da partícula e pelas equações do movimento. Bom, podemos escrever as soluções:

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + x_0 \\ y = \dot{y}_0 t + y_0 \\ z = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t + z_0 \end{cases} \quad (82)$$

reescrevendo, temos:

$$\begin{cases} (x - x_0) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ (y - y_0) = \dot{y}_0 t \\ (z - z_0) = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \end{cases} \quad (83)$$

as coordenadas x e z são conectadas pela equação (75), de maneira que substituindo as derivadas de x e z da equação (83) na primeira equação de (75) ficamos com:

$$-\omega^2 A_1 \cos \omega t - \omega^2 B_1 \sin \omega t = -\omega(-\omega A_2 \sin \omega t + \omega B_2 \cos \omega t), \quad (84)$$

uma vez que essa equação é válida para todo t , particularmente para $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2\omega}$ então a equação (31) nos dá :

$$-\omega^2 A_1 = -\omega^2 B_2, \quad (85)$$

então ,

$$A_1 = B_2 \quad (86)$$

e

$$-\omega^2 B_1 = -\omega^2 A_2, \quad (87)$$

fornecendo

$$B_1 = -A_2, \quad (88)$$

ficamos agora com a nossa equação

$$\begin{cases} (x - x_0) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ (y - y_0) = \dot{y}_0 t \\ (z - z_0) = -B_1 \cos \omega t + A_1 \sin \omega t \end{cases} \quad (89)$$

usando as condições de contorno para determinar A_1 e B_1 . Inicialmente $t = 0$ e $\dot{z} = \dot{z}_0$ e $\dot{x} = 0$ então a partir da equação (36), diferenciando e definindo em $t = 0$, temos:

$$\omega B_1 = 0, \quad (90)$$

$$\omega A_1 = \dot{z}_0, \quad (91)$$

desta feita,

$$\begin{cases} (x - x_0) = \frac{\dot{z}_0}{\omega} \cos \omega t \\ (y - y_0) = \dot{y}_0 t \\ (z - z_0) = \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t \end{cases} \quad (92)$$

sabendo que $\frac{eB_0}{m} = \omega$, finalmente, temos que:

$$\begin{cases} (x - x_0) = \left(\frac{\dot{z}_0 m}{eB_0}\right) \cos \left(\frac{eB_0}{m} t\right) \\ (y - y_0) = \dot{y}_0 t \\ (z - z_0) = \left(\frac{\dot{z}_0 m}{eB_0}\right) \sin \left(\frac{eB_0}{m} t\right) \end{cases} \quad (93)$$

Essas equações são as equações paramétricas de uma espiral circular cujo o raio é:

$$R = \frac{\dot{z}_0 m}{eB_0}. \quad (94)$$

Desta forma, verificamos que, quanto mais rápido a partícula entrar no campo, ou quanto maior for sua massa, maior será o raio da espiral; e quanto maior for a carga da partícula ou quanto mais intenso for o campo magnético, mais comprimida será a espiral. observamos também como a partícula carregada é capturada pelo campo magnético—simplesmente desviando na direção do campo. neste e caso particular, a partícula não tinha nenhuma componente inicial de sua velocidade ao longo do eixo x, porém, mesmo se tivesse, ela não desviaria ao longo desse eixo. Observamos também que, a força magnética sobre a partícula atua sempre perpendicularmente à sua velocidade e, dessa forma, não poderá acelerá-la.[10]

Ao considerar a solução clássica das equações de movimento de Lorentz, é possível observar como o elétron responde a esses campos, resultando em trajetórias interessantes. A interação entre a força elétrica e a força magnética é crucial para moldar a trajetória do elétron, levando a movimentos circulares, cícloidalis e trajetórias helicoidais, como observado nos problemas resolvidos.

2.3 FORMALISMO LAGRANGIANO

O formalismo newtoniano da mecânica caracteriza-se pelo conjunto de equações diferenciais que determinam o movimento de uma configuração, uma vez especificadas todas as posições e velocidades num dado instante inicial.

Entretanto, quando existem restrições de natureza geométrica ou até mesmo cinemática que limitam a princípio o movimento de um determinado sistema mecânico;

por exemplo, imaginemos que o movimento de uma determinada partícula esteja restrita, e não possa se mover livremente no espaço modo que suas coordenadas não são todas independentes entre si, isto é, há uma equação que as conecta, essas restrições são chamadas vínculos [11]. Em determinada configuração tornasse inviável a formulação Newtoniana, pois que, ela precisa de mais coordenadas para especificar a configuração do sistema em cada instante [8]. É neste contexto, que mecânica Lagrangiana emerge neste trabalho, pois que, é uma abordagem poderosa para descrever o movimento de sistemas físicos complexos.

Proposta por Joseph-Louis Lagrange no século XVIII, ela oferece uma alternativa à tradicional Mecânica Newtoniana, permitindo uma descrição satisfatória e eficaz do comportamento de sistemas físicos. A Mecânica Lagrangeana se baseia no Princípio da Ação Mínima, que postula que o caminho real seguido por uma partícula é aquele que minimiza a ação; este princípio está relacionado ao princípio de Hamilton, que configura uma formulação mais geral de Hamilton, que destaca a ligação contínua com os princípios de mínimos na física [10].

De acordo com esse princípio, todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer vínculos), o caminho real seguido é aquele que minimiza a integral temporal da diferença entre as energias cinética e potencial [10]. Para o cálculo variacional fica:

$$\delta S = 0, \quad (95)$$

$$S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (96)$$

o integrando L da integral da ação é chamado de Lagrangiana. A energia cinética de uma partícula expressa em coordenadas fixas é uma função somente de $\dot{x}_k$, e se a partícula se move em um campo de força conservativo, a energia potencial é uma função somente de x_k .

$$T = T(\dot{x}_k) \quad (97)$$

e

$$U = U(x_k), \quad (98)$$

Chamando L a diferença dessas duas quantidades, temos

$$L = T - U = L(x_k, \dot{x}_k), \quad (99)$$

logo

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_k, \dot{x}_k) dt = 0, \quad (100)$$

A equação de Euler-Lagrange correspondente a essa equação é

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) = 0, \quad (101)$$

com $k = 1, 2, 3$. Equação de movimento de Lagrange.

Uma das características mais distintivas da Mecânica Lagrangiana é a capacidade de trabalho com articulações generalizadas. Em vez de utilizar as coordenadas cartesianas tradicionais (x, y, z) para descrever o movimento de um sistema, introduzimos coordenadas generalizadas $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ que são funções das coordenadas originais e que simplificam a descrição do sistema. As equações de Lagrange, também conhecidas como equações do movimento de Euler-Lagrange, são utilizadas para derivar as trajetórias das partículas em termos dessas distribuições generalizadas, tornando a análise mais conveniente em casos complexos, como sistemas com restrições. Consideremos um sistema composto por n partículas distribuídas em um espaço tridimensional. A posição da i -ésima partícula é especificada por um vetor $\vec{r}_i$, de forma que $3n$ coordenadas são necessárias para determinar o estado do sistema. Se houver m relações do tipo :

$$f_i(x_j, y_j, z_j, \dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j, t) = 0, \quad (102)$$

com $l = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$ então existe $3n - m$ coordenadas independentes, chamadas também graus de liberdade.

Assim, coordenadas generalizadas são o conjunto de números que especificam o estado do sistema.

Esse conjunto costuma ser denotado por $q_i, i = 1, 2, 3, \dots, 3n$ e $\dot{q}_i, i = 1, 2, 3, \dots, 3n$. Assim, as $s = 3n - m$ coordenadas generalizadas formam o espaço das configurações. Reenunciamos o princípio de Hamilton :

De todos os caminhos pelos quais um sistema dinâmico pode ir de um ponto a outro no espaço das configurações em um dado intervalo de tempo, ele escolhe seguir aquele que minimiza a integral no tempo de sua lagrangeana. [10].

Uma vez que a lagrangiana é uma grandeza escalar, ela é invariante por uma mudança de coordenadas, assim:

$$L(x_k, \dot{x}_k, t) = L(q_k, \dot{q}_k, t), \quad (103)$$

de forma que o princípio de Hamilton,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = 0, \quad (104)$$

leva às equações de Euler-Lagrange para as coordenadas generalizadas.

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad (105)$$

No caso de um sistema não-conservativo (ou dissipativo):

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k, \quad (106)$$

onde

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \quad (107)$$

é chamada de força generalizada associada à coordenada generalizada q_k e F_i as forças aplicadas sobre a k -ésima partícula do sistema.

Bom, a força generalizada pode ser relacionada com a energia cinética.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (108)$$

Bom, podemos encher aqui que as forças abrangidas por essa equação é mais ampla do que o conjunto das forças conservativas, pois que, U neste caso, pode depender das velocidades generalizadas e do tempo, evidenciando assim o caso do conjunto de forças conservativas como caso particular desta.

Vamos agora determinar a Lagrangeana de uma partícula carregada em um campo eletromagnético externo. Assim, já vimos que a força que atua em uma carga elétrica e em movimento num campo eletromagnético é a força de Lorentz (1).

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (109)$$

Das equações de Maxwell escrevemos os campos em termos de um potencial escalar φ e de um potencial vetor $\vec{A}$ da seguinte forma;

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (110)$$

e

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (111)$$

substituindo essas duas expressões na equação de Lorentz, temos

$$\vec{F} = e \left[-\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right]. \quad (112)$$

Tomando como base as próprias coordenadas cartesianas da partícula, as componentes da força generalizada coincidem com as componentes cartesianas da força de Lorentz.

Pretende-se aqui mostrar que essa força F pode ser representada como uma força em coordenadas generalizadas para alguma função U .

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_k} = Q_k, \quad (113)$$

Entretanto, nesta expressão aparece uma derivada total em relação ao tempo, ao contrário da equação (149), que aparece a derivada parcial, desta feita, vamos procurar expressar a equação (149) de modo que tenhamos uma derivada total.

Assim, o duplo produto vetorial, de acordo com [12], vamos obter a seguinte relação:

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}), \quad (114)$$

como o operador $\vec{\nabla}$ só opera nas variáveis de posição, então:

$$\vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0 \quad (115)$$

e

$$(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0, \quad (116)$$

tem-se

$$\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}, \quad (117)$$

substituindo em (155) em (112), obtemos

$$\vec{F} = e\left[-\vec{\nabla} \cdot \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}\right], \quad (118)$$

de modo que chegamos a seguinte expressão:

$$\frac{\vec{F}}{e} = -\vec{\nabla}(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt}, \quad (119)$$

Vamos fazer uma nova leitura para o potencial vetor $\vec{A}$ levando em conta que as coordenadas e as velocidades generalizadas são tratadas como quantidades independentes, assim, tomamos,

$$\vec{\nabla}_v = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}, \quad (120)$$

aplicando $\vec{\nabla}_v$ em $\vec{A}$ temos,

$$\vec{\nabla}_v(\vec{v} \cdot \vec{A}) = A\hat{x}i + A\hat{y}j + A\hat{z}k = \vec{A}, \quad (121)$$

Esta transformação só é possível porque $\vec{A}$ independe da velocidade, então,

$$\vec{\nabla}_v(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \vec{A}, \quad (122)$$

podemos escrever,

$$\frac{\vec{F}}{e} = -\vec{\nabla}(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_v(\vec{v} \cdot \vec{A})), \quad (123)$$

Como o potencial escalar ϕ depende apenas das coordenadas de posição $\phi(x, y, z)$, logo,

$$\vec{\nabla}_v \varphi = 0, \quad (124)$$

assim, nada nos impede de escrever

$$\frac{\vec{F}}{e} = -\vec{\nabla}(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_v \varphi - (\vec{\nabla}_v \vec{v} \cdot \vec{A})), \quad (125)$$

por conseguinte,

$$\frac{\vec{F}}{e} = -\vec{\nabla}(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt}(\vec{\nabla}_v(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})), \quad (126)$$

observe que a expressão do qual calculamos o gradiente espacial $\vec{\nabla}$ é o mesmo do qual estamos calculando o gradiente dependente da velocidade, ou seja, estamos redefinindo o potencial para a situação eletromagnética.

Na eletrostática (o potencial φ), quando a carga se move com certa velocidade sobre um campo magnético externo, precisasse corrigir o potencial elétrico, pois que, a contribuição do potencial elétrico mais um termo que depende da velocidade que aparece tanto para parte espacial quanto para temporal. $\vec{v} \cdot \vec{A}$.

Redefinindo o potencial,

$$U(\vec{r}, \vec{r}) = e(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}), \quad (127)$$

ou seja, o potencial generalizado, logo, podemos escrever a lagrangiana para o campo eletromagnético:

$$L = T(\vec{r}) - U(\vec{r}, \vec{r}). \quad (128)$$

Finalmente chegamos a Lagrangiana para as coordenadas cartesianas da partícula.

