



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ ALNEYR ALMEIDA GOMES

PROPOSTAS DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PARA O ENSINO MÉDIO

Redenção
2023

JOSÉ ALNEYR ALMEIDA GOMES

PROPOSTAS DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares

Redenção

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Gomes, Jose Alneyr Almeida.

G633p

Propostas de construções geométricas para o ensino médio / Jose Alneyr Almeida Gomes. - Redenção, 2023.
181fl: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientadora: Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares.

1. Desenho geométrico. 2. Ensino médio. 3. Geometria. I.
Título

CE/UF/BSCA

CDD 516.22

JOSÉ ALNEYR ALMEIDA GOMES

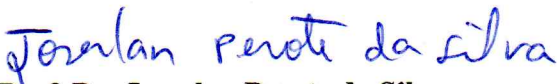
PROPOSTAS DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PARA O ENSINO MÉDIO

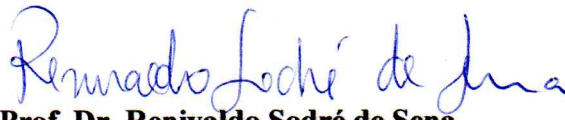
Dissertação apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Unilab – Campus Auroras.

Aprovada em: 20/06/2023

BANCA EXAMINADORA


Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)


Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)


Prof. Dr. Renivaldo Sodré de Sena
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

*Dedico este trabalho primeiramente a Deus
por ser meu alicerce, à minha amada família
e amigos.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela proteção em todas as viagens que fiz no decorrer do curso, pela minha saúde e de meus familiares.

Aos meus pais Diassis e Marilza pela educação, cuidado e apoio que sempre tiveram comigo em todos os momentos.

À minha noiva Daniela por me incentivar nos momentos difíceis e entender minhas ausências nos momentos de estudos.

Aos meus professores da Unilab, que de uma forma muito profissional e humana fizeram parte desse projeto com toda dedicação, superando minhas expectativas.

À minha orientadora e professora Danila Fernandes Tavares, por toda a atenção, empenho na construção deste trabalho, e pela incomensurável paciência em todos os momentos.

Aos professores convidados para compor a banca Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva e Prof. Dr. Renivaldo Sodre de Sena, pela disponibilidade de ler o extenso trabalho e pelas suas contribuições para melhoria do trabalho.

Aos meus colegas de curso: Ricardo, Arthur, Jeffersson e Ênio; pelo apoio e auxílio nos momentos dos estudos; e pelos muitos momentos de descontrações inesquecíveis. Neste presente momento, no final de curso, estamos mudando de colegas de curso para amigos.

À Unilab, por abrir suas portas para o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat), dando oportunidade de acesso aos professores de Matemática da educação básica da região.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela iniciativa de criação e coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat) e à Coordenação Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo apoio financeiro.

“As leis da natureza são apenas pensamentos matemáticos de Deus”.
(Euclides)

RESUMO

Esse trabalho tem o objetivo de oferecer propostas de construções geométricas para auxiliar o professor do ensino médio, através de uma sequência de construções e justificativas dos principais conceitos e entes matemáticos desenvolvidos passo a passo em consonância com os conteúdos programáticos da base nacional comum curricular (BNCC) para o ensino de geometria. Com esse trabalho espera-se oferecer ao professor da educação básica um material com sugestões de construções geométricas divididas nos três anos do ensino médio, com o intuito de trabalhar uma geometria mais construtiva que possibilite maior interação dos alunos com uma aprendizagem satisfatória e que consiga despertar a curiosidade dos discentes no entendimento dos diversos conteúdos geométricos que são ministrados muitas vezes com aulas tradicionais, expositivas e abstratas que provocam o desinteresse pela geometria. As construções e justificativas contidas no material são frutos de pesquisas bibliográficas nas diversas literaturas matemáticas.

Palavras-chave: Desenho Geométrico; Ensino Médio; Geometria.

ABSTRACT

This work aims to offer proposals for geometric constructions to help high school teachers, through a sequence of constructions and justifications of the main mathematical concepts and entities developed step by step in line with the syllabus of the common national curriculum base (BNCC) for teaching geometry. With this work it is expected to offer the basic education teacher a material with suggestions of geometric constructions divided in the three years of high school, with the intention of working a more constructive geometry that allows greater interaction of the students with a satisfactory learning and that manages to awaken the students' curiosity in understanding the various geometric contents that are often taught with traditional, expository and abstract classes that provoke a lack of interest in geometry. The constructions and justifications contained in the material are the result of bibliographic research in the various mathematical literatures.

