



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA  
AFRO-BRASILEIRA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
LICENCIATURA EM CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA**

**ANTONIO RAFAEL MOREIRA CAMILO**

**TÓPICOS DE RELATIVIDADE RESTRITA**

**ACARAPE - CE**

**2016**

ANTONIO RAFAEL MOREIRA CAMILO

TÓPICOS DE RELATIVIDADE RESTRITA

Trabalho de Conclusão de Curso de apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Ciências da Natureza e Matemática, da Universidade da Integração Intenacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Ciências da Natureza e Matemática - Habilitação em Física.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Sílvia Helena Roberto de Sena.

**Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro- Brasileira  
Direção de Sistema Integrado de Bibliotecas da UNILAB (DSIBIUNI)  
Biblioteca Setorial Campus Liberdade  
Catalogação na fonte**

**Bibliotecário: Gleydson Rodrigues Santos – CRB-3 / 1219**

- 
- C19t Camilo, Antonio Rafael Moreira.  
Tópicos de relatividade restritiva. Antonio Rafael Moreira Camilo. – Acarape, 2016.  
44 f.; 30 cm.
- Monografia apresentada do Curso de Ciências da Natureza e Matemática, do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza (ICEN) da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira – UNILAB.
- Orientadora: Profa. Dra. Sílvia Helena Roberto de Sena.
- Inclui quadros e referências.
1. Relatividade (Física). 2. Relatividade especial. 3. Teoria da relatividade restrita. I. Título.  
CDD 530.11
-

ANTONIO RAFAEL MOREIRA CAMILO

TÓPICOS DE RELATIVIDADE RESTRITA

Trabalho de Conclusão de Curso de apresentada à Coordenação do Curso de Licenciatura em Ciências da Natureza e Matemática, da Universidade da Integração Intenacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Ciências da Natureza e Matemática - Habilitação em Física.

Aprovada em 09/12/2016.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Sílvia Helena Roberto de Sena  
(Orientadora)  
Universidade da Integração Internacional da  
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cíntia Marques Magalhães Paschoal  
Universidade da Integração Internacional da  
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

---

Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga  
Universidade da Integração Internacional da  
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dados de Catalogação na Publicação  
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - Biblioteca da UNILAB

*Dedico este trabalho à  
minha querida irmã  
Raquel Moreira  
Camilo 19/06/1989-  
17/04/2012.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço,

À Deus!

À minha Família, Amigos e Colegas!

À minha namorada, Aline Andrade, pelo amor, paciência, incentivo e apoio incondicional!

À minha orientadora, Sílvia Sena, pelo empenho, dedicação, orientação, incentivo e disposição!

Aos professores participantes da banca examinadora!

À todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu obrigado!

## RESUMO

Este estudo consiste em fazer uma análise da Teoria da Relatividade Restrita ou Especial de Albert Einstein, considerando os seus dois postulados que fundamentam novas condições à Mecânica Clássica. Mostraremos que a partir desses postulados pode-se chegar as Transformações de Lorentz, as quais, por sua vez, levam aos efeitos cinemáticos de dilatação do tempo e contração do espaço. Além disso, veremos que para manter os princípios fundamentais da conservação do momento linear e da conservação da energia total precisaremos redefinir essas grandezas, chegando novas formas funcionais para energia e momento que estão de acordo com antiga teoria clássica para o limite de baixas velocidades.

**Palavras-chave:** Relatividade Especial. Transformações de Lorentz. Momento Relativístico. Energia Relativista.

## ABSTRACT

This study consists of making an analysis of Albert Einstein's Theory of Relativity, Considering its two postulates that ground new conditions on Mechanics Classical. We will show that from these postulates we can arrive at the Transformations of Lorentz, which, in turn, lead to the kinematic effects of time dilation and contraction of space. Further, we will see that in order to maintain the fundamental principles of conservation of linear momentum and conservation of total energy we will need to redefine these quantities, arriving at new functional forms for energy and momentum which are in accordance with ancient classical theory for the low speed limit.

**Keywords:** Special Relativity. Transformations of Lorentz. Relativistic Moment. Relativistic Energy.

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Componentes das velocidades em $S'$ antes e depois da colisão. . . . .	33
Tabela 2 – Componentes das velocidades em $S$ antes e depois da colisão. . . . .	34

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Referencial $S$ . . . . .	13
Figura 2 – Referenciais $S$ e $S'$ . . . . .	13
Figura 3 – Leito da Estrada e o Trem. . . . .	17
Figura 4 – Referenciais $S$ e $S'$ . . . . .	18
Figura 5 – Caso geral para o referencial $S'$ em movimento inercial em relação ao referencial $S$ . . . . .	21
Figura 6 – Espelho $E_2$ . . . . .	26
Figura 7 – Caminho percorrido pela Luz até o espelho $E_2$ visto do referencial $S$ . . . . .	26
Figura 8 – Espelho $E_1$ . . . . .	27
Figura 9 – Caminho percorrido pela Luz até o espelho $E_1$ visto do referencial $S$ . . . . .	27
Figura 10 – Efeito Doppler e aberração. . . . .	29
Figura 11 – Colisão partículas $a$ e $b$ . . . . .	33
Figura 12 – Movimento Clássico vs Momento Relativístico para uma partícula sujeita a uma força constante. . . . .	38
Figura 13 – Experimento de Michelson e Morley (1887). . . . .	41
Figura 14 – Experimento de Michelson e Morley. . . . .	42
Figura 15 – Espelho $E_2$ (Análise 1). . . . .	42

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE E A ELETRODINÂMICA . . . . .	12
2.1	As Equações de Maxwell e o Éter . . . . .	14
2.2	Os Postulados da Teoria da Relatividade Restrita . . . . .	15
2.3	O Tempo e a Simultaneidade de Eventos . . . . .	16
2.4	Transformações de Lorentz . . . . .	17
2.4.1	Lei relativística de composição de velocidade . . . . .	23
2.4.2	Efeitos Cinemáticos . . . . .	24
2.4.3	Forma alternativa para se chegar à contração do espaço e dilatação do tempo . . . . .	25
2.5	Efeito Doppler . . . . .	28
3	DINÂMICA RELATIVÍSTICA . . . . .	32
3.1	Momento Relativístico . . . . .	32
3.2	Energia Relativística . . . . .	35
3.2.1	O Problema da Força Constante . . . . .	36
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	39
	REFERÊNCIAS . . . . .	40
	APÊNDICE A - EXPERIMENTO DE MICHELSON E MORLEY . . . . .	41

## 1 INTRODUÇÃO

O que se entende por teoria da relatividade? Bem, nem sempre o que sabemos ou o que achamos que sabemos está correto quando o assunto é a relatividade, sendo esta a sensação que ficou depois de uma abordagem superficial, uma vez que esse assunto é tratado apenas como um tópico da disciplina de Física Moderna. Isso deixa uma vasta margem para dúvidas e curiosidades não respondidas e, no final, não se tem o conhecimento desejado sobre essa teoria. Por isso, tenta-se aqui, fazer uma abordagem convincente e didática, fazendo algumas indagações que serão respondidas ao longo deste trabalho. Começemos: em que contexto histórico e como a teoria da relatividade restrita foi desenvolvida? Quais as implicações da teoria da relatividade restrita sobre a Mecânica Clássica? Como ela pode ser abordada e qual sua relevância para Física Moderna? Para respondermos a essas questões faremos uma breve análise para sabermos como surgiram essas ideias.

O presente trabalho foi organizado levando em consideração a ordem cronológica em que os fatos aconteceram, por isso, no capítulo 2, começaremos tratando das transformadas e do princípio da relatividade de Galileu, discutindo como essa ideia permaneceu inalterada ao longo de muitos anos. Veremos como as equações de Maxwell trouxeram uma incompatibilidade aparente com o princípio da relatividade, o que levou a retomada do conceito de éter, posteriormente descartados pelos resultados dos experimentos de Michelson e Morley. Em seguida, discutiremos os postulados de Einstein e como suas ideias sobre tempo e simultaneidade levaram ao desenvolvimento de uma teoria que acomodava o caráter eletromagnético da luz. Ainda no mesmo capítulo, a partir dos postulados, deduziremos as transformações Lorentz e os efeitos cinemáticos advindos destas transformações. Por fim, explanaremos o efeito Doppler para ondas luminosas, comparando com o caso acústico.

No capítulo 3, discutiremos em uma pequena análise, a Dinâmica Relativística em alguns pontos importantes como a conservação do momento relativístico, energia relativística e, em seguida, resolveremos o problema de uma partícula relativística submetida a uma força constante.

## 2 O PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE E A ELETRODINÂMICA

O estudo de referenciais inerciais foi fundamental para desenvolvimento da Mecânica Clássica (EINSTEIN, 2005, p. 37). Um referencial inercial é aquele onde é válida a primeira lei da Newton: *um corpo em repouso tende a permanecer em repouso e um corpo em movimento retilíneo uniforme tende a continuar em movimento retilíneo uniforme, se nenhuma força age sobre estes corpos*. De posse da definição de referencial inercial, decorre de fatos experimentais o Princípio da Relatividade (PR). De acordo com Galileu, se estivermos em um navio se movendo com velocidade retilínea uniforme em relação a terra sem o balaço das ondas da água, ao realizarmos experiências, como jogar uma bola para o alto, esta vai realizar o mesmo trajeto caso o experimentador estivesse em terra firme, ou seja, as leis físicas aplicadas para o movimento em terra firme também são válidas para o experimento realizado no navio com velocidade retilínea uniforme em relação a terra. Daí decorre o Princípio da Relatividade de Galileu, as leis físicas válidas para um referencial inercial  $S$  também são válidas para um referencial  $S'$  que esteja em movimento retilíneo uniforme em relação a  $S$  (GALILEI, 1953 apud NUSSENZVEIG, 2015, p. 62). Nas palavras de Einstein:

Como todos sabem, a lei fundamental da mecânica de Galileu-Newton, conhecida como lei da inércia, diz o seguinte: um corpo suficientemente afastado de outros corpos permanece em estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme. Esta proposição não somente enuncia algo sobre o movimento dos corpos, mas nos diz também que os corpos de referência, ou sistema de coordenadas, são admissíveis e podem ser empregados para a descrição mecânica (EINSTEIN, 1999, p.18).

