

Séries de Fourier e Aplicações

Bruno de Souza Santos

29 de abril de 2016

Bruno de Souza Santos

Séries de Fourier e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Licenciado em Ciências da Natureza e Matemática com Habilitação em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. João Philipe de Macedo Braga

GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA.

Acarape – CE

29 de abril de 2016

**Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro- Brasileira
Direção de Sistema Integrado de Bibliotecas da UNILAB (DSIBIUNI)
Biblioteca Setorial Campus Liberdade
Catalogação na fonte**

Bibliotecário: Gleydson Rodrigues Santos – CRB-3 / 1219

S235s Santos, Bruno de Souza.

Séries de Fourier e aplicações. / Bruno de Souza Santos. – Acarape, 2016.

46 f.; 30 cm.

Monografia apresentada Curso de Ciências da Natureza e Matemática, do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza (ICEN) da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira – UNILAB.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe de Macedo Braga.
Inclui Gráficos e Referências.

1. Fourier, Séries de. I. Título.

CDD 515.2433

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) sob o título Séries de Fourier e Aplicações, defendida por Bruno de Souza Santos e aprovada em 29 de abril de 2016, em Acarape, Ceará, pela banca examinadora constituída pelos doutores e pelo mestre:

Prof. Dr. João Philipe de Macedo Braga
Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - UNILAB
Orientador

Prof. Dra. Silvia Helena Roberto de Sena
Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - UNILAB
Banca Examinadora

Prof. Ms. Levi Rodrigues Leite
Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - UNILAB
Banca Examinadora

Agradecimentos

- Agradeço inicialmente à Deus por me conceder o dom da vida e toda a saúde e paciência necessária para realização desse trabalho.
- Agradeço, por fim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

Resumo

As Séries de Fourier desempenham um papel importante na descrição e entendimento dos fenômenos naturais. De fato, os fenômenos onde ocorrem dissipação, ondas, oscilações, etc. podem ser estudados utilizando séries de Fourier que são bastante úteis para soluções das Equações Diferenciais que modelam esses problemas da Física-Matemática. Além disso, a Análise Harmônica encontra aplicações em outros campos da Matemática e também em outras áreas do conhecimento. Veremos mais adiante que uma série de Fourier possui coeficientes a_m 's e b_m 's que são encontrados manipulando-se de forma algébrica a série geral de Fourier. A presente obra têm por objetivo analisar as séries de Fourier e a aplicação de tal teoria, demonstrando que a mesma pode ser aplicada no estudo de vários problemas. Em particular, mostraremos como algumas funções podem ser aproximadas por séries de senos e cossenos e resolveremos o problema do oscilador harmônico forçado para uma força externa tipo onda retificada.

Abstract

The Fourier play an important role in the description and understanding of the natural phenomena. In fact, the phenomena which occur dissipation, waves, oscillations, etc. They can be studied using Fourier series that are quite useful for solutions of differential equations that model these problems of Mathematical Physics. In addition, Harmonic analysis finds applications in other fields of mathematics and also in other areas of knowledge. We shall see later that has a Fourier series coefficients a_m 's and B_m 's that are found manipulating algebraically general Fourier series. This work aim to analyze the Fourier series and the application of this theory, demonstrating that it can be applied in the study of various problems. In particular, we show how some functions can be approximated by sines and cosines series and solve the problem of forced harmonic oscillator to an external force type wave rectified.

Sumário

Lista de Figuras	p. viii
1 Introdução	p. 1
2 Séries de Fourier	p. 8
2.1 Produto Interno	p. 8
2.2 Norma	p. 10
2.3 Ortogonalidade	p. 11
2.3.1 Conjuntos ortogonais	p. 12
2.4 Convergência	p. 14
2.5 Estudo da Teoria	p. 16
2.5.1 Propriedades das funções pares e ímpares	p. 16
2.5.2 Propriedades dos senos e cossenos definidas num intervalo simétrico, $[-\pi, \pi]$	p. 17
2.5.3 Coeficientes da Série de Fourier em um intervalo simétrico	p. 19
3 Aplicações da Série de Fourier	p. 23
3.1 Oscilador Harmônico (Simple, Amortecido e Forçado)	p. 31
4 Conclusão	p. 39
Apêndice A – Comandos dos gráficos no Mathematica	p. 40
A.1 Seno e Cosseno	p. 40

A.2 Exemplo 1 das Aplicações	p.41
A.3 Exemplo 2 das Aplicações	p.42
A.4 Exemplo 3 das Aplicações	p.43
A.5 Força tipo onda retificada	p.44
Referências Bibliográficas	p.45

Lista de Figuras

1.1	Função Seno	p.3
1.2	Função Cosseno	p.3
1.3	Cálculo da Sombra	p.3
1.4	Barra de comprimento A isolada lateralmente	p.4
3.1	A Função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in [0,1/2]$ e $f(x) = x$ se $x \in [1/2,1]$ e somas parciais da equação 3.2, onde m representa a quantidade de termos adicionados.	p.25
3.2	A Função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in [0,1/2]$ e $f(x) = x$ se $x \in [1/2,1]$ e somas parciais da equação 3.5, onde m representa a quantidade de termos adicionados.	p.25
3.3	A Função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se $x \in [0,1/2]$ e $f(x) = 1 - x$ se $x \in [1/2,1]$ e somas parciais da equação 3.8, onde m representa a quantidade de termos adicionados.	p.27
3.4	A Função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in [0,1/2]$ e $f(x) = x$ se $x \in [1/2,1]$ e somas parciais da equação 3.10, onde m representa a quantidade de termos adicionados.	p.28
3.5	A Função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se $x \in [0,1/4]$, $f(x) = 1/4$ se $x \in [1/4,3/4]$ e $f(x) = 1 - x$ se $x \in [3/4,1]$ e somas parciais da equação 3.13, onde m representa a quantidade de termos adicionados.	p.30
3.6	A Função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in [0,1/2]$ e $f(x) = x$ se $x \in [1/2,1]$ e somas parciais da equação 3.15, onde m representa a quantidade de termos adicionados.	p.31
3.7	A Função $x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela equação 3.63, com $m \in \mathbb{N}$, $F_0 = 1$ e $\omega_0 = \pi$	p.38

1 *Introdução*

Com a incerteza da origem da trigonometria (medida das partes de um triângulo) pode-se dizer que o seu desenvolvimento inicial surgiu por volta do século IV ou V a.C., com os babilônios, egípcios e os gregos para responder as questões geradas pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, sendo o seu principal estudo os corpos celestes.

A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. No período-helênico, dada a falta do conceito de medida de ângulo, tal estudo seria melhor chamado "trilaterometria", ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que "trigonometria", a medida de partes de um triângulo [1].

Hiparco de Nicécia chamado de o pai da trigonometria sem dúvidas foi um grande matemático grego, dentre as suas contribuições está um tratado de 12 livros, onde estão presentes uma tabela trigonométrica e uma tábua de cordas.

Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. As principais contribuições à Astronomia, atribuídas a Hiparco se constituíram na organização de dados empíricos derivados dos babilônios, bem como na elaboração de um catálogo estelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes, duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação da eclíptica e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios [2, 3].

Outro grande matemático que contribuiu na construção da trigonometria foi Menelau de Alenxandria, por volta de 100 d.C., que elaborou um tratado sobre cordas e outro sobre trigonometria esférica (Sphaerica) que é o mais antigo estudo conhecido sobre o tema.

A obra mais significativa da antiguidade foi escrita por Ptolomeu de Alexandria, também popularmente chamado pelos Árabes de o Almagesto nome pelo qual sua obra ficou conhecida até os dias atuais, é um tratado de cerca de 13 (treze) livros que é famoso por sua compacidade e elegância.

Mostrando a mesma influência babilônica apresentada por Hiparco, Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes. Usou $\frac{377}{120}$ como aproximação para o número π . Embora não fizesse uso dos termos seno e cosseno, mas das cordas, utilizou o que pode ser considerado o prenúncio da conhecida relação fundamental $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ [2].

Em termos de cordas Ptolomeu construiu uma tabela que varia de meio em meio grau, sendo que ele conhecia as fórmulas que atualmente são conhecidas como:

$$\text{sen}(x + y) = \text{sen}x \cdot \text{cos}y + \text{sen}y \cdot \text{cos}x \quad (1.1)$$

$$\text{sen}(x - y) = \text{sen}x \cdot \text{cos}y - \text{sen}y \cdot \text{cos}x \quad (1.2)$$

$$\text{cos}(x + y) = \text{cos}x \cdot \text{cos}y - \text{sen}x \cdot \text{sen}y \quad (1.3)$$

$$\text{cos}(x - y) = \text{cos}x \cdot \text{cos}y + \text{sen}x \cdot \text{sen}y \quad (1.4)$$

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}, \quad (1.5)$$

onde a, b, c representam as medidas dos lados de um triângulo e $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ representam as medidas dos ângulos opostos aos lados de medidas a, b, c , respectivamente.

O comércio romano com o sul da Índia possibilitaram a disseminação de conhecimentos matemáticos tanto dos babilônicos quanto dos gregos. Além do mais, temos que a mais antiga tábua de senos descoberta na Índia não possuem inventores conhecidos.

O nome seno vem do latim *sinus* que significa seio, curva, volta, cavidade. Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. Mas, na verdade, *sinus* é a tradução latina da palavra árabe *jaib*, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. A palavra árabe adequada, a que deveria ser traduzida, seria, *jiba*, em vez de *jaib*. *Jiba* significa a corda de um arco. Trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes em latim, eles traduziram *jaib* na palavra *sinus* [4].

Somente a partir do século XVII é que o termo cosseno surgiu, como sendo o seno do complemento de um ângulo, ou seja, $\text{cos}\theta = \text{sen}(90^\circ - \theta)$. Diferentemente do

seno, a tangente surgiu de maneira diferenciada para o cálculo da sombra produzida por um objeto qualquer. Na Figura 1.1 está representada a função seno, periódica, e que atinge valores de máximo e mínimo em 1 e -1, respectivamente. Na Figura 1.2 está representada a função cosseno, periódica, e que atinge valores de máximo e mínimo em 1 e -1, respectivamente. Na Figura 1.3 está a representação de um cálculo trigonométrico feito a partir da sombra de um objeto.

A tangente veio de um caminho diferente daquele das cordas que geraram o seno. Era usada para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto. O comprimento das sombras foi também de importância no relógio solar. Tales usou os comprimentos das sombras para calcular as alturas das pirâmides através da semelhança de triângulos. As primeiras tabelas de sombras conhecidas foram produzidas pelos árabes por volta de 860. O nome tangente foi primeiro usado por Thomas Fincke, em 1583 [2].

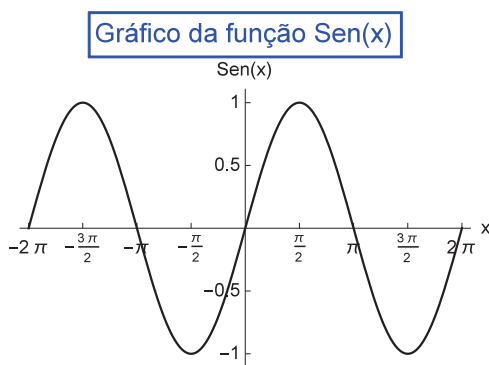


Figura 1.1: Função Seno

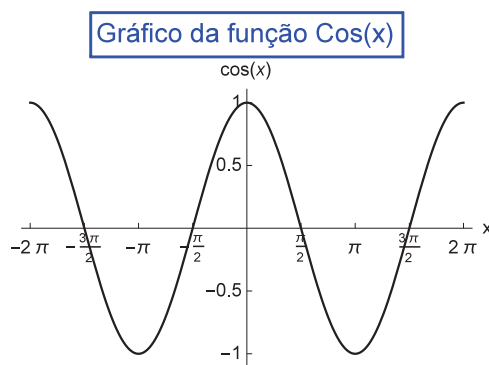


Figura 1.2: Função Cosseno

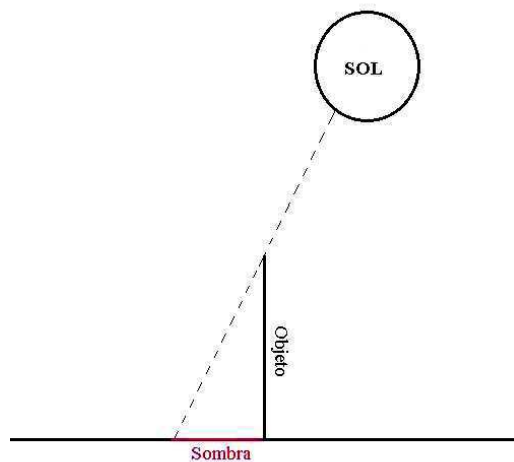


Figura 1.3: Cálculo da Sombra

Desde a antiguidade a trigonometria vem desenvolvendo-se, desde Hiparco até Euler, o que sabemos, contudo, é que o surgimento de tal área foi de grande progresso para a Humanidade, inclusive no que tange as séries de Fourier, objeto de estudo desse trabalho de conclusão de curso.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) nasceu na cidade de Auxerre, França, em 21 de março de 1768. Muito pouca informação têm-se sobre sua mãe e a história conta que seu pai era alfaiate, com a morte de ambos Fourier foi criado e educado pela caridade para ser padre, pois o mesmo era ainda criança quando seus pais morreram.