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - e\varphi + e\vec{v} \cdot \vec{A}, \quad (129)$$

Desta feita, o formalismo Lagrangiano para os campos elétricos e magnéticos é de grande relevância na física teórica, destacando a construção da força generalizada e a Lagrangiana para esses campos. Essa abordagem revela como as interações eletromagnéticas estão embutidas no princípio da ação mínima, proporcionando uma compreensão mais abrangente da física eletromagnética. A utilização do formalismo Lagrangiano permite expressar essas equações de uma forma unificada, simplificando a análise de sistemas eletromagnéticos não muito simples. além disso, essa abordagem é essencial na formulação

da teoria eletromagnética de Maxwell, que unifica os campos elétricos e magnéticos em um único conjunto de equações, revolucionando nossa compreensão da eletricidade e do magnetismo.

2.4 FORMALISMO HAMILTONIANO

O formalismo da dinâmica hamiltoniana é uma abordagem matemática que serve para descrever o movimento de sistemas físicos, especialmente em mecânica clássica e mecânica quântica. Ele é uma alternativa ao formalismo da dinâmica lagrangiana e é frequentemente usado quando se deseja descrever sistemas conservadores, nos quais a energia total é preservada [13].

A formulação hamiltoniana da mecânica é baseada em uma função chamada de Hamiltoniana H , que é definida em termos das coordenadas q e momentos conjugados p do sistema. A Hamiltoniana é uma função de energia que descreve completamente o sistema.

As componentes da quantidade de o movimento linear é dado por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \quad (130)$$

Já em coordenadas generalizadas, podemos introduzir o momento generalizado,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (131)$$

De forma que as equações de movimento Euler-Lagrange fica ,

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (132)$$

Neste formalismo o papel central da Lagrangiana é sobreposto pela função Hamiltoniana, para isso ocorre uma mudança nas variáveis $(q, \dot{q}, t)$ para (q, p, t) . Essa mudança resulta em uma nova base que define o espaço de fase, onde agora tem-se $2n$ equações de primeira ordem. Com isso pode se definir a função de Hamilton ou hamiltoniana, que é calculado utilizando a definição usual de H como a transformação de Legendre [14].

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (133)$$

A lagrangiana é tida como função de coordenadas generalizadas, velocidades generalizadas e provavelmente do tempo, onde essa ultima pode surgir caso as restrições dependerem do tempo. podemos resolver a equação (131) para as velocidades generalizadas

e apresenta-las $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_i, p_i, t)$. A diferencial total de H é, portanto,

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (134)$$

de acordo com a equação (134), podemos escrever,

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right], \quad (135)$$

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (136)$$

utilizando as equações (131) e (132) obtemos,

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (137)$$

comparando a equação (134) com a equação (137), obtemos as equações de movimento Hamilton ou equações canônicas de Hamilton, que são:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (138)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (139)$$

obtemos também a seguinte equação.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad (140)$$

com $i = 1, \dots, n$. as equações (138) e (139) formam um conjunto de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem que são equivalentes ao sistema de n equações de segunda ordem de Lagrange. Entretanto, a equação (140) não é uma equação de movimento, porém se trata de uma relação de grande relevância das dependências temporais explícitas entre a lagrangiana e a hamiltoniana [8].

Bom, estamos em condições de determinar a hamiltoniana, que é dada pela soma das energias cinética e potencial do mesmo sistema, diferente da lagrangiana, que é obtida pela diferença dessas energias.

$$H = T + U, \quad (141)$$

que é igual a energia total do sistema, expressa como função das coordenadas e momentos. A Lagrangiana apresentada na equação (174) fica ,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e(\varphi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}), \quad (142)$$

o momento generalizado para essa lagrangiana será dado por :

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} + e \vec{A}, \quad (143)$$

a expressão $m\dot{\vec{r}}$ representa o nosso momento mecânico, ao passo que, $\vec{p}$ é o nosso momento conjugado, assim sendo,

$$m\dot{\vec{r}} = \vec{p} - e\vec{A}, \quad (144)$$

Assim, isolando a velocidade $\dot{\vec{r}}$,

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}, \quad (145)$$

Bom, a hamiltoniana para esse sistema é:

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - \left[\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e(\varphi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \right]. \quad (146)$$

Substituindo a equação (145) na equação anterior, ficamos com

$$H = \vec{p} \cdot \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} - \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right)^2 - e \left(\varphi - \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \cdot \vec{A} \right) \right], \quad (147)$$

simplificando essa expressão,

$$H = \vec{p} \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right) - \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi - \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right) e\vec{A}, \quad (148)$$

podemos fazer o seguinte,

$$H = \left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m} \right) (\vec{p} - e\vec{A}) - \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\varphi, \quad (149)$$

logo,

$$H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{m} - \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\varphi, \quad (150)$$

que nos dá, finalmente,

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi. \quad (151)$$

Esta é a expressão para a hamiltoniana de uma partícula sobre influência de um campo magnético externo. É importante ressaltar que esta hamiltoniana é a energia total $T + U$, se φ e $\vec{A}$ não dependem explicitamente do tempo.[8]

3 INTERAÇÃO QUÂNTICA DO ELÉTRON COM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Esta capítulo tem como objetivos apresentar ferramentas necessárias para o estudo quântico da interação do elétron com o campo eletromagnético. Para isso, eventualmente o conteúdo tratado nas subseções anteriores serão resgatados, porém aplicados na proposta específica deste capítulo. Assim, vamos descrever a equação do movimento, aplicar o teorema de Erhenfest para os valores esperados, verificar a invariancia de calibre, os níveis de Landau, o gauge simétrico, as funções de onda do estado fundamental e a precessão do spin.

3.1 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO. ANÁLOGO CLÁSSICO

O processo de primeira quantização consiste, primordialmente, na obtenção do operador $\hat{H}$ por comparação com a hamiltoniana clássica do movimento. Para uma partícula carregada sob ação da força de Lorentz, a hamiltoniana poderá ser obtida da lagrangiana como vimos anteriormente. Assim,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A} \right)^2 + e\varphi, \quad (152)$$

onde $\vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$, é o momento sendo ∇ o gradiente, que atua sobre as componentes de posição. Podemos escrever,

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A} \right) + e\varphi, \quad (153)$$

A construção do operador hamiltoniano pode ser estabelecido por uma comparação com a hamiltoniana na Mecânica Clássica. Esse processo está baseado em um dos postulados da Mecânica Quântica, que enuncia que toda quantidade física “A” mensurável é descrita por um operador adjunto $\hat{A}$ que atua no espaço de estados[15]. Desta feita, o operador hamiltoniano é gerado da hamiltoniana clássica, transformando as quantidades físicas em operadores. Esse processo é conhecido como primeira quantização.

Trocando, então ,

$$\begin{cases} r \mapsto \hat{r} \\ p \mapsto \hat{p} \end{cases} \quad (154)$$

Onde $\hat{r}$ e $\hat{p}$ são os operadores de posição e momento respectivamente; e a hamiltoniana é escrita como na equação (152).

A equação de movimento de Heisenberg é dada por:

$$\frac{d}{dt} q_j(t) = \frac{i}{\hbar} [H, q_j(t)] + \left(\frac{\partial q_j}{\partial t} \right), \quad (155)$$

Se o operador não depender explicitamente do tempo, que é o nosso caso, descartamos o último termo na equação (155).

$$i\hbar \frac{d}{dt} q_j(t) = i\hbar v_j(t) = [q_j, H], \quad (156)$$

Desta feita, tomando,

$$i\hbar \frac{d}{dt} q_j(t) = [q_j, H], \quad (157)$$

e ficamos com

$$i\hbar \frac{d}{dt} q_j(t) = [q_j, H], \quad (158)$$

Substituindo a Hamiltoniana,

$$i\hbar \frac{d}{dt} q_j(t) = \left[q_j, \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\varphi \right], \quad (159)$$

$$i\hbar v_j(t) = \frac{1}{2m} [q_j, p^2] - \frac{e}{2m} [q_j, p \cdot A] - \frac{e}{2m} [q_j, A \cdot p] + \frac{1}{2m} [q_j, A^2] + e [q_j, \varphi], \quad (160)$$

Para completar o cálculo, vamos usar a seguinte relação:

$$[q_j, p^2] = i\hbar p^{n-1}. \quad (161)$$

obtemos então,

$$i\hbar v_j(t) = i\hbar \left[\frac{p_j}{m} - \frac{eA_j}{m} \right], \quad (162)$$

$$v = \frac{1}{m} (p - eA), \quad (163)$$

Bom, vamos agora obter os comutadores de $[v_i, v_j]$,

$$[v_i, v_j] = \frac{1}{m^2} [p_i - eA_i, p_j - eA_j], \quad (164)$$

$$[v_i, v_j] = \frac{1}{m^2} [p_i, p_j] - \frac{e}{m^2} [p_i, A_j] - \frac{e}{m^2} [A_i, p_j] + \frac{e^2}{m^2} [A_i, A_j] \quad (165)$$

Os operadores p_i e p_j comutam, assim como A_i e A_j , portanto,

$$[p_i, p_j] = 0, \quad (166)$$

$$[A_i, A_j] = 0, \quad (167)$$

$$[v_i, v_j] = -\frac{e}{m^2} [p_i, A_j] - \frac{e}{m^2} [A_i, p_j], \quad (168)$$

$$[v_i, v_j] = -\frac{e}{m^2} \left(-i\hbar \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \right) - \frac{e}{m^2} \left(i\hbar \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right), \quad (169)$$

$$[v_i, v_j] = \frac{i\hbar e}{m^2} \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right). \quad (170)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right) = \varepsilon_{ijk} B_k. \quad (171)$$

assim,

$$[v_i, v_j] = \frac{i\hbar e}{m^2} \varepsilon_{ijk} B_k. \quad (172)$$

Essa equação é invariante de gauge lembrando que,

$$\varepsilon_{ijk} B_k = \varepsilon_{ijk} (\varepsilon_{klm} \partial_l A_m) = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} \partial_l A_m = (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) \partial_l A_n, \quad (173)$$

$$\varepsilon_{ijk} B_k = (\delta_{il} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jl}) \partial_l A_n = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad (174)$$

desta feita, recorrendo novamente a equação de Heisenberg para determinar a equação do movimento. Por conseguinte,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = [\vec{v}, H], \quad (175)$$

podemos escrever ,

$$H = \frac{1}{2} m \vec{v}^2, \quad (176)$$

substituindo o hamiltoniano,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \vec{v}_j = [\vec{v}_j, \frac{1}{2m} \vec{v}_k^2 + e\varphi_k], \quad (177)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \vec{v}_j = [\vec{v}_j, \frac{1}{2m} \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k + e\varphi_k], \quad (178)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \vec{v}_j = \frac{m}{2} (v_k [\vec{v}_j, \vec{v}_k] + [\vec{v}_j, \vec{v}_k] v_k) + [\vec{v}_j, e\varphi_k], \quad (179)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \vec{v}_j = \frac{m}{2} \left(\frac{ie\hbar}{m^2} \varepsilon_{jkl} v_k B_l + \frac{ie\hbar}{m^2} \varepsilon_{jkl} B_l v_k \right) + [\vec{v}_j, e\varphi_k], \quad (180)$$

nesta equação há uma mudança de sinal, no segundo termo, por meio de uma permutação ímpar nos índices do símbolo de Levi-Civita.

$$i\hbar \frac{d}{dt} \vec{v}_j = \frac{i\hbar e}{2m} (\vec{v} \times \vec{B})_j - \frac{i\hbar e}{2m} (\vec{B} \times \vec{v})_j + [\vec{v}_j, e\varphi_k], \quad (181)$$

note que o último termo desta equação pode ser obtido por analogia com uma relação proposta por Gottfried [16].

$$[\hat{p}, F(q)] = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial F(q)}{\partial q}, \quad (182)$$

fazendo $F(q) = \varphi(q)$,

$$[\vec{v}_j, e\varphi_j] = -\frac{i\hbar}{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_j}, \quad (183)$$

onde $-\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \vec{E}(q)$ são as componentes de um campo elétrico independente do tempo (que tomamos atenção, pois que, não é um operador). Logo,

$$i\hbar \vec{v} = \frac{i\hbar e}{2m} \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)_j - \frac{i\hbar e}{2m} (\vec{B} \times \vec{v})_j + \frac{i\hbar}{m} \vec{E}_j, \quad (184)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{e}{m} \left[\frac{1}{2} ((\vec{v} \times \vec{B}) - (\vec{B} \times \vec{v})) + \vec{E} \right], \quad (185)$$

através da seguinte relação de comutação:

$$[B_j, v_k] = [B_j, \frac{p_k}{m}] - \frac{e}{m} [B_j, A_k] \quad (186)$$

$$[B_j, A_k] = 0, \quad (187)$$

$$[B_j, v_k] = \left[B_j, \frac{p_k}{m} \right] = \frac{i\hbar}{m} \frac{\partial B_j}{\partial q_k}, \quad (188)$$

consegue-se a equação do movimento geral na forma:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{e}{m} \vec{E} + \frac{e}{m} \vec{v} \times \vec{B} + \frac{i\hbar e}{m^2} \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad (189)$$

Esta equação descreve como um observável varia com o tempo, porém, considerando estados estacionários. obtemos

$$\frac{i\hbar e}{m^2} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (190)$$

é um termo ausente em um sistema clássico.