Com o intuito de melhor compreendermos o que está escrito acima, definiremos agora o que são “corpos de referência” e como podemos relacioná-los. Para chegarmos em uma definição para referencial, tomemos a ideia de Galileu, sobre o que é um sistema de coordenadas. Vamos imaginar um sistema  $S$  composto de três paredes fixas e perpendiculares entre si, cujo encontro dessas paredes chamaremos de origem  $O$ , então poderemos ligar uma partícula  $P$  qualquer, a essas paredes. Esse é o sistema de coordenadas galileano, no qual é possível ligarmos uma ou mais partículas a esta origem por meio deste sistema. Batizaremos, respectivamente, essas três direções de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , onde  $x$  e  $y$  formam o plano do papel e  $z$  está saindo verticalmente desde plano, veja Fig. 1 (EINSTEIN, 1999, p. 18). A partir da ideia de referenciais inerciais Galileu desenvolve suas transformadas, as quais tiveram um importante papel no desenvolvimento da Mecânica Clássica, permitindo a análise de movimentos relativos. A

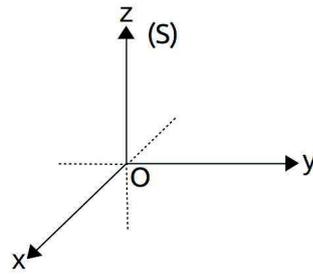


Figura 1: Referencial  $S$ .

Fig. 2 mostra o movimento relativo do referencial inercial  $S'$  com velocidade constante  $\mathbf{V}$  em relação ao referencial inercial  $S$ . Seja  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{r}'$ ) o vetor posição que localiza a partícula  $P$  em relação a  $S$  ( $S'$ ), e  $\mathbf{r}_{O'}$  =  $OO'$  o vetor posição que liga a origem  $O$  do referencial  $S$  a origem  $O'$  do referencial  $S'$  que está em movimento retilíneo uniforme em relação a  $S$ , de forma que:

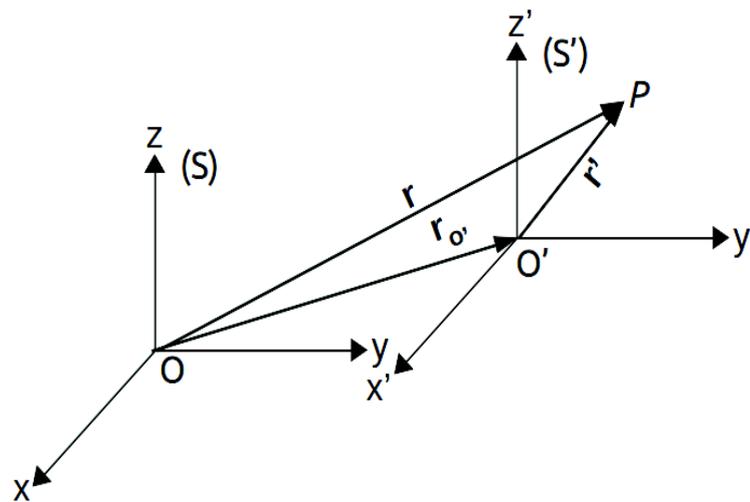


Figura 2: Referenciais  $S$  e  $S'$ .

Figura adaptada (NUSSENZVEIG, 1998, p. 175).

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{O'}. \quad (2.1)$$

Derivando a Eq. (2.1) em relação ao tempo<sup>1</sup>, chegaremos a transformação de velocidades:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \quad (2.2)$$

Essa é a transformação de velocidades de Galileu. Se derivarmos novamente em relação a  $t$ , como  $\mathbf{V}$  é constante, obteremos:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>Note que o "tempo" era considerado absoluto, ou seja, não dependia do movimento relativo dos referenciais. E portanto  $t = t'$  (NEWTON, 2002).

Se pensarmos em forças que dependem apenas da distância relativa entre as partículas, temos que  $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$ , uma vez que as transformadas de Galileu não afetam essas distâncias. Então:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{F}' = m'\mathbf{a}'. \quad (2.4)$$

Dessa forma, chega-se ao PR: “é impossível detetar um movimento retilíneo uniforme de um referencial em relação a outro por qualquer efeito sobre as leis da dinâmica”(NUSSENZVEIG, 1998, p.176).

## 2.1 As Equações de Maxwell e o Éter

Desde os tempos antigos muitas pessoas procuram saber como se dá a interação entre dois corpos que não estão encostados um no outro. Podemos citar como exemplo um pedaço de ferro e um ímã. Acreditava-se que não era possível que um corpo atuasse sobre outro sem ter contato, e portanto a ação do ímã sobre o pedaço de ferro deveria ser explicada de alguma forma (MARTINS, 2005, p.11-12). Para resolver essa questão, idealizaram o *éter*. O éter era um meio hipotético que preenchia todo o espaço, permitindo, assim, um caminho por onde as ondas eletromagnéticas pudessem se propagar e, portanto, os conceitos mecânicos para propagação de ondas continuariam válidos.

Se ligarmos o PR às equações Maxwell para o Eletromagnetismo, em que a velocidade propagação da luz é  $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  em todas as direções no vácuo, se considerarmos que é válido para referenciais inerciais, teríamos que admitir um referencial inercial privilegiado e, portanto, o PR deixaria de valer, pois, segundo, as transformadas de Galileu, teríamos:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{V}, \quad (2.5)$$

e  $c'$  poderia variar contradizendo o PR.

Se a possibilidade da existência do éter como referencial inercial privilegiado fosse válida, então seria possível detetar o movimento retilíneo uniforme em relação a ele por meio de experiências de propagação de luz. Dessa forma, à afirmação acima, contradiz o PR, logo ele não poderia ser aplicado a eletrodinâmica, assim como acontece para a propagação do som, onde a velocidade é isotrópica, ou seja, é a mesma em todas as direções se o meio for homogêneo e estiver em repouso.

Neste sentido, se quiséssemos manter o PR válido na eletrodinâmica, vemos que surgiria uma incompatibilidade com as equações de Maxwell quando aplicadas simultaneamente com as leis da mecânica newtoniana, e teríamos que admitir como verdadeira apenas um caminho (NUSSENZVEIG, 1998, p. 177). Havia agora três

possibilidades para a solução deste problema:

1- O PR está errado, a mecânica newtoniana e as equações de Maxwell estão corretas.

2- As equações de Maxwell estão erradas, o PR se aplica a todas leis da física e a mecânica newtoniana está correta.

3- A mecânica newtoniana e a transformação de Galileu estão erradas, o PR se aplica a todas as leis da física e as equações de Maxwell estão corretas.

Caso a opção 1 seja correta, então o PR não se aplica a todas as leis físicas, logo existe um referencial privilegiado (éter), onde a velocidade da luz é  $c$  em todas as direções, e deve ser possível, por meio de experiências eletromagnéticas, detetar o movimento retilíneo e uniforme em relação ao referencial absoluto do éter. Já se o caso 2 for o correto, então as leis de Maxwell teriam de ser modificadas e deveria ser possível observar desvios das leis da eletrodinâmica clássica. E, por fim, se a possibilidade 3 fosse correta, seria possível observar os desvios das leis da mecânica newtoniana (NUSSENZVEIG, 1998, p. 177-178).

Uma série de experimentos realizados por Michelson e Morley (ver Apêndice A) realizadas entre 1881 e 1887 descartaram a primeira opção, o que levou o declínio do conceito de éter (MICHELSON; MORLEY, 1887). Além disso, todos os experimentos com fenômenos eletromagnético mostraram a validade da teoria de Maxwell. Dessa forma, as transformadas de Galileu e a mecânica newtoniana precisavam de modificações. Essas modificações foram propostas pelo famoso físico alemão Albert Einstein em 1905 no seu famoso artigo intitulado "Sobre a eletrodinâmica de corpos em movimento" (tradução livre). Nesse artigo está contida a teoria que hoje chamamos de Teoria da Relatividade Especial ou Restrita a qual dedicamos este trabalho (EINSTEIN, 1905).

## 2.2 Os Postulados da Teoria da Relatividade Restrita

Antes de Einstein publicar sua Teoria da Relatividade Restrita, Maxwell resumiu o Eletromagnetismo em quatro equações (GRIFFITHS, 2011, p. 226), que não se mostravam invariantes em relação as transformações de Galileu, essas equações também implicavam que a velocidade da luz não podia depender do estado de movimento da fonte.

Em sua publicação (EINSTEIN, 1905), Einstein mostrou a variância da simultaneidade de eventos distantes no espaço, levando em consideração a propagação de sinais luminosos a velocidade da luz  $c$  e obteve que o tempo deve se transformar,

assim como as coordenadas espaciais, quando mudamos de sistema de referência (LOPES, 1991, p. 109). Para chegar nessa conclusão, Einstein postulou:

1- O Princípio da Relatividade Restrita nos diz que toda lei física não muda quando se passa de um referencial inercial para outro que se mova de maneira retilínea e uniforme com relação ao primeiro, ou seja, ele reafirma a equivalência entre todos os referenciais inerciais (REEN, 2004, p. 27).