Keywords: Geometric Design; High school; Geometry.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – O osso de Ishango
- Figura 2 – Papiros de Moscou(A), Kuhn(B) e Rhind(C)
- Figura 3 – Reta e ponto não pertencente à reta
- Figura 4 – Retas paralelas ($s \parallel r$)
- Figura 5 – Traçando o arco de circunferência c_1
- Figura 6 – Traçando o arco de circunferência c_2
- Figura 7 – Traçando o arco de circunferência c_3
- Figura 8 – Traçando a reta s paralela à reta r
- Figura 9 – Traçando os segmentos **AP** e **BT**
- Figura 10 – Ponto **P** e reta r
- Figura 11 – Retas perpendiculares ($r \perp s$)
- Figura 12 – Traçando arco c_1 intersectando a reta r em **A** e **B**
- Figura 13 – Traçando arco c_2 centrado no ponto **A**
- Figura 14 – Traçando o arco c_3 com centro no ponto **B**
- Figura 15 – Traçando a reta s perpendicular à reta r
- Figura 16 – Traçando os segmentos **AP**, **BP**, **AT** e **BT**
- Figura 17 – Segmento **AB**
- Figura 18 – Reta s perpendicular ao segmento **AB**
- Figura 19 – Traçando arcos c_1 e c_2
- Figura 20 – Traçando a reta mediatriz **PQ**
- Figura 21 – Traçando os segmentos **AP**, **PB**, **BQ** e **QA**
- Figura 22 – Ângulo $\widehat{AOB}$
- Figura 23 – Traçando a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$
- Figura 24 – Traçando o arco de circunferência **XY**
- Figura 25 – Traçando a interseção entre os arcos c_2 e c_3
- Figura 26 – Traçando a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$
- Figura 27 – Traçando os segmentos **XP** e **YP**
- Figura 28 – Ângulo $\widehat{AOB}$ e reta r
- Figura 29 – Ângulo $\widehat{AOB}$ transportado para a reta r
- Figura 30 – Ponto **O'** sobre a reta r
- Figura 31 – Traçando o arco de circunferência c_1

Figura 32 – Traçando o arco de circunferência c_2

Figura 33 – Traçando a interseção dos arcos c_2 e c_3

Figura 34 – Traçando a semirreta $\overrightarrow{O'X'}$

Figura 35 – Traçando os segmentos $X'Y'$ e XY

Figura 36 – Segmento AB e reta r

Figura 37 – Segmento AB e segmento CD sobre a reta r

Figura 38 – Segmento AB e um ponto C pertencente à reta r

Figura 39 – Segmento AB e arco de circunferência de raio $\overline{AB}$ interceptando a reta r em D

Figura 40 – Reta r com pontos A , B e C marcados

Figura 41 – Ponto D entre A e B tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$

Figura 42 – Construção do ponto D entre A e B

Figura 43 – Segmentos BC , AB e AC

Figura 44 – Triângulo ABC

Figura 45 – Construção do arco de circunferência c_1

Figura 46 – Traçando o arco de circunferência c_2 a partir do ponto B

Figura 47 – Traçando os segmentos AC e BC

Figura 48 – Ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{A'O'B'}$

Figura 49 – Ângulo resultante $\widehat{A'OB}$

Figura 50 – Construção do arco de circunferência c_1

Figura 51 – Construção do arco de circunferência c_2 de raio OX' e centro O

Figura 52 – Construção do arco de circunferência de raio $\overline{X'Y'}$ e centro X'

Figura 53 – Construção da semirreta $\overrightarrow{OY'}$

Figura 54 – Segmento de medida arbitrária u

Figura 55 – Triângulo equilátero ABC de lado u

Figura 56 – Traçando o arco de circunferência c_1

Figura 57 – Traçando o arco de circunferência c_2 e marcando o ponto C

Figura 58 – Construção do triângulo equilátero ABC

Figura 59 – Segmentos AC , BC e ângulo $\widehat{XCY}$

Figura 60 – Triângulo ABC

Figura 61 – Semirreta CZ

Figura 62 – Marcação do arco de circunferência XY a partir do ângulo $\widehat{C}$

Figura 63 – Construção do arco de circunferência c_1

Figura 64 – Construção do arco de circunferência c_2

Figura 65 – Construção da semirreta CQ

Figura 66 – Marcação dos pontos **A** e **B** sobre os lados do ângulo $Q\hat{C}P$