Em seu tempo Fourier ainda tentou seguir a carreira militar, porém devido a sua origem humilde foi impedido de entrar para o exército. Como Fourier não entrou para o exército ele foi estudar na Escola Normal Superior da França, com os professores Pierre Simon de Laplace e Adrien-Marie Legendre, com o passar do tempo Fourier tornou-se professor e criou a disciplina de Física-Matemática, onde serviu de grande contribuição para a Teoria das Equações Diferenciais.

Mas ele não se conformou apenas com isso, dirigiu um centro de pesquisas no Egito e criou um tratado sobre Egiptologia e posteriormente tornou-se prefeito de algumas cidades da França, sendo nomeado pelo próprio Napoleão Bonaparte.

Em pleno contexto de revolução industrial e novas tecnologias, surge um problema estudado por Fourier no século XIX sobre dissipação do calor. Fourier pensou em uma barra qualquer de comprimento A , Figura 1.4 [5], por hora assumamos que $A = \pi$, isolada lateralmente, onde não há transferência de calor com o meio, ou seja, a condução de calor só ocorrerá nas extremidades. Nota-se portanto que passa a ser um problema



Figura 1.4: Barra de comprimento A isolada lateralmente

com uma variável espacial apenas, que só depende de uma determinada posição e do tempo, ou seja, serão fornecidas a temperatura nas extremidades da barra para um mesmo tempo t , e ainda daremos a distribuição inicial de temperatura o qual denotaremos por $f(x,0)$ que é a distribuição inicial de temperatura no instante $t = 0$. O que Fourier desejou obter na verdade foi $u(x,t)$, que é a temperatura no ponto de abscissa x qualquer em um determinado instante t .

Fourier ao analisar a equação que rege a transmissão do calor entre dois pontos vizinhos chegou à seguinte equação [5, 6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

Tal equação é denominada *equação do calor*, essa equação aparece em vários problemas de difusão até mesmo em economia, tendo como base esse enunciado, Fourier ainda supôs para o caso mais simples possível as seguintes condições:

- (i) a função f como sendo a distribuição inicial em um ponto de abscissa x qualquer, $f(x, 0)$;
- (ii) as temperaturas nas extremidades da barra seriam iguais a zero, $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Usando a técnica de separação das variáveis, tal que seja possível escrever $u(x, t)$ como produto de duas funções, uma que só dependa de x e outra apenas de t , temos $u(x, t) = F(x) \cdot G(t)$, derivando u em relação a t , e em relação a x teremos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x) \cdot G'(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x) \cdot G(t),$$

substituindo na *Equação do Calor* Fourier chegou no seguinte resultado

$$\frac{1}{k} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda (\text{Constante}). \quad (1.7)$$

Baseado na equação anterior temos três possibilidades

a) $G'(t) = k\lambda G(t) \Rightarrow G(t) = Ae^{k\lambda t}$;

b) $F''(x) = \lambda F(x)$

- Se $\lambda = 0 \Rightarrow F''(x) = 0 \Rightarrow F(x) = Bx + C$, portanto

$$u(x, t) = F(x) \cdot G(t) = Ae^{k\lambda t}(Bx + C) = A(Bx + C);$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \text{ onde } L = \pi, \text{ temos que}$$

$$\begin{cases} A(B \cdot 0 + C) = 0 \\ A(B \cdot \pi + C) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = C = 0$$

Portanto $u(x, t) \equiv 0$.

- Se $\lambda > 0 \Rightarrow F(x) = Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x}$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{\sqrt{\lambda}\pi} - Be^{-\sqrt{\lambda}\pi} = B(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi}) = 0 \end{cases} \Rightarrow B = C = 0$$

- Se $\lambda < 0 \Rightarrow F(x) = B \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x)$
 $F(0) = 0 \Rightarrow B \cos(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
 $F(\pi) = 0 \Rightarrow C \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0.$

Como a solução nula não satisfaz a nossa equação pelo fato de ser trivial, temos que $C \neq 0$. Consequentemente, $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{-\lambda} = n \in \mathbb{N} \Rightarrow -\lambda = n^2 \Rightarrow \lambda = -n^2.$$

Logo, a solução geral será $u(x,t) = Ae^{-kn^2t} \operatorname{sen}(nx); n \in \mathbb{N}$. Levando-se em conta a condição inicial, $u(x,0) = f(x)$

$$f(x) = A \operatorname{sen}(nx). \quad (1.8)$$

Fourier descobriu com isso que existe um conjunto de funções que podem ser escritas em função de senos, podendo essas funções serem contínuas ou descontínuas. O problema a ser analisado nos próximos capítulos será o de somas de senos, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) \quad (1.9)$$

De acordo com Riemann, quando Fourier apresentou seu primeiro artigo na Academia de Paris em 1807, dizendo que uma função arbitrária podia ser expressa como um somatório de senos e cossenos, o matemático Lagrange ficou tão surpreso que negou, categoricamente, que isso fosse possível. Embora a afirmação de Fourier seja forte demais, seus resultados inspiram um fluxo de pesquisa importante que continua até hoje. Em 1822, o matemático francês Fourier apresentou sua obra *Theorie Analytique de la Chaleur*, onde apresentou um tratamento matemático sobre o problema da condução térmica, em plena a revolução industrial.

Desde o século XVII, com o desenvolvimento do cálculo diferencial, físicos e matemáticos conseguiram descrever inúmeros fenômenos por meio das equações diferenciais. Em seu tratado, Fourier não apenas apresenta uma solução para a equação do calor, mas também uma forma para resolver inúmeras equações diferenciais parciais e ordinárias. Porém o que tornou Fourier importante foi a transformada que leva seu nome, servindo basicamente para analisar o domínio da frequência, sendo uma ferramenta de trabalho de profissionais da Física, da Matemática, e outras áreas.

As séries de Fourier são capazes de representar uma família de funções periódicas envolvendo tanto funções contínuas como não contínuas, diferentemente das séries de Taylor, que só representam funções contínuas e deriváveis. Algumas das funções

representáveis podem ter significado físico, como os sinais musicais ou elétricos.

A presente obra têm por objetivo analisar as séries de Fourier investigando os principais fundamentos da análise harmônica, e demonstrando que a presente teoria pode ser aplicada ao estudo do oscilador harmônico forçado.

Nesse capítulo, foi feita uma abordagem histórica sobre séries trigonométricas, sobre Fourier e também sobre as séries que levam o seu nome. No capítulo 2, será feito um estudo detalhado de como aproximar funções que, em princípio não podem ser descritas por uma série de Taylor através de um somatório de senos e cossenos. Por fim, no capítulo 3, aplicaremos a teoria, calculando as séries de Fourier de algumas funções particulares. Além disso, mostraremos como essas séries podem ser aplicadas no estudo do oscilador harmônico, onde resolveremos o caso do oscilador harmônico sujeito a uma força externa tipo onda retificada.

2 Séries de Fourier

Antes de falarmos da série de Fourier precisamos de uma introdução básica para garantirmos um perfeito entendimento de toda a teoria por parte dos leitores.

2.1 Produto Interno

Dados dois vetores quaisquer $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{x}_i$ e $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$. O produto interno $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ dos dois vetores, apresenta as seguintes propriedades [7] - [9]:

- i) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n, \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;
- ii) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ e todo escalar $k, \langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$;
- iii) $\forall u \in \mathbb{R}^n, \langle u, u \rangle = 0$ se $u = 0$ e $\langle u, u \rangle > 0$ se $u \neq 0$;
- iv) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n, \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

De maneira análoga, podemos aplicar o conceito de produto interno para vetores no estudo de funções, definindo o produto interno para funções. Dadas as funções f e g definidas em um intervalo contínuo $[a, b], \mathbb{V} = C^0[a, b]^1$. Quando a integral definida do produto $f(x)g(x)$ existe é possível formular a seguinte definição [10] - [14]:

Definição: O produto interno de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ em um intervalo qualquer $[a, b]$ têm a seguinte forma

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx. \quad (2.1)$$

Apresentando as seguintes propriedades que são similares às do produto escalar em \mathbb{R}^n :

- i) Para todos os $f, g \in \mathbb{V}, \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$;

¹O intervalo pode ser também $(-\infty, +\infty), [0, \infty),$ etc.

ii) Para todos os $f, g \in \mathbb{V}$ e todo escalar k , $\langle kf, g \rangle = k \langle f, g \rangle$;

iii) Para todo $f \in \mathbb{V}$, $\langle f, f \rangle = 0$ se $f = 0$ e $\langle f, f \rangle > 0$ se $f \neq 0$;

iv) Para todos os $f_1, f_2, g \in \mathbb{V}$, $\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$.

Demonstração:

Sejam $f, g, h \in \mathbb{V}$ e k um escalar real, desde que $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx$, então

$$\text{i) } \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle;$$

$$\text{ii) } \langle kf, g \rangle = \int_a^b kf(x)g(x) dx = k \int_a^b f(x)g(x) dx = k \langle f, g \rangle;$$

iii) Se $f \neq \bar{0}$, então, como f é contínua, existe um subintervalo de $[a, b]$, onde f^2 é limitada inferiormente por um número maior do que zero. Assim, $\langle f, f \rangle = \int_a^b (f(x))^2 dx > 0$.

$$\text{iv) } \langle f + g, h \rangle = \int_a^b (f(x) + g(x))h(x) dx = \int_a^b f(x)h(x) dx + \int_a^b g(x)h(x) dx = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle. \quad \square$$

Usando as propriedades (i) a (iv) acima podemos provar outras propriedades. Seja \mathbb{V} um espaço vetorial de funções com produto interno. São válidas as seguintes propriedades:

v) Para todos os $f, g_1, g_2 \in \mathbb{V}$, $\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$;

vi) Para todos os $f, g \in \mathbb{V}$ e todo escalar α , $\langle f, \alpha * g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$;

vii) $\langle f, f \rangle = 0$ se, e somente se $f = \bar{0}$.

Demonstração:

Provemos ainda as propriedades de (v) a (vii) usando as propriedades de (i) a (iv). Dados $f, g_1, g_2 \in \mathbb{V}$ e α um escalar.

$$\text{v) } \langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle g_1 + g_2, f \rangle = \langle g_1, f \rangle + \langle g_2, f \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle;$$

$$\text{vi) } \langle f, \alpha * g \rangle = \langle \alpha * g, f \rangle = \alpha \langle g, f \rangle = \alpha \langle f, g \rangle;$$

vii) Se $f \neq \bar{0}$, então pela definição de produto interno, $\langle f, f \rangle > 0$. Se $f = \bar{0}$, então $\langle \bar{0}, \bar{0} \rangle = \langle \alpha \bar{0}, \bar{0} \rangle = \alpha \langle \bar{0}, \bar{0} \rangle$, para todo escalar α . O que implica que $\langle \bar{0}, \bar{0} \rangle = 0$. \square

2.2 Norma

Bem como o produto escalar pode ser estendido ao \mathbb{R}^n e a certos espaços de funções o conceito de norma também o pode, desde que esteja definido um produto interno, $\langle f, f \rangle = \|f\|^2$ ou $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Tomando-se por base que a norma pode ser expressa em função do produto interno podemos definir a seguinte equação, $\|f_m(x)\| = \sqrt{\langle f_m, f_m \rangle}$, onde $\|f_m(x)\|$ é o comprimento generalizado de uma função f_m ; isto é, [10] - [14]

$$\|f_m(x)\| = \sqrt{\int_a^b f_m^2(x) dx}. \quad (2.2)$$

Exemplo 1: Sejam $f(t) = 1$, $g(t) = t$ e $h(t) = \cos \pi t$. Então

- $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-1}^1 dt = 2$. Assim, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{2}$;
- $\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$. Assim, $\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}}$;
- $\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \int_{-1}^1 \cos^2 \pi t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 s ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2s) ds$
 $= \frac{1}{2\pi} \left(s + \frac{1}{2} \text{sen} 2s \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 1$. Assim, $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle} = 1$

Proposição: Seja $\mathbb{V} = CP^0[a, b]$, o espaço vetorial de todas as funções reais contínuas por partes $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e α um escalar real, então podemos definir as seguintes propriedades:

- i) $\forall f \in \mathbb{V}, \|f\| \geq 0$ e $\|f\| = 0$ se, e somente se, $f = \bar{0}$;
- ii) $\forall f \in \mathbb{V}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$;
- iii) $\forall f, g \in \mathbb{V}$ vale a desigualdade, $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz);
- iv) $\forall f, g \in \mathbb{V}$ vale a desigualdade, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Desigualdade triangular).

Demonstração:

- i) Pela propriedade (i), temos que $\langle f, f \rangle > 0$ se, e somente se $f \neq \bar{0}$ e pela propriedade (vii) temos que $\langle f, f \rangle = 0$ se, e somente se $f = \bar{0}$, e por fim chegamos no resultado desejado;

$$\text{ii) } \|\alpha f\| = \sqrt{\langle \alpha f, \alpha f \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle f, f \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle f, f \rangle} = |\alpha| \|f\|;$$

iii) Se $g = 0$, teremos uma igualdade porém, supondo que $g \neq 0$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ vale a seguinte desigualdade $\langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle$ é maior ou igual a zero. Assim,

$$0 \leq \|f + \lambda g\|^2 = \langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle = \|f\|^2 + 2\lambda \langle f, g \rangle + \lambda^2 \|g\|^2 = p(\lambda).$$

Temos um polinômio do segundo grau que é maior ou igual a zero para todo λ . Isto implica que

$$\Delta = 4(\langle f, g \rangle)^2 - 4\|f\|^2\|g\|^2 \leq 0.$$

Logo, $\langle f, g \rangle^2 \leq \|f\|^2\|g\|^2$.