2- O Princípio da Constância da Velocidade da Luz, diz: que a velocidade da luz no vácuo  $c$ , é a mesma em todas as direções e para todos os referenciais inerciais, e independentemente do movimento da fonte.

Veja que o segundo postulado foi o grande diferencial de Einstein, pois esta condição não havia sido considerada até então. Ao considerarmos os dois postulados verdade, veremos na subsecção 2.4.3 que são suficientes, para chegarmos às transformações de Lorentz e demonstrarmos os aspectos fundamentais da teoria da relatividade restrita.

### 2.3 O Tempo e a Simultaneidade de Eventos

Uma das mudanças mais profundas trazidas pela teoria da relatividade restrita foi o não absolutismo do tempo, ou seja, a medida do intervalo de tempo entre dois eventos deve depender do observador. Para nos ajudar a entender essa quebra de paradigma, Einstein usa um experimento fictício para descrever o que é simultaneidade de eventos. Imagine um leito de estrada por onde passa um trilho de trem suficientemente longo e então, segundo Einstein: "... Todo evento que ocorre ao longo dos trilhos ocorre também em algum ponto do trem. A definição de simultaneidade também pode ser formulada em relação ao trem, da mesma forma que em relação à estrada" (EINSTEIN, 1999, p. 27). O que faz aparecer a seguinte questão: Se dois eventos,  $A$  e  $B$ , que são simultâneos em relação ao leito da estrada são também simultâneos em relação ao trem? (EINSTEIN, 1999, p. 27-28). Bem, esse é um ponto bastante importante, por que é a partir dele que o entendimento sobre a teoria da relatividade restrita de Einstein é fundamentado.

Suponha dois eventos como sendo a queda de raios em dois pontos distintos  $A$  e  $B$ . Então, se os sinais luminosos provocados pelos raios, partiram de  $A$  e  $B$  com e chegaram a um observador localizado no ponto médio  $M$  de  $AB$  no leito da estrada ao mesmo tempo, dizemos que os dois eventos são simultâneos de acordo com esse observador. Imagine que o momento da queda dos raios coincida com a passagem de um trem com extremidade em  $A$  e  $B$  e que existe um observador no ponto médio

$M'$  do trem, de forma que  $M$  e  $M'$  coincidem, como na Fig. 3. Caso o trem estivesse em repouso, então os sinais luminosos alcançariam ambos observadores ao mesmo tempo. Mas, como o trem está em movimento em direção ao sinal luminoso vindo de  $B$ , e afastando-se do sinal luminoso que vem de  $A$ , o observador que viaja junto do trem, chegará à conclusão de que o raio caiu primeiro em  $B$  e depois em  $A$ . Chegamos à um importante resultado, dois eventos que são simultâneos para um leito da estrada, não são simultâneos para um observador no interior do trem, e o contrário também é verdadeiro. Ou seja, eventos simultâneos para um observador pode não ser para outros observadores. Dessa forma, a medida temporal então deixa de ser absoluta, pois depende da posição e da velocidade do observador (EINSTEIN, 1999, p. 27-28) e (PORTO; PORTO, 2008, p. 1603-4).

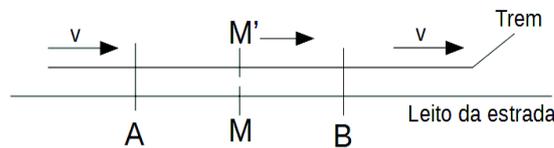


Figura 3: Leito da Estrada e o Trem.  
Figura adaptada (EINSTEIN, 1999, p. 17).

## 2.4 Transformações de Lorentz

Uma vez que o tempo perdeu seu caráter absoluto, a partir de agora precisaremos adicionar à nossa antiga ideia de referencial a presença de relógios sincronizados, de forma que, em um dado referencial, um acontecimento ou evento será agora descrito pela suas três coordenadas espaciais, mais a coordenada temporal  $(x, y, z, t)$ . Se em um dado referencial acontece um evento no ponto  $P = (x, y, z)$ , num determinado instante  $t$ , então queremos encontrar um conjunto de leis de transformações que nos permitam descrever esse mesmo evento quando observado de outro referencial que se move em relação ao primeiro com velocidade constante.

Partiremos do caso especial em que os dois sistemas de coordenadas inerciais tem movimento relativo na direção do eixo  $x$  e que suas origens se coincidam em  $t = t' = 0$ , queremos encontrar a relação entre as coordenadas de um mesmo evento descrito por observadores em  $S$  e  $S'$ .

A transformação abaixo terá que atender três requisitos

$$(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t'). \quad (2.6)$$

1) Um movimento retilíneo uniforme em relação a  $S$  deve ser também re-

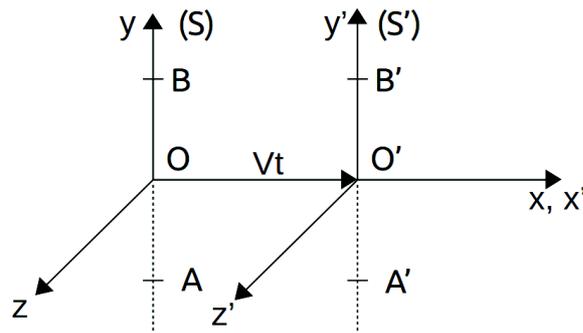


Figura 4: Referenciais  $S$  e  $S'$ .  
Figura adaptada (NUSSENZVEIG, 1998, p. 186)

tilíneo e uniforme em relatividade a  $S'$  também.

2) Para  $V = 0$  ( $\vec{V} \equiv V\hat{x}$  é a velocidade de  $S'$  em relação a  $S$ ), a transformação deve retornar  $x' = x$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$  e  $t' = t$  uma vez que as origens de  $S$  e  $S'$  se coincidem em  $t = t' = 0$ .

3) Se é enviado um sinal luminoso de  $O \equiv O'$  em  $t = t' = 0$ , logo sua frente de onda se propaga com velocidade  $c$  em ambos referenciais. Então:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0. \quad (2.7)$$

Supondo, a partir da Fig. 4 dos referenciais  $S$  e  $S'$ , que em  $t' = t = 0$  todos os pontos dos referenciais  $S$  e  $S'$  coincidem, e que não existe movimento relativo ao longo das direções  $y$  e  $z$ , então

$$y' = y, \quad (2.8)$$

$$z' = z. \quad (2.9)$$

Porém isso não se aplica às medidas de  $x$  e  $t$ . Ora, neste caso, de acordo com (EINSTEIN, 2005, p. 39), devido à homogeneidade do espaço e tempo as relações de transformação precisam ser lineares nessas variáveis. Logo procuraremos por transformações do tipo:

$$x' = A(x - Vt), \quad (2.10)$$

$$t' = Bt + Cx, \quad (2.11)$$

onde para  $A = B = 1$  e  $C = 0$ , obtemos as transformadas de Galileu.

Portanto, podemos reescrever a Eq. (2.7) e substituir  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  e  $t'$ , sabendo

que a frente de onda esférica se propaga com velocidade  $c$  em ambos os referenciais,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (2.12)$$

Assim:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= A^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2(Bt + Cx)^2 = 0, \\ x^2(A^2 - c^2C^2 - 1) - 2xt(A^2V + c^2BC) + t^2(A^2v^2 - c^2B^2 + c^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como a relação acima deve ser válida para todo  $x$  e  $t$ , os coeficientes devem todos ser nulos. Logo:

$$\begin{aligned} A^2V + c^2BC &= 0, \\ B^2 - \frac{V^2}{c^2}A^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.14), da primeira Eq., teremos:

$$A^2 = -\frac{c^2}{V}BC. \quad (2.15)$$

Substituindo nas outras:

$$\begin{aligned} -c^2\frac{C}{V}(B + VC) &= 1, \\ B^2 + VBC &= B(B + B + VC) = 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Assim,

$$B = -\frac{c^2}{V}C. \quad (2.17)$$

Das equações 2.15 e 2.17, temos que:

$$A^2 = B^2. \quad (2.18)$$

Se substituirmos o resultado acima na última parte da Eq. (2.14), teremos:

$$A^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1. \quad (2.19)$$

Definindo  $\beta \equiv \frac{V}{c}$  e  $\gamma \equiv A$  na Eq. (2.19), então ela ficará na forma:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.20)$$

Mas, ainda das Eqs. (2.17) e (2.18), nota-se os seguintes resultados:

$$A = \pm B = \pm\gamma,$$

$$C = -\frac{V}{c}\gamma.$$

No entanto, sabemos que  $A = B = 1$  e  $C = 0$  quando  $V = 0$ . Logo:

$$\begin{aligned} A &= B = \gamma, \\ C &= -\frac{V}{c^2}\gamma. \end{aligned}$$

Dessa forma chegamos às famosas Transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left( t - \frac{V}{c^2}x \right), \\ x' &= \gamma(x - Vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{2.21}$$

As transformadas de Lorentz podem ser reescritas de uma forma mais simétrica se definirmos as nossas coordenadas como  $x_0 = ct$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $x_3 = z$ . Dessa forma, teremos:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1), \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta x_0), \\ x'_2 &= x_2, \\ x'_3 &= x_3, \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde  $x_0$  tem unidade de comprimento, assim como as outras três coordenadas. Essas quatro equações podem ser escritas como uma única equação matricial como segue:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Chamaremos de  $\Gamma$  a matriz de transformação acima.

Note que na Eq. (2.20),  $\beta < 1$  para que o valor de  $\gamma$  seja real e positivo. Portanto,  $c$  não é apenas a velocidade da luz, mas também é a velocidade limite de movimento de qualquer referencial.