Figura 67 – Triângulo **ABC**

Figura 68 – Segmento **AB** e ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$

Figura 69 – Triângulo **ABC** pedido

Figura 70 – Traçando o arco de circunferência c_1

Figura 71 – Construção do arco de circunferência c_2

Figura 72 – Traçando o arco de circunferência c_3

Figura 73 – Traçando o arco de circunferência c_4

Figura 74 – Construção do triângulo **ABC**

Figura 75 – Traçando o arco de circunferência c_5

Figura 76 – Traçando arco de circunferência c_6 de centro **B**

Figura 77 – Traçando o arco de circunferência c_7 de centro **B'**

Figura 78 – Segmento **BQ** traçado

Figura 79 – Triângulo **ABC**

Figura 80 – Lados dados **AB**, **AC** e **BC**

Figura 81 – Triângulo **ABC**

Figura 82 – Ponto **B** sobre a reta **r**

Figura 83 – Marcando o ponto **C** sobre a reta **r**

Figura 84 – Traçando o arco de circunferência c_1 de centro **B**

Figura 85 – Traçando o arco c_2 e o ponto de interseção **A** dos arcos c_2 e c_1

Figura 86 – Triângulo **ABC** pedido

Figura 87 – Segmento **AB** dado

Figura 88 – Ponto médio **M** do segmento **AB**

Figura 89 – Compasso com abertura $r > \frac{\overline{AB}}{2}$

Figura 90 – Traçando o arco de circunferência c_1 de centro **A**

Figura 91 – Traçando o arco de circunferência c_2 e os pontos de interseção **P** e **Q** entre c_1 e c_2

Figura 92 – Marcação do ponto médio **M** do segmento **AB**

Figura 93 – Traçando os segmentos **AP**, **PB**, **BQ** e **QA**

Figura 94 – Triângulo **ABC**

Figura 95 – Triângulo **ABC** com suas bissetrizes internas **AB₁**, **BB₂** e **CB₃** traçadas

Figura 96 – Traçando arco de circunferência **c₁**

Figura 97 – Traçando os arcos **c₂** e **c₃**

Figura 98 – Construção da bissetriz **AB₁** do triângulo **ABC**

Figura 99 – Construção das bissetrizes **BB₂** e **CB₃**

Figura 100 – Triângulo **ABC** com suas bissetrizes internas e seu incentro (**I**)

Figura 101 – Traçando os segmentos **XP** e **YP**

Figura 102 – Triângulo **ABC**

Figura 103 – Triângulo **ABC** com as três medianas **AM₁**, **BM₂** e **CM₃**

Figura 104 – Traçando as circunferências **c₁** e **c₂** de centros **A** e **B**, respectivamente, e os pontos de interseções **P** e **Q** entre essas circunferências

Figura 105 – Segmento **PQ** passando pelo ponto médio **M₃** de **AB**

Figura 106 – Triângulo **ABC** com mediana **CM₃** traçada

Figura 107 – Traçando os pontos médios **M₁** e **M₂** em relação aos lados **BC** e **AC**, respectivamente

Figura 108 – Triângulo **ABC** com as medianas **AM₁**, **BM₂** e **CM₃** traçadas, e o ponto de interseção **G** entre elas

Figura 109 – Triângulo **ABC**

Figura 110 – Triângulo **ABC** com as alturas **AH₁**, **BH₂** e **CH₃** traçadas

Figura 111 – Traçando arcos de circunferências **c₁**, **c₂** e **c₃**

Figura 112 – Triângulo **ABC** com altura **AH₁** traçada

Figura 113 – Traçando as alturas **BH₂** e **CH₃**

Figura 114 – Triângulo **ABC** com suas alturas traçadas

Figura 115 – Segmento **AB**

Figura 116 – Segmento **AB** dividido em 5 partes iguais **AC** $\equiv$ **CD** $\equiv$ **DE** $\equiv$ **EF** $\equiv$ **FB**

Figura 117 – Segmento **AB** e semirreta **AZ**

Figura 118 – Construção de segmentos congruentes sobre a semirreta **AZ**

Figura 119 – Traçando o segmento $\overline{BG'}$

Figura 120 – Divisão do segmento **AB** em cinco partes iguais

Figura 121 – Segmento de medida **k** e pontos **O** e **A** dados

Figura 122 – Possíveis posições do ponto **B**

Figura 123 – Compasso com abertura $\overline{OA}$

Figura 124 – Traçando a circunferência **c₁** de centro **O** e raio $\overline{OA}$