Finalmente, considerando a raiz quadrada positiva de cada um dos membros desta última igualdade

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|\|g\|$$

iv) Usando o item anterior e tomando-se em certo ponto a raiz quadrada chegaremos no resultado desejado

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 + 2\langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \\ &\leq (\|f\| + \|g\|)^2; \\ \sqrt{\|f + g\|^2} &\leq \sqrt{(\|f\| + \|g\|)^2} \\ \|f + g\| &\leq \|f\| + \|g\|. \forall f, g \in \mathbb{V} \quad \square \end{aligned}$$

2.3 Ortogonalidade

Definimos que dois vetores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais se o produto escalar entre eles for igual a zero, $\langle u, v \rangle = 0$. Assim, podemos definir de maneira análoga essa afirmação para as funções ortogonais [10] - [14].

Definição: Seja $\mathbb{V} = CP^0[a, b]$. Duas funções f e g são ortogonais se, e somente se

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \quad (2.3)$$

A palavra ortogonal no presente contexto difere-se da mesma palavra em análise vetorial não tendo portanto qualquer significado geométrico.

2.3.1 Conjuntos ortogonais

No presente estudo faremos uso de conjuntos essencialmente infinitos de funções ortogonais.

Definição: Diz-se que um conjunto de funções com valores reais $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots\}$ é ortogonal em um intervalo $[a, b]$ se

$$\langle f_m, f_n \rangle = \int_a^b f_m(x)f_n(x)dx = 0, \quad m \neq n \quad (2.4)$$

Exemplo 1: Mostre que o conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ é ortogonal no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solução: Fazendo $\phi_0(x) = 1$ e $\phi_n(x) = \cos nx$, devemos mostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)dx = 0, \quad n \neq 0 \quad e \quad \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

Temos, no primeiro caso,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(nx)dx = \frac{1}{n} \text{sen}(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} [\text{sen}(n\pi) - \text{sen}(-n\pi)] = 0, \quad n \neq 0$$

e no segundo caso,

$$\begin{aligned} \langle \phi_m(x)\phi_n(x) \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x]\}dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{sen}[(m+n)x]}{m+n} + \frac{\text{sen}[(m-n)x]}{m-n} \right\} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que o conjunto $\left\{ 1, \cos \frac{\pi t}{L}, \text{sen} \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \text{sen} \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \text{sen} \frac{n\pi t}{L}, \dots \right\}$ é ortogonal no intervalo $[-L, L]$. Todas as funções exceto quando $n = 0$, são funções cujas primitivas são periódicas de período igual a $2L/n$, então a integral de $-L$ a L destas funções é igual a zero e portanto elas são ortogonais à função constante 1.

$$1. \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L} \right\rangle = \int_{-L}^L \cos \left(\frac{n\pi t}{L} \right) \sin \left(\frac{n\pi t}{L} \right) dt$$

fazendo-se substituição e chamando $u = \frac{\pi t}{L}$ e $\frac{du}{dt} = \frac{\pi}{L} \Rightarrow dt = \frac{L}{\pi} du$, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nu) \sin(mu) du$$

usando a relação trigonométrica $\cos u \sin v = \frac{1}{2} [\sin(u+v) - \sin(u-v)]$, temos

$$\begin{aligned} & \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left\{ \sin[(n+m)u] - \sin[(n-m)u] \right\} du = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ \sin[(n+m)u] - \sin[(n-m)u] \} du \\ &= \frac{L}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(n+m)u] du - \int_{-\pi}^{\pi} \sin[(n-m)u] du \right\} \\ &= \frac{L}{2\pi} \left\{ -\frac{\cos[(n+m)u]}{n+m} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\cos[(n-m)u]}{n-m} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} \\ &= \frac{L}{2\pi} \left\{ -\frac{\cos[(n+m)\pi]}{n+m} - \frac{\cos[(n+m)(-\pi)]}{n+m} + \frac{\cos[(n-m)\pi]}{n-m} - \frac{\cos[(n-m)(-\pi)]}{n-m} \right\} = \frac{L}{2\pi} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Para $m \neq n$ temos que

$$\begin{aligned} 2. \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \cos \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \cos \left(\frac{n\pi t}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi t}{L} \right) dt \\ &= \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nu) \cos(mu) du = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ -\cos[(m+n)u] + \cos[(m-n)u] \} du \\ &= \frac{L}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[(m+n)u]}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin[(m-n)u]}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \left\langle \sin \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_{-L}^L \sin \left(\frac{n\pi t}{L} \right) \sin \left(\frac{m\pi t}{L} \right) dt \\ &= \frac{L}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nu) \sin(mu) du = \frac{L}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{ -\cos[(m+n)u] + \cos[(m-n)u] \} du \\ &= \frac{L}{2\pi} \left\{ -\frac{\sin[(m+n)u]}{m+n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin[(m-n)u]}{m-n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2: Mostre que o conjunto $\left\{ 1, \cos \frac{\pi t}{L}, \sin \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \sin \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots \right\}$ é ortogonal no intervalo $[0, L]$.

Solução: Vamos mostrar que os conjuntos $\left\{1, \cos \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \dots\right\}$ e $\left\{\sin \frac{\pi t}{L}, \sin \frac{2\pi t}{L}, \dots, \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots\right\}$ são ortogonais.

$$\left\langle 1, \cos \frac{n\pi t}{L} \right\rangle = \int_0^L \cos \left(\frac{n\pi t}{L} \right) dt = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \cos(nu) du = \frac{L}{n\pi} \sin(nu) \Big|_0^\pi = 0.$$

Para $m \neq n$ temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \cos \frac{n\pi t}{L}, \cos \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_0^L \cos \left(\frac{n\pi t}{L} \right) \cos \left(\frac{m\pi t}{L} \right) dt = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \cos(nu) \cos(mu) du \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_0^\pi \{ \cos[(m+n)u] + \cos[(m-n)u] \} du = \frac{L}{2\pi} \left\{ \frac{\sin[(m+n)u]}{m+n} \Big|_0^\pi + \frac{\sin[(m-n)u]}{m-n} \Big|_0^\pi \right\} = 0 \\ \left\langle \sin \frac{n\pi t}{L}, \sin \frac{m\pi t}{L} \right\rangle &= \int_0^L \sin \left(\frac{n\pi t}{L} \right) \sin \left(\frac{m\pi t}{L} \right) dt = \frac{L}{\pi} \int_0^\pi \sin(nu) \sin(mu) du \\ &= \frac{L}{2\pi} \int_0^\pi \{ -\cos[(m+n)u] + \cos[(m-n)u] \} du = \frac{L}{2\pi} \left\{ -\frac{\sin[(m+n)u]}{m+n} \Big|_0^\pi + \frac{\sin[(m-n)u]}{m-n} \Big|_0^\pi \right\} = 0. \end{aligned}$$

2.4 Convergência

Podemos ainda, estender o conceito de convergência de números reais para o espaço das funções contínuas por partes, ou seja, para $\mathbb{V} = CP^0[a, b]$ [10] - [14].

Definição: Seja $(f_m)_{m \in \mathbb{N}} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ uma sequência de funções, talque $f_m \in \mathbb{N}$ converge para um vetor f de \mathbb{V} se, e somente se,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\| = 0. \quad (2.5)$$

Neste caso escrevemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f_m) = f. \quad (2.6)$$

Note que $\|f_m - f\|$ é exatamente a distância de f_m a f , $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$ nos diz que $\{f_m\}$ converge para f se, e somente se, a distância de f_m a f tende a 0 quando m torna-se grande. Recorde que a definição acima é uma abreviação dos conceitos de convergência (simples e uniforme): *Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplesmente para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando, dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se obter, para cada $x \in X$, um inteiro $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, o qual depende de ε e de x , tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$; Uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, seja qual for $x \in X$ [15].*

Proposição: Se uma sequência de vetores $(f_m) \in \mathbb{N}$ converge para uma função $f \in \mathbb{V}$, ou seja, nunca pode convergir para mais de um vetor, ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f_m) = f \quad \text{e} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (f_m) = g,$$

então $f = g$.

Demonstração:

Dado $\varepsilon > 0$ existe N inteiro, tal que $\|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\|f_m - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$ se $m > N$. Usando a desigualdade triangular, teremos

$$\|f - g\| = \|f - f_m + f_m - g\| \leq \|f - f_m\| + \|f_m - g\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esta desigualdade mostra que $\|x - y\| = 0$, pois ε é arbitrário. Assim $x = y$. \square

Proposição: Se uma sequência de vetores $(f_m) \in \mathbb{V}$ converge para uma função $f \in \mathbb{V}$ a sequência de números reais $(\langle f_m, g \rangle)$ converge para $\langle f, g \rangle$. Assim,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m, g \rangle = \left\langle \lim_{m \rightarrow \infty} f_m, g \right\rangle.$$

Demonstração:

Seja $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\|\langle f_m, g \rangle - \langle f, g \rangle\| = \|\langle f_m - f, g \rangle\| \leq \|f_m - f\| \|g\|.$$

Passando o limite obtemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\langle f_m, g \rangle - \langle f, g \rangle\| = 0$. O que implica que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f_m, g \rangle = \langle f, g \rangle. \square$$

Definição: Se o limite da sequência das somas parciais converge para f , então uma série de vetores de \mathbb{V} converge para uma função f de \mathbb{V} , ou seja,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m f_n = f \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} f_m.$$

Corolário: Se uma série de vetores de $\mathbb{V} = CP^0[a, b]$ converge para uma função f de \mathbb{V} , então, para toda função g de \mathbb{V} ,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \langle f_m, g \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} f_m, g \right\rangle.$$

Proposição: Seja $(g_m) \subset \mathbb{V}$, um subconjunto de \mathbb{V} de vetores ortogonais não nulos e \mathbb{V} , o espaço das funções contínuas por partes.

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m,$$

então

$$c_m = \frac{\langle f, g_m \rangle}{\|g_m\|^2}, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

Demonstração:

Seja $f = \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m$. Então

$$\langle f, g_m \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} c_m g_m, g_m \right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \langle g_m, g_m \rangle = c_m \|g_m\|^2,$$

pois como os vetores g_m são ortogonais $\langle g_m, g_n \rangle = 0$, se $m \neq n$. Assim,

$$c_m = \frac{\langle f, g_m \rangle}{\|g_m\|^2}, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots$$

2.5 Estudo da Teoria

Uma série de Fourier é uma série do tipo [10] - [14]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (2.7)$$

Antes de continuarmos iremos definir duas propriedades importantes em série de Fourier.

2.5.1 Propriedades das funções pares e ímpares

Uma função $f(x)$ se diz *par* se $f(-x) = f(x)$ e uma função se diz *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$. Assim, $x^3, x^5 - 3x^3 + 2x, \sin nx, \tan nx$ são funções ímpares e $x^4, 2x^6 - 4x^2 + 5, \cos nx, e^x + e^{-x}$ são funções pares, dado que $n \in \mathbb{N}$. As funções com paridade definida possuem as seguintes propriedades:

- O produto de duas funções pares é par.
- O produto de duas funções ímpares é par.

- c) O produto de uma função par e uma função ímpar é ímpar.
 d) A soma ou a diferença de duas funções pares é par. A soma ou a diferença de duas funções ímpares é ímpar.

e) Se f é par, então $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$.

f) Se f é ímpar, então $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$.

g) Se f é par, então sua série é dada da seguinte forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$,

em que $a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$.

h) Se f é ímpar, então sua série é dada da seguinte forma $\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, em que

$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$.

2.5.2 Propriedades dos senos e cossenos definidas num intervalo simétrico, $[-\pi, \pi]$

- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx = \begin{cases} \pi, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}$

Para $n = m$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos(2nx)}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin(2nx)}{4n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

Para $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(nx + mx) + \cos(nx - mx)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\sin[(n+m)x] - \sin[(n-m)x]\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\cos[(n+m)x]}{n+m} + \frac{\cos[(n-m)x]}{n-m} \right\} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) = \begin{cases} \pi, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Para $n = m$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \text{sen}(mx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(2nx)}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{\text{sen}(2nx)}{4n} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

Para $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(nx - mx) - \cos(nx + mx)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos[(n - m)x] - \cos[(n + m)x]\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\text{sen}[(n - m)x]}{n - m} - \frac{\text{sen}[(n + m)x]}{n + m} \right\} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \cos(mx) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

Para $n = m$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(2nx) dx \\ &= \frac{1}{4n} \left[-\cos(2nx) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Para $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx) \cdot \cos(mx) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{sen}(nx + mx) + \text{sen}(nx - mx)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \{\text{sen}[(n + m)x] + \text{sen}[(n - m)x]\} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\cos[(n + m)x]}{n + m} - \frac{\cos[(n - m)x]}{n - m} \right\} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Essas integrais também podem ser definidas para um intervalo $[-L, L]$ qualquer.

2.5.3 Coeficientes da Série de Fourier em um intervalo simétrico

Para encontrarmos os coeficientes de uma Série de Fourier devemos primeiro supor que exista uma função f que seja dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

dentro do intervalo $[-L, L]$.