Mas o que acontece quando  $\beta \ll 1$ ?, ou seja, quando  $v \ll c$ . Fazendo uma expansão em série de potencias para  $\beta \ll 1$ , temos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \dots, \tag{2.24}$$

desprezando os termos de segunda potência ou superiores na Eq. (2.24), teremos  $\gamma = 1$  e recuperamos as transformações de Galileu, o que significa que para baixas velocidades podemos fazer uso das transformadas de Galileu.

Até agora consideramos que a velocidade de  $S'$  em relação a  $S$  estava na direção do eixo  $x - x'$ . Agora analisaremos o caso mais geral que não é comumente encontrado em livros didáticos, mas aparece como problema no Livro: “Eletrodinâmica do autor David Griffiths”(GRIFFITHS, 2011, p. 378). Suponhamos que um sistema inercial  $S'$  que se move a uma velocidade constante  $\vec{v} = \beta c (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y})$  com relação a  $S$ , com seus eixos paralelos um ao outro e suas origens coincidentes em  $t = t' = 0$ . Podemos construir uma matriz  $\Lambda$  de transformação de coordenadas partindo do caso da Fig. 5 e utilizando a Eq. (2.21), então:

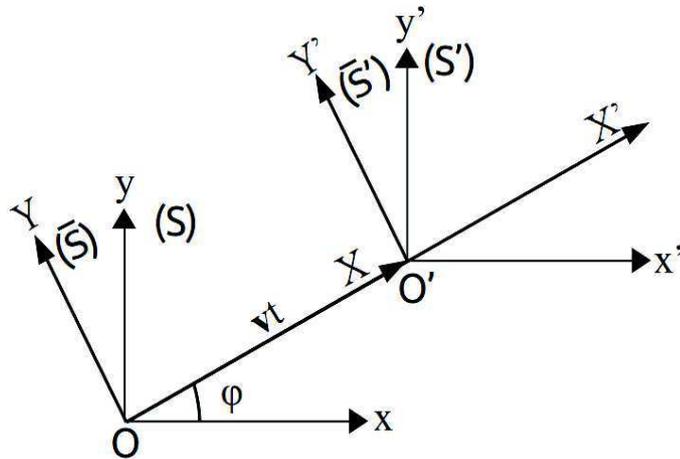


Figura 5: Caso geral para o referencial  $S'$  em movimento inercial em relação ao referencial  $S$

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos \phi x_1 + \sin \phi x_2, \\ X_2 &= -\sin \phi x_1 + \cos \phi x_2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando as transformações de Lorentz, Eq. (2.21) e sabendo que a velocidade  $\vec{v} = \beta c (\cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y})$ :

$$\begin{aligned} X'_1 &= \gamma (X_1 - \beta X_0) = \gamma (\cos \phi x_1 + \sin \phi x_2 - \beta x_0), \\ X'_2 &= X_2 = -\sin \phi x_1 + \cos \phi x_2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Então as transformações de Lorentz serão:

$$\begin{aligned}
 X'_0 &= \gamma [x_0 - \beta (\cos \phi x_1 + \text{sen } \phi x_2)], \\
 X'_1 &= \gamma (\cos \phi x_1 + \text{sen } \phi x_2 - \beta x_0), \\
 X'_2 &= -\text{sen } \phi x_1 + \cos \phi x_2, \\
 X'_3 &= x_3.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Mas sabemos que:

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

então:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ \text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Reescrevendo  $x'_1$  e  $x'_2$ :

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= \cos \phi X'_1 - \text{sen } \phi X'_2, \\
 x'_2 &= \text{sen } \phi X'_1 + \cos \phi X'_2,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Substituindo a Eq. (2.26) na Eq. (2.30), temos:

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= \gamma \cos \phi (\cos \phi x_1 + \text{sen } \phi x_2 - \beta x_0) - \text{sen } \phi (-\text{sen } \phi x_1 + \cos \phi x_2), \\
 x'_2 &= \gamma \text{sen } \phi (\cos \phi x_1 + \text{sen } \phi x_2 - \beta x_0) + \cos \phi (-\text{sen } \phi x_1 + \cos \phi x_2),
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= (\gamma \cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi) x_1 + (\gamma - 1) \cos \phi \text{sen } \phi x_2 - \gamma \beta x_0 \cos \phi \\
 x'_2 &= (\gamma - 1) \cos \phi \text{sen } \phi x_1 + (\gamma \text{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi) x_2 - \gamma \beta x_0 \text{sen } \phi,
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

que nos dá:

$$\begin{aligned}
 x'_0 &= \gamma x_0 - \gamma \beta \cos \phi x_1 - \gamma \beta \text{sen } \phi x_2, \\
 x'_1 &= -\gamma \beta x_0 \cos \phi + (\gamma \cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi) x_1 + (\gamma - 1) \cos \phi \text{sen } \phi x_2, \\
 x'_2 &= -\gamma \beta x_0 \text{sen } \phi + (\gamma - 1) \cos \phi \text{sen } \phi x_1 + (\gamma \text{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi) x_2, \\
 x'_3 &= x_3.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

A matriz  $\Lambda$  descreve as transformações de Lorentz, que assumem a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \cos \phi & -\gamma\beta \sin \phi & 0 \\ -\gamma\beta \cos \phi & \gamma \cos^2 \phi + \sin^2 \phi & (\gamma - 1) \cos \phi \sin \phi & 0 \\ -\gamma\beta \sin \phi & (\gamma - 1) \cos \phi \sin \phi & \gamma \sin^2 \phi + \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Note que quando  $\phi = 0$  recuperamos o caso particular descrito pela equação 2.23.

### 2.4.1 Lei relativística de composição de velocidade

Vamos considerar uma partícula em movimento arbitrário em relação a  $S'$ , tal que

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t'), \quad (2.35)$$

Onde sua velocidade instantânea  $\mathbf{v}'(t')$  é dada pelas componentes em  $S'$

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (2.36)$$

Em  $S$ , a velocidade da partícula é

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (2.37)$$

onde as Eqs. (2.36) e (2.37) podem ser relacionadas com a ajuda da Eq. (2.21). Reescrevendo a Eq. (2.21) para deslocamentos infinitesimais, teremos:

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - V dt), \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right), \\ dy' &= dy, \quad dz' = dz. \end{aligned} \quad (2.38)$$

implicando em:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dt \left( \frac{dx}{dt} - V \right)}{dt \left( 1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} \Rightarrow v'_x = \frac{v_x - V}{\left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)}, \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma dt \left( 1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} \Rightarrow v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \beta^2}}{\left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)}, \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma dt \left( 1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} \Rightarrow v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \beta^2}}{\left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right)}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Como vimos anteriormente, a transformação de velocidades de Galileu que é dada pela expressão 2.2 abre caminho para o seguinte questionamento: imagine se duas partículas estão se movendo com velocidade  $c$  num mesmo eixo em sentidos opostos, sua velocidade relativa seria  $2c$ ? Vemos que nas Eqs. (2.39), que não pode ser verdadeiro, pois pela lei relativística de composição de velocidades teríamos uma velocidade relativa também igual a  $c$ .

### 2.4.2 Efeitos Cinemáticos

As transformações de Lorentz fazem surgir efeitos cinemáticos, sem que estes efeitos envolvam formulações relativísticas da leis da dinâmica.

#### A contração de Lorentz

O comprimento próprio de um objeto pode ser definido como o valor medido num referencial onde esse objeto encontra-se em repouso. Vamos considerar uma barra que está em repouso ao longo do eixo  $O'x'$  no referencial  $S'$ , com suas extremidades nos pontos  $x'_1$  e  $x'_2$ . O comprimento próprio da barra é:

$$l_0 = x'_2 - x'_1. \quad (2.40)$$

Chamaremos de  $l$  o comprimento da barra no referencial  $S$  e veremos como  $l$  irá se comportar, uma vez que está em deslocamento com velocidade  $V$  em relação a  $S$ .

$$l = x_2(t) - x_1(t), \quad (2.41)$$

onde  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são obtidos a partir das transformações de Lorentz (Eq. 2.21):

$$\left. \begin{aligned} x'_1(t) &= \gamma(x_1 - Vt) \\ x'_2(t) &= \gamma(x_2 - Vt) \end{aligned} \right\} l_0 = \gamma(x_2 - x_1) = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.42)$$

Assim chegamos a contração de Lorentz:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2.43)$$

Como conclusão, podemos afirmar que o comprimento da barra em movimento é menor que seu comprimento próprio. Lorentz e FirtzGerarld já havia previsto este efeito, sem justificativa, antes de Einstein formular a TRR para justificar o resultado nulo do experimento de Michelson e Morley (NUSSENZVEIG, 1998, p. 192).

#### A dilatação dos intervalos de tempo

Se colocarmos um relógio em repouso na origem de  $S'$ , o tempo marcado por este relógio será o tempo próprio<sup>2</sup>, no qual chamaremos de  $\tau$ .

A correspondente da coordenada temporal em  $S$  obtêm-se das transformações de Lorentz inversa, em  $x' = 0$ :

$$t = \gamma t' = \gamma \tau, \quad (2.44)$$

de forma que em  $S$  o tempo se relacione com  $\tau$  da seguinte maneira:

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.45)$$

assim  $\Delta t \geq \Delta \tau$ , por isso o nome dilatação do tempo dado a esse efeito.

### 2.4.3 Forma alternativa para se chegar à contração do espaço e dilatação do tempo

Vimos a dilatação do tempo e contração do espaço como consequência das transformações de Lorentz. Agora veremos que podemos chegar a estes mesmos resultados sem a necessidade das transformações de Lorentz. Para isso analisaremos um experimento imaginário do ponto de vista de dois referenciais e usaremos apenas o princípio de constância da velocidade da luz. Esta forma alternativa de se chegar à contração do espaço e dilatação do tempo pode ser considerada de cunho mais didático, como veremos a seguir.