Figura 125 – Traçando a circunferências c_2 de centro **A** e raio **k**

Figura 126 – Traçando os segmentos **AX** e **AY** de medida **k**

Figura 127 – Reta **r** e pontos **A** e **B**

Figura 128 – Reta **r** e segmentos **AP** e **BP** traçados

Figura 129 – Construção da reta **s** perpendicular à **r** passando por **A**

Figura 130 – Compasso com abertura $\overline{QA}$

Figura 131 – Marcando o ponto **A'** simétrico de **A** em relação à reta **r**

Figura 132 – Construção do segmento **A'B**

Figura 133 – Construção do segmento **AP**

Figura 134 – Traçando segmentos

Figura 135 – Semirretas **r** e **s** perpendiculares e pontos **A** e **D**

Figura 136 – Construção dos segmentos **AB**, **BC** e **CD**

Figura 137 – Traçando o ponto **A'** simétrico de **A** em relação à reta **r**

Figura 138 – Traçando o segmento **A'D'**

Figura 139 – Segmentos **AB**, **BC** e **CD**

Figura 140 – Traçando segmentos

Figura 141 – Pontos **M**, **N** e **P**

Figura 142 – Triângulo **ABC** e os respectivos pontos médios de seus lados

Figura 143 – Reta **r** paralela a $\overline{MN}$

Figura 144 – Traçando a reta **s** passando por **M**

Figura 145 – Traçando a reta **t** passando por **N**

Figura 146 – Triângulo **ABC** com os respectivos pontos médios de seus lados

Figura 147 – Traçando os segmentos **MN**, **NP** e **MP**

Figura 148 – Reta **r** e pontos **A** e **B**

Figura 149 – Circunferência de centro **O** e raios $\overline{OB} = \overline{OA}$

Figura 150 – Traçando a mediatriz **m** do segmento **AB**

Figura 151 – Traçando a circunferência de centro **O** e raio $\overline{OA} = \overline{OB}$ passando pelos pontos **A** e **B**

Figura 152 – Ponto **O** e reta **r**

Figura 153 – Circunferência de centro **O** e raio **r**

Figura 154 – Circunferência de centro **O** e raio **r**

Figura 155 – Mediatriz **m** do segmento **AB**

Figura 156 – Ângulo **AÔB**

Figura 157 – Construção da bissetriz **OP** do ângulo **$\widehat{AOB}$**

Figura 158 – Triângulo **ABC**

Figura 159 – Triângulo **ABC** com as mediatrizes **r**, **s** e **t** dos lados **AB**, **BC** e **AC**, respectivamente

Figura 160 – Traçando as mediatrizes **r**, **s** e **t** e o circuncentro **O**

Figura 161 – Triângulo **ABC**

Figura 162 – Triângulo **ABC** com suas alturas **AH₁**, **BH₂** e **CH₃** traçadas

Figura 163 – Traçando a altura **AH₁** relativa ao lado **BC**

Figura 164 – Traçando as alturas **BH₂** e **CH₃**

Figura 165 – Traçando as retas **r**, **s** e **t** paralelas aos lados **BC**, **AC** e **AB**, respectivamente, do triângulo **ABC**

Figura 166 – Triângulo **ABC**

Figura 167 – Triângulo **ABC** com suas bissetrizes internas **AB₁**, **BB₂** e **CB₃**

Figura 168 – Construção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo **ABC**

Figura 169 – Triângulo **ABC**

Figura 170 – Triângulo **ABC** com suas medianas **AM₁**, **BM₂** e **CM₃** traçadas

Figura 171 – Marcando os pontos médios **M₁**, **M₂** e **M₃**

Figura 172 – Triângulo **ABC** com as medianas **AM₁**, **BM₂** e **CM₃** traçadas

Figura 173 – Triângulo **ABC** com o paralelogramo **M₃M₂YX** destacado

Figura 174 – Segmentos **AD**, **DC** e ângulo **$\widehat{XDY}$**

Figura 175 – Paralelogramo **ABCD**

Figura 176 – Transporte do segmento **DC** para a reta **r**

Figura 177 – Traçando o arco de circunferência **c₁**

Figura 178 – Traçando o arco de circunferência **c₂**

Figura 179 – Traçando o arco de circunferência **c₃**

Figura 180 – Traçando a semirreta **$\overrightarrow{DP}$**

Figura 181 – Marcando sobre a reta **s** o ponto **B**

Figura 182 – Paralelogramo **A'BCD**

Figura 183 – Traçando a diagonal **A'C** do quadrilátero **A'BCD**

Figura 184 – Segmentos **DC** e **AD**

Figura 185 – Retângulo **ABCD**

Figura 186 – Traçando um arco de circunferência intersectando a reta **r** no ponto **C**

