UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA E MATEMÁTICA

FRANCISCO EDNALDO DA SILVA OLIVEIRA

CAMPOS DE VETORES HOMOTÉTICOS NO ESPAÇO EUCLIDIANO

ACARAPE - CE
2016

FRANCISCO EDNALDO DA SILVA OLIVEIRA

CAMPOS DE VETORES HOMOTÉTICOS NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho

ACARAPE - CE

2016

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro- Brasileira
Direção de Sistema Integrado de Bibliotecas da UNILAB (DSIBIUNI)
Biblioteca Setorial Campus Liberdade
Catalogação na fonte

Bibliotecário: Gleydson Rodrigues Santos – CRB-3 / 1219

Oliveira, Francisco Ednaldo da Silva.

O45c

Campos de vetores homotéticos no espaço Euclidiano. / Francisco Ednaldo da Silva Oliveira. – Acarape, 2016.

28 f.; 30 cm.

Monografia apresentada, Curso de Ciências da Natureza e Matemática, do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza (ICEN) da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira – UNILAB.

Orientador: Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho.
Inclui Gráficos e Referências.

1. Espaço Euclidiano. 2. Campos de vetores conformes. 3. Campos de vetores homotéticos. I. Título.

CDD 516.3

FRANCISCO EDNALDO DA SILVA OLIVEIRA

CAMPOS DE VETORES HOMOTÉTICOS NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Monografia apresentada ao Curso de Ciências da Natureza e Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Ciências da Natureza com Habilitação em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovoda em: 06 de Maio de 2016.

BANCA EXAMINADORA

João Fco da S. Filho

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Maria Cristiane M. Brandão

Profa. Dra. Maria Cristiane Magalhães Brandão
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a Deus pela sua infinita graça e misericórdia, por ter me concedido força, determinação e por sempre me confortar em momentos difíceis nesta singular conquista.

Aos meus pais pelo apoio, confiança e cuidado, por sempre acreditarem em mim, mesmo diante das dificuldades. A minha avó, como também a todos meus irmãos e irmãs.

Ao instituto de Ciências Exatas e da Natureza e a todos os professores que fizeram parte da minha formação acadêmica, pelos ensinamentos, incentivo e companheirismo.

Ao orientador de pesquisa e do trabalho de conclusão de curso professor João Francisco da Silva Filho, pelos muitos ensinamentos, paciência e disposição.

Aos colegas que contribuíram direto ou indiretamente para este sonho se concretizar.

Aos membros da banca examinadora, os professores Rafael Jorge Pontes Diógenes, Maria Cristiane Magalhães Brandão pelas correções e sugestões para a versão final desta monografia.

Por fim, agradeço à Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB pelo suporte financeiro por meio de bolsas ao longo deste período da graduação.

¨A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.¨ (Galileu Galilei)

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar e determinar uma expressão geral para os campos de vetores homotéticos gradiente no espaço Euclidiano bidimensional, tridimensional e n-dimensional, correspondendo ao estudo de uma caso particular de campos de vetores homotéticos sobre variedades Riemanniana. No final do trabalho, estendemos o mesmo estudo para os campos de vetores homotéticos não-gradientes, usando os resultados obtidos para o caso gradiente. Partimos de uma abordagem mais geral, situando o leitor através das preliminares que introduz as notações e definições usadas ao longo do presente trabalho. Por meio de cálculos analíticos, chegaremos aos resultados principais do trabalho, concluindo assim, com a obtenção do que nos propomos a realizar no projeto inicial.

Palavras-chave: Espaço Riemanniano. Espaço Euclidiano. Campos de vetores conformes. Campos de vetores homotéticos gradientes.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A homotetia situa-se desde aplicações na reta, plano e no espaço, em contexto vetorial e analítico, é apresentada de um modo estrutural como uma aplicação linear. Em contextos mais usuais, a homotetia é vista como um tipo de transformação geométrica resumindo-se apenas em uma ampliação, positiva ou negativa de qualquer objeto geométrico. Na presente abordagem, a relação das terminologias, homotetia e homotéticos não são imediatas, pois nosso objetivo é tratar diretamente dos campos de vetores homotéticos.