3.1.1 CÁLCULO DO VALOR ESPERADO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Da equação (185), que expressa a segunda derivada do observável de posição, difere do seu análogo clássico por um novo termo que é proporcional ao campo magnético. Por intermédio dessa diferença, podemos dizer que, a aceleração de uma partícula carregada na mecânica quântica, na presença de um campo magnético constante, varia com o tempo de modo diferente do caso clássico.

Assim, usando a notação de Einstein, vamos determinar o valor esperado para a equação do movimento,

$$m \frac{d^2 \langle r \rangle}{dt^2} = \frac{d \langle p \rangle}{dt} = \frac{e}{2} \left\langle \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle - \frac{e}{2} \left\langle \varepsilon_{ikj} B_k \frac{dr_j}{dt} \right\rangle + e \langle E \rangle, \quad (191)$$

fazendo o seguinte,

$$m \frac{d^2 \langle r \rangle}{dt^2} = \frac{e}{2} \left\langle \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle + \frac{e}{2} \left\langle -\varepsilon_{ikj} B_k \frac{dr_j}{dt} + \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k - \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle + e \langle E \rangle, \quad (192)$$

$$m \frac{d^2 \langle r \rangle}{dt^2} = \frac{e}{2} \left\langle \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k + \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle + \frac{e}{2} \left\langle -\varepsilon_{ikj} B_k \frac{dr_j}{dt} - \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle + e \langle E \rangle, \quad (193)$$

$$m \frac{d^2 \langle r \rangle}{dt^2} = \frac{2e}{2} \left\langle \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle + \frac{e}{2} \left\langle \varepsilon_{ijk} B_k \frac{dr_j}{dt} - \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle + e \langle E \rangle, \quad (194)$$

$$m \frac{d^2 \langle r \rangle}{dt^2} = \frac{d \langle p \rangle}{dt} = e \langle E \rangle + e \left\langle \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle + \frac{e}{2} \left\langle \varepsilon_{ijk} B_k \frac{dr_j}{dt} - \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle, \quad (195)$$

ora, da equação (234), escreve-se o ultimo termo da eq. (249) como,

$$\frac{e}{2} \left\langle \varepsilon_{ijk} B_k \frac{dr_j}{dt} - \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle = \frac{1}{2i\hbar} \left\langle [\vec{v}_i, \vec{v}_j] v_j - v_j [\vec{v}_i, \vec{v}_j] \right\rangle = \frac{1}{2i\hbar} \left\langle [[\vec{v}_i, \vec{v}_j], v_j] \right\rangle, \quad (196)$$

$$m \frac{d^2 \langle r \rangle}{dt^2} = \frac{d \langle p_l \rangle}{dt} = e \langle E_l \rangle + e \left\langle \varepsilon_{ijk} \frac{dr_j}{dt} B_k \right\rangle + \frac{1}{2i\hbar m} \left\langle [[\vec{p}_i, \vec{p}_j], p_j] \right\rangle, \quad (197)$$

Desta feita, esse resultado nos mostra que os valores esperados desse observável não mudam com o tempo tal e qual como seu análogo fornecido pelas leis clássicas. Assim, este resultado difere do que diz o teorema de Ehrenfest. Ou seja, esse é um dos sistemas físicos onde esse teorema não é satisfeito, neste caso, pelo acréscimo de um fator .

$$\gamma_j = \frac{1}{2i\hbar m} \left\langle [[\vec{p}_i, \vec{p}_j], p_j] \right\rangle. \quad (198)$$

Quando o campo magnético é uniforme ou nulo, $\gamma = 0$, o teorema é satisfeito, ao contrário, de maneira geral não é. Podemos então afirmar que o campo magnético é a grandeza física responsável por afincar essa diferença dos valores esperados previstos pelas leis clássicas e quânticas [17].

3.2 NÍVEIS DE LANDAU

Os níveis de Landau surgem quando um material é exposto a um campo magnético intenso. Nessa situação, os elétrons presentes no material não se movem livremente, como aconteceria em um ambiente sem campo magnético. Em vez disso, eles passam a se mover em órbitas quantizadas, chamadas de órbitas de Landau, ao redor das linhas do campo magnético [18].

A energia dos elétrons nesses níveis é quantizada e depende da quantidade de energia cinética associada ao movimento orbital e da interação com o campo magnético. Esses patamares energéticos são conhecidos como “níveis de Landau” e estão espaçados discretamente, o que significa que os elétrons só podem possuir valores específicos de energia.

Um dos resultados mais notáveis dos níveis de Landau é a quantização da condutividade. À medida que os elétrons se movem em suas órbitas, eles têm uma mobilidade limitada ao longo das linhas do campo magnético. Isso resulta na quantização da condutividade elétrica medida perpendicularmente ao campo magnético. Esse fenômeno é denominado “Efeito Hall Quântico” e representa uma das formas pelas quais os níveis de Landau influenciam as propriedades elétricas dos materiais quando submetidos a campos magnéticos intensos, de tal modo que a interação magnética se sobressaia a agitação

térmica [19]. Que foi contemplada com o prémio Nobel de física na década de 80 e teve uma grande importância em várias áreas da física [20].

Por conseguinte, os níveis de Landau desempenham um papel crucial na física do estado sólido quando sujeito a campos magnéticos intensos. Eles geram órbitas quantizadas dos elétrons ao redor das linhas do campo magnético e influenciam diversas propriedades eletrônicas dos materiais. Possuindo diversas aplicações sofisticadas, como o problema de uma partícula livre apresentada com a equação de Schrodinger em espaços curvos [21].

Considerando $\vec{B} = (0, 0, B)$, $B > 0$ e $\vec{E} = 0$ o operador hamiltoniano em termo das velocidades, é dado por:

$$H = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2), \quad (199)$$

sabemos que,

$$v_z = \frac{p_z}{m}, \quad (200)$$

e que

$$[v_x, v_z] = [v_y, v_z] = 0, \quad (201)$$

sendo que,

$$[v_x, v_y] = \frac{ie\hbar}{m^2} B, \quad (202)$$

é o único comutador não nulo de velocidades.

O momento paralelo a $\vec{B}$ é uma constante de movimento, como no caso clássico. O movimento ao longo de $\vec{B}$ é simplesmente o de uma partícula livre, ou seja, livre no sentido que não há restrição do campo nessa direção.

Assim, vamos nos preocupar, por enquanto, com o que acontece no plano XY perpendicular a $\vec{B}$ para o qual,

$$H_{xy} = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2), \quad (203)$$

os operadores de velocidade não comutam com o Hamiltoniano

$$[v_x, v_y] \neq [v_x, H_{xy}] \neq [v_y, H_{xy}] \neq 0, \quad (204)$$

entretanto, $[v_x, v_y]$ pertence ao conjunto dos números complexos.

O movimento no plano perpendicular a $\vec{B}$ é semelhante ao de um oscilador harmônico quântico.

Vamos então definir os operadores escados, de levantamento (criação) e de abaxamento (aniquilação) [15].

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}}(v_x - iv_y), \quad (205)$$

Operador de levantamento.

$$a = \sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}}(v_x + iv_y), \quad (206)$$

Operador de abaixamento.

Onde:

$$\omega_c = \frac{eB}{m}, \quad (207)$$

é a frequência ciclotron, e podemos escrever o comutador,

$$[v_x, v_y] = \frac{ie\hbar}{m^2}B = i\hbar\frac{\omega_c}{m}. \quad (208)$$

Queremos obter uma relação direta que nos possibilite escrever o nosso hamiltoniano com relação aos operadores de levantamento e abaixamento. Assim, podemos partir da produto entre eles

$$a^\dagger a = \left(\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}}(v_x - iv_y)\right)\left(\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}}(v_x + iv_y)\right), \quad (209)$$

$$a^\dagger a = \frac{m}{2\hbar\omega_c}(v_x - iv_y)(v_x + iv_y), \quad (210)$$

$$a^\dagger a = \frac{m}{2\hbar\omega_c}[v_x^2 + iv_x v_y - iv_y v_x + v_y^2], \quad (211)$$

$$a^\dagger a = \frac{m}{2\hbar\omega_c}[v_x^2 + i(v_x v_y - v_y v_x) + v_y^2], \quad (212)$$

bom, podemos escrever,

$$i(v_x v_y - v_y v_x) = i\hbar\frac{\omega_c}{m}, \quad (213)$$

assim,

$$a^\dagger a = \frac{m}{2\hbar\omega_c}[v_x^2 + i^2\hbar\frac{\omega_c}{m} + v_y^2], \quad (214)$$

$$a^\dagger a = \frac{m}{2\hbar\omega_c}(v_x^2 + v_y^2) + \frac{m}{2\hbar\omega_c}i^2\hbar\frac{\omega_c}{m}, \quad (215)$$

$$a^\dagger a = \frac{m}{2\hbar\omega_c}(v_x^2 + v_y^2) - \frac{1}{2}, \quad (216)$$

note que,

$$\frac{H_{xy}}{\hbar\omega_c} = \frac{m}{2\hbar\omega_c}(v_x^2 + v_y^2), \quad (217)$$

finalmente,

$$a^\dagger a = \frac{H_{xy}}{\hbar\omega_c} - \frac{1}{2}, \quad (218)$$

$$H_{xy} = \hbar\omega_c\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right), \quad (219)$$

para o movimento no plano perpendicular a $\vec{B}$.

É fácil mostrar o comutador dos operadores a e $a^\dagger$,

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a, \quad (220)$$

$$\left(\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}}(v_x + iv_y) \right) \left(\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}}(v_x - iv_y) \right) - \left(\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}}(v_x - iv_y) \right) \left(\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega_c}}(v_x + iv_y) \right), \quad (221)$$

$$\frac{m}{2\hbar\omega_c} \left((v_x^2 - i(v_x v_y - v_y v_x) + v_y^2) - (v_x^2 + i(v_x v_y - v_y v_x) + v_y^2) \right), \quad (222)$$

$$\frac{m}{2\hbar\omega_c} \left(v_x^2 - i(v_x v_y - v_y v_x) + v_y^2 - v_x^2 - i(v_x v_y - v_y v_x) - v_y^2 \right), \quad (223)$$

simplificando,

$$\frac{m}{2\hbar\omega_c} (-2i(v_x v_y - v_y v_x)) \quad (224)$$

temos que,

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = \frac{m}{2\hbar\omega_c} [-2i(v_x v_y - v_y v_x)] = \frac{m}{2\hbar\omega_c} (-2i \frac{i\hbar\omega_c}{m}), \quad (225)$$

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1, \quad (226)$$

assim,

$$aa^\dagger a^\dagger a = aa^\dagger - 1 \quad (227)$$

então a equação (219) também pode ser escrito como,

$$H_{xy} = \hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2}) = \hbar\omega_c(aa^\dagger - \frac{1}{2}), \quad (228)$$

Escrevendo o hamiltoniano em termos dos operadores de abaixamento e levantamento, por conseguinte, em analogia com o oscilador harmônico quântico, pode-se afirmar que conhecemos as soluções para o espectro energético [4].

$$E = \frac{e\hbar B}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (229)$$

com $n = 1, 2, 3, \dots$, temos finalmente, "os níveis de Landau".

Bom, quando $\vec{B}$ é uniforme a equação de movimento se simplifica,

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{e}{m} \vec{v} \times \vec{B}, \quad (230)$$

e ficamos com,

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}}_x = \omega_c v_y \\ \dot{\vec{v}}_y = -\omega_c v_x \end{cases} \quad (231)$$

Assim, a solução é a mesma tal como no caso clássico, se considerarmos $e > 0$, temos um movimento circular no sentido horário com frequência angular ω_c , se $e < 0$, o movimento é anti-horário. desta feita:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 - \frac{1}{\omega_c} v_y(t) \\ y(t) = y_0 + \frac{1}{\omega_c} v_x(t), \end{cases} \quad (232)$$

$$\begin{cases} x_0 = x(t) + \frac{1}{\omega_c} v_y(t) \\ y_0 = y(t) - \frac{1}{\omega_c} v_x(t) \end{cases} \quad (233)$$

o comutador de $[x_0, y_0]$,

$$[x_0, y_0] = [x + \frac{1}{\omega_c} v_y, y - \frac{1}{\omega_c} v_x], \quad (234)$$

$$[x_0, y_0] = [x, y] - [x, \frac{v_x}{\omega_c}] + [\frac{v_y}{\omega_c}, y] - [\frac{v_y}{\omega_c}, \frac{v_x}{\omega_c}], \quad (235)$$

$$[x_0, y_0] = [x, y] - \frac{1}{\omega_c} [x, v_x] + \frac{1}{\omega_c} [v_y, y] - \frac{1}{\omega_c^2} [v_y, v_x], \quad (236)$$

os operadores de posição comutam entre si, $[x, y] = 0$, entretanto, os comutadores $[x, v_x]$, $[v_y, y]$ e $[v_y, v_x]$ não comutam, mas sabemos determinar as expressões dessas comutações, assim,

$$[x_0, y_0] = -\frac{i\hbar}{\omega_c m} - \frac{i\hbar}{\omega_c m} + \frac{i\hbar\omega_c}{\omega_c^2 m} \quad (237)$$

somando os termos,

$$[x_0, y_0] = -\frac{i\hbar}{\omega_c m}, \quad (238)$$

chamando

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}} \quad (239)$$

logo

$$[x_0, y_0] = -il_B^2 \quad (240)$$

Pela equação de movimento de Heisenberg,

$$v_x(t) = \frac{1}{i\hbar} [x(t), H_{xy}], \quad (241)$$

$$v_x(t) = \frac{1}{i\hbar} \left([x_0, H] - \frac{1}{\omega_c} [v_y(t), H_{xy}] \right), \quad (242)$$

ora, veja que,

$$[v_y(t), H_{xy}] = [v_y(t), \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2)] = [v_y(t), \frac{m}{2} v_x^2] = -i\hbar\omega_c v_x(t), \quad (243)$$

sabendo que,

$$[v_y(t), \frac{m}{2} v_y^2] = 0, \quad (244)$$

$$v_x(t) = \frac{1}{i\hbar} \left([x_0, H_{xy}] - \frac{1}{\omega_c} (-i\hbar\omega_c v_x(t)) \right), \quad (245)$$

$$v_x(t) = v_x(t), \quad (246)$$

portanto, é possível afirmar que $[x_0, H_{xy}] = 0$, assim, analogamente, $[y_0, H_{xy}] = 0$. logo, x_0 e y_0 são constantes de movimento, mas não podem ser simultaneamente diagonalizados, ou seja, só uma delas pode ser diagonalizado simultaneamente com o hamiltoniano.