Figura 187 – Traçando um arco de circunferência de centro **D**

Figura 188 – Traçando a mediatriz do segmento **XY**

Figura 189 – Marcando o ponto **A** sobre a reta **X'Y'**

Figura 190 – Traçando um arco de circunferência de centro **C** e raio arbitrário

Figura 191 – Traçando a mediatriz do segmento **X''Y''**

Figura 192 – Marcando o ponto **B** sobre a reta **X'''Y'''**

Figura 193 – Retângulo **ABCD**

Figura 194 – Segmento **DC**

Figura 195 – Quadrado **ABCD**

Figura 196 – Segmento **DC** sobre a reta **r**

Figura 197 – Traçando as retas **s** e **t** perpendiculares a **r**

Figura 198 – Marcando os pontos **A** e **B** sobre as retas **s** e **t** respectivamente

Figura 199 – Traçando o segmento **AB**

Figura 200 – Quadrado **ABCD**

Figura 201 – Traçando a diagonal $\overline{AC}$ do quadrilátero **ABCD**

Figura 202 – Segmento de medida **a**

Figura 203 – Losango **ABCD**

Figura 204 – Compasso com abertura **d < 2a**

Figura 205 – Marcando o ponto **C** sobre a reta **r**

Figura 206 – Traçando duas circunferências c_1 e c_2 de centros **A** e **C**, respectivamente, e de raios iguais a **a**

Figura 207 – Losango **ABCD** de lado **a**

Figura 208 – Arcos capazes de α em relação a **AB**

Figura 209 – Segmento **AB** e ângulo $\widehat{COD}$ de medida α

Figura 210 – Arcos capazes de α em relação a **AB**

Figura 211 – Ângulo de medida α sobre o segmento **AB**

Figura 212 – Traçando a mediatriz **n** do segmento **AB**

Figura 213 – Traçando a reta **s** perpendicular à reta **t** passando por **A**

Figura 214 – Marcando o ponto **O'** simétrico **O** em relação ao segmento **AB**

Figura 215 – Traçando os arcos capazes do ângulo α em relação a **AB**

Figura 216 – Arcos capazes do ângulo α em relação ao segmento **AB**

Figura 217 – Marcando o ponto **Q** sobre o arco **AB**

Figura 218 – Arco capaz de um ângulo de medida α sobre **AB**

Figura 219 – Arco capaz de $\frac{1}{2}\alpha$ sobre o segmento **AB**

Figura 220 – Traçando a mediatriz do segmento **AB**

Figura 221 – Traçando os lados **AO'** e **BO'** do ângulo inscrito $\widehat{AO'B}$

Figura 222 – Traçando o arco **AB** de centro **O'** e raio $\overline{BO'}$

Figura 223 – Construção do ângulo inscrito $\widehat{ACB}$ de medida $\frac{1}{2}\alpha$ sobre o arco de circunferência **AB** de centro **O'** e raio $\overline{BO'}$

Figura 224 – Círculo Γ e ponto **P** exterior

Figura 225 – Semirretas **PA** e **PB** tangentes a Γ

Figura 226 – Traçando o segmento **OP** e o seu ponto médio **O'**

Figura 227 – Traçando o círculo de centro **O'** e raio $\overline{O'O} = \overline{O'P}$

Figura 228 – Semirretas **PA** e **PB** tangentes a Γ em **A** e **B**

Figura 229 – Construção das semirretas **PA** e **PB** tangentes a Γ

Figura 230 – Retas paralelas cortadas por retas transversais

Figura 231 – Segmentos **AB** e **CD** de medidas **x** e **y** respectivamente

Figura 232 – Transporte dos segmentos **AB** e **CD** para a reta **r**

Figura 233 – Marcando o ponto médio **M** do segmento **AD**

Figura 234 – Triângulo métrico **ABC**

Figura 235 – Triângulo métrico **ABC**

Figura 236 – Pontos **A** e **B** sobre a reta **r**

Figura 237 – Traçando o ponto médio **O** de **AB**

Figura 238 - Semicircunferência **AB**

Figura 239 – Traçando a reta **s** paralela à reta **r** pelo ponto **C**

Figura 240 – Traçando a perpendicular à **AB** passando por **C**

Figura 241 – Circunferência passando pelos pontos **A**, **B** e **C**, e ponto **P** exterior a mesma