Podemos encontrar na literatura, estudos mais gerais sobre os campos de vetores homotéticos, no contexto das chamadas geometrias *não-Euclidianas*. A geometria Euclidiana constituiu-se por muito tempo como centro de estudo exclusivo, prevalecendo até hoje sua relevância e importância diante de outras geometrias. Devemos ressaltar que as geometrias não-Euclidiana surgiram a partir da geometria Euclidiana, depois das tentativas de alguns matemáticos em demonstrar o quinto postulado de Euclides, conhecido como o *Postulado das Paralelas.*

Os campos de vetores homotéticos correspondem a um caso particular dos campos de vetores conformes, pois podem ser pensados como campos conformes com fator conforme constante e por outro lado, correspondem a uma generalização dos campos de Killing, já que os campos de Killing podem ser vistos como campos homotéticos com fator de homotetia identicamente nulo. Consultando a literatura sobre o presente tema, observou-se que não se tem uma abordagem específica para o estudo dos campos de vetores homotéticos no espaço euclidiano, portanto a problemática vislumbrada com relação à temática escolhida paira aprioristicamente no fato de ser um assunto não muito explorado na literatura em geral.

Partindo da vertente acima, estudaremos os campos de vetores homotéticos no espaço euclidiano na perspectiva de descrever uma expressão geral para os campos homotéticos gradientes, bem como descrever geometricamente e identificar condições suficientes para que um campos homotético no espaço Euclidiano seja necessariamente gradiente. Os campos de vetores homotéticos no espaço Riemanniano são campos de vetores cuja derivada de Lie resulta em um tensor de ordem dois que é múltiplo da métrica Riemanniana do referido espaço e por analogia às transformações de homotetia, tais campos de vetores são designados homotéticos.

Os campos de vetores homotéticos aparecem naturalmente no estudo das imersões em formas espaciais, nos produtos-*warped*, nas variedades de Einstein e em trabalhos sobre fluxo geométrico, tais como o fluxo de Yamabe e o fluxo de Ricci, teoria introduzida por Hamilton (1982) e usada por Perelman (2002) na prova da famosa conjectura de Poincaré. Nas formas espaciais, podemos destacar os exemplos construído por Heintze (1989), também podemos observar que campos de vetores que geram solitons de Ricci diferem por um campo homotético, por fim, devemos ressaltar que solitons de Yamabe com curvatura escalar constante são gerados por campos homotéticos.

Os campos homotéticos gradientes foram estudados por Tashiro (1965) e neste trabalho, foi provado pelo autor que um espaço Riemanniano completo munido com um campo homotético gradiente não trivial deve ser isométrico ao espaço Euclidiano, em particular, a presença de um campo homotético gradiente não trivial em um espaço Riemanniano completo implica que a curvatura escalar é nula. Podemos ainda relacionar a curvatura escalar com os campos homotéticos, usando o trabalho de Obata e Yano (1970) que nos permite concluir que espaços Riemannianos de curvatura escalar constante e munido com um campo homotético não trivial, devem ter curvatura escalar nula.

Os campos de vetores homotéticos gradientes triviais são chamados de paralelos e foram estudados por Rham (1952) e por Cheeger e Gromol (1971), onde os autores conseguiram associar a existência de tais campos à decomposições dos espaços Riemannianos completos onde eles estão inseridos. Em outras palavras, um espaço Riemanniano completo munido com um campo de vetores paralelo gradiente pode ser decomposto em um produto Riemanniano no qual uma das parcelas do produto deve ser Euclidiana de dimensão um, ou seja, isométrica à reta real. Um resultado similar foi mais tarde obtido por Cheeger e Colding (1996), onde os autores associaram a existência de campos conformes gradientes à uma nova decomposição em forma de produto-*warped*.

Faremos a abordagem Matemática do problema em questão, partindo das definições que envolvem o tema, mostrando os resultados principais alcançados e consolidando o trabalho com a conclusão, obtida a partir dos resultados apresentados. Nesta perspectiva, o referido trabalho busca estudar os campos de vetores homotéticos no espaço Euclidiano, com uma abordagem bidimensional, tridimensional e n-dimensional. Dessa forma determinaremos uma expressão geral para obtenção de campos de vetores homotéticos gradientes no espaço Euclidiano, estendendo este estudo para campos de vetores homotéticos não-gradientes no espaço Euclidiano.

2 PRELIMINARES

No presente capítulo, estaremos admitindo algumas noções básicas de Cálculo Diferencial e Integral de várias variáveis e Cálculo Vetorial, bem como alguns conceitos de Álgebra Linear que serão rapidamente mencionados sem maiores detalhes. Apresentamos aqui as principais notações e elementos que serão usados ao longo do trabalho no desenvolvimento dos resultados principais, incluindo alguns resultados bastante conhecidos na literatura.