Vemos que, o raio da órbita é proporcional à energia ,

$$R^2 \equiv [x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 = \frac{2}{m\omega_c^2} H_{xy}, \quad (247)$$

podemos aplicar R^2 na base dos autoestados de energia, obtemos,

$$R^2|E_n\rangle = \frac{2}{m\omega_c^2} H_{xy}|E_n\rangle = \frac{2}{m\omega_c^2} \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) |E_n\rangle \quad (248)$$

substituindo ω_c e simplificando,

$$R^2|E_n\rangle = \frac{(2n+1)\hbar m}{m|e|B} |E_n\rangle, \quad (249)$$

Desta feita,

$$(r^2)_n = (2n+1) \frac{\hbar}{m|e|B} = (2n+1) l_B^2. \quad (250)$$

Os raios dos estados estacionários cresce com $\sqrt{n}$. Esses níveis de Landau são níveis de energia bem definidos, e têm o mesmo espectro energético de um oscilador harmônico quântico.

3.3 GAUGE SIMÉTRICO: MÉTODO ALGÉBRICO

Para essa descrição, fazendo uma analogia semelhante de [15], desta feita, vamos escrever o vetor potencial como sendo:

$$A_x = -\frac{1}{2}yB, \quad (251)$$

$$A_y = \frac{1}{2}xB. \quad (252)$$

de forma que, as equações para o movimento se tornam,

$$v_x = \frac{p_x}{m} - \frac{e}{m}A_x = \frac{p_x}{m} + \frac{\omega_c}{2}y, \quad (253)$$

e

$$v_y = \frac{p_y}{m} - \frac{e}{m}A_y = \frac{p_y}{m} - \frac{\omega_c}{2}x, \quad (254)$$

O hamiltoniano será

$$H_{xy} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) = \frac{m}{2} \left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{\omega_c^2}{4}y^2 + \omega_c p_x y + \frac{p_y^2}{m^2} + \frac{\omega_c^2}{4}x^2 - \omega_c p_y x \right), \quad (255)$$

juntando os termos semelhantes,

$$H_{xy} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{\omega_c^2 m}{8}(x^2 + y^2) + \frac{\omega_c}{2}(p_x y - p_y x), \quad (256)$$

tomando $\omega = \frac{\omega_c}{2}$ consegue-se,

$$H_{xy} = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}mx^2\right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}my^2\right) + \frac{1}{2}\omega_c(p_x y - p_y x), \quad (257)$$

lembrando que o último termo desta equação, a menos de um sinal, é proporcional O momento angular da partícula na direção do campo magnético,

$$L = r \times p = \begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases} \quad (258)$$

Assumindo natureza do sistema em questão, em uma única partícula cujas variáveis canônicas são os operadores de posição e momento x e p ; neste caso, o momento angular é puramente orbital [16].

$$L = (r \times p)/\hbar. \quad (259)$$

O último termo da equação (257), a menos de um sinal, é proporcional ao momento angular orbital da partícula na direção do campo magnético.

$$L_z = (xp_y - yp_x)/\hbar, \quad (260)$$

pode-se escrever a equação da seguinte maneira

$$H_{xy} = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}mx^2\right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}my^2\right) - \frac{1}{2}\omega_c(xp_y - yp_x) \quad (261)$$

substituindo L_z na equação anterior,

$$H_{xy} = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}mx^2\right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}my^2\right) - \omega\hbar L_z, \quad (262)$$

é perceptível que há dois osciladores harmônicos, um em x , outro em y somados ao momento angular L_z .

$$H_{xy} + \omega\hbar L_z = \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}mx^2\right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}my^2\right) \quad (263)$$

o espectro de energia para cada oscilador unidimensional é conhecido,

$$E = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right), \quad (264)$$

$$E = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2} + n_y + \frac{1}{2}\right), \quad (265)$$

$$E = \hbar\omega(n_x + n_y + 1) = \hbar\omega(n' + 1). \quad (266)$$

Se a partícula estiver em um estado onde o momento angular é bem definida, terá autovalor, que chamaremos μ , e isso parece sugestivo que o espectro de energia também dependa do autovalor do momento angular.

$$E(n', \mu) = \frac{1}{2}\hbar\omega_c(n' - \mu + 1) \quad (267)$$

Entretanto, é fato que, o espectro de energia depende apenas dos valores de n , como já mostramos anteriormente. Desta feita, uma correção é necessária para este caso. Por conseguinte, vamos primeiramente determinar o comutador de $[H_{xy}, L_z]$.

$$[H_{xy}, L_z] = \left[\left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}mx^2\right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{\omega^2}{2}my^2\right) - \omega L_z, L_z\right], \quad (268)$$

$$[H_{xy}, L_z] = \frac{1}{2m}[p_x^2, L_z] + \frac{\omega^2 m}{2}[x^2, L_z] + \frac{1}{2m}[p_y^2, L_z] + \frac{\omega^2 m}{2}[y^2, L_z] - \omega[L_z, L_z], \quad (269)$$

note que $[L_z, L_z] = 0$, e substituindo $L_z = (xp_y - yp_x)/\hbar$ na expressão,

$$[H_{xy}, L_z] = \frac{1}{2m\hbar}[p_x^2, xp_y - yp_x] + \frac{\omega^2 m}{2\hbar}[x^2, xp_y - yp_x] + \frac{1}{2m\hbar}[p_y^2, xp_y - yp_x] + \frac{\omega^2 m}{2\hbar}[y^2, xp_y - yp_x]. \quad (270)$$

Bom, vamos usar as seguintes propriedades de comutador,

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \quad (271)$$

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C. \quad (272)$$

Vamos começar pelo primeiro termo $[p_x^2, xp_y - yp_x]$.

$$[p_x^2, xp_y - yp_x] = [p_x^2, xp_y] - [p_x^2, yp_x], \quad (273)$$

$$\begin{cases} [p_x^2, xp_y] = p_x[p_x, xp_y] + [p_x, xp_y]p_x \\ [p_x^2, yp_x] = p_x[p_x, yp_x] + [p_x, yp_x]p_x \end{cases} \quad (274)$$

$$\begin{cases} [p_x^2, xp_y] = p_x(x[p_x, p_y] + [p_x, x]p_y) + (x[p_x, p_y] + [p_x, x]p_y)p_x \\ [p_x^2, yp_x] = p_x(y[p_x, p_x] + [p_x, y]p_x) + (y[p_x, p_x] + [p_x, y]p_x)p_x \end{cases} \quad (275)$$

$$\begin{cases} [p_x^2, xp_y] = (-i\hbar)(p_x p_y - p_y p_x) \\ [p_x^2, yp_x] = 0 \end{cases} \quad (276)$$

$$[p_x^2, xp_y - yp_x] = (-i\hbar)(p_x p_y - p_y p_x), \quad (277)$$

analogamente, o terceiro termo será,

$$[p_y^2, xp_y - yp_x] = (-i\hbar)(p_y p_x - p_x p_y) \quad (278)$$

invertendo os termos, ganhamos um sinal negativo, assim,

$$[p_y^2, xp_y - yp_x] = (i\hbar)(p_x p_y - p_y p_x), \quad (279)$$

pegando o segundo termo $[x^2, xp_y - yp_x]$,

$$[x^2, xp_y - yp_x] = [x^2, xp_y] - [x^2, yp_x] \quad (280)$$

$$\begin{cases} [x^2, xp_y] = x[x, xp_y] + [x, xp_y]x \\ [x^2, yp_x] = x[x, yp_x] + [x, yp_x]x \end{cases} \quad (281)$$

$$\begin{cases} [x^2, xp_y] = x(x[x, p_y] + [x, x]p_y) + (x[x, p_y] + [x, x]p_y)x \\ [x^2, yp_x] = x(y[x, p_x] + [x, y]p_x) + (y[x, p_x] + [x, y]p_x)x \end{cases} \quad (282)$$

$$\begin{cases} [x^2, xp_y] = 0 \\ [x^2, yp_x] = i\hbar(xy - yx), \end{cases} \quad (283)$$

$$[x^2, xp_y - yp_x] = i\hbar(xy - yx), \quad (284)$$

analogamente, o último termo será,

$$[y^2, xp_y - yp_x] = i\hbar(yx - xy), \quad (285)$$

invertendo os termos, ganha-se um sinal negativo, assim,

$$[y^2, xp_y - yp_x] = -i\hbar(xy - yx), \quad (286)$$

substituindo as equações (277), (279), (284) e (286) em (270) obtemos:

$$[H_{xy}, L_z] = -\frac{1}{2m\hbar}i\hbar(p_x p_y - p_y p_x) + \frac{\omega^2 m}{2\hbar}i\hbar(xy - yx) + \frac{1}{2m\hbar}i\hbar(p_x p_y - p_y p_x) - \frac{\omega^2 m}{2\hbar}i\hbar(xy - yx), \quad (287)$$

somando, obtemos finalmente que,

$$[H_{xy}, L_z] = 0. \quad (288)$$

Como L_z comuta com o hamiltoniano H , podemos afirmar que L_z é uma constante do movimento, e que, portanto, ele pode ser diagonalizado simultaneamente à H . E isto é sugestivo que neste gauge em particular, com o hamiltoniano que comuta com o momento angular nessa direção, que podemos procurar estados que são simultaneamente autoestados de H_{xy} e L_z .

Mas antes disso, vamos ver qual é a relação de L_z com as outras constantes de movimento que já vimos, x_0 e y_0 , que são os operadores do centro da órbita.