#### Dilatação do tempo

Um sinal luminoso que partindo de um ponto  $O'$ , se reflete num espelho à distância  $y'$  de  $O'$  e volta para  $O'$ , pode ser considerado como um relógio que marca intervalos de tempo  $\Delta t'$  correspondente à ida e volta do sinal. Veja Fig. 6.

Supondo que  $S'$  se desloca em relação a  $S$  com velocidade  $V$  na direção de  $x'$ , vamos calcular o intervalo de tempo correspondente a  $\Delta t$  em  $S$ , admitindo o princípio da constância da velocidade da luz.

Sabemos que o tempo próprio é marcado no relógio na origem  $O'$ , e portanto,

$$\Delta t' = \frac{2y'}{c}, \quad (2.46)$$

é o tempo em que o raio de luz vai até o espelho  $E_2$  preso a  $S'$  e retorna a origem  $O'$ . Em  $S$ , devido a velocidade  $V$  de  $S'$ , temos a seguinte situação mostrada na Fig. 7. Sabendo que  $d = V \Delta t$  é a distância percorrida por  $S'$  em relação a  $S$ , podemos escrever  $\Delta t$  sabendo que a distância percorrida pelo raio luminoso visto de  $S$  é  $2l$ :

<sup>2</sup>O intervalo de tempo próprio entre dois eventos é aquele medido no referencial onde esses eventos ocorrem no mesmo ponto do espaço.

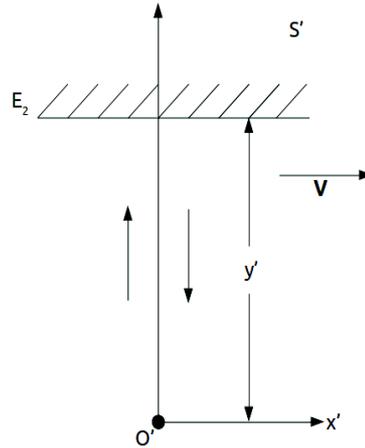


Figura 6: Espelho  $E_2$ .  
Figura adaptada (NUSENZVEIG, 1998, p. 240)

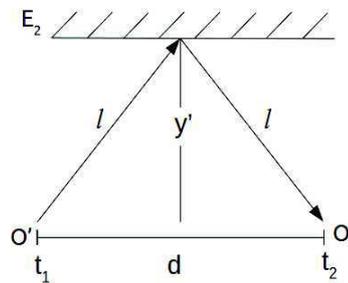


Figura 7: Caminho percorrido pela Luz até o espelho  $E_2$  visto do referencial  $S$ .

$$\Delta t = \frac{2l}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{y'^2 + \frac{V^2(\Delta t)^2}{4}}, \quad (2.47)$$

Mas de acordo com a Eq. (2.46) temos que  $y' = \frac{c\Delta t}{2}$ . Logo,

$$(\Delta t)^2 = \frac{4}{c^2} \left( \frac{c^2(\Delta t')^2}{4} + \frac{V^2(\Delta t)^2}{4} \right), \quad (2.48)$$

$$\Delta t^2 = \Delta t'^2 + \frac{V^2}{c^2} \Delta t^2, \quad (2.49)$$

$$\Delta t^2 \left( 1 - \frac{V^2}{c^2} \right) = \Delta t'^2, \quad (2.50)$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (2.51)$$

Como  $\gamma \geq 1$  então  $\Delta t \geq \Delta t'$ . Ou seja, o tempo medido no referencial  $S$  é maior que o tempo próprio que foi medido no referencial  $S'$ . Esta expressão é equivalente à dilatação dos intervalos de tempo das transformações de Lorentz (Eq. 2.45).

### Contração do espaço

Considere agora a situação 2, Fig. 8, em que o raio luminoso parte de  $O'$  até o espelho  $E_1$  à distância  $x'$  em  $S'$ , na direção da velocidade  $V$ .

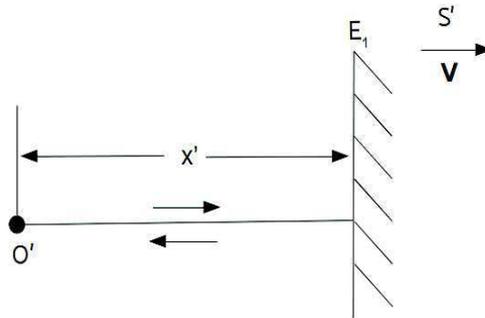


Figura 8: Espelho  $E_1$   
Figura adaptada de (NUSSENZVEIG, 1998, p. 240)

Na Fig. 9, está esquematizada a situação 2. Visto do referencial  $S$ , o raio luminoso leva um tempo  $t_1$  para alcançar o espelho (seta  $a$ ), e um tempo  $t_2$  para alcançar a origem  $O'$  novamente (seta  $b$ ).  $l_0$  é a distância de  $O'$  ao espelho  $E_1$  medida no referencial  $S'$ .

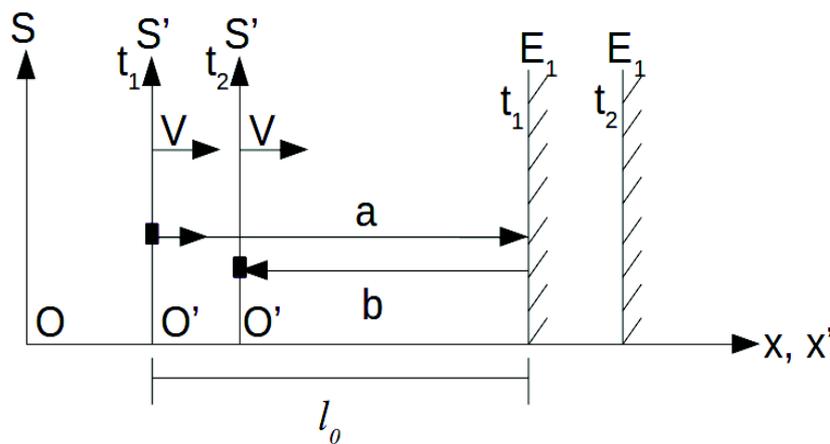


Figura 9: Caminho percorrido pela Luz até o espelho  $E_1$  visto do referencial  $S$ .

Como durante o intervalo de tempo  $t_1$  o espelho  $E_1$  se desloca  $vt_1$ , temos que o sinal luminoso terá que percorrer

$$t_1 = \frac{l + Vt_1}{c} \Rightarrow t_1 = \frac{l/c}{\left(1 - \frac{V}{c}\right)} = \frac{l}{c(1 - \beta)}. \quad (2.52)$$

Após reflexão o raio luminoso leva um tempo  $t_2$  para alcançar a origem  $O'$ , dado por:

$$t_2 = \frac{l - Vt_2}{c} \Rightarrow t_2 = \frac{l/c}{\left(1 + \frac{V}{c}\right)} = \frac{l}{1 + \beta}. \quad (2.53)$$

O tempo total medido em  $S$  gasto pela luz para ir e voltar é:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c} \left\{ \frac{1}{1 - \beta} + \frac{1}{1 + \beta} \right\},$$

$$t = \frac{2l}{c(1 - \beta^2)}. \quad (2.54)$$

Mas sabemos que o tempo  $t'$  medido por um observador em  $S$  é ditado por um fator  $\gamma$  quando comparado com o tempo  $t' = \frac{2l_0}{c}$  medido pelo observador em  $S'$ . Logo,

$$\gamma t' = t \iff \gamma \frac{2l_0}{c} = \frac{2l}{c(1 - \beta^2)}, \quad (2.55)$$

$$l = (1 - \beta^2)\gamma l_0 \iff l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (2.56)$$

A Eq. (2.56) equivale a contração do espaço obtida a partir das transformações de Lorentz.

## 2.5 Efeito Doppler

Quando falamos de efeito Doppler nos referimos à mudança de frequência percebida por um observador quando este se move em relação a fonte. Esse é um fenômeno bastante conhecido com ondas sonoras, como exemplo, o caso de uma ambulância com a sirene ligada, quando ela se aproxima do observador o som é mais agudo e quando ele se afasta o som é mais grave. Queremos analisar como esse efeito se dá quando tratamos de ondas eletromagnéticas. Sabendo que o fator de propagação de uma onda eletromagnética monocromática plana no vácuo é dada por:

$$\exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] = \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{r}}{c} \right) \right] = e^{(-2\pi i F)} \quad (2.57)$$

onde

$$F \equiv f \left( t - \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x}}{c} \right),$$

$$\omega = 2\pi f, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{u}} = \frac{2\pi f}{c} \hat{\mathbf{u}} = \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{u}}.$$

Então supondo que, para  $t = 0$ , a origem  $O$  de um referencial  $S$  esteja sendo cruzada por uma crista de onda. Essa crista atinge o ponto  $\mathbf{r}$  no instante:

$$t_0 = \frac{(\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{x})}{c}, \quad (2.59)$$

se agora definirmos  $t$  para que  $F$  na Eq. (2.58) tenha valor inteiro, esse numero será:

$$F \equiv f(t - t_0), \quad (2.60)$$

onde  $F$  é o número de cristas dessa onda que passam pela origem após  $t = 0$  e atingem  $\mathbf{r}$  entre  $t_0$  e  $t$ .