2.1 O Espaço Euclidiano

Primeiramente, vamos considerar o espaço Euclidiano n-dimensional como o produto cartesiano

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \text{ (n fatores iguais a $\mathbb{R}$)},$$

que também pode ser escrito na forma

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

então denotaremos por $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções reais suaves definidas sobre o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.1 Dependendo da conveniência, os elementos de $\mathbb{R}^n$ podem ser pensados como pontos ou vetores.

Definição 2.1 Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ uma constante, definimos a soma $x + y$ e o produto λx por

(a) $x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

(b) $\lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Definição 2.2 Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, dizemos que o produto interno (canônico) de x e y é o número real definido pelo somatório

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

No primeiro resultado que vamos enunciar, trazemos as três propriedades básicas do produto interno que definimos anteriormente e que serão muito úteis no decorrer deste trabalho.

Proposição 2.1 Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ uma constante, então

(a) $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

(c) $\langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$.

Demonstração:

(a) Por um cálculo direto, obtemos

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0,$$

pois consiste na soma de n parcelas não-negativas.

(b) Novamente por um cálculo direto, segue que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x\rangle,$$

portanto $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

(c) Usando a definição, temos que

$$\begin{aligned} \langle x + \lambda y, z\rangle &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) z_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle, \end{aligned}$$

concluindo a prova da proposição. □

Definição 2.3 Dizemos que a norma de $x \in \mathbb{R}^n$ é o número real não-negativo, dado por

$$|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

O próximo resultado que vamos apresentar é conhecido como a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Proposição 2.2 Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ quaisquer, temos que

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x||y|,$$

ocorrendo a igualdade, se e somente se, um dos vetores é múltiplo escalar do outro.

Demonstração:

Observe que se x e y são nulos a desigualdade é trivialmente satisfeita, então vamos admitir que $x \neq 0$ e definir o polinômio p por

$$p(t) = |tx - y|^2 \geq 0,$$

consequentemente,

$$p(t) = \langle tx - y, tx - y \rangle = |x|^2 t^2 - 2\langle x, y \rangle t + |y|^2$$

e desde que $p(t) \geq 0$, segue que

$$\Delta = 4(\langle x, y \rangle^2 - |x|^2 |y|^2) \leq 0.$$

Da última desigualdade obtida, concluímos que

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|.$$

Observe ainda que se a igualdade ocorre, então

$$|x|^2 p\left(\frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2}\right) = 0,$$

portanto

$$y = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2} x,$$

reciprocamente se um for múltiplo do outro, a conclusão é imediata. $\square$

Proposição 2.3 Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e λ uma constante, temos que

(a) $|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) $|\lambda x| = |\lambda||x|$.

(c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demonstração:

Na prova dos itens (a) e (b), basta usar a definição de norma e as propriedades de produto interno. Para provar o item (c), desenvolvemos a expressão

$$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2(|x||y| - \langle x, y \rangle),$$

daí usamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz para concluir que

$$(|x| + |y|)^2 \geq |x + y|^2,$$

consequentemente,

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \qquad \square$$

Observação 2.2 Denotaremos a base canônica de $\mathbb{R}^n$ por

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

onde e_i é o vetor que possui todas as coordenadas nulas, exceto a i-ésima.

2.2 Campos de vetores sobre o espaço Euclidiano

Neste momento, vamos introduzir alguns conceitos básicos sobre cálculo vetorial, destacando campos de vetores suaves no espaço Euclidiano e alguns elementos relacionados a estas estruturas.

Definição 2.4 Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *contínua* no ponto $a \in \mathbb{R}^n$, quando para cada $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos obter $\delta > 0$ tal que

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Observação 2.3 Quando uma função f é contínua em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é contínua.

Definição 2.5 Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita diferenciável no ponto $a \in U$, quando existe o limite

$$df_a(v) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t},$$

para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Se f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio, dizemos simplesmente que f é diferenciável.

Observação 2.4 O limite dado por $df_a(e_i)$ é chamado de i-ésima *derivada parcial* de f no ponto a. Usaremos ainda a expressão *derivada parcial* para fazer referência à aplicação $\partial_{x_i} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida por

$$\partial_{x_i} f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}.$$

Definição 2.6 Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de *classe* C^1 e escrevemos $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, quando f é diferenciável e suas derivadas parciais são contínuas. Diremos que f é uma aplicação de *classe* C^k (ou k vezes continuamente diferenciável) e escrevemos $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, quando as derivadas parciais de f são de classe C^{k-1}.