Integrando a função acima de $[-L, L]$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \int_{-L}^L \left[\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] dx \\ \int_{-L}^L f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \cdot 2L + 0 \implies a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \end{aligned}$$

Para encontrarmos os a_m 's devemos multiplicar a função f em ambos os lados da equação por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrarmos no intervalo $[-L, L]$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] dx \\ \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \\ \left[a_m \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + b_m \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right] &\implies \\ \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= a_m \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \implies a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Os termos b_m 's são encontrados de forma análoga aos a_m s multiplicando a função por $\text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrando de $[-L, L]$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] dx \\ \int_{-L}^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \\ \left[a_m \int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + b_m \int_{-L}^L \text{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right] &\implies \end{aligned}$$

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = b_m \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \implies b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx.$$

Portanto a série de Fourier será dada pela seguinte equação

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.8)$$

onde os coeficientes a_0 , a_m e b_m são dados por

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx; \quad (2.9)$$

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx; \quad (2.10)$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx. \quad (2.11)$$

Podemos ainda escrever a série 3.39 como

$$a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \left[\frac{a_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \frac{b_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]. \quad (2.12)$$

chamando,

$$\cos(\theta_m) = \frac{a_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \quad (2.13)$$

$$\operatorname{sen}(\theta_m) = \frac{b_m}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \quad (2.14)$$

$$C_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}. \quad (2.15)$$

Teremos

$$a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = C_m \left[\cos(\theta_m) \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}(\theta_m) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.16)$$

Aplicando a seguinte identidade trigonométrica,

$$\cos(x) \cos(y) + \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) = \cos(x - y)$$

na equação 3.56 chegaremos no seguinte resultado

$$C_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \theta_m\right) \quad (2.17)$$

e então,

$$\tan(\theta_m) = \frac{b_m}{a_m}, \quad \text{ou} \quad \theta_m = \arctan\left(\frac{b_m}{a_m}\right) \quad (2.18)$$

Novamente, pondo

$$C_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad (2.19)$$

obtemos

$$S(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \theta_m\right). \quad (2.20)$$

Desse modo, além da forma 3.39, podemos também escrevê-la sob a forma 3.31. A partir dessa série é possível obter o espectro da expansão em série de Fourier, onde θ_m representa a fase, o espectro é uma representação no domínio da frequência que consiste em plotar a amplitude e a fase de espectro vs. a frequência.

Definição: Seja f uma função contínuas por partes, periódica de período $2L$. Então f têm uma série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \quad (2.21)$$

cujos coeficientes são dados pelas equações 2.9, 2.10, 2.11. A série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f é contínua e converge para $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ em todos os pontos onde f é descontínua.

Corolário: Seja L um número real maior que zero. Para toda função f pertencente ao espaço das funções contínuas por partes, as séries de Fourier de cossenos e a dos senos de f podem ser assim escritas, respectivamente:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad (2.22)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (2.23)$$

em que

$$a_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{para } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

$$b_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

3 Aplicações da Série de Fourier

No presente capítulo aplicaremos a teoria vista anteriormente em exemplos matemáticos. Ilustraremos o processo de convergência da série de Fourier com alguns exemplos e solucionaremos um problema envolvendo um Oscilador Harmônico Forçado (O.H.F.), e para tal faremos uma breve introdução acerca dos Osciladores Harmônicos (Simples, Amortecido e Forçado).

Como um primeiro exemplo, calcularemos os coeficientes da série de Fourier da seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < L/2 \\ x & \text{se } L/2 \leq x < L \end{cases} \quad (3.1)$$

Vamos calcular as séries de Fourier de senos e cossenos da função $f(x)$. Para a série de cossenos temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{2}{L} \int_{L/2}^L x dx = \frac{2}{L} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{L/2}^L = \frac{2}{L} \left[\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{8} \right] = \frac{2}{L} \cdot \frac{3L^2}{8} = \frac{3L}{4} \\ a_m &= \frac{2}{L} \int_0^L x \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \Rightarrow u = \frac{m\pi x}{L}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{m\pi}{L} \Rightarrow a_m = \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \frac{Lu}{m\pi} \cos(u) \cdot \frac{L}{m\pi} du \\ &= \frac{2L}{m^2\pi^2} \int_{L/2}^L u \cos(u) du = \frac{2L}{m^2\pi^2} \left[u \sin(u) - \int_{L/2}^L \sin(u) du \right] \\ &= \frac{2L}{m^2\pi^2} \left[-\frac{m\pi}{2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \cos(m\pi) - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right], \quad \text{para } m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de cossenos de f é

$$f(x) = \frac{3L}{8} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi) - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{m\pi}{2} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.2)$$

a equação 3.2 pode ser reescrita da seguinte forma

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), 0 \leq x < L \quad (3.3)$$

onde,

$$f_n(x) = \frac{3L}{8} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi) - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{m\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.4)$$

Para a série de senos temos para $m = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{L} \int_{L/2}^L x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dt \Rightarrow u = \frac{m\pi x}{L}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{m\pi}{L} \\ &= \frac{2L}{m^2 \pi^2} \left[-\frac{m\pi x}{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \Big|_{L/2}^L \\ &= \frac{2L}{m^2 \pi^2} \left[-\frac{m\pi}{2} \cos(m\pi) + \frac{m\pi}{2} \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de senos da função f é dada por

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{m\pi}{2} \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{m\pi}{2} \cos(m\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (3.5)$$

a equação 3.5 pode ser reescrita na forma 3.3, onde

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{m\pi}{2} \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{m\pi}{2} \cos(m\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.6)$$

Podemos ainda obter o gráfico da função $f(x)$ e da série de Fourier da mesma. Na figura 3.1 temos a prova do poder das séries de Fourier, onde a medida que m aumenta, a série de Fourier se aproxima da função f , onde utilizamos a equação 3.2 para o cálculo das somas parciais. Observe que existe ponto de descontinuidade e pela definição de convergência convergirá para a média aritmética da soma dos limites laterais.

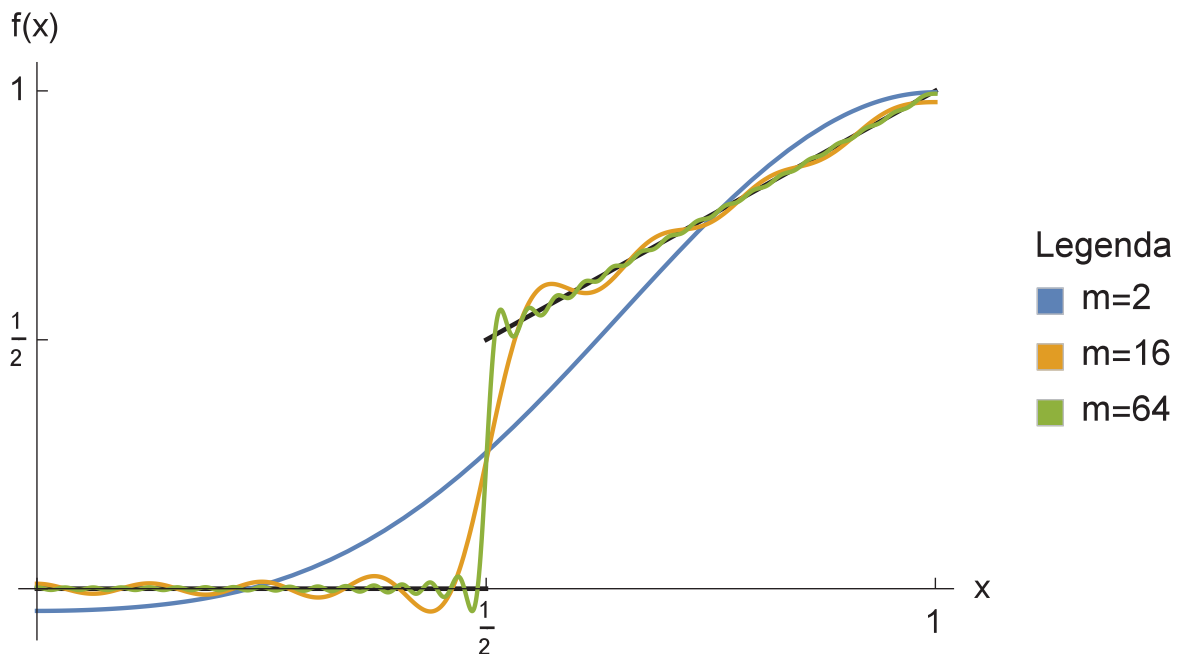


Figura 3.1: A Função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1/2]$ e $f(x) = x$ se $x \in [1/2, 1]$ e somas parciais da equação 3.2, onde m representa a quantidade de termos adicionados.

Para a plotagem da série da equação 3.5 temos

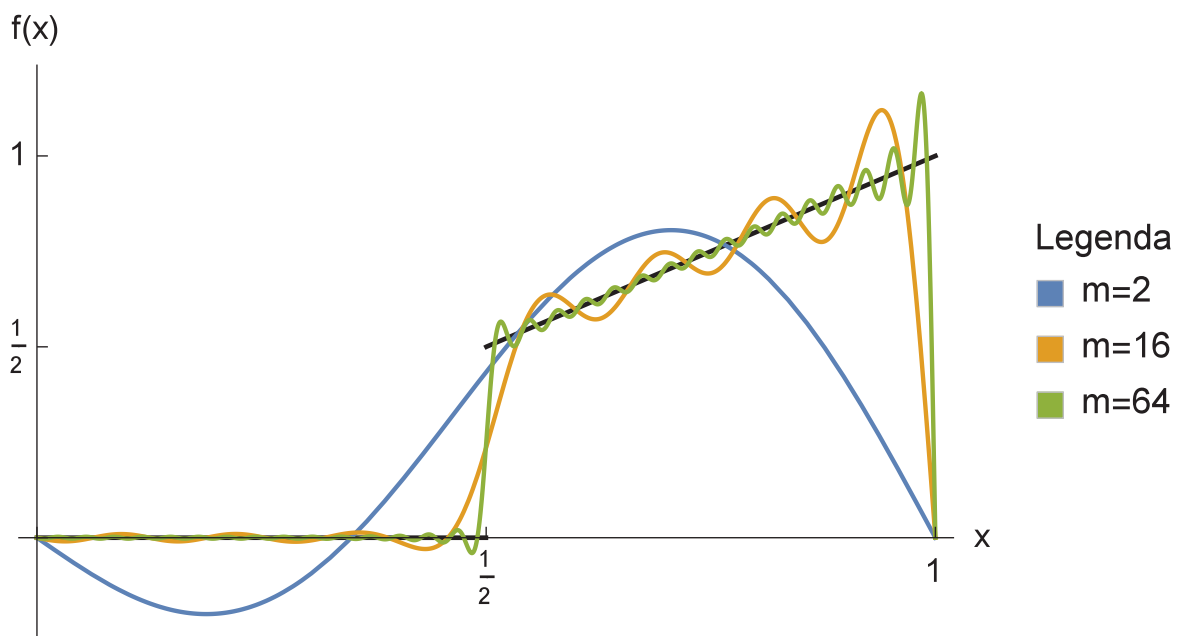


Figura 3.2: A Função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1/2]$ e $f(x) = x$ se $x \in [1/2, 1]$ e somas parciais da equação 3.5, onde m representa a quantidade de termos adicionados.

Continuando com a aplicação do estudo da teoria temos o seguinte exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < L/2 \\ L-x & \text{se } L/2 \leq x \leq L \end{cases}. \quad (3.7)$$

Vamos calcular as séries de Fourier de senos e cossenos da função $f(x)$. Para a série de cossenos temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/2} x dx + \int_{L/2}^L (L-x) dx \right] = \frac{2}{L} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^{L/2} + \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{L/2}^L \right] = \frac{L}{2} \\ a_m &= \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/2} x \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^L (L-x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right] \Rightarrow u = \frac{m\pi x}{L}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{m\pi}{L} \Rightarrow \\ a_m &= \frac{2}{L} \left\{ \frac{L^2}{m^2\pi^2} \int_0^{\frac{m\pi}{2}} u \cos(u) du + \int_{\frac{m\pi}{2}}^{m\pi} \left[\frac{L^2}{m\pi} \cos(u) - \frac{L^2}{m^2\pi^2} u \cos(u) \right] du \right\} \\ &= \frac{2}{L} \left\{ \frac{L^2}{m^2\pi^2} [\cos(u) + u \operatorname{sen}(u)] \Big|_0^{\frac{m\pi}{2}} + \frac{L^2}{m\pi} \operatorname{sen}(u) \Big|_{\frac{m\pi}{2}}^{m\pi} - \frac{L^2}{m^2\pi^2} [\cos(u) + u \operatorname{sen}(u)] \Big|_{\frac{m\pi}{2}}^{m\pi} \right\} \\ &= \frac{2}{L} \left\{ \frac{L^2}{m^2\pi^2} \left[\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) + \frac{m\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) - 1 \right] + \frac{L^2}{m\pi} \left[\operatorname{sen}(m\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{L^2}{m^2\pi^2} \left[\cos(m\pi) + m\pi \operatorname{sen}(m\pi) - \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{m\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2L}{m^2\pi^2} \left[2 \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \cos(m\pi) - 1 \right] = \frac{2L}{m^2\pi^2} \left[2 \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - (-1)^m - 1 \right] \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de cossenos de f é

$$f(x) = \frac{L}{4} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^m}{m^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.8)$$

a equação 3.8 pode ser reescrita na forma 3.3 onde,

$$f_n(x) = \frac{L}{4} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^m}{m^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.9)$$

Para a série de senos temos para $m = 1, 2, 3, \dots$,

$$b_m = \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/2} x \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^L (L-x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right] \Rightarrow u = \frac{m\pi x}{L}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{m\pi}{L}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{L} \left[\frac{L^2}{m^2\pi^2} \int_0^{\frac{m\pi}{2}} u \operatorname{sen}(u) du + \frac{L^2}{m\pi} \int_{\frac{m\pi}{2}}^{m\pi} \operatorname{sen}(u) du - \frac{L^2}{m^2\pi^2} \int_{\frac{m\pi}{2}}^{m\pi} u \operatorname{sen}(u) du \right] \\
&= \frac{2}{L} \left\{ \frac{L^2}{m^2\pi^2} [\operatorname{sen}(u) - u \cos(u)] \Big|_0^{\frac{m\pi}{2}} - \left[\frac{L^2}{m\pi} \cos(u) + \frac{L^2}{m^2\pi^2} [\operatorname{sen}(u) - u \cos(u)] \right] \Big|_{\frac{m\pi}{2}}^{m\pi} \right\} \\
&= \frac{4L}{m^2\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de senos da função f é dada por

$$f(x) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.10)$$

a equação 3.10 pode ser reescrita na forma 3.3 onde,

$$f_n(x) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{m^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.11)$$

Podemos ainda plotar o gráfico da função $f(x)$ e da série de Fourier da mesma. Na figura 3.2 temos a prova do poder das séries de Fourier, onde a medida que m aumenta, a série de Fourier se aproxima da função f , onde utilizamos a série 3.8 para o cálculo das somas parciais. Observe que, como não há pontos de descontinuidade, a série de Fourier convergirá para f em todos os pontos no interior do intervalo.