Escrevendo de fato L_z da seguinte maneira,

$$\hbar L_z = x(t)p_y - y(t)p_x, \quad (289)$$

A equação (253), (254) nos permite escrever,

$$\begin{cases} p_x = mv_x - \frac{\omega_c}{2}my \\ p_y = mv_y + \frac{\omega_c}{2}mx \end{cases} \quad (290)$$

substituindo em (284)

$$\hbar L_z = x(t)\left(mv_y + \frac{\omega_c}{2}mx\right) - y(t)\left(mv_x - \frac{\omega_c}{2}my\right), \quad (291)$$

$$\hbar L_z = m(xv_y - yv_x) + \frac{\omega_c}{2}m(x^2 + y^2), \quad (292)$$

da equação (232), pode-se escrever que,

$$\begin{cases} v_y(t) = \omega_c(x_0 - x) \\ v_x(t) = \omega_c(y - y_0), \end{cases} \quad (293)$$

substituindo (293) em (292),

$$\hbar L_z = m\left[x\omega_c(x_0 - x) - y\omega_c(y - y_0)\right] + \frac{\omega_c}{2}m(x^2 + y^2), \quad (294)$$

$$\hbar L_z = mx\omega_c(x_0 - x) - my\omega_c(y - y_0) + \frac{\omega_c}{2}m(x^2 + y^2), \quad (295)$$

$$\hbar L_z = m\omega_c x x_0 - m\omega_c(x^2 + y^2) + m\omega_c y y_0 + \frac{\omega_c}{2}m(x^2 + y^2), \quad (296)$$

$$\hbar L_z = m\omega_c(x x_0 + y y_0) - m\frac{\omega_c}{2}(x^2 + y^2), \quad (297)$$

Pode-se desenvolver a expressão do operador R^2 ,

$$R^2 = [x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = \frac{2}{m\omega_c^2}H_{xy}, \quad (298)$$

$$R^2 = (x^2 + y^2) - 2(xx_0 + yy_0) + (x_0^2 + y_0^2), \quad (299)$$

fazendo $R_0^2 = x_0^2 + y_0^2$, que é um operador que define a distância da centro da órbita da origem, e que comuta com H_{xy} , uma vez que ele é formado por operadores que comutam com H .

$$R^2 = (x^2 + y^2) - 2(xx_0 + yy_0) + R_0^2, \quad (300)$$

$$R^2 - R_0^2 = (x^2 + y^2) - 2(xx_0 + yy_0), \quad (301)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por $-\frac{m\omega_c}{2}$ teremos,

$$\frac{m\omega_c}{2}(R_0^2 - R^2) = m\omega_c(xx_0 + yy_0) - m\frac{\omega_c}{2}(x^2 + y^2), \quad (302)$$

desta feita,

$$\hbar L_z = \frac{m\omega_c}{2}(R_0^2 - R^2), \quad (303)$$

bem, vamos substituir a expressão de R^2

$$\hbar L_z = \frac{m\omega_c}{2}\left(R_0^2 - \frac{2}{m\omega_c^2}H_{xy}\right), \quad (304)$$

$$\hbar L_z = \frac{m\omega_c}{2}R_0^2 - \frac{m\omega_c}{2}\frac{2}{m\omega_c^2}H_{xy}, \quad (305)$$

$$L_z = \frac{m\omega_c}{2\hbar}R_0^2 - \frac{H_{xy}}{\hbar\omega_c}, \quad (306)$$

já definiu-se $l_B^2 = \frac{\hbar}{m\omega_c}$, portanto,

$$L_z = \frac{1}{2l_B^2}R_0^2 - \frac{H_{xy}}{\omega_c\hbar}. \quad (307)$$

Bom, conseguimos encontrar uma relação direta de L_z com H_{xy} , bem como os operadores do centro da órbita que são constantes do movimento, e esta equação (307) nos mostra que é possível encontrar uma base de estados que são autoestados dos operadores L_z com H simultaneamente; para fazer isso, vamos definir um outro conjunto de operadores adimensionais, um conjunto que estamos propondo, de modo que, esses operadores são combinações dos operadores x_0, y_0 que definem o centro da órbita e são constantes de movimento. Por conseguinte,

$$Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(x_0 + iy_0) \quad (308)$$

e

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(x_0 - iy_0) \quad (309)$$

é o conjunto proposto, logo, determinando a relação de comutação deles,

$$[Q, Q^\dagger] = QQ^\dagger - Q^\dagger Q, \quad (310)$$

$$[Q, Q^\dagger] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}l_B}(x_0 - iy_0)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}l_B}(x_0 + iy_0)\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}l_B}(x_0 + iy_0)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}l_B}(x_0 - iy_0)\right), \quad (311)$$

$$[Q, Q^\dagger] = \frac{1}{2l_B^2}[x_0^2 + x_0iy_0 - iy_0x_0 - (iy_0)^2 - x_0^2 + x_0iy_0 - iy_0x_0 + (iy_0)^2], \quad (312)$$

simplificando,

$$[Q, Q^\dagger] = \frac{1}{2l_B^2}[x_0iy_0 - iy_0x_0 + x_0iy_0 - iy_0x_0], \quad (313)$$

somando temos,

$$[Q, Q^\dagger] = \frac{2i}{2l_B^2}[x_0y_0 - y_0x_0], \quad (314)$$

$$[Q, Q^\dagger] = \frac{i}{l_B^2} [x_0, y_0] = \frac{i}{l_B^2} (-il_B^2), \quad (315)$$

$$[Q, Q^\dagger] = 1. \quad (316)$$

Esses operadores eles não comutam, e relação de comutação é igual a 1, assim como $[a, a^\dagger]$. Podemos escrever, então:

$$QQ^\dagger = \left(\frac{1}{\sqrt{2}l_B}(x_0 - iy_0)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}l_B}(x_0 + iy_0)\right) = \frac{1}{2l_B^2}[x_0^2 + x_0iy_0 - iy_0x_0 - (iy_0)^2], \quad (317)$$

$$QQ^\dagger = \frac{1}{2l_B^2}[x_0^2 + y_0^2 + i(x_0y_0 - y_0x_0)], \quad (318)$$

$$QQ^\dagger = \frac{1}{2l_B^2}(x_0^2 + y_0^2) + \frac{1}{2l_B^2}i(-il_B^2), \quad (319)$$

$$QQ^\dagger = \frac{1}{2l_B^2}(R_0^2 + l_B^2) = \frac{R_0^2}{2l_B^2} + \frac{1}{2}, \quad (320)$$

da equação (307), podemos escrever,

$$\frac{R_0^2}{2l_B^2} = L_z + \frac{H}{\hbar\omega_c}, \quad (321)$$

substituindo (321) em (320) obtemos o seguinte operador,

$$QQ^\dagger = \frac{1}{2l_B^2}(R_0^2 + l_B^2) = L_z + \frac{H}{\hbar\omega_c} + \frac{1}{2}, \quad (322)$$

ainda pode-se relacionar esse $QQ^\dagger$ operador com $aa^\dagger$ substituindo o hamiltoniano perpendicular ao campo magnético.

$$QQ^\dagger = L_z + \frac{1}{\hbar\omega_c}\hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}, \quad (323)$$

$$QQ^\dagger = L_z + a^\dagger a + 1, \quad (324)$$

Agora, supondo que esses operadores sobem e descem o valor do momento angular na direção z de uma unidade.

$$\begin{cases} Q^\dagger|n, \mu\rangle = C_+|n, \mu + 1\rangle \\ Q|n, \mu\rangle = C_-|n, \mu - 1\rangle \end{cases} \quad (325)$$

$$QQ^\dagger|n, \mu\rangle = C_\pm|n, \mu \pm 1\rangle, \quad (326)$$

podemos calcular estes coeficientes $C_\pm$ fazendo a projeção,

$$|C_+|^2 = \langle n, \mu | QQ^\dagger | n\mu \rangle, \quad (327)$$

substituindo a equação (324) em (327),

$$|C_+|^2 = \langle n, \mu | L_z + a^\dagger a + 1 | n\mu \rangle, \quad (328)$$

que será então igual,

$$|C_+|^2 = \mu + n + 1, \quad (329)$$

$$|C_+| = \sqrt{\mu + n + 1} \quad (330)$$

e que por analogia, é facil perceber que,

$$|C_-|^2 = \mu + n, \quad (331)$$

$$|C_-| = \sqrt{\mu + n}, \quad (332)$$

desta feita, escrevendo,

$$\begin{cases} Q^\dagger |n, \mu\rangle = \sqrt{\mu + n + 1} |n, \mu + 1\rangle \\ Q |n, \mu\rangle = \sqrt{\mu + n} |n, \mu - 1\rangle \end{cases} \quad (333)$$

Pois bem, se de fato ao supor que os operadores $Q^\dagger$ e Q atuando neste autoestado $|n, \mu\rangle$ desta maneira, então, eles devem levantar e abaixar respectivamente o momento angular de uma unidade. Pecerbemos tmbém que, tanto n , que são estados do oscilador harmônico, como μ , que são os autovalores do momento angular orbital são números reais, inteiros e positivos, podendo ser nulos, então, se formos aplicar cada vez mais o operador de abaixamento, percebe-se que há um valor mínimo para μ . Consequêntemente, escolhendo as fases arbitrárias, de forma apropriada, começando pelo estado fundamental de modo que:

$$Q |n - n\rangle = 0, \quad (334)$$

Implicando que o valor de $\mu = -n, -n + 1, -n + 2, \dots$,

Assim, o espectro do momento angular no supespaço degenerado de energia E_n é limitado inferiormente e toma os valores inteiros $\mu = -n, -n + 1, -n + 2, \dots$. Assim, como será visto posteriormente a construção desse auto estado, que é auto estado simultâneo de energia e que cada estado de energia tem infinitos valores possíveis para o momento angular nesse gauge escolhido.

Vamos propor o seguinte:

a^+ e a são os operadores de levantamento e abaixamento de energia, e propomos que abaixam e levantam L_z de uma unidade 1 respectivamente.

$$\begin{cases} a^\dagger |n\mu\rangle = \sqrt{n + 1} |n + 1, \mu - 1\rangle \\ a |n\mu\rangle = \sqrt{n} |n - 1, \mu + 1\rangle. \end{cases} \quad (335)$$

Desta feita, é fundamental demonstrar as equação (335).

Por conseguinte, começando pelo estado fundamental, aplicando $a^\dagger$ na base dos estados de energia, podemos construir todos os outros estados na sequência, assim,

$$\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|n-n\rangle \quad (336)$$

escrevendo,

$$a^\dagger \propto v_x - iv_y = \frac{1}{m}(p_x - ip_y) + i\frac{\omega_c}{2}(x - iy), \quad (337)$$

assim, as equações (205) e (206) podem ser apresentadas da seguinte forma:

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m}{\hbar\omega_c}} \frac{1}{\sqrt{2}}(v_x - iv_y), \quad (338)$$

operador de levantamento,

$$a = \sqrt{\frac{m}{\hbar\omega_c}} \frac{1}{\sqrt{2}}(v_x + iv_y), \quad (339)$$

operador de abaixamento.

Pois bem, um operador vetorial $\vec{V}$ na base esférica pode ser apresentado como,

$$V_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v_x + iv_y) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{m}}a \quad (340)$$

e

$$V_- = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v_x - iv_y) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{m}}a^\dagger, \quad (341)$$

a relação de comutação do momento angular L_z com o operador na base esférica $V_\pm$ é:

$$[L_z, V_\pm] = \pm V_\pm, \quad (342)$$

uma vez que essa relação é obtida pela seguinte relação:

$$[V_i, L_k] = i\varepsilon_{ijk}V_l, \quad (343)$$

ora, note que é sugestivo abrir a relação de comutação,

$$L_z V_\pm \mp V_\pm L_z = \pm V_\pm, \quad (344)$$

partindo de um auto estado de L_z definido como,

$$L_z|l, \mu\rangle = \mu|l, \mu\rangle, \quad (345)$$

multiplicando $V_\pm$ na expressão acima

$$V_\pm L_z|l, \mu\rangle = \mu V_\pm|l, \mu\rangle, \quad (346)$$

usando a equação (431),

$$V_\pm L_z|l, \mu\rangle = \mu V_\pm|l, \mu\rangle = L_z V_\pm|l, \mu\rangle \mp V_\pm|l, \mu\rangle. \quad (347)$$

Portanto,

$$L_z(V_{\pm}|l, \mu\rangle) = (\mu \pm 1)(V_{\pm}|l, \mu\rangle), \quad (348)$$

isso implica que, $(V_{\pm}|l, \mu\rangle)$ é um autoestado de L_z com autovalor $(\mu \pm 1)$,

$$V_{\pm}|l, \mu\rangle \propto |l, \mu \pm 1\rangle. \quad (349)$$

Pois bem, se os operadores vetoriais $V_{\pm}$ levantam e abaixam o o momento o momento angular de uma unidade, podemos dizer que os operadores a e $a^{\dagger}$ também levantam e abaixam os valores do momento angular da mesma forma respectivamente, pois que, eles são combinações de operadores vetoriais na base esférica. Assim,

$$a|l, \mu\rangle \propto |l, \mu + 1\rangle \quad (350)$$

e

$$a^{\dagger}|l, \mu\rangle \propto |l, \mu - 1\rangle \quad (351)$$

dessa maneira, o mesmo vale para o operador Q e $Q^{\dagger}$, podemos partir do estado fundamental e escrever um estado $|n, \mu\rangle$ qualquer a partir do $a^{\dagger}$.

$$|n, \mu\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!(n + \mu)!}} (Q^{\dagger})^{n+\mu} (a^{\dagger})^n |0, 0\rangle. \quad (352)$$

por uma questão de clareza, a figura 3.1 nos ajuda a perceber como esses operadores atuam nesse auto estado. Quando o operador $a^{\dagger}$ atua no estado fundamental sobe o valor de energia de uma unidade e abaixa o valor de momento angular de uma unidade, assim sucessivamente, entretanto, o $Q^{\dagger}$ atua no estado fundamental sobe o valor de momento angular de uma unidade sem alterar o nível de energia.