Observação 2.5 Por conveniência, dizemos que $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ para indicar que f é uma função contínua

Definição 2.7 Uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de classe C^∞ e esscrevemos $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, quando possui derivadas de todas as ordens em cada ponto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.8 Um campo de vetores suave sobre o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação suave

$$X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

que associa a cada ponto $p \in \mathbb{R}^n$ um vetor $v \in \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos campos de vetores suaves sobre o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.6 Denotaremos por $E_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, o campo de vetores que associa todo $p \in \mathbb{R}^n$ ao vetor $e_i \in \mathbb{R}^n$. Mais precisamente, temos que

$$E_i(p) = e_i,$$

para todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.9 O gradiente de uma função suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é o campo de vetores definido por

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f) E_i$$

onde $\partial_{x_i} f$ denota a derivada parcial de f em relação à variável x_i.

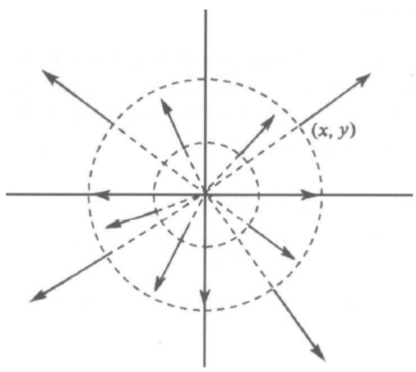
Definição 2.10 Dizemos que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ é gradiente, quando existe uma função suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que

$$X = \nabla f,$$

enquanto f é chamada de função potencial de X.

Exemplo 2.1 O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definido por $X = x\partial_x + y\partial_y$ é gradiente com função potencial $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Ilustração:



Definição 2.11 O divergente de um campo de vetores suave $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \langle X, E_i \rangle.$$

onde E_i denota o campo de vetores definido na Observação 2.6.

Definição 2.12 O laplaciano de uma função suave $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ é definido por

$$\Delta f := \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{x_i x_i} f.$$

onde $\partial_{x_i x_j}{}^2 f$ denota a derivada de 2ª ordem dada pela iteração $\partial_{x_i}(\partial_{x_j} f)$.

Definição 2.13 Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ arbitrários, definimos a função $\langle X, Y \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\langle X, Y \rangle(p) := \langle X(p), Y(p) \rangle,$$

para todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.14 Dados $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, definimos a função $X(f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$X(f) := \langle X, \nabla f \rangle.$$

Observação 2.7 Podemos identificar um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ com um operador linear $X : \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, dado por $X(f) := \langle X, \nabla f \rangle$. Dessa forma, temos que

$$E_i(f) = \langle E_i, \nabla f \rangle = \partial_{x_i} f,$$

então, a partir de agora, usaremos ∂_{x_i} para denotar o campo de vetores E_i.

Definição 2.15 Dados $U, V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, definimos o produto $U^\flat \otimes V^\flat : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ pela expressão

$$U^\flat \otimes V^\flat(X, Y) := \langle U, X \rangle \langle V, Y \rangle,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

Observação 2.8 No intuito de simplificar notações, daqui para frente denotaremos os produtos $\partial_{x_i}^\flat \otimes \partial_{x_i}^\flat$ e $\partial_{x_i}^\flat \otimes \partial_{x_j}^\flat$. por dx_i^2 e $dx_i dx_j$, respectivamente.

Proposição 2.4 Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ arbitrários, então existe um único campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz a igualdade

$$Z(f) = XY(f) - YX(f)$$

para toda função $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Pode ser encontrada em Carmo (2005).

Definição 2.16 Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ arbitrários, definimos o colchete de Lie de X e Y como sendo o único campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz a igualdade

$$Z(f) = XY(f) - YX(f)$$

para toda função $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observação 2.9 O campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ mencionado na definição anterior é comumente denotado por $[X, Y] = XY - YX$.

Definição 2.17 Dada uma função $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ arbitrária, dizemos que o hessiano de f é a aplicação $Hess\, f : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, definida por

$$Hess\, f := \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_{x_i x_j}^{\,2} f) dx_i dx_j.$$

Observação 2.10 Note que $Hess\, f(\partial_{x_i}, \partial_{x_i}) = \partial_{x_i x_j}^{\,2} f$.

Definição 2.18 Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ arbitrário, dizemos que a derivada de Lie de X é a aplicação $\mathcal{L}_X : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, dada por

$$\mathcal{L}_X := \sum_{i,j=1}^{n} [\partial_{x_i} \langle X, \partial_{x_j} \rangle + \partial_{x_j} \langle X, \partial_{x_i} \rangle] dx_i dx_j.$$

Proposição 2.5 Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que a derivada de Lie satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\mathcal{L}_{(X+\lambda Y)} = \mathcal{L}_X + \lambda \mathcal{L}_Y$

(b) $\mathcal{L}_{\nabla f} = 2\, Hess f$

onde λ denota uma constante.