Figura 242 – Reta **r** e pontos **A** e **B**

Figura 243 – Circunferência passando pelos pontos **A** e **B** e tangente a reta **r**

Figura 244 – Traçando a reta **s**

Figura 245 – Traçando a mediatriz **m** de **AB**

Figura 246 – Traçando o semicírculo **PB** de centro **M** e raio $\overline{MP} = \overline{MA}$

Figura 247 – Traçando a perpendicular à reta **s** por **A**

Figura 248 – Traçando os segmentos **PC** e **BC**

Figura 249 – Traçando arco de circunferência de centro **P** e raio $\overline{PC}$

Figura 250 – Traçando a reta **TO** perpendicular à **r**

Figura 251 – Traçando circunferência de centro **O** e raio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OT}$

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

MA13 – Componente Curricular de Geometria do PROFMAT

PCN's – Parâmetros Curriculares Nacionais

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

LDB – Lei de diretrizes e bases da educação nacional

SARS-CoV-2 – Coronavírus 2 da síndrome respiratória aguda grave

COVID-19 - Infecção respiratória aguda

OMS – Organização Mundial da Saúde

CEO – Diretor executivo

LG – Lugar geométrico

LISTA DE SÍMBOLOS

α – Letra grega alpha

θ – Letra grega theta

γ – Letra grega gamma

Γ – Letra grega gamma

$\notin$ – Não pertence

$\mathcal{P}$ – Propriedade matemática

$\mathcal{L}$ – Subconjunto do plano

$\cap$ – Relação de interseção

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	20
2 HISTÓRIA DA GEOMETRIA	22
2.1 A HISTÓRIA DA GEOMETRIA NAS CIVILIZAÇÕES	23
2.1.2 Euclides, o pai da geometria	27
2.1.3 A obra “os elementos”	28
3 ENSINO DE GEOMETRIA.....	32
3.1 O ENSINO DE GEOMETRIA NA ESCOLA	32
3.1.1 Os parâmetros curriculares nacionais	33
3.1.2 BNCC.....	34
3.1.3 A construção geométrica	36
3.1.4 A construção geométrica, a pandemia e as novas tecnologias	37
3.1.5 A utilização da construção geométrica pelos professores	39
4. CONSTRUÇÕES ELEMENTARES.....	41
4.1 PASSOS PARA O DESENHO GEOMÉTRICO	41
4.1.1 Problemas elementares	42
5. CONSTRUÇÕES SUGERIDAS PARA O 1º ANO DO ENSINO MÉDIO	60
6. CONSTRUÇÕES SUGERIDAS PARA O 2º ANO DO ENSINO MÉDIO	96
7. CONSTRUÇÕES SUGERIDAS PARA O 3º ANO DO ENSINO MÉDIO	146
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS	176
REFERÊNCIAS	177

1 INTRODUÇÃO

A Geometria é uma das ciências mais antigas que surgiu da necessidade do homem primitivo de fazer medições de terra, de monumentos, etc. Em sua tese, Pereira (2014), apresenta o significado da palavra Geometria, que vem do grego, que significa “medir terra”, ou seja, a geometria estuda as medidas da terra e suas propriedades.

É uma ciência presente no nosso cotidiano, seja pelas formas geométricas encontradas nos diversos elementos que nos cercam ou mesmo pela necessidade de se medir grandezas. Nesse contexto, o ensino de geometria é imprescindível na educação básica para a compreensão da natureza e do mundo que nos cerca.

Muitos estudantes chegam ao Ensino Médio com dificuldades no aprendizado em geometria e muitos professores não estão preparados para trabalhar atividades construtivas que aprimorem e desenvolvam os conhecimentos, desobstruindo as barreiras existentes entre o ensino e a aprendizagem. Segundo Maken (2015), o ensino de Construção Geométrica está sendo esquecido pelos ensinoss Fundamental e Médio das escolas brasileiras e isso tem apresentado consequências sérias no aprendizado da Geometria.

Observa-se que a maioria dos professores limitam o ensino de matemática ao livro didático, onde a maioria deles apresenta a geometria como um conjunto de definições, nomes, propriedades e fórmulas, deixando de lado a construção dos conceitos matemáticos de forma prática.

Segundo Lorenzato (2010), experimentar é valorizar o processo de construção do saber em vez do resultado dele, pois, na formação do aluno, mais importante que conhecer a solução é saber como encontrá-la.