Funções de onda do estado fundamental

Nesta seção vamos começar Definindo dois números complexos, que vão servir como nossa base para descrição das funções de onda que queremos determinar, desta feita,

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z^* = x - iy \end{cases} \quad (353)$$

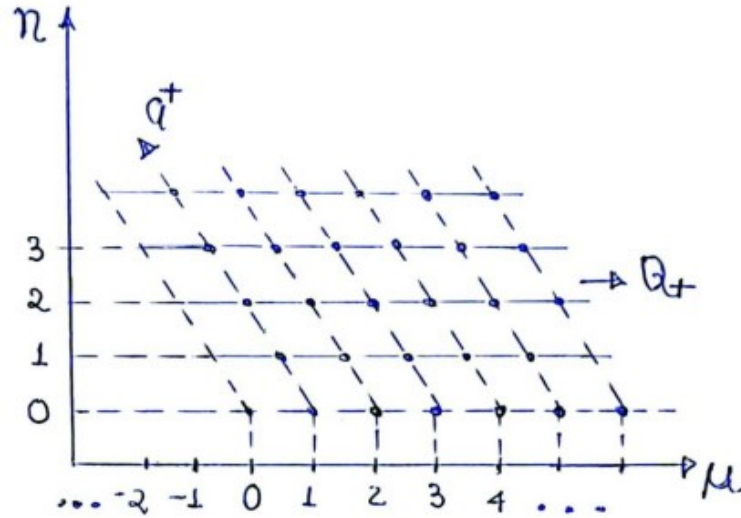
fazendo,

$$\begin{cases} \partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\nabla_x - i\nabla_y) \\ \partial_{z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2}(\nabla_x + i\nabla_y) \end{cases} \quad (354)$$

Bom, fizemos essas considerações porque queremos escrever de uma forma particular o a na base das cordenadas de z e z^* . Vejamos que,

$$a = \sqrt{\frac{m^2}{2\hbar e B}} (v_x - iv_y) = \sqrt{\frac{m^2}{2\hbar e B}} \frac{1}{m} (p_x - eA_x + ip_y - ieA_y), \quad (355)$$

Figura 3.1 – Espectro de energia e momento angular



Fonte: Próprio autor.

logo, pode-se descrever,

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\hbar eB}} \left(\frac{\hbar}{i} (\nabla_x + i\nabla_y) - \frac{eB}{2} (-y + ix) \right), \quad (356)$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2\hbar eB}} \left(\frac{\hbar}{i} 2\partial_{z^*} - \frac{eB}{2} iz \right), \quad (357)$$

rescrevendo,

$$a = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2eB}} \left(2\frac{\partial}{\partial z^*} + \frac{eB}{2\hbar} z \right), \quad (358)$$

analogamente,

$$a = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2eB}} \left(2\frac{\partial}{\partial z} - \frac{eB}{2\hbar} z^* \right), \quad (359)$$

Bom, lembrando que pretende-se construir o estado fundamental, ou seja, a função de onda do estado fundamental.

Já é sabido que,

$$a|0\rangle = 0, \quad (360)$$

Então, precisa-se simplesmente aplicar o a no estado fundamental escrito na base definida z .

$$zz^*|a|0\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2eB}} \left(2\frac{\partial}{\partial z^*} + \frac{eB}{2\hbar} z \right) \psi(z, z^*) = 0, \quad (361)$$

onde $zz^*|0\rangle = \psi(z, z^*)$, Vamos supor como solução,

$$\psi(z, z^*) = f(z) \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right), \quad (362)$$

e verificar se de fato é, então,

$$-i\sqrt{\frac{\hbar}{2eB}} \left(2\frac{\partial}{\partial z^*} \psi(z, z^*) + \frac{eB}{2\hbar} z \psi(z, z^*) \right) = 0, \quad (363)$$

substituindo $\psi(z, z^*)$,

$$-i\sqrt{\frac{\hbar}{2eB}} \left[2\frac{\partial}{\partial z^*} f(z) \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right) + \frac{eB}{2\hbar} z f(z) \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right) \right] = 0, \quad (364)$$

$$-i\sqrt{\frac{\hbar}{2eB}} \left[-2z f(z) \frac{eB}{4\hbar} \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right) + \frac{eB}{2\hbar} z f(z) \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right) \right] = 0, \quad (365)$$

ten-se que,

$$\left[-\frac{eB}{\hbar} z f(z) \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right) + \frac{eB}{2\hbar} z f(z) \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right) \right] = 0, \quad (366)$$

$$\left[-\frac{eB}{\hbar} z f(z) \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right) = \frac{eB}{2\hbar} z f(z) \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right) \right], \quad (367)$$

portanto, $\psi(z, z^*)$ é de fato solução do estado fundamental, com $f(z)$ é uma função arbitrária de z , Então, essa função arbitrária pode ser qualquer função, deste que seja uma função analítica bem comportada, ou seja, que possa ser normalizada, temos, portanto, que o estado fundamental não é único, de modo analítico, podemos escolher qualquer função para $f(z)$ que retorna o mesmo estado fundamental. Podemos então perceber que os níveis de Landau são infinitamente degenerados.

Essa função analítica é conveniente escrevê-la como polinômios de z^μ , em que μ é um parâmetro que indica o grau do polinômio.

Bom, obtivemos infinitas funções que definem o mesmo estado de energia, que é o estado fundamental.

Desta feita, pode-se normalizar esta função.

Escrevendo $\psi(z, z^*)$ como,

$$\psi(z, z^*) = N_\mu z^\mu \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right), \quad (368)$$

tendo então,

$$\int |\psi_\mu|^2 d^2x = N_\mu^2 \int z^\mu \exp\left(\frac{-eB}{4\hbar} z^* z\right) = 1, \quad (369)$$

escolhendo a função $f(z)$,

$$\int |\psi_\mu|^2 d^2x = N_\mu^2 \int 2\pi r dr r^{2\mu} \exp\left(\frac{-eB}{2\hbar} z^* z\right) = 1, \quad (370)$$

logo,

$$N_\mu = \left[\pi \mu! \left(\frac{2\hbar}{eB} \right)^{\mu+1} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (371)$$

com $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$

3.4 GAUGE SIMÉTRICO: MÉTODO ANALÍTICO

Para essa descrição, vamos tomar a mesma analogia seguida por [17], desta feita, como o campo magnético é uniforme, então, pode ser escrito em termo de um potencial vetor magnético do tipo:

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{B}). \quad (372)$$

Partindo da equação de Schrodinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 \psi + ie\hbar(\nabla \cdot \vec{A} \psi) + ie\hbar \vec{A} \cdot \nabla \psi + e^2 \vec{A}^2 \psi \right], \quad (373)$$

o laplaciano deste produto, será,

$$\nabla \cdot \vec{A} \psi = \psi(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla \psi, \quad (374)$$

substituindo,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 \psi + ie\hbar \psi(\nabla \cdot \vec{A}) + ie\hbar \vec{A} \cdot \nabla \psi + ie\hbar \vec{A} \cdot \nabla \psi + e^2 \vec{A}^2 \psi \right], \quad (375)$$

Aplicando o calibre de colombo, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, obtemos,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 + 2ie\hbar \vec{A} \cdot \nabla + e^2 \vec{A}^2 \right] \psi. \quad (376)$$

Vamos escolher o calibre simétrico de Landau.

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}(By, -Bx, 0), \quad (377)$$

substituindo na equação de Schrodinger,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + ieB\hbar \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{e^2 B^2}{4} (x^2 + y^2) \right] \psi, \quad (378)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2m} \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{eB}{2m} L_z + \frac{1}{2m} \frac{e^2 B^2}{4} (x^2 + y^2), \quad (379)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{1}{2m} \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi - \frac{\omega}{2} L_z \psi + \frac{m}{2} \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 (x^2 + y^2) \psi, \quad (380)$$

onde a hamiltoniana é rescrita como,

$$H = -\frac{1}{2m} \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{\omega}{2} L_z + \frac{m}{2} \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 (x^2 + y^2), \quad (381)$$

Escrevendo em coordenadas polares o hamiltoniano, por meio das seguintes transformações:

$$x^2 + y^2 = (r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2 = r^2, \quad (382)$$

e

$$L_z = \vec{r} \times \vec{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (383)$$

o operador laplaciano em coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (384)$$

temos,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \frac{\omega}{2} L_z + \frac{m}{2} \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 r^2. \quad (385)$$

Podemos escrever da seguinte forma

$$E\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2mr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2mr^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\omega}{2} L_z + \frac{m}{2} \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 r^2 \right] \psi \quad (386)$$

Bom, o hamiltoniano obedece a seguinte relação de comutação: $[H, L_z] = 0$ e $[H, P_z] = 0$, essa relação indica a existência de uma base de autoestados comuns para os operadores H, L_z e P_z . Neste caso, se n e μ são autovalores (números inteiros) de H tal que temos as condições: $L_z\psi(r, \phi, z) = \hbar\mu\psi(r, \phi, z)$ e $P_z\psi(r, \phi, z) = n\psi(r, \phi, z)$, podemos escolher

$$\psi = A \exp \left[i \left(\mu\phi + \frac{n}{\hbar} z \right) \right] \tau(r), \quad (387)$$

onde A é uma constante. Esta equação representa uma função exponencial complexa das coordenada ϕ e z , como a exponencial complexa é cíclica. substituindo essa equação em (386)

$$E\tau(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} \tau(r) + \frac{1}{4} \frac{d}{dr} \tau(r) - \frac{\mu^2}{r^2} \tau(r) - n^2 \tau(r) \right] - \frac{\hbar\omega}{2} \mu \tau(r) + \frac{m}{8} \omega^2 r^2 \tau(r) \quad (388)$$

ou

$$\left[E + \frac{\hbar\omega}{2} \mu - \frac{\hbar^2 n^2}{2m} - \frac{m}{8} \omega^2 r^2 \right] + \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} \tau(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \tau(r) - \frac{\mu^2}{r^2} \tau(r) \right] = 0 \quad (389)$$

ou, ainda,

$$\left[\frac{2mE'}{\hbar^2} - \frac{r^2}{4l_B^2} \right] \tau(r) + \left[\frac{d^2}{dr^2} \tau(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \tau(r) - \frac{\mu^2}{r^2} \tau(r) \right] = 0, \quad (390)$$

onde já vimos anteriormente que: $l_B^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ é uma constante física que representa o menor raio de órbita do elétron no intervalo permitido pelo princípio da incerteza) e a energia característica,

$$E' = E + \frac{\hbar\omega}{2} \mu - \frac{\hbar^2 n^2}{2m}, \quad (391)$$

O próximo passo da solução consiste em fazer uma nova substituição de variável $\xi \equiv \frac{r^2}{2l_B^2}$. Nesse caso, temos as seguintes relações de transformação:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \tau(r) = \frac{1}{r} \frac{d\xi}{dr} \frac{d}{d\xi} \tau(\xi) = \frac{1}{l_B^2} \frac{d}{d\xi} \tau(\xi), \quad (392)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \tau(r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{l_B^2} \frac{d}{d\xi} \tau(\xi) \right), \quad (393)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\tau(r) = \frac{r}{l_B^2} \frac{d}{d\xi}\tau(\xi) + \frac{2\xi}{l_B^2} \frac{d^2}{d\xi^2}\tau(\xi), \quad (394)$$

Aplicando na equação (390) as transformações expressas acima, e após algumas manipulações algébricas, temos,

$$\left[\frac{2mE'}{\hbar^2} - \frac{\xi}{2l_B^2} \right] \tau(\xi) + \left[\frac{2\xi}{l_B^2} \frac{d^2}{d\xi^2}\tau(\xi) + \frac{2}{l_B^2} \frac{d}{d\xi}\tau(\xi) - \frac{\mu^2}{2l_B^2} \frac{1}{\xi} \tau(\xi) \right] = 0, \quad (395)$$

ou multiplicando a equação por $\frac{l_B^2}{2}$,

$$\left[\frac{ml_B^2}{\hbar^2} E' - \frac{\xi}{4} \right] \tau(\xi) + \left[\xi \frac{d^2}{d\xi^2}\tau(\xi) + \frac{d}{d\xi}\tau(\xi) - \frac{\mu^2}{4} \frac{1}{\xi} \tau(\xi) \right] = 0, \quad (396)$$

para uma simplificação estratégica da equação, defini-se:

$$\lambda \equiv \frac{ml_B^2}{\hbar^2} E', \quad (397)$$

e supõe-se que $\tau(\xi)$ pode ser escrito como,

$$\tau(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \xi^{\frac{|\mu|}{2}} M(\xi), \quad (398)$$

por conseguinte, com um pouco de álgebra, a equação assume a forma

$$\xi \frac{d^2}{d\xi^2} M(\xi) + (1 + |\mu| - \xi) \frac{d}{d\xi} M(\xi) + \left(\lambda - \frac{|\mu| + 1}{2} \right) M(\xi) = 0, \quad (399)$$

ou

$$\xi \frac{d^2}{d\xi^2} M(\xi) + (b - \xi) \frac{d}{d\xi} M(\xi) - a M(\xi) = 0, \quad (400)$$

onde

$$a = -\lambda + \frac{|\mu| + 1}{2} \quad (401)$$

e

$$b = 1 + |\mu| \quad (402)$$

A equação é classificada como equação hipergeométrica de primeira espécie, e tem como solução a função hipergeométrica confluyente (também chamada função de Kummer),

$$F(a, b, \xi) = M(a, b, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{\xi^n}{n!}, \quad (403)$$

onde $(a)_n$ e $(b)_n$ é uma notação conhecida símbolo de Pochhammer, que representa fatorial ascendente sobre a e b .