Demonstração:

(a) Fazendo um cálculo direto e usando a definição de derivada de Lie, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X+\lambda Y} &= \sum_{i,j=1}^{n} [\partial_{x_i} \langle X + \lambda Y, \partial_{x_j} \rangle + \partial_{x_j} \langle X + \lambda Y, \partial_{x_i} \rangle] dx_i dx_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} [\partial_{x_i} \langle X, \partial_{x_j} \rangle + \partial_{x_j} \langle X, \partial_{x_i} \rangle] dx_i dx_j \\ &+ \lambda \sum_{i,j=1}^{n} [\partial_{x_i} \langle Y, \partial_{x_j} \rangle + \partial_{x_j} \langle Y, \partial_{x_i} \rangle] dx_i dx_j = \mathcal{L}_X + \lambda \mathcal{L}_Y, \end{aligned}$$

concluindo o primeiro item.

(b) Novamente por um cálculo direto, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nabla f} &= \sum_{i,j=1}^{n} [\partial_{x_i} \langle \nabla f, \partial_{x_j} \rangle + \partial_{x_j} \langle \nabla f, \partial_{x_i} \rangle] dx_i dx_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} [\partial_{x_i x_j}^{2} f + \partial_{x_j x_i}^{2} f] dx_i dx_j \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i x_j}^{2} f dx_i dx_j = 2 Hess f, \end{aligned}$$

concluindo a prova. $\square$

3 RESULTADOS PRINCIPAIS

Neste último capítulo, estaremos explorado os campos de vetores conformes sobre o espaço Euclidiano, apresentando alguns elementos de Geometria Diferencial através de uma abordagem diferente das usuais, procurando aproximar um pouco mais de uma abordagem de Cálculo Vetorial.

3.1 Campos de vetores conformes

Definição 3.1 Dizemos que um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ é conforme se a sua derivada de Lie satisfaz

$$\mathcal{L}_X = 2\psi \sum_{i=1}^{n} dx_i^2,$$

onde $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é chamado *fator conforme* (ou *fator de conformidade*).

Observação 3.1 Um campo de vetores conforme é chamado *homotético* se o seu fator conforme é constante. Em particular, um campo de vetores homotético com fator conforme nulo é chamado de campo de *Killing.*

Neste momento, apresentamos dois exemplos de campos de vetores conformes sobre o espaço Euclidiano.

Exemplo 3.1 O campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definido por

$$X = (x^2 - y^2)\partial_x + (2xy)\partial_y$$

é conforme não-homotético com fator conforme $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dado por

$$\psi(x, y) = 2x.$$

De fato, usando a definição de derivada de Lie na direção de X, obtemos

$$\mathcal{L}_X = (\xi_{1,1})dx^2 + (\xi_{1,2})dxdy + (\xi_{2,1})dydx + (\xi_{2,2})dy^2,$$

onde $\xi_{i,j} \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função suave. No entanto

$$\xi_{1,1} = [\partial_x\langle X, \partial_x\rangle + \partial_x\langle X, \partial_x\rangle]dx^2 = 2[\partial_x\langle X, \partial_x\rangle]$$

logo

$$\begin{aligned} \xi_{1,1} &= 2\partial_x[\langle(x^2 - y^2)\partial_x + (2xy)\partial_y, \partial_x\rangle] \\ &= 2\,\partial_x[(x^2 - y^2)\langle\partial_x, \partial_x\rangle + (2xy)\langle\partial_y, \partial_x\rangle] \end{aligned}$$

consequentemente,
$$\xi_{1,1} = 2\partial_x(x^2 - y^2) = 4x.$$

Da mesma forma, temos que

$$\xi_{1,2} = [\partial_x\langle X, \partial_y\rangle + \partial_y\langle X, \partial_x\rangle],$$

então

$$\begin{aligned}
\xi_{1,2} &= \partial_x\langle (x^2 - y^2)\partial_x + (2xy)\partial_y, \partial_y\rangle + \partial_y\langle (x^2 - y^2)\partial_x + (2xy)\partial_y, \partial_x\rangle \\
&= \partial_x(2xy) + \partial_y(x^2 - y^2) \\
&= 2y - 2y = 0.
\end{aligned}$$

De forma análoga, calculamos $\xi_{2,1}$ e $\xi_{2,2}$ que resulta nas igualdades

$$\xi_{1,2} = \xi_{2,1} \qquad \text{e} \qquad \xi_{1,1} = \xi_{2,2}$$

daí concluímos que

$$\mathcal{L}_X = (4x)dx^2 + (4x)dy^2 = 4x(dx^2 + dy^2).$$

portanto X é um campo conforme com fator conforme $\psi(x, y) = 2x$.