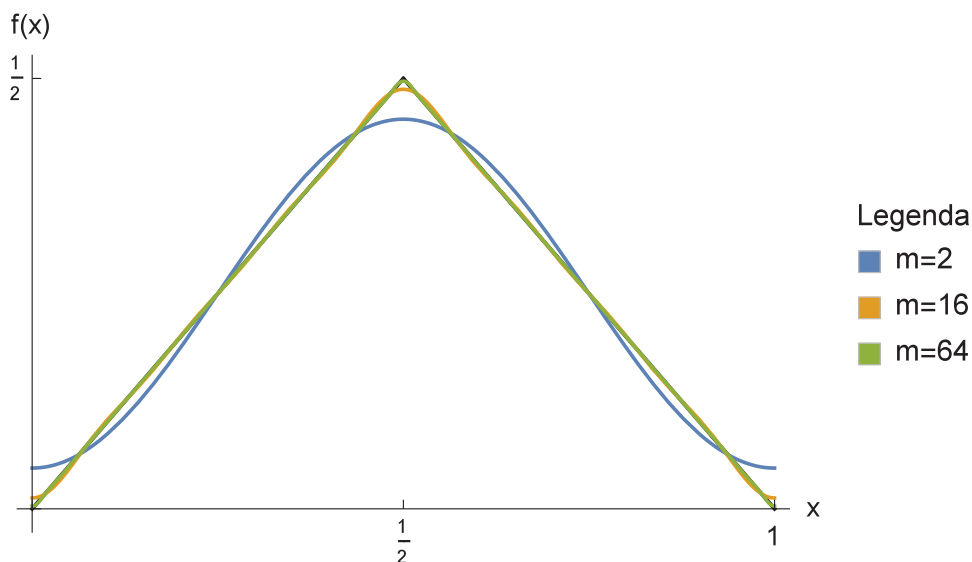


Figura 3.3: A Função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se $x \in [0, 1/2]$ e $f(x) = 1 - x$ se $x \in [1/2, 1]$ e somas parciais da equação 3.8, onde m representa a quantidade de termos adicionados.

Para a plotagem da série da equação 3.10 temos

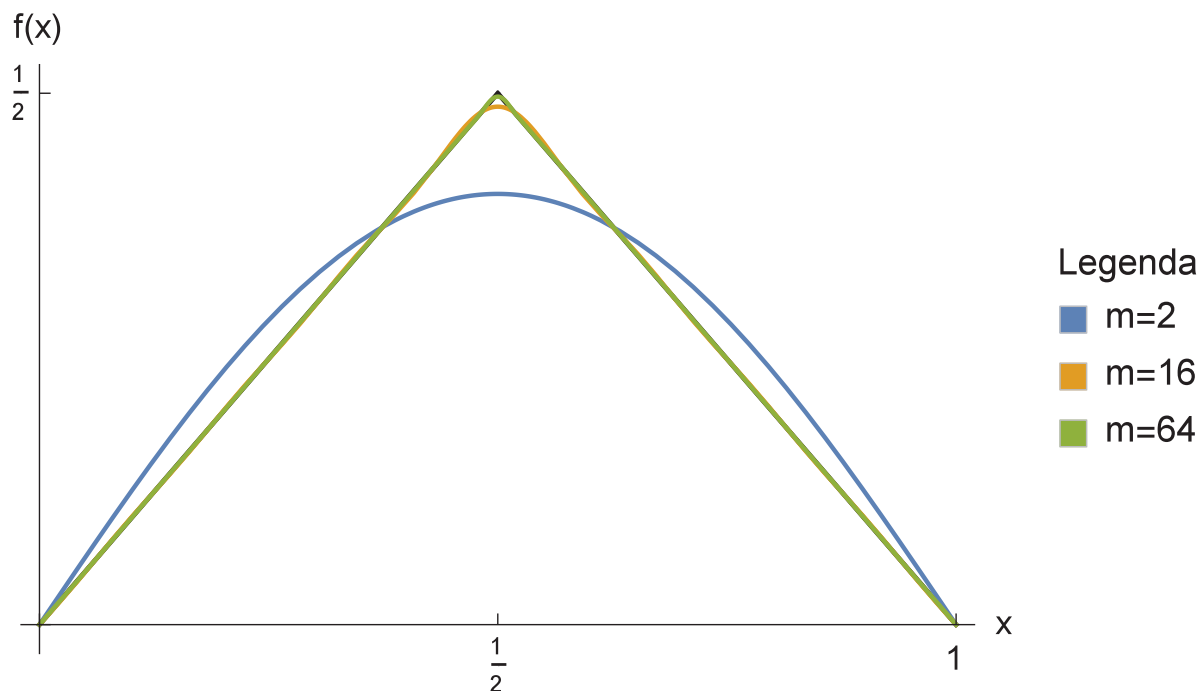


Figura 3.4: A Função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in [0,1/2]$ e $f(x) = x$ se $x \in [1/2,1]$ e somas parciais da equação 3.10, onde m representa a quantidade de termos adicionados.

Como proposta de melhor fixação da teoria por parte dos leitores temos mais um exemplo e uma posterior aplicação no estudo de oscilações forçadas. Por enquanto, considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < L/4 \\ L/4 & \text{se } L/4 \leq x < 3L/4 \\ L-x & \text{se } 3L/4 \leq x \leq L \end{cases} \quad (3.12)$$

Vamos calcular as séries de Fourier de senos e cossenos da função $f(x)$. Para a série de cossenos temos que

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/4} x dx + \int_{L/4}^{3L/4} L/4 dx + \int_{3L/4}^L (L-x) dx \right] \\ &= \frac{2}{L} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^{L/4} + \frac{L}{4} x \Big|_{L/4}^{3L/4} + Lx \Big|_{3L/4}^L - \frac{x^2}{2} \Big|_{3L/4}^L \right] = \frac{2}{L} \left[\frac{L^2}{32} + \frac{2L^2}{16} + \frac{L^2}{4} - \frac{7L^2}{32} \right] = \frac{2}{L} \cdot \frac{3L^2}{16} = \frac{3L}{8} \\ a_m &= \frac{2}{L} \left[\int_0^{L/4} x \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/4}^{3L/4} \frac{L}{4} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_{3L/4}^L (L-x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow u = \frac{m\pi x}{L}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{m\pi}{L} \Rightarrow \\
a_m &= \frac{2}{L} \left\{ \frac{L^2}{m^2\pi^2} \left[\int_0^{\frac{m\pi}{4}} u \cos(u) du - \int_{\frac{3m\pi}{4}}^{m\pi} u \cos(u) du \right] + \frac{L^2}{4m\pi} \int_{\frac{m\pi}{4}}^{\frac{3m\pi}{4}} \cos(u) du + \frac{L^2}{m\pi} \int_{\frac{3m\pi}{4}}^{m\pi} \cos(u) du \right\} \\
&= \frac{2}{L} \left\{ \frac{L^2}{m^2\pi^2} [\cos(u) + u\text{sen}(u)] \Big|_0^{\frac{m\pi}{4}} + \frac{L^2}{4m\pi} \text{sen}(u) \Big|_{\frac{m\pi}{4}}^{\frac{3m\pi}{4}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{L^2}{m\pi} \text{sen}(u) \Big|_{\frac{3m\pi}{4}}^{m\pi} - \frac{L^2}{m^2\pi^2} [\cos(u) + u\text{sen}(u)] \Big|_{\frac{3m\pi}{4}}^{m\pi} \right\} \\
&= \frac{2L}{m^2\pi^2} \left[2 \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) - 1 - \cos(m\pi) - \cos\left(\frac{3m\pi}{4}\right) \right] \\
&= \frac{2L}{m^2\pi^2} \left[2 \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) - 1 - (-1)^m + \cos\left(\frac{3m\pi}{4}\right) \right]
\end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de cossenos de f é

$$f(x) = \frac{3L}{16} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3m\pi}{4}\right) - 1 - (-1)^m}{m^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.13)$$

a equação 3.13 pode ser reescrita na forma 3.3 onde,

$$f_n(x) = \frac{3L}{16} + \frac{2L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3m\pi}{4}\right) - 1 - (-1)^m}{m^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.14)$$

Para a série de senos temos para $m = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{L} \left\{ \int_0^{L/4} x \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \frac{L}{4} \int_{L/4}^{3L/4} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx + \int_{3L/4}^L \left[L \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) - x \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] dx \right\} \\
&\Rightarrow u = \frac{m\pi x}{L}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{m\pi}{L} \Rightarrow \\
b_m &= \frac{2}{L} \left\{ \frac{L^2}{m^2\pi^2} \left[\int_0^{\frac{m\pi}{4}} u \text{sen}(u) du - \int_{\frac{3m\pi}{4}}^{m\pi} u \text{sen}(u) du \right] + \frac{L^2}{4m\pi} \int_{\frac{m\pi}{4}}^{\frac{3m\pi}{4}} \text{sen}(u) du + \frac{L^2}{m\pi} \int_{\frac{3m\pi}{4}}^{m\pi} \text{sen}(u) du \right\} \\
&= \frac{2}{L} \left\{ \frac{L^2}{m^2\pi^2} [\text{sen}(u) - u \cos(u)] \Big|_0^{\frac{m\pi}{4}} - \frac{L^2}{4m\pi} \cos(u) \Big|_{\frac{m\pi}{4}}^{\frac{3m\pi}{4}} \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{L^2}{m\pi} \cos(u) + \frac{L^2}{m^2\pi^2} [\text{sen}(u) - u \cos(u)] \right] \Big|_{\frac{3m\pi}{4}}^{m\pi} \right\} \\
&= \frac{2L}{m^2\pi^2} \left[\text{sen}\left(\frac{m\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{3m\pi}{4}\right) \right]
\end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de senos da função f é dada por

$$f(x) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3m\pi}{4}\right)}{m^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.15)$$

a equação 3.15 pode ser reescrita na forma 3.3 onde,

$$f_n(x) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{m=1}^n \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3m\pi}{4}\right)}{m^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.16)$$

Podemos ainda plotar o gráfico da função $f(x)$ e da série de Fourier da mesma. Na figura 3.3 temos a prova do poder das séries de Fourier, onde a medida que m aumenta, a série de Fourier se aproxima da função f , onde utilizamos a série 3.13 para o cálculo das somas parciais. Observe que, como não há pontos de descontinuidade, a série de Fourier convergirá para f em todos os pontos no interior do intervalo.

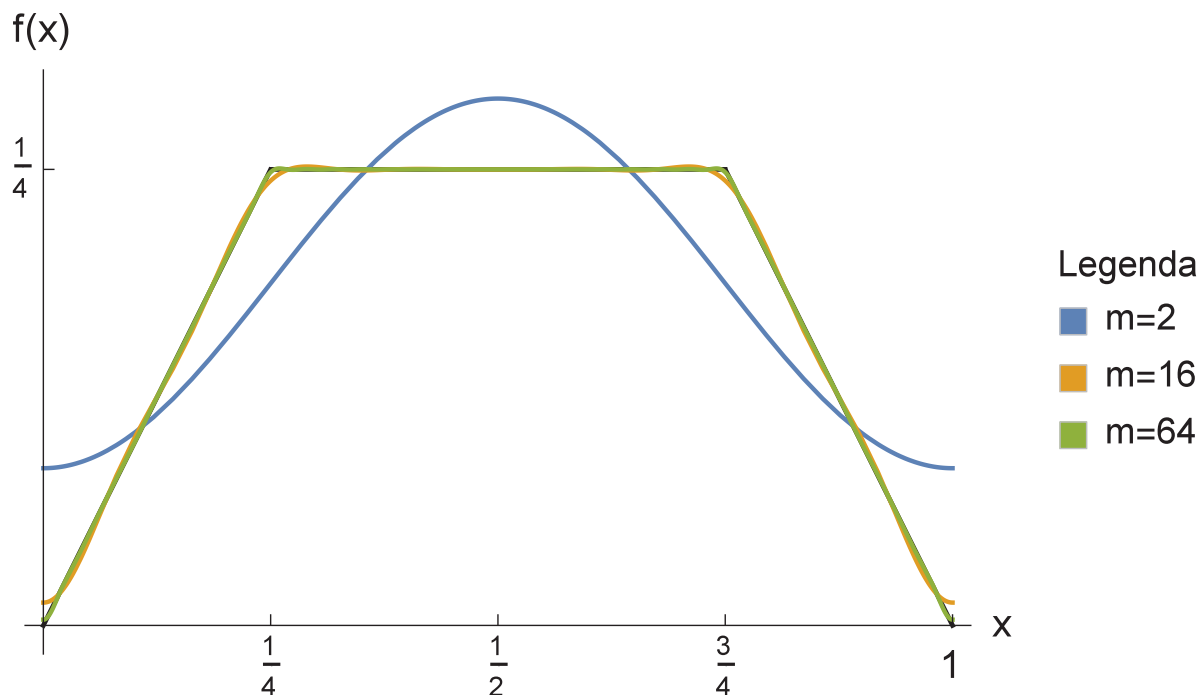


Figura 3.5: A Função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ se $x \in [0, 1/4]$, $f(x) = 1/4$ se $x \in [1/4, 3/4]$ e $f(x) = 1 - x$ se $x \in [3/4, 1]$ e somas parciais da equação 3.13, onde m representa a quantidade de termos adicionados.