A geometria no ensino básico está subdividida em Geometria Plana, Geometria Espacial e Geometria Analítica, sendo a Geometria Plana alicerce para a construção do raciocínio geométrico.

Muitos professores têm dificuldades em trabalhar a geometria construtiva com régua, compasso e transferidor, seja pela falta de recursos ou mesmo pela falta de um manual prático que os auxilie. Nesse sentido, esse trabalho tem o intuito de fazer uma breve revisão dos conceitos e propriedades matemáticas da Geometria Euclidiana Plana e apresentar as principais construções passo a passo, auxiliando assim o professor em sala de aula e melhorando a relação de ensino e aprendizado.

Na minha experiência docente, tive muitas limitações ao ministrar aulas práticas de geometria devido à falta de recursos e até mesmo de um material focado em construções geométricas. Os materiais voltados as construções geométricas muitas vezes apresentam apenas os passos das construções e o desenho final, deixando a cargo do leitor fazer as construções de cada passo. Esse impasse muitas vezes é obstáculo aos professores que procuram praticidade e muitos deles acabam desistindo de trabalhar com construções geométricas. Com isso, veio a ideia de fazer esse trabalho e oferecer essa ferramenta que poderá auxiliar os professores da educação básica.

A disciplina de Geometria M13 que é componente curricular do PROFMAT foi também uma das motivações pelo tema, pois durante as aulas tive a oportunidade de ver a importância das construções geométricas com régua e compasso para o melhor entendimento da geometria. Sendo assim, esse trabalho será dividido em problemas construtivos com grau de complexidade crescente a depender da série em que serão sugeridas as construções.

No capítulo 2 do presente trabalho trata sobre o processo histórico da geometria nas civilizações e sobre o matemático Euclides de Alexandria.

No capítulo 3, é feita uma discursão sobre o ensino de geometria no Brasil, sobre a BNCC, sobre os parâmetros curriculares nacionais, sobre o ensino de construções geométricas e as tecnologias.

No capítulo 4, é tratado sobre as construções elementares que servirão de base para os próximos capítulos.

No capítulo 5, são sugeridas construções para o 1º ano do ensino médio.

No capítulo 6, são sugeridas construções para o 2º ano do ensino médio.

No capítulo 7 são sugeridas construções para o 3º ano do ensino médio.

2 HISTÓRIA DA GEOMETRIA

O capítulo 2 do presente trabalho inicia com a abordagem do tema de geometria ao longo do desenvolvimento das civilizações humanas, procurando demonstrar sua origem e suas utilidades na referida civilização, quem foram seus expoentes e como ocorreu esse processo histórico para a geometria. Por final, adentramos no matemático grego Euclides de Alexandria, autor da obra *Os Elementos*, dissertando sobre a importância desta para o campo.

A necessidade da compreensão da realidade e seus fenômenos sempre foram alvo da curiosidade do ser humano. A busca por conhecimento matemático sempre esteve presente durante o desenvolvimento de civilizações humanas, auxiliando-os no entendimento do mundo a sua volta e a resolução de problemas (MIRANDA; SILVA, 2021).

Diversas civilizações da humanidade, como babilônicos, egípcios, chineses e árabes se utilizaram de conhecimentos geométricos e matemáticos para a construção de obras de arquitetura e engenharia, como medidas para áreas de plantações, assim como a construção de diques e barragens, ou muitas vezes esses conceitos eram utilizados para o estudo da astronomia, com medição da posição dos astros e a confecção de calendários (BURNS, 2000). A própria etimologia da palavra “geometria” remonta até o francês antigo “geometrie”, o qual por sua vez, advém do latim “geometria”, o qual veio do grego “geometria”, uma combinação de “ge”, “terra” mais “metria”, “medida de”. A etimologia da palavra traz consigo uma das ideias iniciais dessa área do conhecimento, a mensuração.

Segundo Roque (2012), a observação dos aspectos essenciais da realidade; o espaço, o tempo e a matéria, possibilitaram as antigas civilizações fornecer respostas aos muitos questionamentos de épocas remotas, assumindo a geometria, um papel essencial no desenvolvimento das ciências e, portanto, da humanidade. Segundo Eves (2011), cada uma das civilizações citadas dentro de suas próprias particularidades, como grau de desenvolvimento tecnológico, contribuíram para o desenvolvimento da geometria como área do conhecimento científico.