Exemplo 3.2 Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \frac{1}{2}\psi|x|^2,$$

onde $\psi \in \mathbb{R}$ é uma constante real. Nestas condições, temos que $X = \nabla f$ é um campo de vetores homotético com fator conforme ψ.

De fato, obtemos por um cálculo direto que

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i} f &= \frac{1}{2}\psi\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \\
&= \frac{1}{2}\psi\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}(x_i^2)
\end{aligned}$$

onde usamos o fato da derivada parcial de cada coordenada do gradiente de f ser identicamente nula para $x_i \neq x_j$ com $i, j = 1, .., n$. Nestas condições, segue-se que

$$\nabla f = \psi\sum_{i=1}^{n} x_i E_i,$$

daí basta usar a Proposição 2.5 para concluir que X é um campo de vetores conforme homotético com fator conforme ψ.

O próximo resultado desta seção estabelece uma relação entre o divergente de um campo de vetores conforme com o seu fator conforme. Mais precisamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ um campo de vetores conforme, então

$$\psi = \frac{1}{n} div X,$$

onde ψ denota o fator conforme de X.

Demonstração:

Fazendo um cálculo direto, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_X(E_k, E_k) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} [\partial_{x_i}\langle X, \partial_{x_j}\rangle + \partial_{x_j}\langle X, \partial_{x_i}\rangle] dx_i dx_j(E_k, E_k) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}\langle X, \partial_{x_k}\rangle \\ &= 2 div X, \end{aligned}$$

mas como X é conforme, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}_X(E_k, E_k) &= 2\psi \sum_{k=1}^{n} dx_k^2(E_k, E_k) \\ &= 2n\psi, \end{aligned}$$

daí basta comparar as duas igualdades obtidas para concluir que

$$\psi = \frac{1}{n} div X,$$

conforme queríamos provar. $\square$

3.2 Campos de vetores homotéticos

Nesta seção, vamos apresentar os resultados que obtivemos para campos de vetores homotéticos sobre o espaço Euclidiano e que podem ser obtidos através de resultados de Geometria Diferencial, no entanto faremos aqui demonstrações bem mais elementares que as comumente encontradas, usando ferramentas de Cálculo Diferencial e Integral e Cálculo Vetorial.

Teorema 3.1 Seja $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ um campo conforme homotético gradiente, então a função potencial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, é dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}\psi|x|^2 + \langle a, x\rangle + b,$$

onde $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$ são constantes e ψ denota o fator conforme.

Demonstração: Faremos a prova apenas para os casos dos espaços Euclidianos de dimensões dois e três, pois o caso geral é completamente análogo a estes dois que serão apresentados. Nestas condições, passamos aos casos mencionados:

1º Caso: $n = 2$

Desde que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ é um campo de vetores homotético gradiente com função potencial f, temos pela Proposição 2.5 que

$$Hess\, f = \psi(dx^2 + dy^2),$$

então segue da Observação 2.10 que

$$\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f = 0$$

e

$$\partial^2_{xx} f = \partial^2_{yy} f = \psi.$$

Sabendo que $\partial^2_{xx} f = \psi$ e $\partial^2_{xy} f = 0$, integramos a última igualdade em x e daí podemos escrever

$$\partial_x f = \psi x + a_1,$$

onde a_1 denota uma constante real. Repetindo o procedimento, temos que

$$f = \frac{1}{2}\psi x^2 + a_1 x + \varphi_1,$$

onde $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função que não depende de x. De modo similar, obtemos

$$f = \frac{1}{2}\psi y^2 + c_2 y + \varphi_2,$$

onde $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função que não depende de y.

Comparando as duas expressões de f, temos que

$$\frac{1}{2}\psi x^2 + a_1 x + \varphi_1 = \frac{1}{2}\psi y^2 + a_2 y + \varphi_2,$$

consequentemente,

$$\frac{1}{2}\psi x^2 + a_1 x - \varphi_2 = \frac{1}{2}\psi y^2 + a_2 y - \varphi_1$$

daí observe que o primeiro membro não depende de y e o segundo membro não depende de x, concluímos que

$$\frac{1}{2}\psi x^2 + a_1 x - \varphi_2 = \frac{1}{2}\psi y^2 + a_2 y - \varphi_1 = -b,$$

onde b é uma constante.