Consideremos o movimento relativo de  $S'$  em relação a  $S$ , suas origens  $O' \equiv O$  coincidem em  $t' = t = 0$ . Seja  $(\mathbf{r}', t')$  os correspondentes de  $(\mathbf{r}, t)$  no referencial  $S'$ , assim:

$$F' \equiv f' \left( t' - \frac{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{r}'}{c} \right) = f'(t' - t'_0) \quad (2.61)$$

onde  $F'$  representa o número de cristas da onda que cruzam o ponto  $P$  (localizado por  $\mathbf{r}'$  em relação a  $S'$ ) entre  $t - t'_0$  e  $t'$ . Note que os observadores podem discordar sobre a que tempo cada um dos eventos ocorreu, mas devem concordar em relação ao número de eventos, ou seja, o número de cristas de onda que atingiram o ponto  $P$ . Portanto, a quantidade  $F$ , o número de cristas que passam por  $P$ , (Fig.10) deve ser uma quantidade absoluta. Então,

$$F = F'. \quad (2.62)$$

em outras palavras, a fase de uma onda eletromagnética plana monocromática é uma grandeza invariante.

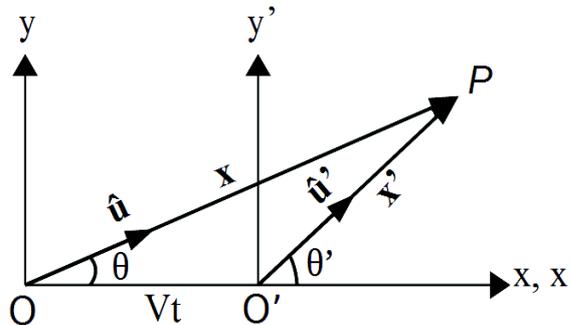


Figura 10: Efeito Doppler e aberração.  
Figura adaptada. (NUSSENZVEIG, 1998, p. 204)

Suporemos que o ponto  $P$ , localizado por  $\mathbf{r}$  em  $S$  e  $\mathbf{r}'$  em  $S'$ , está no plano  $(x, y)$ , de forma que, como podemos ver na Fig. 10 acima:

$$\hat{\mathbf{u}} \equiv (\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad \hat{\mathbf{u}}' \equiv (\cos \theta', \sin \theta', 0). \quad (2.63)$$

Dessa forma,

$$F' \equiv f' \left( t' - \frac{x'}{c} \cos \theta' - \frac{y'}{c} \sin \theta' \right). \quad (2.64)$$

Usando as transformações de Lorentz inversas, para  $t, x, y$  em 2.64,

$$F \equiv f \left( t - \frac{x}{c} \cos \theta - \frac{y}{c} \operatorname{sen} \theta \right), \quad (2.65)$$

$$F = f \left[ \gamma \left( t' + \frac{V}{c^2} x' \right) - \frac{\gamma}{c} \cos \theta (x' + V t') - \frac{y'}{c} \operatorname{sen} \theta \right], \quad (2.66)$$

$$F = \gamma f \left( 1 - \frac{V}{c} \cos \theta \right) t' - \frac{\gamma f}{c} \left( \cos \theta - \frac{V}{c} \right) x' - \frac{f}{c} \operatorname{sen} \theta y'. \quad (2.67)$$

Mas a Eq. (2.64) tem que ser igual à Eq. (2.67), para quaisquer valores de  $x', y'$  e  $t'$ , o que implica que os valores dos coeficientes devem ser idênticos. Comparando os coeficientes de  $t', x'$  e  $y'$ , obteremos respectivamente:

$$f' = \gamma f (1 - \beta \cos \theta), \quad (2.68)$$

$$f' \cos \theta' = \gamma f (\cos \theta - \beta), \quad (2.69)$$

$$f' \operatorname{sen} \theta' = f \operatorname{sen} \theta. \quad (2.70)$$

A Eq. (2.68) é a expressão relativística do efeito Doppler, usando a razão  $f/f'$  nas Eqs. (2.69) e 2.70 obtemos a expressão para  $\operatorname{sen} \theta'$  e  $\cos \theta'$  como:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad (2.71)$$

$$\operatorname{sen} \theta' = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\gamma (1 - \beta \cos \theta)}. \quad (2.72)$$

Essas equações são responsáveis pelo efeito de aberração e mostram “como o efeito do movimento relativo de um observador sobre a posição aparente de uma fonte de luz infinitamente distante que desloca a posição aparente das estrelas” (aberração estelar) (EINSTEIN, 2005, p. 43).

Na acústica, onde  $V$  é a velocidade do observador,  $v$  é a velocidade do som no ar e  $\beta = V/v$ , é necessário analisarmos duas situações diferentes.

1- A fonte está em repouso e o observador em movimento com velocidade  $V$  na direção  $\theta$ , neste caso temos:

$$f = f_0 (1 - \beta \cos \theta). \quad (2.73)$$

2- O observador em repouso e a fonte em movimento com velocidade  $V$  na

direção  $\theta$ :

$$f = \frac{f_0}{1 + \beta \cos \theta}, \quad (2.74)$$

onde  $f_0$  chamaremos de frequência própria da fonte em seu sistema de repouso. Neste caso da acústica, as situações 1 e 2 dão resultados diferentes, pois existe um referencial privilegiado, aquele em que a atmosfera está em repouso.

Para o efeito Doppler relativístico da luz, dado pela Eq. (2.68), tudo que importa é a velocidade relativa  $V$  do observador com relação a fonte. Para o caso particular em que  $\theta = 0$ , temos

$$f' = \gamma f(1 - \beta) = v \frac{(1 - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = v \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \quad (2.75)$$

como era de se esperar.

### 3 DINÂMICA RELATIVÍSTICA

Como vimos no capítulo 2, as transformações de Galileu foram muito úteis no desenvolvimento da Mecânica Clássica, assim como para o princípio da relatividade. Mas o surgimento do Equações de Maxwell (secção 2.1) para o Eletromagnetismo, impondo uma velocidade  $c$  constante independentemente do referencial, levantou questionamentos sobre a validade das leis da mecânica conhecidas. Até aqui abordamos apenas aspectos cinemáticos. Porém, precisamos ver como ficam alguns casos da Dinâmica Clássica que, a partir da teoria da relatividade restrita, tiveram que ser modificados (ou corrigidos) para atender as novas necessidades da Física Moderna.

#### 3.1 Momento Relativístico

No decorrer deste trabalho vimos as transformadas de Galileu serem substituídas pelas transformações de Lorentz. Agora vamos considerar os fenômenos dinâmicos e ver como poderemos modificar as leis da Mecânica Clássica para que elas sejam consistentes com a Relatividade. Sabemos que as leis da Mecânica Clássica devem continuar válidas para baixas velocidades, e, como consequência, espera-se que as leis da Dinâmica relativística retornem à forma clássica quando as velocidades envolvidas forem muito menor que  $c$ .

Para problematizar, vamos fazer a seguinte reflexão, sabemos que na mecânica newtoniana, são admitidas forças de interação entre corpos (partículas) que estão bem localizadas em um sistema de coordenadas, onde podemos prever suas posições instantâneas, como por exemplo, a *gravitação*, regida pela lei de Newton da gravitação.

Essas forças, são incompatíveis com a Relatividade, pois a simultaneidade nos diz que posições simultâneas de corpos depende do referencial.

O momento de uma partícula na Mecânica Clássica é dado pela Eq. (3.1), onde  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade e  $m$  é uma grandeza escalar, admitida como uma característica invariante de uma partícula, a qual chama-se massa inercial:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Vamos supor que na DR o momento tenha a mesma forma, proporcional a  $\mathbf{v}$ , porém, agora,  $m$  não é mas invariante, dependente do módulo de  $v \equiv \mathbf{v}$  da velocidade,

então teremos:

$$m = m(v) \quad ; \quad v = |\mathbf{v}| \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = m(v)\mathbf{v} \quad (3.1)$$

Supondo que duas partículas idênticas  $a$  e  $b$  (duas esferas) se movendo uma em direção a outra no plano  $x'$  e  $y'$  no referencial  $S'$ , sabendo que o momento total desse sistema antes da colisão é nulo, assim como depois. Sabendo que o efeito da colisão consiste em inverter uma das direções de movimento, escolhido aqui como sendo o eixo  $y'$ , sem alterar as componentes  $x'$ .

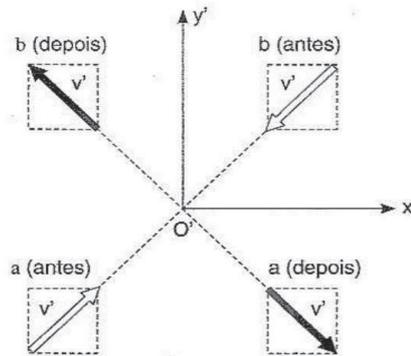


Figura 11: Colisão partículas  $a$  e  $b$ .  
Figura adaptada (NUSSENZVEIG, 1998, p. 209).

Portanto, as componentes  $x'$  e  $y'$  das velocidade  $a$  e  $b$  em  $S'$  antes e depois da colisão estão na Tabela 1 que de acordo com a Fig. 11, temos:

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y}, \quad (3.2)$$

apresenta o mesmo valor para ambas partículas, antes e depois da colisão, logo  $m(v')$  também permanece inalterado para cada partícula. Então o momento total dado pela Eq. (3.1) é igual a zero antes e depois da colisão, assim o princípio da conservação do momento linear é satisfeito no referencial  $S'$ . Mas, segundo o PR, o mesmo deve acontecer para qualquer outro referencial inercial. Então se  $S'$  se desloca na direção de  $x$  com velocidade  $\mathbf{V}$  em relação a  $S$ , as componentes da velocidade das partículas  $a$  e  $b$  em relação a  $S$  serão as escritas na Tabela 2, onde usamos as transformações inversas de velocidade.

Tabela 1: Componentes das velocidades em  $S'$  antes e depois da colisão.

Componentes	$x'$	$y'$	$x'$	$y'$
Antes	$v'_x$	$v'_y$	$-v'_x$	$-v'_y$
Depois	$v'_x$	$-v'_y$	$-v'_x$	$v'_y$
	Partícula $a$		Partícula $b$	

Tabela 2: Componentes das velocidades em  $S$  antes e depois da colisão.