Uma consideração de interesse físico precisa ser feita sobre a série de potências expressa pela equação (403). O coeficiente a pode ser um número qualquer, entretanto, o coeficiente b é restritamente um número positivo, sendo $b > 0$, a função hipergeométrica pode ser convergente com $a < 0$ e divergente se $a > 0$. O caso com divergência não é

interessante do ponto de vista da física, neste caso, devemos considerar apenas as soluções com $a < 0$, assim, seja j um número positivo, temos que,

$$a = -\lambda + \frac{|\mu| + 1}{2} = -j. \quad (404)$$

Além disso, vamos considerar uma outra restrição, ou seja, j deve ser um número inteiro, logo, a constante λ que satisfaz essa condição, pela combinação das equações (397) e (391) com (404), é aquela cuja a energia deve ser dada por:

$$E = \hbar\omega \left[j + \frac{|k| - k}{2} + \frac{1}{2} \right] - \frac{\hbar^2 n^2}{2m}. \quad (405)$$

De maneira que, constatamos a definição de um novo autovalor

$$n' \equiv j + \frac{|k| - k}{2} \quad (406)$$

de forma que recuperamos a fórmula de Landau, com os mesmos autovalores da energia do caso da análise algébrica, como era de se esperar.

$$E = \hbar\omega \left(n' + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 n^2}{2m} \quad (407)$$

Combinando a equação (403) com a equação (398), em termos da variável original r , temos

$$\tau(r) = A_{kj} \exp \left(-\frac{r^2}{4l_B^2} \right) \left(\frac{r^2}{2l_B^2} \right)^{\frac{|k|}{2}} M(a, b, r), \quad (408)$$

a constante A_{kj} que normaliza corretamente a função de onda, em concordância com a propriedade de ortogonalidade da função hipergeométrica, é dada por

$$A_{kj} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{j}{2^{|k|} l_B^2 (j + |k|)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (409)$$

Portanto, a solução expressa na equação (387), combinada com a equação (408) e a constante determinada na equação (409), obtemos,

$$\psi(r, \phi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{j}{2^{|k|} l_B^2 (j + |k|)!} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[i \left(\mu\phi + \frac{n}{\hbar} z \right) \right] \exp \left(-\frac{r^2}{4l_B^2} \right) \left(\frac{r^2}{2l_B^2} \right)^{\frac{|k|}{2}} M(a, b, r) \quad (410)$$

De fato, as quantidades de interesse para este caso, são as quantidades físicas mensuráveis do problema, apesar da função de onda aqui ser escrita em termos de uma série de potências os autovalores de energia do elétron são os mesmos para qualquer configuração ou gauge escolhido.

4 CONCLUSÃO

Por conseguinte, após análise minuciosa desenvolvida ao longo do presente trabalho, percebemos como diferentes potenciais vetores podem nos levar ao mesmo campo magnético, onde compreendemos que a escolha do gauge não altera a física do problema. Vimos como os campos impactam o movimento do elétron, e que dependendo da configuração de cada sistema, podemos obter movimentos circulares, cicloidais e helicoidais.

Vimos que o análogo clássico da equação do movimento quântico difere a menos de um termo da equação clássica associada ao elétron em um campo magnético, mostramos que os valores esperados diferem da clássica a menos de um termo γ , entretanto, se o campo magnético for uniforme o teorema de Ehrenfest é satisfeito.

Obtemos os níveis de Landau, onde verificamos que as energias são quantizadas e bem definidas e apresentam o mesmo espectro energético de um oscilador harmônico, vimos que os operadores de levantamento e abaixamento de energia e de momento angular, são cruciais para descrição completa dos estados nesse gauge, que difere do oscilador harmônico quântico neste aspecto, pois esses estados apresentam uma degenerescência infinita relacionada ao centro da órbita, e que existem infinitas funções de onda do estado fundamental, por conta da função arbitrária $f(z)$ que compõe a função de onda nesse estado. Analiticamente, e por fim, percebemos que a função de onda é escrita em termos de uma série de potências.

Acreditamos que essas discussões podem contribuir para a ampliação do conhecimento, não apenas aprofundar nossa compreensão das interações do elétron com campos elétricos e magnéticos, mas também destacar a relevância desses estudos. Através de um tratamento que passa entre a física clássica e a quântica, e entendermos que as pesquisas nessa área ajuda não apenas decifrar os mecanismos encobertos, mas também estabelecer pontes que levem a aplicações inovadoras em diversas áreas do conhecimento buscando por uma compreensão mais profunda do comportamento do elétron e avançar nos horizontes científicos, buscando o desenvolvimento tecnológico e científico de maneiras ainda imprevisíveis.

REFERÊNCIAS

- [1] JOFFILY, S. **A descoberta do elétron**. Instituto de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica (ICRA-BR), Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro, 2005.
- [2] VOGEL, Michael et al. **Penning-trap experiments for spectroscopy of highly-charged ions at HITRAP**. *Physica Scripta*, v. 2015, n. T166, p. 014066, 2015.
- [3] HELANDER, Per. **Theory of plasma confinement in non-axisymmetric magnetic fields**. *Reports on Progress in Physics*, v. 77, n. 8, p. 087001, 2014.
- [4] GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica**. Tradução: Heloisa Coimbra. [S.l.]: São Paulo: Editora Pearson, ed, 2011.
- [5] MUNDIM, K. C. **Potencial e Energia elétrica**. Biblioteca Nacional da cultura, n 1669.766, 1997.
- [6] FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de Física**. [S.l.] Bookman, vol. II, 2009.
- [7] Ensino a distância. **Linhas de campo magnético em um ímã**. Disponível em: <<https://www.preparaenem.com/fisica/campo-magnetico.htm>>. Acesso em: 22 de set. de 2023.
- [8] LEMOS, N. A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.
- [9] Brasil Escola. **Representação da regra da mão direita**. Disponível em: <<https://www.brasilecola.uol.com.br/fisica/forca-magnetica.htm>>. Acesso em: 24 de set. de 2023.
- [10] THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.
- [11] LIMA, W. P.; OLIVEIRA, P. H. F. d.; BRAGA, J. P. M.; RAMOS, I. R. O. **Determinação das forças de vínculo em sistemas clássicos holônomos: análise crítica de três métodos**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 41, 2018.
- [12] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. **Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide**. [S.l.]: Academic press, 2011.
- [13] TAYLOR, J. R. **Mecânica clássica**. [S.l.]: Bookman Editora, 2013.
- [14] SILVA, C. T. **Trajetórias de partículas carregadas em um referencial não-inercial na presença de defeitos topológicos e submetidas a campo magnético**. sertão Pernambuco, 2023.
- [15] COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics**. A Wiley - Interscience publication, v. 1 , 1977.
- [16] GOTTFRIED, K. **Quantum mechanics: fundamentals**. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- [17] PASTANA, D. W. d. M.; RODRIGUES, M. E. **Interação de uma partícula quântica eletricamente carregada com um campo magnético clássico**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 45, 2023.
- [18] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Quantum Mechanics** Butterworth. 1977.

- [19] D. Tong, **Quantum Hall effect in supersymmetric Chern-Simons theories**, Physical Review B. v. 95, 2015.
- [20] VON KLITZING, Klaus et al. **40 years of the quantum Hall effect**. Nature Reviews Physics, v. 2, n. 8, p. 397-401, 2020.
- [21] PEREIRA, L.F.C. **Quantização de Landau, magnetização e correntes persistentes em um anel bidimensional no espaço curvo**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Maranhão, São Luís (2016).
- [22] SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. **Modern quantum mechanics**, revised edition. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995.
- [23] SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. **Mecânica quântica moderna**. [S.l.]: bookman, 2013.

4.1 APÊNDICE

4.1.1 INVARIÂNCIA DE CALIBRE

Fazendo uma discussão mais sobre o estado do sistema, e não mais sobre os observáveis, vamos usar a representação de Schrodinger de [22].

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (411)$$

Esta equação descreve o comportamento dos estados quânticos. Usando a expressão para o operador $\hat{H}$, temos,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}(r) \right)^2 + e\varphi(r) \right] |\psi(t)\rangle, \quad (412)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}(r) \right) \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}(r) \right) + e\varphi(r) \right] |\psi(t)\rangle, \quad (413)$$

multiplicando por um bra $\langle r|$ e expandindo $|\psi(t)\rangle$ em termos de autovetores de posição $|r\rangle$,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle r|\psi(t)\rangle = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}(r) \right) \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}(r) \right) \right] \langle r|\psi(t)\rangle + e\varphi(r) \langle r|\psi(t)\rangle, \quad (414)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}(r) \right) \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A}(r) \right) \right] \psi(r, t) + e\varphi(r) \psi(r, t), \quad (415)$$

podemos simplificar ainda,

$$\left[\left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - e\vec{A} \right) \right] = -\hbar^2 \nabla^2 - \frac{e\hbar}{i} \nabla \cdot \vec{A} - \frac{e\hbar}{i} \vec{A} \cdot \nabla + e^2 \vec{A}^2, \quad (416)$$

escrevemos, finalmente,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 \psi - \frac{e\hbar}{i} \nabla \cdot \vec{A} \psi - \frac{e\hbar}{i} \vec{A} \cdot \nabla \psi + e^2 \vec{A}^2 \psi \right] + e\varphi \psi. \quad (417)$$

Bom, retomando as equações discutidas na introdução deste trabalho, sobre campos elétrico e magnéticos dadas pelas equações (6) e (20), vamos verificar se ,

$$\psi' = e^{iq\Lambda/\hbar} \psi, \quad (418)$$

satisfaz a equação (412) com,

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (419)$$

e

$$A' = A + \nabla \Lambda, \quad (420)$$

onde $\Lambda(x, y, z, t)$,

Bom,

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - eA')^2 + e\varphi' \right] \psi', \quad (421)$$

substituindo ψ' , A' e φ' , obten-se ,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi) = \frac{1}{2m} [-i\hbar \nabla - q(A + \nabla \Lambda)]^2 (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi) + q \left(\varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi), \quad (422)$$

$$-q \frac{\partial \Lambda}{\partial t} e^{iq\Lambda/\hbar} \psi + i\hbar e^{iq\Lambda/\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} [-i\hbar \nabla - q(A + \nabla \Lambda)]^2 (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi) + q\varphi e^{iq\Lambda/\hbar} \psi - q \frac{\partial \Lambda}{\partial t} e^{iq\Lambda/\hbar} \psi, \quad (423)$$

o primeiro do lado esquerdo da equação cancela com o último termo do lado direito da equação ,

$$i\hbar e^{iq\Lambda/\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} [-i\hbar \nabla - q(A + \nabla \Lambda)]^2 (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi) + q\varphi e^{iq\Lambda/\hbar} \psi, \quad (424)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{e^{-iq\Lambda/\hbar}}{2m} [-i\hbar \nabla - q(A + \nabla \Lambda)] [-i\hbar \nabla - q(A + \nabla \Lambda)] (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi) + q\varphi \psi, \quad (425)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{e^{-iq\Lambda/\hbar}}{2m} [-i\hbar \nabla - q(A + \nabla \Lambda)] [-i\hbar \nabla - q(A + \nabla \Lambda)] (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi) + q\varphi \psi, \quad (426)$$

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - eA)^2 \psi + e\varphi \psi = \frac{e^{-iq\Lambda/\hbar}}{2m} [-i\hbar \nabla - q(A + \nabla \Lambda)] [-i\hbar \nabla - q(A + \nabla \Lambda)] (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi) + q\varphi \psi, \quad (427)$$

$$\frac{1}{2m} (i\hbar \nabla + qA)^2 \psi = \frac{e^{-iq\Lambda/\hbar}}{2m} [i\hbar \nabla + q(A + \nabla \Lambda)] [i\hbar \nabla + q(A + \nabla \Lambda)] (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi), \quad (428)$$

$$e^{-iq\Lambda/\hbar} (i\hbar \nabla + qA)^2 \psi = [i\hbar \nabla + q(A + \nabla \Lambda)] [i\hbar \nabla + q(A + \nabla \Lambda)] (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi), \quad (429)$$

$$= [i\hbar \nabla + q(A + \nabla \Lambda)] \left[i\hbar (\psi \nabla e^{iq\Lambda/\hbar} + e^{iq\Lambda/\hbar} \nabla \psi) + q(A + \nabla \Lambda) (e^{iq\Lambda/\hbar} \psi) \right], \quad (430)$$

continuando a simplificação, usando a seguinte regra do produto,

$$\nabla \cdot (fC) = f(\nabla \cdot C) + C \cdot \nabla f, \quad (431)$$

$$= [i\hbar \nabla + q(A + \nabla \Lambda)] \cdot \left(i\hbar \psi \nabla e^{iq\Lambda/\hbar} + i\hbar e^{iq\Lambda/\hbar} \nabla \psi + qA e^{iq\Lambda/\hbar} \psi + q e^{iq\Lambda/\hbar} \psi \nabla \Lambda \right), \quad (432)$$

$$= [i\hbar \nabla + q(A + \nabla \Lambda)] \cdot \left[i\hbar \psi \left(\frac{iq}{\hbar} e^{iq\Lambda/\hbar} \nabla \Lambda \right) + i\hbar e^{iq\Lambda/\hbar} \nabla \psi + qA e^{iq\Lambda/\hbar} \psi + q e^{iq\Lambda/\hbar} \psi \nabla \Lambda \right], \quad (433)$$