Para a plotagem da série da equação 3.15 temos

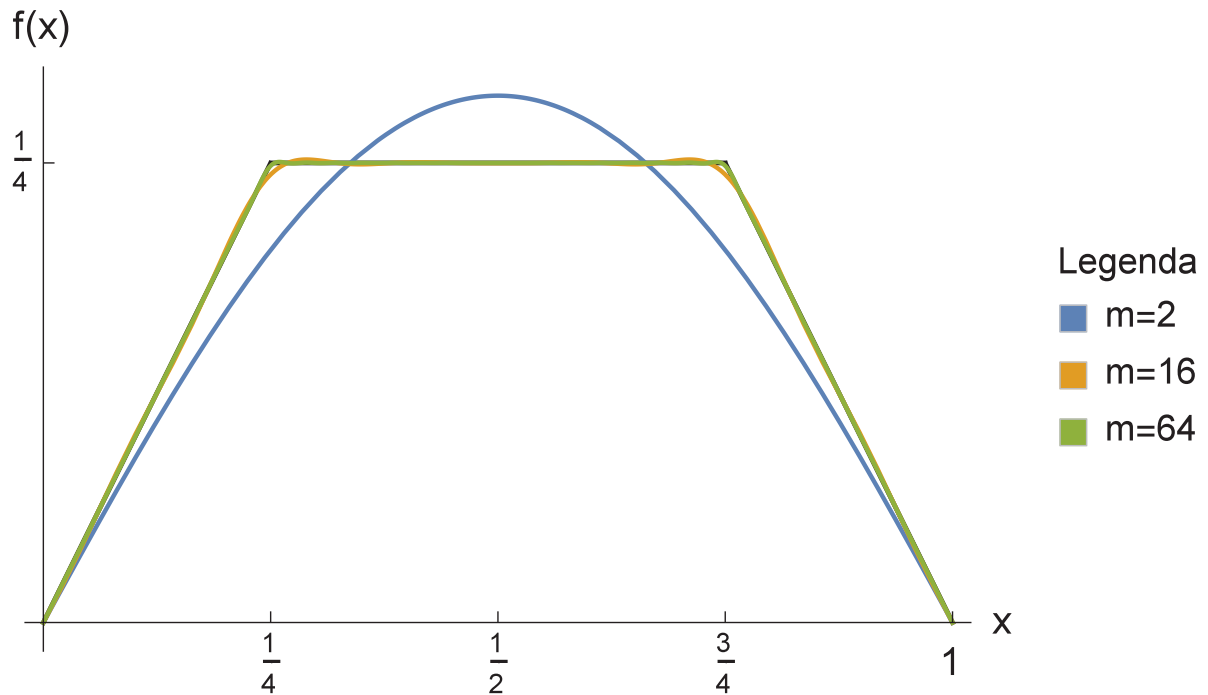


Figura 3.6: A Função $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in [0,1/2]$ e $f(x) = x$ se $x \in [1/2,1]$ e somas parciais da equação 3.15, onde m representa a quantidade de termos adicionados.

3.1 Oscilador Harmônico (Simples, Amortecido e Forçado)

Como uma última aplicação da teoria de Fourier, mostraremos como a mesma pode ser aplicada na solução de equações diferenciais. Especificamente, estudaremos um problema de grande importância física conhecido como Oscilador Harmônico. Dada a existência de um corpo de massa (m) preso a uma mola de constante elástica (k) sobre uma superfície sem atrito e nem resistência do ar. Imagine que atue neste corpo uma força externa (F_{ext}) que o desloca para a direita, após ser deslocado a mola passa a exercer uma força restauradora (F_R) no corpo que o faz retornar à posição de equilíbrio. Assim, pela lei de Hooke, $F_R = -kx$, ainda pela lei de Newton $F = F_R$, portanto [16] - [23]

$$ma = -kx,$$

reescrevendo a aceleração na sua maneira diferencial, temos

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \text{ onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

portanto

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.17)$$

Tomando-se

$$x = e^{rt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = re^{rt} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = r^2 e^{rt}.$$

Substituindo em 3.17, e sabendo que $e^{rt} \neq 0$, temos

$$r^2 e^{rt} + \omega_0^2 e^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i\omega_0 \quad (3.18)$$

$$x_1 = e^{r_1 t} = e^{i\omega_0 t} \quad e \quad x_2 = e^{r_2 t} = e^{-i\omega_0 t} \quad (3.19)$$

Portanto

$$u = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = \cos(\omega_0 t) \quad e \quad v = \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2} = \text{sen}(\omega_0 t) \quad (3.20)$$

$$x = c_1 u + c_2 v = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \text{sen}(\omega_0 t). \quad (3.21)$$

Assim a solução geral do Oscilador Harmônico Simples (O.H.S.) será:

$$x = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \text{sen}(\omega_0 t). \quad (3.22)$$

Essa equação pode ser reescrita da seguinte forma

$$x = A \text{sen}(\omega_0 t + \phi), \quad (3.23)$$

onde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, representa a amplitude do oscilador harmônico, e ϕ é a fase inicial do movimento. Para mais detalhes consultar [16] que aborda várias técnicas para se calcular E.D.O. e E.D.P.

Considerando o mesmo corpo e a mesma constante elástica, mas dessa vez vamos supor que exista uma resistência do ar proporcional a velocidade, teremos portanto de acordo com a segunda Lei de Newton

$$\sum F = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ e } \gamma = \frac{\rho}{m} > 0.$$

Tomando-se $x = e^{rt}$ e calculando-se as suas derivadas, obtemos a seguinte equação característica

$$r^2 + \gamma r + \omega_0^2 = 0. \quad (3.24)$$

Logo

$$r = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}, \quad (3.25)$$

onde

$$\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2. \quad (3.26)$$

Neste tipo de movimento oscilatório, Oscilador Harmônico Amortecido (O.H.A.), existe três tipos de amortecimentos que dependem do discriminante (Δ), subcrítico ($\Delta < 0$), supercrítico ($\Delta > 0$) e crítico ($\Delta = 0$). Observe que até o presente momento consideramos apenas oscilações livres, em que o oscilador recebe uma certa energia inicial e depois é solto (O.H.S. e O.H.A.). Entretanto, há casos onde a oscilação é produzida devido a uma força externa no qual denominamos oscilador harmônico forçado (O.H.F.).

Um corpo de massa (m) está preso a uma mola de constante elástica (k) sobre uma superfície sem atrito e nem resistência do ar. Agora, considere que uma força exterior, tal que ω represente a frequência angular da força externa, passe a exercer uma força do tipo:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (3.27)$$

Pela segunda Lei de Newton

$$\sum F = m\ddot{x} \Rightarrow F(t) + F_R = m\ddot{x} \Rightarrow F_0 \cos(\omega t) - kx = m\ddot{x}$$

Portanto,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (3.28)$$

Com isso, obtemos uma E.D.O. de segunda ordem não-homogênea. Devemos agora resolvê-la, para isso, vamos encontrar a solução da homogênea associada:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.29)$$

Pelo que já foi visto

$$x_h(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \text{sen}(\omega_0 t). \quad (3.30)$$

Agora, devemos obter uma solução particular para então obtermos a solução geral, o termo independente é dado por um produto, $\frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$, devemos supor uma solução da forma:

$$x_p(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \text{sen}(\omega t) \quad (3.31)$$

Derivando 3.31 e substituindo em 3.28, temos:

$$-c_1 \omega^2 \cos(\omega t) - c_2 \omega^2 \text{sen}(\omega t) + \omega_0^2 [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \text{sen}(\omega t)] = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad (3.32)$$

Reorganizando e comparando os termos, obtemos:

$$\begin{cases} c_1(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m} \\ c_2(\omega_0^2 - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

Como $(\omega_0^2 - \omega^2) \neq 0$

$$c_1 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \text{ e } c_2 = 0 \quad (3.33)$$

Portanto a solução particular do oscilador é dada por

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \quad (3.34)$$

Por fim a solução geral será:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) \quad (3.35)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) + c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \text{sen}(\omega_0 t). \quad (3.36)$$

Para o caso em que a força possui a seguinte forma

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + a_n \cos(\omega t) \quad (3.37)$$

teremos que encontrar a solução das seguintes equações

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{a_0}{2m} \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{a_n}{m} \cos(\omega t) \end{cases} \quad (3.38)$$

Para o primeiro caso, a solução particular têm a seguinte forma

$$x = \frac{a_0}{2m\omega_0^2} \quad (3.39)$$

e no segundo, devemos supor uma solução

$$x_p(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \text{sen}(\omega t) \quad (3.40)$$

Derivando 3.40 e substituindo em 3.38, temos:

$$-c_1\omega_n^2 \cos(\omega_n t) - c_2\omega_n^2 \text{sen}(\omega_n t) + \omega_0^2 [c_1 \cos(\omega_n t) + c_2 \text{sen}(\omega_n t)] = \frac{a_m}{m} \cos(\omega_n t) \quad (3.41)$$

Reorganizando e comparando os termos, obtemos:

$$\begin{cases} c_1(\omega_0^2 - \omega_n^2) = \frac{a_n}{m} \Rightarrow c_1 = \frac{a_n}{m(\omega_0^2 - \omega_n^2)} \\ c_2(\omega_0^2 - \omega_n^2) = 0 \Rightarrow c_2 = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Portanto a solução particular do oscilador é dada por

$$x_p(t) = \frac{a_n}{m(\omega_0^2 - \omega_n^2)} \cos(\omega_n t) \quad (3.43)$$

Por fim a solução geral será:

$$x(t) = \frac{a_0}{2m\omega_0^2} + \frac{a_n}{m(\omega_0^2 - \omega_n^2)} \cos(\omega_n t) \quad (3.44)$$

Utilizando o princípio da superposição de forças encontraremos o seguinte resultado

$$x(t) = \frac{a_0}{2m\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{m(\omega_0^2 - \omega_n^2)} \cos(\omega_n t). \quad (3.45)$$

De maneira análoga definimos para o caso seno, onde nossa solução têm o seguinte aspecto

$$x(t) = \frac{a_0}{2m\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{m(\omega_0^2 - \omega_n^2)} \text{sen}(\omega_n t). \quad (3.46)$$

e para o caso mais geral, onde a força possui a seguinte forma

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)] \quad (3.47)$$

a nossa solução será

$$x(t) = \frac{a_0}{2m\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{m(\omega_0^2 - \omega_n^2)} \cos(\omega_n t) + \frac{b_n}{m(\omega_0^2 - \omega_n^2)} \text{sen}(\omega_n t) \right]. \quad (3.48)$$

De acordo com a teoria disposta acima podemos enunciar o seguinte problema, que consiste em um O.H.F. generalizado, dada a função

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_0 |\text{sen} \omega_0 t| \quad (3.49)$$

onde a força $F(t) = F_0 |\text{sen} \omega_0 t|$, qual será a sua função $x(t)$?

Para encontrarmos o resultado de tal equação devemos primeiro calcularmos a série de Fourier de $F(t)$. De acordo com a teoria já abordada encontraremos apenas os

a_m 's da função.