Nestas condições, segue-se que

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\psi x^2 + a_1 x + b,$$

e como f é dada por

$$f = \frac{1}{2}\psi y^2 + a_2 y + \varphi_2,$$

portanto

$$f = \frac{1}{2}\psi(x^2 + y^2) + a_1 x + a_2 y + b,$$

concluindo a prova para o caso $n = 2$.

2º Caso: $n = 3$

Considerando os mesmos termos e notações do caso anterior, temos que

$$Hess\, f = \psi(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

consequentemente,

$$\partial^2_{xy} f = \partial^2_{xz} f = \partial^2_{yz} f = 0$$

e

$$\partial^2_{xx} f = \partial^2_{yy} f = \partial^2_{yy} f = \psi.$$

Desde que $\partial^2_{xx} f = \psi$ e $\partial^2_{xy} f = \partial^2_{xz} f = 0$, integramos a última igualdade em x e daí podemos escrever

$$\partial_x f = \psi x + a_1,$$

onde a_1 denota uma constante real. Repetindo o procedimento, temos que

$$f = \frac{1}{2}\psi x^2 + a_1 x + \varphi,$$

onde $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função que não depende de x.

De modo similar, obtemos que

$$f = \frac{1}{2}\psi y^2 + a_2 y + \eta$$

e

$$f = \frac{1}{2}\psi z^2 + a_2 z + \xi$$

onde $\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função que não depende de y e $\xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função que não depende de z.

Comparando as duas primeiras expressões de f, segue-se que que

$$\frac{1}{2}\psi x^2 + a_1 x + \varphi = \frac{1}{2}\psi y^2 + a_2 y + \eta,$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2}\psi x^2 + a_1 x - \eta = \frac{1}{2}\psi y^2 + a_2 y - \varphi,$$

então como o primeiro membro não depende de y e o segundo não depende de x, concluímos que ambos dependem apenas de z e assim, podemos escrever

$$\varphi = \frac{1}{2}\psi y^2 + a_2 y + \delta,$$

onde $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ depende apenas de z.

Recorrendo à primeira expressão de f, temos que

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2}\psi x^2 + a_1 x + \varphi, \\ &= \frac{1}{2}\psi(x^2 + y^2) + a_1 x + a_2 y + \delta, \end{aligned}$$

no entanto,

$$f = \frac{1}{2}\psi z^2 + a_2 z + \xi$$

consequentemente,

$$\delta = \frac{1}{2}\psi z^2 + a_2 z + b,$$

por fim,

$$f = \frac{1}{2}\psi(x^2 + y^2 + z^2) + a_1 x + a_2 y + a_3 z + b,$$

onde b é uma constante real. □

Podemos ainda caracterizar os campos de vetores homotéticos do espaço Euclidiano através de uma decomposição tipo Hodge-De Rham e usando a descrição obtida no teorema anterior. Em outras palavras, podemos afirmar que todo campo de vetores homotético sobre o espaço Euclidiano é gradiente, módulo campos de Killing. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2 Todo campo de vetores homotético $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ pode ser escrito na forma

$$X = \nabla h + K,$$

onde $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave e K é um campo de Killing.

Demonstração:

Considere um campo de vetores homotético $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ com fator conforme $\psi \in \mathbb{R}$, então defina a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \frac{1}{2}\psi|x|^2,$$

e conforme o Exemplo 3.2, podemos afirmar que o gradiente da função h também será um campo de vetores conforme com fator conforme $\psi \in \mathbb{R}$. Usando as propriedades da derivada de Lie, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(X-\nabla h)} &= \mathcal{L}_X - \mathcal{L}_{\nabla h} \\ &= 2\psi \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 - 2\psi \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 = 0, \end{aligned}$$

donde concluímos que $X - \nabla h$ é um campo de Killing, ou seja,

$$X = \nabla h + K,$$

onde $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave e K é um campo de Killing. $\square$

Observação 3.2 Os campos de vetores dos Exemplos 2.1 e 3.2 são homotéticos gradientes, basta comparar sua função potencial com a expressão obtida no Teorema 3.1. De maneira similar, concluímos de forma imediata, pelos Teoremas 3.1 e 3.2, que o Exemplo 3.1 não é homotético.