Componentes	$x$	$y$	$x$	$y$
Antes	$\frac{v'_x+V}{1+(v'_x V/c^2)}$	$\frac{\sqrt{1-\beta^2}v'_y}{1+(v'_x V/c^2)}$	$\frac{-v'_x+V}{1-(v'_x V/c^2)}$	$\frac{-\sqrt{1-\beta^2}v'_y}{1-(v'_x V/c^2)}$
Depois	$\frac{v'_x+V}{1+(v'_x V/c^2)}$	$\frac{-\sqrt{1-\beta^2}v'_y}{1+(v'_x V/c^2)}$	$\frac{-v'_x+V}{1-(v'_x V/c^2)}$	$\frac{\sqrt{1-\beta^2}v'_y}{1-(v'_x V/c^2)}$
	Partícula $a$		Partícula $b$	

onde  $\beta = \frac{V}{c}$ .

Como podemos observar, o módulo da velocidade da partícula  $a$  antes e depois colisão são iguais a  $v_a$ . Analogamente, o módulo da velocidade da partícula  $b$  permanece  $v_b$ . De modo que  $v_a \neq v_b$  e a conservação do momento em  $S$  é:

$$[m(v_a)\mathbf{v}_a + m(v_b)\mathbf{v}_b]_{antes} = [m(v_a)\mathbf{v}_a + m(v_b)\mathbf{v}_b]_{depois}. \quad (3.3)$$

Como vimos na Tabela 2, as componentes em  $x$  são iguais antes e depois. Logo nos resta analisar apenas as componentes  $y$ . Então:

$$\begin{aligned} m(v_a) \left[ \frac{\sqrt{1-\beta^2}v'_y}{1+\left(\frac{v'_x V}{c^2}\right)} \right] - m(v_b) \left[ \frac{\sqrt{1-\beta^2}v'_y}{1-\left(\frac{v'_x V}{c^2}\right)} \right] \\ = -m(v_a) \left[ \frac{\sqrt{1-\beta^2}v'_y}{1+\left(\frac{v'_x V}{c^2}\right)} \right] + m(v_b) \left[ \frac{\sqrt{1-\beta^2}v'_y}{1-\left(\frac{v'_x V}{c^2}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mas a equação acima só pode ser satisfeita se ambos os membros forem nulos. Logo,

$$\frac{m(v_a)}{m(v_b)} = \frac{1+\left(\frac{v'_x V}{c^2}\right)}{1-\left(\frac{v'_x V}{c^2}\right)} \quad (3.5)$$

Mas pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}}{1+\frac{v'_x V}{c^2}}, \quad \sqrt{1-\frac{v_b^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{v'_x V}{c^2}} \\ \frac{1+\frac{v'_x V}{c^2}}{1-\frac{v'_x V}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v_b^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Substituindo esse resultado na Eq. (3.5), obtemos:

$$\left[ \sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}} \right] m(v_a) = \left[ \sqrt{1-\frac{v_b^2}{c^2}} \right] m(v_b). \quad (3.7)$$

Mesmo as partículas  $a$  e  $b$  sendo iguais, os coeficientes escalares  $m(v_a)$  e

$m(v_b)$  não são os mesmos para velocidades  $v_a \neq v_b$ . Porém a quantidade

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} m(v) \quad (3.8)$$

é independente da magnitude  $v$  da velocidade, ou seja, invariante. Então:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad m_0 \equiv m(0), \quad (3.9)$$

onde  $m_0$  é o valor próprio de  $m(v)$ , obtido quando a partícula está em repouso. Dessa forma, o momento relativístico é dado por:

$$\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.10)$$

o que está de acordo com a definição clássica, uma vez que para  $v \ll c$  temos  $m(v) \approx m_0$ .

### 3.2 Energia Relativística

A segunda lei de Newton que é a lei fundamental de toda a Dinâmica Clássica, é mantida da mesma forma na Relatividade desde que seja aplicada usando-se a nova definição de momento linear relativístico. Assim:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (3.11)$$

“Uma partícula sob a ação de uma força move-se de maneira que a variação da quantidade de movimento em relação ao tempo é igual a força aplicada. A direção e o sentido são iguais aos da força aplicada”(WATARI, 2004, p. 31).

Sabemos que a variação da energia cinética é dada por:

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (3.12)$$

onde  $T$  é a energia cinética. Aplicando a Eq. (3.10) em (3.12) teremos,

$$\frac{dT}{dt} = m_0\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right] = m_0\mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{\frac{d\mathbf{v}}{dt}}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{1 - 2(\frac{v}{c})\mathbf{v}(\frac{dv}{dt})}{2(1 - \beta^2)^{3/2}} \right\}, \quad (3.13)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{m_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{d(\mathbf{v}^2)}{dt}}{((1 - \beta^2)^{3/2})} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 c^2}{(1 - \beta^2)^{1/2}} \right] \equiv \frac{dE}{dt}, \quad (3.14)$$

onde,

$$E \equiv \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m c^2. \quad (3.15)$$

Assim,  $E$  e  $T$  diferem apenas por uma constante:

$$T = E + \text{constante.} \quad (3.16)$$

Sabemos que quando uma partícula está em repouso ( $v = 0$ ) sua energia cinética é igual a zero. Logo a constante de integração na Eq. (3.16) deve ser  $-m_0c^2$ . Logo:

$$T = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) m_0c^2. \quad (3.17)$$

Note que para o caso limite em que  $|v| \ll c$ , usando a expansão em série de potências, temos:

$$\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots, \quad (3.18)$$

Substituindo na Eq. (3.17) e desprezando os termos de ordem maior que 2, teremos então a expressão usada na MC:

$$T = \frac{1}{2} m_0v^2. \quad (3.19)$$

Portanto, como veremos a seguir e usando as Eqs. (3.15) e (3.17), chegamos a expressão que representa a energia total da partícula, onde  $m_0c^2$  é chamada de energia de repouso da partícula:

$$E = m_0c^2 + T. \quad (3.20)$$

Voltemos à Eq. (3.10). Elevando ambos os termos ao quadrado, obteremos

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Leftrightarrow \frac{p^2}{c^2} = \frac{m_0^2 \left( \frac{v^2}{c^2} + 1 - 1 \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \left( \frac{E}{c^2} \right)^2 - m_0^2. \quad (3.21)$$

Podemos reescrevê-la,

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m_0^2 c^2. \quad (3.22)$$

Usando as expressões para o momento e energia total, poderemos reescrever o momento relativístico, como:

$$\mathbf{p} = \frac{E^2}{c} \mathbf{v}. \quad (3.23)$$

### 3.2.1 O Problema da Força Constante

Agora queremos responder a seguinte questão: o que acontece, segundo a relatividade, se uma partícula ficar em movimento sob a ação de uma força constante  $F$ ? Vamos imaginar que uma partícula parte do repouso na origem no tempo  $t = 0$ . Agora, vamos determinar sua posição  $x(t)$  como função do tempo (GRIFFITHS, 2011,

360).

Sabemos que,

$$\frac{dp}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad p = Ft + \text{constante}, \quad (3.24)$$

por outro lado, sabemos que em  $t = 0$ , o momento deve ser  $p = 0$ , e constante de integração deve ser nula, então

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Ft. \quad (3.25)$$

Isolando  $v$  temos:

$$v = \frac{(F/m)t}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}. \quad (3.26)$$

Como podemos observar, a parte do numerador corresponde a resposta da MC, se  $(F/m)t \ll c$ . Porém, o denominador age de forma que  $v$  não ultrapasse  $c$ , quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow c$ .

Para encontrarmos a posição  $x(t)$ , integramos a Eq. (3.26) no tempo:

$$x(t) = \frac{F}{m} \int_0^t \frac{t'}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft'}{mc}\right)^2}} dt', \quad (3.27)$$

o que nos fornece,

$$x(t) = \frac{mc^2}{F} \sqrt{1 + \left(\frac{Ft'}{mc}\right)^2} \Big|_0^t \quad (3.28)$$

$$x(t) = \frac{mc^2}{F} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1 \right). \quad (3.29)$$

Pode-se ver no gráfico da Fig. 12 a comparação entre o caso relativístico e o caso clássico. Para o termo clássico  $x(t) = (F/2m)t^2$  temos um arco de parábola, enquanto que no caso relativístico temos um movimento hiperbólico.

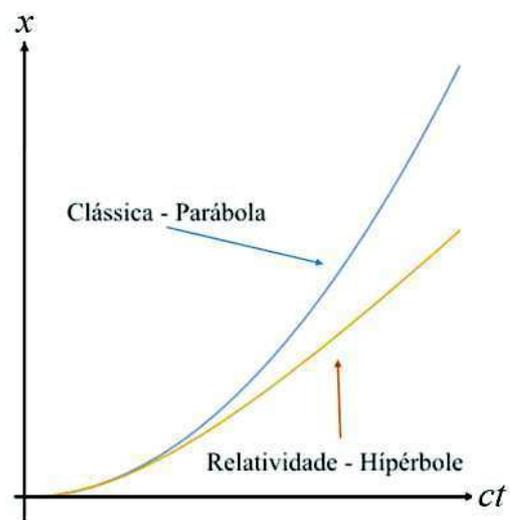


Figura 12: Movimento Clássico vs Movimento Relativístico para uma partícula sujeita a uma força constante.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a construção deste trabalho notou-se que a Relatividade é mais ampla do que inicialmente pensava-se, entretanto buscou-se juntar e trazer um pouco desta área da Física tão fascinante.