Para o termo a_0 , temos

$$a_0 = \frac{F_0}{T} \int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{T}\right) dt = \frac{F_0}{T} \left[-\frac{T}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right]_0^T = -\frac{F_0 T}{T\pi} (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{F_0}{\pi} \cdot (-2)$$

Logo

$$a_0 = 2\frac{F_0}{\pi} \quad (3.50)$$

Para os a_m 's da equação, $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, temos:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) dt = \frac{2F_0}{T} \int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2m\pi t}{T}\right) dt \\ &= \frac{2F_0}{T} \int_0^T \left(\frac{e^{i\pi t/T} - e^{-i\pi t/T}}{2i} \right) \left(\frac{e^{i2\pi m t/T} + e^{-i2\pi m t/T}}{2} \right) dt \\ &= \frac{2F_0}{4Ti} \int_0^T (e^{i\pi t/T} - e^{-i\pi t/T})(e^{i2\pi m t/T} + e^{-i2\pi m t/T}) dt \\ &= \frac{F_0}{2Ti} \int_0^T \left(e^{\frac{i\pi t + i2\pi m t}{T}} + e^{\frac{i\pi t - i2\pi m t}{T}} - e^{\frac{-i\pi t + i2\pi m t}{T}} - e^{\frac{-i\pi t - i2\pi m t}{T}} \right) dt \\ &= \frac{F_0}{2Ti} \int_0^T \left[e^{\frac{i\pi t}{T}(1+2m)} + e^{\frac{i\pi t}{T}(1-2m)} - e^{\frac{i\pi t}{T}(2m-1)} - e^{\frac{-i\pi t}{T}(1+2m)} \right] dt \\ &= \frac{F_0}{2Ti} \left[\frac{Te^{\frac{i\pi t}{T}(1+2m)}}{i\pi(1+2m)} + \frac{Te^{\frac{i\pi t}{T}(1-2m)}}{i\pi(1-2m)} - \frac{Te^{\frac{i\pi t}{T}(2m-1)}}{i\pi(2m-1)} + \frac{Te^{\frac{-i\pi t}{T}(1+2m)}}{i\pi(1+2m)} \right] \\ &= \frac{F_0 T}{2T\pi i^2} \left[\frac{e^{\frac{i\pi t}{T}(1+2m)}}{1+2m} + \frac{e^{\frac{i\pi t}{T}(1-2m)}}{1-2m} - \frac{e^{\frac{i\pi t}{T}(2m-1)}}{2m-1} + \frac{e^{\frac{-i\pi t}{T}(1+2m)}}{1+2m} \right] \Bigg|_0^T \\ &= -\frac{F_0}{2\pi} \left[\frac{e^{i\pi(1+2m)} - 1}{1+2m} + \frac{e^{i\pi(1-2m)} - 1}{1-2m} + \frac{-e^{i\pi(2m-1)} + 1}{2m-1} + \frac{e^{-i\pi(1+2m)} - 1}{1+2m} \right] \\ &\Rightarrow e^{i\pi} = -1 = e^{-i\pi} \quad e^{\quad} \quad e^{i2\pi m} = 1 = e^{-i2\pi m} \\ &= -\frac{F_0}{2\pi} \left[-\frac{1}{1+2m} - \frac{1}{1-2m} + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{1+2m} - \frac{1}{1+2m} - \frac{1}{1-2m} + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{1+2m} \right] \\ &= -\frac{F_0}{2\pi} \left[-\frac{4}{1+2m} - \frac{4}{1-2m} \right] = \frac{2F_0}{\pi} \left[\frac{1}{1+2m} + \frac{1}{1-2m} \right] = \frac{2F_0}{\pi} \left[\frac{1-2m+1+2m}{1-4m^2} \right] \end{aligned}$$

Logo

$$a_m = \frac{4F_0}{\pi} \frac{1}{1-4m^2} \quad (3.51)$$

Portanto

$$F(t) = \frac{2F_0}{\pi} + \frac{4F_0}{\pi} \frac{1}{1-4m^2} \cos \frac{2\pi mt}{T} \quad (3.52)$$

Vamos achar, agora, uma solução particular para a equação não homogênea.

Sendo

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t) = F_0 |\text{sen}(\omega_0 t)| \quad (3.53)$$

então:

$$x(t) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + B \text{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) \quad (3.54)$$

$$\dot{x}(t) = -A \frac{2\pi m}{T} \text{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + B \frac{2\pi m}{T} \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) \quad (3.55)$$

$$\ddot{x}(t) = -A \left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) - B \left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) \quad (3.56)$$

Substituindo 3.54, 3.55 e 3.56 em 3.53,

$$\begin{aligned} & -A \left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) - B \left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + \omega_0^2 \left[A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + B \text{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) \right] \\ & = \frac{2F_0}{\pi} + \frac{4F_0}{\pi} \frac{1}{1-4m^2} \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) \end{aligned}$$

temos que:

1. para o termo independente

$$A_0 \omega_0^2 = \frac{2F_0}{\pi} \Rightarrow A_0 = \frac{2F_0}{\omega_0^2 \pi} \quad (3.57)$$

2. pelo resultado obtido em 3.51, temos que comparar apenas os termos que contém cosseno, talque $\omega_0 = \pi/T$, logo

$$-A \left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2 + \omega_0^2 A = \frac{4F_0}{\pi} \frac{1}{1-4m^2} \quad (3.58)$$

$$-A(2\omega_0 m)^2 + \omega_0^2 A = \frac{4F_0}{\pi} \frac{1}{1-4m^2} \quad (3.59)$$

$$-4\omega_0^2 m^2 A + \omega_0^2 A = \frac{4F_0}{\pi} \frac{1}{1-4m^2} \quad (3.60)$$

$$A \omega_0^2 (-4m^2 + 1) = \frac{4F_0}{\pi} \frac{1}{1-4m^2} \quad (3.61)$$

$$A = \frac{4F_0}{\omega_0^2 \pi (1 - 4m^2)^2}, \quad (3.62)$$

Portanto, a solução geral do O.H.F., será:

$$x(t) = \frac{2F_0}{\omega_0^2 \pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4F_0}{\omega_0^2 \pi (1 - 4m^2)^2} \cos 2\omega_0 m t = \frac{2F_0}{\omega_0^2 \pi} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\omega_0 m t}{(1 - 4m^2)^2} \right). \quad (3.63)$$

Podemos ainda plotar o gráfico da função $x(t)$ e comprovarmos que o método das séries de Fourier é eficaz nesse tipo de situação.

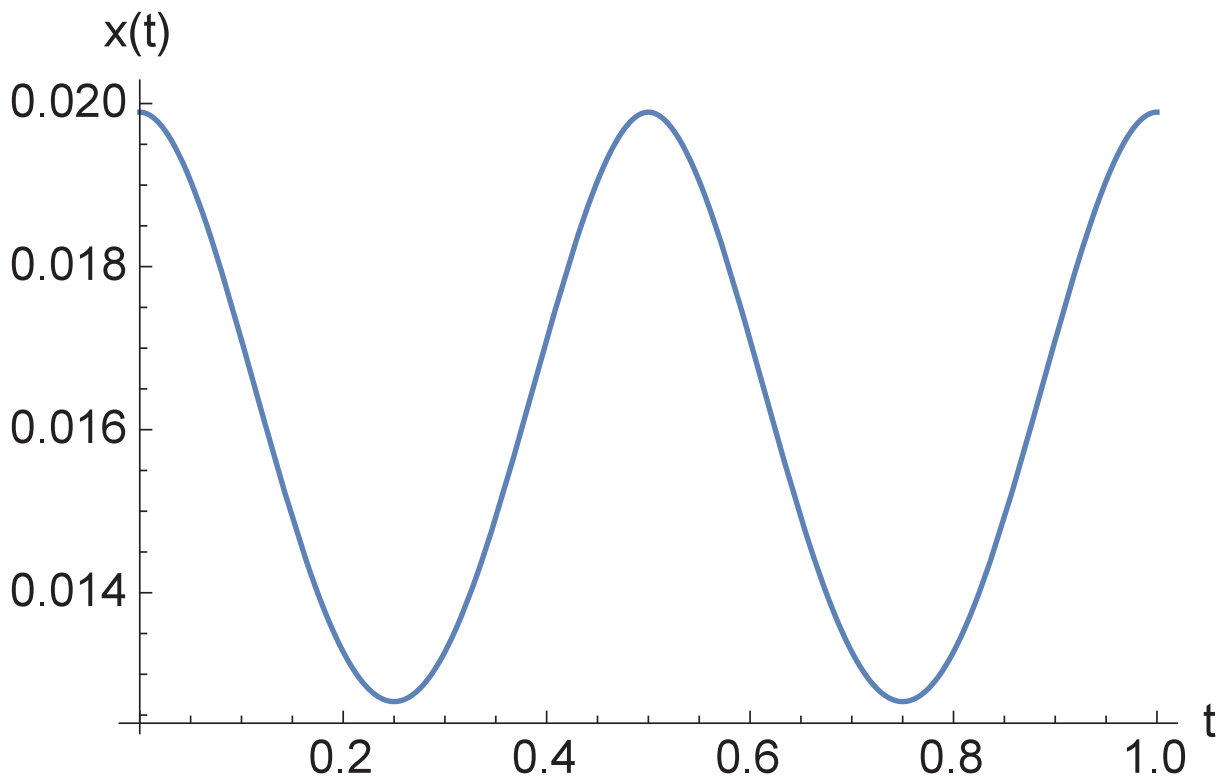


Figura 3.7: A Função $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela equação 3.63, com $m \in \mathbb{N}$, $F_0 = 1$ e $\omega_0 = \pi$.

Como não existe o termo dissipativo a amplitude será constante e ainda vale ressaltar que a frequência da força é igual a do oscilador.

4 *Conclusão*

Neste trabalho, estudamos uma poderosa técnica existente para a resolução de equações diferenciais parciais e ordinárias, que consiste em transformar uma função periódica e contínua por partes em um somatório de senos e cossenos, e para tal fizemos o uso das séries de Fourier que é uma forma bastante útil e prática para a solução de problemas que envolvem ondas, dissipações, oscilações e etc. Para a realização deste trabalho utilizou-se de duas ferramentas de edição, a primeira consiste em uma linguagem poderosa de edição e formatação de texto que é chamada de Latex e a segunda um software, Mathematica, sendo este utilizado na produção dos gráficos.

No capítulo 1, foi feita uma abordagem histórica sobre as séries trigonométricas, sobre a vida de Jean-Baptiste Joseph Fourier e também sobre as séries que levam o seu nome.

No capítulo 2, realizou-se um estudo sobre produto interno, norma, ortogonalidade, convergência e também como aproximar funções que, em princípio não podem ser descritas por uma série de Taylor através de um somatório de senos e cossenos.

Por fim, no capítulo 3, aplicamos a teoria e demonstramos através de algumas funções específicas como a série de Fourier é um poderosa técnica para aproximação de funções. Além disso, mostramos como essas séries podem ser aplicadas no estudo do oscilador harmônico, onde resolvemos o caso do oscilador harmônico sujeito a uma força externa tipo onda retificada.

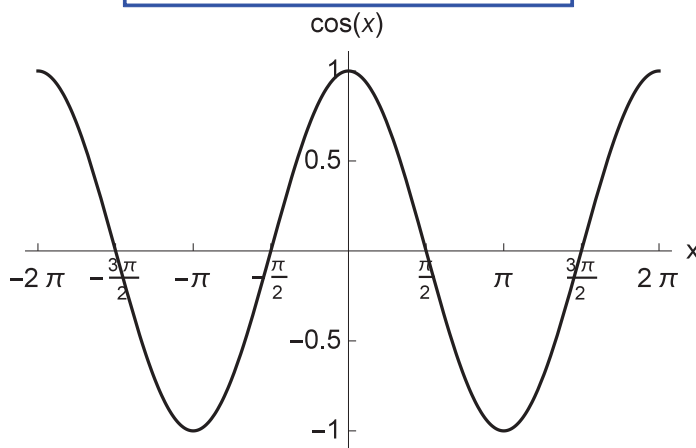
APÊNDICE A – Comandos dos gráficos no *Mathematica*

A.1 Seno e Cosseno

$f[x_]:=Cos[x];$

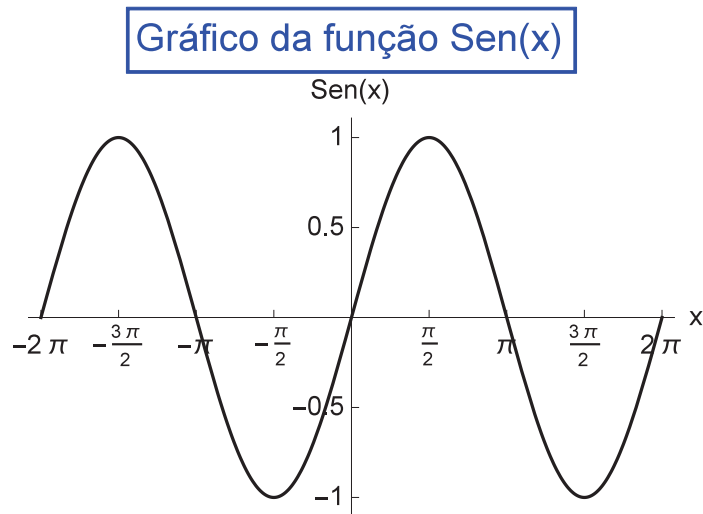
$Plot[f[x],\{x,-2\pi,2\pi\},PlotLabel \rightarrow Style[Framed["Gráfico da função Cos(x)"],20,Blue],$
 $AxesLabel \rightarrow \{x,f[x]\},LabelStyle \rightarrow Directive[Darker[Black],14],$
 $Ticks \rightarrow \{-2\pi,-3\pi/2,-\pi,-\pi/2,\pi/2,\pi,3\pi/2,2\pi\},\{-1,-0.5,0.5,1\},$
 $PlotStyle \rightarrow \{Thickness[0.005],GrayLevel[0]\}$

Gráfico da função Cos(x)