$$= [i\hbar \nabla + q(A + \nabla \Lambda)] \cdot \left(-q\psi e^{iq\Lambda/\hbar} \nabla \Lambda + i\hbar e^{iq\Lambda/\hbar} \nabla \psi + qA e^{iq\Lambda/\hbar} \psi + q e^{iq\Lambda/\hbar} \psi \nabla \Lambda \right), \quad (434)$$

simplificando ,

$$= [i\hbar \nabla + q(A + \nabla \Lambda)] \cdot \left(i\hbar e^{iq\Lambda/\hbar} \nabla \psi + qA e^{iq\Lambda/\hbar} \psi \right), \quad (435)$$

$$= [i\hbar \nabla + q(A + \nabla \Lambda)] \cdot e^{iq\Lambda/\hbar} (i\hbar \nabla \psi + qA \psi), \quad (436)$$

$$= i\hbar \nabla \cdot \left[e^{iq\Lambda/\hbar} (i\hbar \nabla \psi + qA \psi) \right] + qA e^{iq\Lambda/\hbar} (i\hbar \nabla \psi + qA \psi) + q \nabla \Lambda \cdot \left[e^{iq\Lambda/\hbar} (i\hbar \nabla \psi + qA \psi) \right], \quad (437)$$

$$= i\hbar \left[e^{iq\Lambda/\hbar} [\nabla \cdot (i\hbar \nabla \psi + qA\psi)] + (i\hbar \nabla \psi + qA\psi) \cdot \nabla e^{iq\Lambda/\hbar} \right] + i q \hbar e^{iq\Lambda/\hbar} (A \cdot \nabla \psi) + q^2 e^{iq\Lambda/\hbar} (A \cdot A) \psi + i q \hbar e^{iq\Lambda/\hbar} (\nabla \Lambda \cdot \nabla \psi) + q^2 e^{iq\Lambda/\hbar} (\nabla \Lambda \cdot A) \psi, \quad (438)$$

$$= e^{iq\Lambda/\hbar} \left[-\hbar^2 \nabla^2 \psi + i q \hbar \nabla \cdot (A\psi) \right] + (i\hbar \nabla \psi + qA\psi) \cdot (-q e^{iq\Lambda/\hbar} \nabla \Lambda) + i q \hbar e^{iq\Lambda/\hbar} (A \cdot \nabla \psi) + q^2 e^{iq\Lambda/\hbar} (A^2) \psi + i q \hbar e^{iq\Lambda/\hbar} (\nabla \Lambda \cdot \nabla \psi) + q^2 e^{iq\Lambda/\hbar} (\nabla \Lambda \cdot A) \psi, \quad (439)$$

$$= e^{iq\Lambda/\hbar} \left[-\hbar^2 \nabla^2 \psi + i q \hbar \nabla \cdot (A\psi) \right] - i q \hbar e^{iq\Lambda/\hbar} (\nabla \psi \cdot \nabla \Lambda) - q^2 e^{iq\Lambda/\hbar} (A \cdot \nabla \Lambda) \psi + i q \hbar e^{iq\Lambda/\hbar} (A \cdot \nabla \psi) + q^2 e^{iq\Lambda/\hbar} A^2 \psi + i q \hbar e^{iq\Lambda/\hbar} (\nabla \psi \cdot \nabla \Lambda) + q^2 e^{iq\Lambda/\hbar} (A \cdot \nabla \Lambda) \psi, \quad (440)$$

reduzindo a nossa equação por meio dos termos semelhantes, ficamos com ,

$$e^{-iq\Lambda/\hbar} (i\hbar \nabla + qA)^2 \psi = e^{iq\Lambda/\hbar} \left[-\hbar^2 \nabla^2 \psi + i q \hbar \nabla \cdot (A\psi) \right] + i q \hbar e^{iq\Lambda/\hbar} (A \cdot \nabla \psi) + q^2 e^{iq\Lambda/\hbar} A^2 \psi, \quad (441)$$

dividindo ambos os lados por $e^{iq\Lambda/\hbar}$

$$(i\hbar \nabla + qA)^2 \psi = \left[-\hbar^2 \nabla^2 \psi + i q \hbar \nabla \cdot (A\psi) \right] + i q \hbar (A \cdot \nabla \psi) + q^2 A^2 \psi, \quad (442)$$

$$(i\hbar \nabla + qA)^2 \psi = \left[-\hbar^2 \nabla^2 + i q \hbar \nabla \cdot A + i q \hbar A \cdot \nabla + q^2 A^2 \right] \psi, \quad (443)$$

obtemos finalmente a igualdade,

$$(i\hbar \nabla + qA)^2 = -\hbar^2 \nabla^2 + i q \hbar \nabla \cdot A + i q \hbar A \cdot \nabla + q^2 A^2, \quad (444)$$

$$(i\hbar \nabla + qA)^2 \psi = (i\hbar \nabla + qA)^2 \psi. \quad (445)$$

Desta maneira, $\psi' = e^{iq\Lambda/\hbar} \psi$ satisfaz a equação de Schrodinger para os campos, com os potenciais $\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ e $A' = A + \nabla \Lambda$, onde $\Lambda = \Lambda(x, y, z, t)$.

4.1.2 PRECESSÃO DE SPIN

Nesta seção pretende-se abordar uma aplicação importante sobre a dinâmica quântica que é a precessão de spin. O spin realiza o movimento de precessão quando é colocado em uma região onde existe o campo magnético; a interação de spin com o campo magnético uniforme, resulta em um movimento de precessão em torno do eixo da aplicação desse campo.

Supondo que uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ colocado em uma região onde existe campo magnético uniforme $\vec{B}$, ten-se o seguinte hamiltoniano:

$$H = - \left(\frac{e}{m_e c} \right) \vec{S} \cdot \vec{B}, \quad (446)$$

com $e < 0$ para elétron. Considerando $\vec{B}$ como sendo um campo na direção z , temos,

$$H = - \left(\frac{e}{m_e c} \right) \hat{S}_z. \quad (447)$$

Perceba que o campo é constante ao longo de todo movimento e que S_z e H diferem apenas por uma constante multiplicativo, então eles comutam. Logo, os autoestados de $|+\rangle$ e $|-\rangle$ que são autoestados do operador S_z também são autoestados do operador H (conhecidos como autoestados simultâneos), esses mesmos autoestados são também chamados de autoestados de energia. Atuando o operador H nos autoestados $|+\rangle$ e $|-\rangle$, temos

$$H|+\rangle = - \left(\frac{e}{m_e c} \right) B S_z |+\rangle = - \left(\frac{e}{m_e c} \right) B \frac{\hbar}{2} |+\rangle, \quad (448)$$

$$H|-\rangle = - \left(\frac{e}{m_e c} \right) B S_z |-\rangle = + \left(\frac{e}{m_e c} \right) B \frac{\hbar}{2} |-\rangle, \quad (449)$$

Portanto,

$$E_{\pm} = \mp \frac{e \hbar B}{2 m_e c}, \quad (450)$$

para $S_z \pm$. Definindo ω como,

$$\omega \equiv \frac{|e| B \hbar}{m_e c} \quad (451)$$

A equação (450) passa a ser escrito da seguinte forma:

$$H = \omega S_z, \quad (452)$$

Pois, pode-se agora escrever o operador evolução temporal, uma vez que estamos interessados em saber a dinâmica desse sistema. Toda a informação acerca da evolução temporal está contida no operador evolução temporal [23].

$$U(t, 0) = \exp \left(\frac{i H t}{\hbar} \right) = \exp \left(\frac{-i \omega S_z t}{\hbar} \right). \quad (453)$$

Expandindo este operador no estado inicial e usando os kets $|+\rangle$ e $|-\rangle$ como ket da base, um vez que são autovetores de S_z e de energia. Considerando que em tempo $t = 0$ o sistema seja caracterizado por,

$$|\alpha\rangle = c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle, \quad (454)$$

Aplicando a equação (453), podemos escrever o ket de estado em tempo posterior, assim,

$$|\alpha, t_0\rangle = 0; t = c_+ \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right) |+\rangle + c_- \exp\left(\frac{+i\omega t}{2}\right) |-\rangle, \quad (455)$$

Essa é a expressão de operador evolução temporal neste caso. Com ele é possível descobrir como será a evolução temporal de qualquer estado físico de spin nessa região do campo.

Examinando a situação em que o estado inicial $|\alpha\rangle$ representa o estado de spin $|+\rangle$, assim $|\alpha\rangle(0) = |+\rangle$ logo,

$$|\alpha(t)\rangle = U(t)\alpha\rangle(0) \quad (456)$$

$$= U(t)|+\rangle, \quad (457)$$

então,

$$|\alpha(t)\rangle = c_+ \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right) |+\rangle, \quad (458)$$

Significa que mesmo em um tempo posterior o estado de spin permanecerá ainda para cima.

Agora supondo que o estado inicialmente se encontra em S_x+ , ou seja, $|\alpha(0)\rangle = |S_x; +\rangle$, onde

$$|S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle. \quad (459)$$

Nesse caso,

$$|\alpha(t)\rangle = U(t)|\alpha(0)\rangle \quad (460)$$

$$= U(0)|S_x; +\rangle \quad (461)$$

$$= \left[c_+ \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right) |+\rangle + c_- \exp\left(\frac{+i\omega t}{2}\right) |-\rangle \right] |S_x; +\rangle \quad (462)$$

Fazendo algumas manipulações, chegamos a,

$$|\alpha(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_+ \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right) |+\rangle + c_- \exp\left(\frac{+i\omega t}{2}\right) |-\rangle \right]. \quad (463)$$

Com isso, vamos agora calcular as probabilidades de encontrar o sistema nos estados $S_x \pm$ para um certo tempo posterior:

$$\begin{aligned}
\text{Prob.}|S_x \pm\rangle &= |\langle S_x \pm | \alpha, t \rangle|^2 \\
&= \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \right) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right) |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{+i\omega t}{2}\right) |-\rangle \right\} \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left| \exp\left(\frac{-i\omega t}{2}\right) \pm \exp\left(\frac{+i\omega t}{2}\right) \right|^2.
\end{aligned} \tag{464}$$

Lembrando da relação de Euler que diz:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{465}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{466}$$

consegue-se para S_x+ ,

$$\text{Prob.}S_x+ = \cos^2 \frac{\omega t}{2} \tag{467}$$

e para S_x- ,

$$\text{Prob.}S_x- = \sin^2 \frac{\omega t}{2} \tag{468}$$

Contudo o spin se encontra inicialmente na direção x positivo, como o campo magnético esta na direção z isso o faz girar, como consequência desse giro, obtemos uma probabilidade finita de achar S_z- para um t futuro. A soma das probabilidades é 1 para qualquer t, como podemos verificar, o que condiz com a unitariedade do operador evolução temporal [23].

Agora estamos interessados em determinar os valores esperados de S_x, S_y e S_z . Assim, começando com S_x ,

$$\langle S_x \rangle = \langle \alpha, t | S_x | \alpha, t \rangle, \tag{469}$$

onde $S_x = \frac{\hbar}{2} (\langle + | - \rangle + \langle - | + \rangle)$, então,

$$\langle S_x \rangle = \langle \alpha, t | \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|) | \alpha, t \rangle, \tag{470}$$

Desenvolvendo a equação (470), obtemos que,

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos(\omega t) \tag{471}$$

A equação (526) nos diz que toda vez que formos medir o valor esperado de S_x no tempo vamos encontrar valores diferentes.

Agora para calcular o S_y usando o mesmo procedimento, onde:

$$S_y = \frac{\hbar}{2} (-i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+|) \quad (472)$$

obtem-se que,

$$\langle S_y \rangle = \langle \alpha, t | S_y | \alpha \rangle \quad (473)$$

$$\langle S_y \rangle = \langle \alpha, t | \frac{\hbar}{2} (-i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+|) | \alpha, t \rangle, \quad (474)$$

desenvolvendo a equação (474) chegamos a,

$$\langle S_y \rangle = \left(\frac{\hbar}{2} \right) \text{sen}(\omega t), \quad (475)$$

A interpretação feita na equação (471) vale para a equação (475). Pois, o S_x e S_y não comutam com o hamiltoniano do sistema, isso acontece porque o hamiltoniano do sistema depende do eixo z. E por definição o S_x , S_y e S_z não comutam. Agora vamos determinar o S_z , sendo que,

$$S_z = \frac{\hbar}{2} (\langle +|+\rangle - \langle -|-\rangle), \quad (476)$$

$$\begin{aligned} \langle S_z \rangle &= \langle \alpha, t | S_z | \alpha, t \rangle \\ &= \langle \alpha, t | \frac{\hbar}{2} (|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|) | \alpha, t \rangle \end{aligned} \quad (477)$$

logo,

$$\langle S_z \rangle = 0, \quad (478)$$

O resultado anterior quer dizer que o hamiltoniano H comuta com S_z .