4 CONCLUSÃO

Diante do estudo desenvolvido ao longo deste trabalho, podemos assegurar que os objetivos propostos foram cumpridos, obtivemos uma expressão que gera todos os campos de vetores homotéticos gradiente no espaço Euclidiano e por fim, descrevemos (módulo campos de Killing) o caso não-gradiente, ou seja, concluímos que este tipo de campo de vetores pode ser escrito como uma soma de um campo de vetores gradiente com um campo de Killing. Diante dos resultados apresentados, torna-se mais prático determinar se determinado campo de vetores no espaço Euclidiano é homotético ou não.

REFERÊNCIAS

BESSE, A.L. *Einstein manifolds.* Berlin: Spring-Verlag, 2008. (Classics Mathematics).

BUENO, H. P. Álgebra Linear: Um Segundo Curso. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

CAMINHA, A.: The geometry of closed conformal vector fields on Riemann spaces. Bulletin Brazillian Matheatical Society, v. 42, (2011), p. 277-300.

CAO, H-D. Recent progress on Ricci soliton. Preprint, 2009. arXiv: 0908.2006v1 [math.DG]. Disponível em: <http://www.arxiv.org>. Acesso em: 12 mar. 2016.

CARMO, M. P. do *Geometria Riemanniana.* 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides).

CASTRO, I., MONTEALEGRE, C. R.; URBANO, F.: Closed Conformal Vector Fields and Lagragian Submanifolds in Complex Space Forms. Pacific Journal of Mathematics, v. 199 (2001), p. 269-302.

CHEEGER, J.; GROMOLL, D. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. Journal of Differential Geometry, v. 6, (1971) no. 1, p. 119-128.

CHEEGER, J.; COLDING, T. Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products. Annals of Mathematics, v. 144, (1996) no. 1, p. 189-237.

CHOW, B.; LU, P.; NI, L. *Hamilton's Ricci Flow.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics, v. 77).

RHAM, G. Sur la réeducibilité. Comentarii Mathematici Helvetici, v. 26, (1952), p. 328-344.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5a ed. Vol.1. Rio de janeiro: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5a ed. Vol.2. Rio de janeiro: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5a ed. Vol.3. Rio de janeiro: LTC, 2011.

GUIDORIZZI, H. G. Um curso de cálculo. 5a ed. Vol.4. Rio de janeiro: LTC, 2011.

HAMILTON, R. S. *The formation of singularities in the Ricci flow.* Surveys in Differential Geometry. Cambridge, MA: International Press, 1995. v. 2, p. 7-136.

HAMILTON, R. S. The Ricci flow in dimension three. *Journal Differential Geometry*, v. 17, p. 255-306, 1982.

HEINTZE, E. Extrinsic upper bounds for λ_1. *Mathematische Annalen*, v. 280, p. 389-402, 1988.

LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. New York: Springer-Verlag, 2002. (New Yourk Graduate Texts in Mathematics, v. 218.)

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 3a ed. Vol. 1. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 3a ed. Vol. 2. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

LIMA, E. L. Álgebra Linear, 8a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, E. L. Análise Real - Volume 1, 11a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, E. L. Análise Real - Volume 2: Funçõe de n variáveis, 6a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. Análise Real - Volume 3: Análise Vetorial, 4a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 1, 14a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, E. L. Curso de Análise - Volume 2, 10a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

OBATA, M.; YANO, K. Conformal changes of Riemannian metrics. *Journal Differential Geometry*, v. 4, p. 53-72, 1970.

OLIVEIRA, F.; PEREIRA, O.; SILVA FILHO, J. Campos Conformes sobre o Espaço Euclidiano. Acarape, 2015 (Artigo em Processo de Elaboração).

PERELMAN, G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric aplications. Preprint, 2002. arXiv: math/0211159v1, 2002. Disponível em: <http://www.arxiv.org>. Acesso em: 20 fev. 2016.

PETERSEN, P. *Riemannian geometry*. New York: Springer-Verlag, 1998. (Graduate texts in mathematics, v. 171.)

SILVA Filho, J. Solitons de Ricci e métricas quasi-Einstein em variedades homogêneas. 2013, 84 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Pós-graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

SILVA Filho, J. Quasi-Einstein manifolds endowed with a parallel vector Field. Fortaleza, 2015. Monatshefte fur Mathematik, v. 178 (2015). p. 01-16.

TANNO, S. and WEBBER, W.: Closed conformal vector fields. Journal Di erential Geometry, v. 3 (1969), p. 361-366.

TASHIRO, Y. Complete Riemannian manifolds and some vector fields. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 117, p. 251-275, 1965.

YANO, K. *Integral formulas in Riemannian geometry.* New York: Marcel Dekker, 1970.