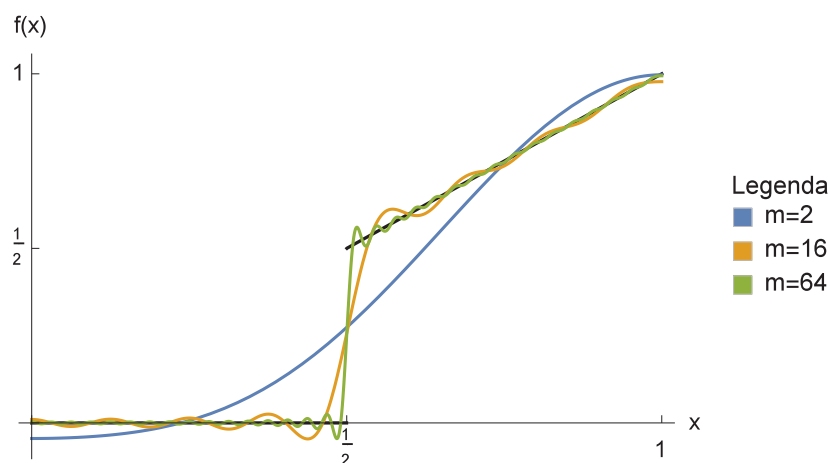
$f[x_]:=Sin[x];$

$Plot[f[x],\{x,-2\pi,2\pi\},PlotLabel \rightarrow Style[Framed["Gráfico da função Sen(x)"],20,Blue],$
 $AxesLabel \rightarrow \{x,"Sen(x)\"},LabelStyle \rightarrow Directive[Darker[Black],14],$
 $Ticks \rightarrow \{-2\pi,-3\pi/2,-\pi,-\pi/2,\pi/2,\pi,3\pi/2,2\pi\},\{-1,-0.5,0.5,1\},$
 $PlotStyle \rightarrow \{Thickness[0.005],GrayLevel[0]\}$



A.2 Exemplo 1 das Aplicações

```
f[x_] := Piecewise[{{0, 0 ≤ x < 1/2}, {x, 1/2 ≤ x ≤ 1}}]
g1 = Plot[f[x], {x, 0, 1}, AxesLabel → {"x", "f(x)"},
  LabelStyle → Directive[Darker[Black], 12], Ticks → {{0, 1/2, 1}, {0, 1/2, 1}},
  PlotStyle → {Thickness[0.005], GrayLevel[0]}];
L := 1;
a0 = 2/L ∫0L f[x] dx;
am = 2/L ∫0L f[x] Cos[ $\frac{m \text{ Pi } x}{L}$ ] dx;
s[n_, x_] := a0/2 + ∑m=1n am Cos[ $\frac{m \text{ Pi } x}{L}$ ]
g2 = Plot[{s[2, x], s[16, x], s[64, x]}, {x, 0, 1}, PlotLegends → SwatchLegend[
  {"m=2", "m=16", "m=64"}, LegendLabel → "Legenda", LegendMargins → 5]];
Show[g1, g2, PlotRange → {{0, 1}, All}]
```

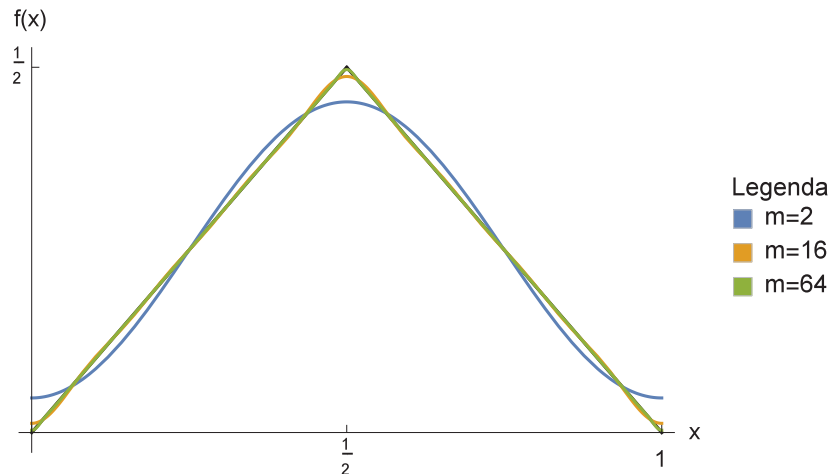


A.3 Exemplo 2 das Aplicações

```

f[x_] := Piecewise[{{x, 0 ≤ x < 1/2}, {1 - x, 1/2 ≤ x ≤ 1}}];
g1 = Plot[f[x], {x, 0, 1}, AxesLabel → {"x", "f(x)"},
  LabelStyle → Directive[Darker[Black], 12], Ticks → {{0, 1/2, 1}, {0, 1/2, 1}},
  PlotStyle → {Thickness[0.005], GrayLevel[0]}];
L := 1;
a0 = 2/L ∫0L f[x] dx;
am = 2/L ∫0L f[x] Cos[ $\frac{m \text{ Pi } x}{L}$ ] dx;
s[n_, x_] := a0/2 + ∑m=1n am Cos[ $\frac{m \text{ Pi } x}{L}$ ]
g2 = Plot[{s[2, x], s[16, x], s[64, x]}, {x, 0, 1}, PlotLegends → SwatchLegend[
  {"m=2", "m=16", "m=64"}, LegendLabel → "Legenda", LegendMargins → 5]];
Show[g1, g2, PlotRange → {{0, 1}, All}]

```

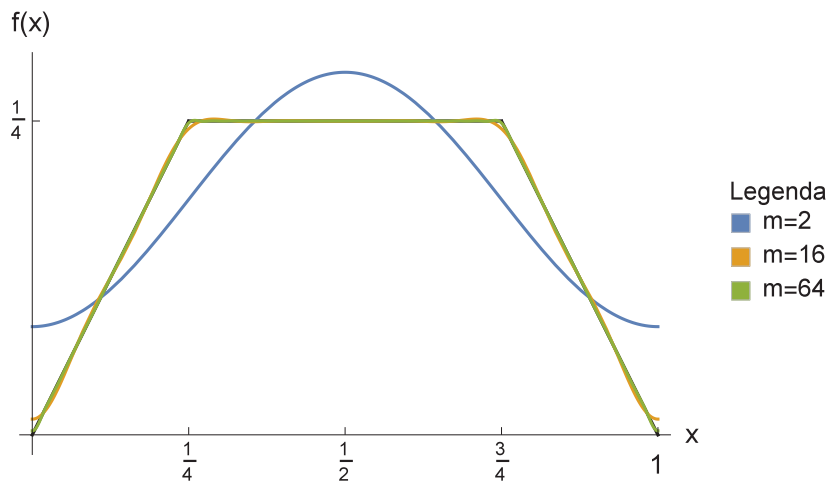


A.4 Exemplo 3 das Aplicações

```

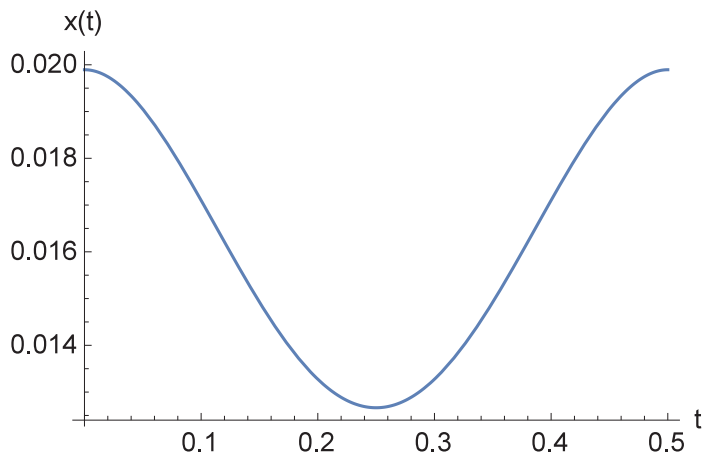
f[x_] := Piecewise[{{x, 0 ≤ x < 1/4}, {1/4, 1/4 ≤ x < 3/4}, {1 - x, 3/4 ≤ x ≤ 1}}];
g1 = Plot[f[x], {x, 0, 1}, AxesLabel → {"x", "f(x)"},
  LabelStyle → Directive[Darker[Black], 14], Ticks →
  {{1/4, 2/4, 3/4, 1}, {1/4}}, PlotStyle → {Thickness[0.005], GrayLevel[0]};
L := 1;
a0 = 2/L ∫0L f[x] dx;
am = 2/L ∫0L f[x] Cos[ $\frac{m \text{ Pi } x}{L}$ ] dx;
s[n_, x_] := a0/2 + ∑m=1n am Cos[ $\frac{m \text{ Pi } x}{L}$ ]
g2 = Plot[{s[2, x], s[16, x], s[64, x]}, {x, 0, 1}, PlotLegends → SwatchLegend[
  {"m=2", "m=16", "m=64"}, LegendLabel → "Legenda", LegendMargins → 5]];
Show[g1, g2, PlotRange → {{0, 1}, All}]

```

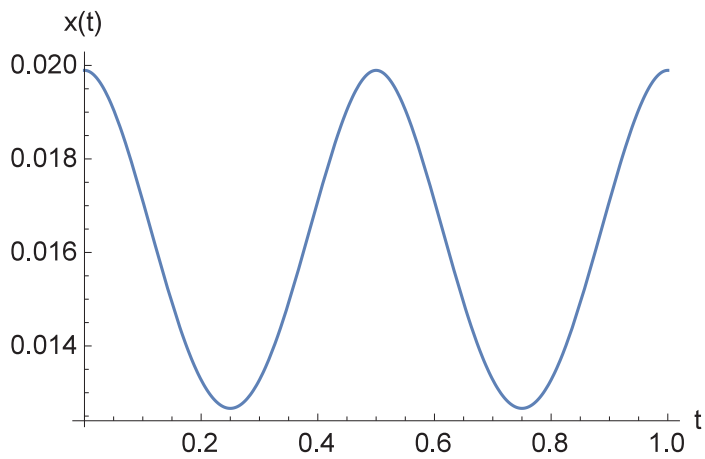


A.5 Força tipo onda retificada

```
x[t_] :=
  (1 / (2 Pi ^3)) + ((1 / (Pi ^3)) * Sum[ ((Cos[4 Pi m t]) / ((1 - 4 m^2)^2)), {m, 1, 100}])
Plot[x[t], {t, 0, 1/2}, AxesLabel -> {"t", "x(t)"},
  LabelStyle -> Directive[Darker[Black], 14]]
```



```
x[t_] :=
  (1 / (2 Pi ^3)) + ((1 / (Pi ^3)) * Sum[ ((Cos[4 Pi m t]) / ((1 - 4 m^2)^2)), {m, 1, 100}])
Plot[x[t], {t, 0, 1}, AxesLabel -> {"t", "x(t)"},
  LabelStyle -> Directive[Darker[Black], 14]]
```



Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Edgard Bluncher, 2003.
- [2] UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Um Pouco da História da Trigonometria. Disponível em: < [http : //ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm](http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_trigonometria.htm) >. Acesso em 15 out. 2015
- [3] UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL – História da Trigonometria. Disponível em: < [http : //www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/cont_historia.htm](http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/cont_historia.htm) >. Acesso em 15 out. 2015
- [4] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: Lamgraf Artesanato Gráfico Ltda., 1991.
- [5] FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, dez. 1977.
- [6] SPIEGEL, Murray Ralph. **Análise de Fourier**. Tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, [21-?]. Tradução de: Schaum's Outline of Theory and Problems of Fourier Analysis.
- [7] ZILL, Dennis G., CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**, vol. 2. Tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.
- [8] CALLIOLI, Carlos A., DOMINGUES, Hygino H., COSTA, Roberto C.F. **Álgebra Linear e Aplicações**. São Paulo: Atual, [20-?].
- [9] HOFFMAN, Kenneth, KUNZE, Ray. **Álgebra Linear**. Tradução de Adalberto P. Bergamasco. São Paulo: Univ. de S. Paulo e Polígono, 1970.
- [10] SANTOS, Reginaldo J. **Séries de Fourier**, Minas Gerais: Departamento de Matemática - ICEX, abr. 2002. Disponível em: < [http : //www.mat.ufmg.br/regi](http://www.mat.ufmg.br/regi) >.
- [11] KULLER, Robert G. et al. **Introdução à Análise Linear**. Tradução de Genésio Lima dos Reis. Rio de Janeiro: Ao livro Técnico, 1972.
- [12] HSU, Hwei P. **Análise de Fourier**. Tradução de Paulo Ivo de Queiroz. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1973. Tradução de: Fourier Analysis.
- [13] GANDULFO, Roberto Oscar. Séries de Fourier e Convergência. **Matemática Universitária**, Brasília-DF, n.11, p.27-52, Jun. 1990.

- [14] IORIO, Valéria Magalhães. **Séries de Fourier**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, [2010], p. 92-111.
- [15] LIMA, Elon Lages. **Análise Real: funções de uma variável**. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [16] BOYCE, William E., DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. 8.ed. Rio de Janeiro: LTC.
- [17] SYMON, Keith R. **Mecânica**. Tradução de Gilson Brand Batista. Rio de Janeiro: Campus, 1996. Tradução de: Mechanics.
- [18] WATARI, Kazunori. **Mecânica Clássica**, São Paulo: Livraria da Física, 2004.
- [19] BARROS, Vicente Pereira. Osciladores forçados: harmônico e paramétrico. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.29, n.4, p.549-554, 2007. Disponível em: < www.sbfisica.org.br >.
- [20] BERTUOLA, A.C., HUSSEIN, M.S., PATO, M.P. O Oscilador harmônico amortecido forçado revisitado. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v.27, n.3, p.327-332, 2005. Disponível em: < www.sbfisica.org.br >.
- [21] CASTRO, A.S. Oscilador harmônico: Uma análise via séries de Fourier. **Revista Brasileira de ensino de Física**, São Paulo, v.36, n.2, 2014. Disponível em: < www.sbfisica.org.br >.
- [22] JUNIOR, Mario Casarin, TOMEI, Carlos. Além das Séries de Fourier. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n.8, p. 47-63, 1988,.
- [23] MELO, Anderson da Silva. **O ensino das razões trigonométricas com auxílio de um software de geometria dinâmica**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) - IMPA, Rio de Janeiro, 2013.