A Teoria da Relatividade Restrita nos mostra uma nova forma de ver o *tempo* e o *espaço*, de como estes se modificam para atender ao segundo postulado da teoria de Einstein, a constância da velocidade da luz. De modo a deixarmos de um pouco de lado o que conhecemos hoje, para que o novo conhecimento possa fixar-se. Sabendo disso, é importante ressaltar que esta teoria modificou muitos conceitos da Mecânica Clássica, como por exemplo as transformadas de Galileu que acabaram sendo substituídas pelas transformadas de Lorentz. Além disso, a teoria demonstra que um corpo que tenha velocidade  $v$  e  $m_0 \neq 0$  não poderá jamais alcançar a velocidade da luz  $c$ . Outra assunto bastante interessante é a definição de momento relativístico, porque graças a ele é possível calcular momento de partículas de massa inercial nula  $m_0 = 0$ .

Concluo dizendo que para mim foi de extrema importância conhecer melhor esta teoria e poder deixar um pouco do meu entendimento sobre ela aos que desejarem, é uma extrema alegria poder contribuir com construção e divulgação do conhecimento científico.

## REFERÊNCIAS

- EINSTEIN, A. **Zur Elektrodynamik bewegt Körper.** [S.l.]: Eingegangen, 1905.
- EINSTEIN, A. **A Teoria da Relatividade Especial e Restrita.** 1. ed. Rio de Janeiro-RJ: Contratempo, 1999. (9ª Reimpressão).
- EINSTEIN, A. **Sobre o Princípio da Relatividade e suas Implicações.** Campinas, SP: Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik, 2005.
- GALILEI, G. **Dialogue Concerning the Two Chief Word Systems.** 3. ed. Berkeley, Calif: University of California, 1953.
- GRIFFITHS, D. J. **Eletrodinâmica.** 3. ed. São Paulo: Pearson, 2011.
- LOPES, J. L. **A imagem física do mundo: de Parmênides a Einstein.** [S.l.]: Scielo, 1991.
- MARTINS, R. de A. **A Dinâmica Relativística Antes de Einstein.** Campinas, SP, Brasil: Sociedade Brasileira de Física, 2005. (1, v. 27). Scielo.
- MICHELSON, A. A.; MORLEY, E. W. **On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether.** 203. ed. [S.l.]: American Journal of Science, 1887. (XXXVI).
- NEWTON, I. **PRINCIPIA - Princípios Matemáticos de Filosofia Natural.** 1. ed. São Paulo: Edusp, 2002.
- NUSSENZVEIG, M. **Curso de Física Básica.** 1. ed. São Paulo: Blucher, 1998. (9ª Reimpressão, 2011, v. 4).
- NUSSENZVEIG, M. **Curso de Física Básica.** 5. ed. São Paulo-SP.: Edgard Blucher, 2015. (2ª Reimpressão, 2005, v. 1).
- PORTO, C. M.; PORTO, M. B. D. S. M. **Uma visão do espaço na mecânica newtoniana e na teoria da relatividade de Einstein.** [S.l.]: Revista Brasileira de Ensino de Física, 2008. (n. 1, v. 30).
- REEN, J. **A física clássica de cabeça para baixo: Como Einstein descobriu a teoria da Relatividade Especial.** 1. ed. São Paulo: Sociedade Brasileira de Física, 2004. (1, v. 27). Scielo.
- WATARI, K. **Mecânica Clássica.** 2ª. ed. São Paulo-SP: Livraria de Física-USP, 2004.

## APÊNDICE A - EXPERIMENTO DE MICHELSON E MORLEY

Michelson e Morley, em uma tentativa salvar a transformação de velocidades de Galileu (Eq. 2.2), durante os anos de 1881 a 1887, desenvolveram diversas experiências baseadas no interferômetro de Michelson. Com a experiência seria possível detectar o movimento relativo da Terra em relação ao éter, a luz teria velocidade diferente em direções diferentes. Na Fig. 13 está um desenho do interferômetro utilizado para fazer nos experimentos de Michelson e Morley, e a Fig. 14 mostra como o esquema dos caminhos percorridos pelos feixes de luz.

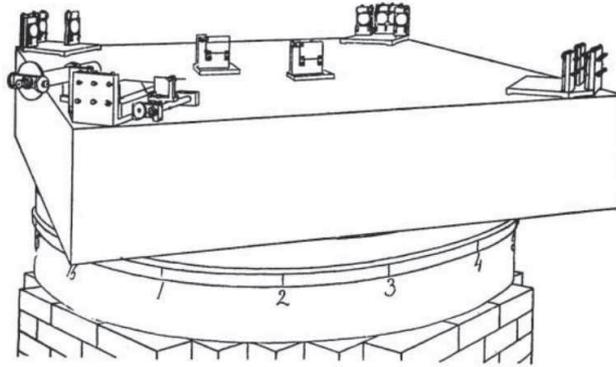


Figura 13: Experimento de Michelson e Morley (1887).  
(MICHELSON; MORLEY, 1887, p. 887).

O interferômetro têm braços de comprimentos  $l_1$  e  $l_2$ .  $F$  é a fonte de luz,  $P$  é a placa semi-espelhada divisora do feixe de luz,  $E_1$  e  $E_2$  são espelhos e  $L$  é a luneta de observação. Se tomarmos a Terra como exemplo, sua velocidade em torno do Sol é de aproximadamente 30 km/s durante metade do ano e cerca de 30 km/s no sentido contrário durante a outra metade do ano, tendo uma variação de 60 km/s. Suponha que na Fig. 14, a Terra esteja se movendo em relação ao éter com velocidade  $V$  na direção de  $OE_1$  (NUSSENZVEIG, 1998, p.178). Nesse sentido, a velocidade da luz seria  $c' = c - V$  na ida e  $c' = c + V$  na volta em relação à Terra. E o tempo total, ida e volta, em  $l_1$  é:

$$t_1 = \frac{l_1}{c - V} + \frac{l_1}{c + V} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{2l_1}{c(1 - \beta^2)}, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\beta \equiv \frac{V}{c}$  é um parâmetro adimensional.

O percurso da luz ao longo do braço  $l_2$ , visto do referencial do éter, é oblíquo, já que durante o tempo de viagem da luz, o espelho  $E_2$ , a placa  $P$  se deslocam de  $O_1$

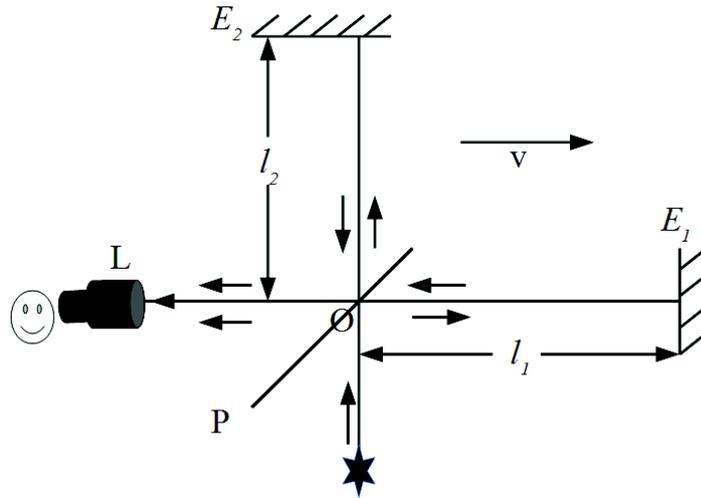


Figura 14: Experimento de Michelson e Morley.  
Figura adaptada (NUSSENZVEIG, 1998, p.178).

para  $O_2$ , como mostra a Fig. 15. A velocidade luz, tanto na ida quanto na volta, é vista

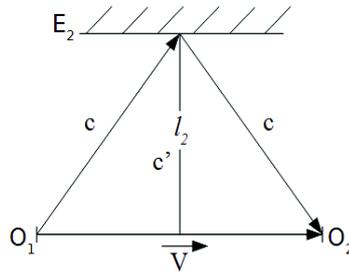


Figura 15: Espelho  $E_2$  (Análise 1).  
Figura adaptada (NUSSENZVEIG, 1998, p. 179).

do referencial da Terra como:

$$c' = \sqrt{c^2 - V^2} = c\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (\text{A.2})$$

Assim, o tempo ao longo do percurso  $l_2$  será

$$t_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{A.3})$$

de forma que a diferença de caminho ótico dos feixes é dado por  $\Delta$ .

$$\Delta = c(t_1 - t_2) = \frac{2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( \frac{l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - l_2 \right). \quad (\text{A.4})$$

Se fizermos o dispositivo girar  $90^\circ$  fará que  $l_1$  e  $l_2$  mudem de função, então:

$$t'_1 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}} \quad ; \quad t'_2 = \frac{2l_1}{c(1-\beta^2)}. \quad (\text{A.5})$$

$$\Delta' = c(t'_1 - t'_2) = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( l_1 - \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (\text{A.6})$$

As franjas de interferência anteriormente observadas devem apresentar um deslocamento devido à mudança na diferença de caminho ótico, dado por:

$$\Delta' - \Delta = \frac{2}{\sqrt{1-\beta^2}}(l_1 + l_2) \left( 1 - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right). \quad (\text{A.7})$$

É esperado que  $\beta \ll 1$ . Dá Eq. (2.24), temos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2. \quad (\text{A.8})$$

Então esperava-se um deslocamento medido em termos de número de franjas  $\delta m$  da ordem de:

$$\delta m \equiv \frac{\Delta' - \Delta}{\lambda} \cong -\frac{(l_1 + l_2)}{\lambda} \beta^2. \quad (\text{A.9})$$

Porém não foram observadas nenhuma mudança no padrão de interferência e, conseqüentemente, nenhuma alteração na velocidade da luz, mostrando que a hipótese de um éter estacionário como um referencial privilegiado é incorreta" (MICHELSON; MORLEY, 1887).