2.1 A HISTÓRIA DA GEOMETRIA NAS CIVILIZAÇÕES

O desenvolvimento do conhecimento geométrico remota as mais antigas eras da pré-história, havendo hoje escavações nas quais se descobriram objetos rudimentares utilizados para a contagem, ou pinturas rupestres que retratavam formas geométricas. Os achados arqueológicos, como armas, tecidos e cerâmicas demonstravam a utilização das formas e ideias geométricas para a construção de objetos, utensílios ou instrumentos.

Como diz Almeida (2020, p.11):

Nossas mais antigas concepções sobre formas e números remontam à pré-história, provavelmente ao período conhecido como Paleolítico, ou mesmo antes. Nessas longínquas eras, as primeiras manifestações do que hoje conhecemos como Matemática se dividiam basicamente em duas correntes: uma dedicada à contemplação das formas, que originaria o que hoje conhecemos como geometria, outra consagrada à manipulação dos números, que engendraria o que no presente denominamos de aritmética ou álgebra.

Um dos principais períodos da pré-história, o período Mesolítico, isto é, o período que está localizado entre o Paleolítico e o Neolítico, como o próprio nome indica: grego μέσος, mesos "meio"; λίθος, lithos "pedra", possui artefatos importantes do ponto de vista do conhecimento pré-histórico da matemática.

Um dos principais artefatos de importância paleontológica e matemática é o Osso de Ishango, um artefato mesolítico encontrado na África (Figura 1), na atual República Democrática do Congo, o artefato é feito a partir de um osso de babuíno com um cristal de quartzo embutido na ponta (DOMINGUES, 2022).

Figura 1 - O osso de Ishango



Fonte: <https://ensinarhistoria.com.br/osso-de-ishango-primordios-da-matematica-na-africa-paleolitica/> - Blog: Ensinar História - Joelza Ester Domingues

Posteriormente, povos babilônicos, egípcios, desenvolveram noções de geometria, enquanto outros como chineses, japoneses e hindus eram motivados por necessidades de cunho prático, como a mensuração e demarcação de espaços, assim como a construção de templos e altares.

O historiador e geógrafo grego Heródoto, nascido no século V a.C em Halicarnasso, foi o principal expoente grego a atribuir o berço da geometria à civilização egípcia. Em sua obra “As Histórias”, Heródoto conta a história da invasão Persa na Grécia no começo do século V a.C. Após encontro com sacerdotes egípcios, Heródoto escreve a passagem abaixo, condensando o que viria a ser ensinado como a origem da geometria:

Sesóstris também, eles declararam, fez uma divisão do solo do Egito entre os habitantes, atribuindo terrenos quadrados [sic] a todos, obtendo assim sua receita principal do aluguel que cada proprietário necessitava lhe pagar todo ano. Se o rio carregasse qualquer porção do lote, ele [o dono] aparecia perante o faraó e relatava o acontecido; após isso o faraó enviaria pessoas para examinar e determinar por medições a extensão das perdas e, em consequência, a renda demandada para ele [o faraó] era proporcional ao tamanho reduzido de sua terra. Dessa prática, eu [Heródoto] penso que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia. O sundial, todavia, e o gnômon, com a divisão do dia em doze partes, foram recebidos pelos gregos dos babilônios. (BROCA, 2020, p. 96).

Diante do fato de que achados arqueológicos sumérios só terem sido achados no final do século XIX, a origem da geometria pelos egípcios perdurou por séculos, sendo considerada oficial. Porém, tabletas de argila datados do período de 1900-1600

Antes da Era Comum (AEC), provavelmente do império babilônico, continham textos e diagramas que indicavam semelhanças com o teorema de Pitágoras (JESUS, 2020).

Os registros mais antigos na antiga Mesopotâmia estão na forma de tábulas ou tabletes de argila, os quais alguns contêm problemas de geometria. Um dos mais famosos é o YBC 7289. Estas tábulas muitas vezes continham problemas que serviam de base para questões hidráulicas como por exemplo, a construção de diques e canais, devido a própria região possuir um vasto sistema de irrigação artificial. Entre as principais tábulas encontradas em civilizações mesopotâmicas, podemos citar a tábula Tell Dhibayi, a tábula Plimpton 322, a tábula Susa.

Semelhantemente à Mesopotâmia, a região do Egito (3000 anos a.C) tinha como uma das suas principais atividades econômicas a agricultura, justificando, portanto, a construção de canais de irrigação, diques e celeiros para as colheitas. A proximidade com o rio Nilo possibilitava a realocação de suas águas para longas distâncias. A existência de mão de obra qualificada nos conhecimentos matemáticos, portanto, era extremamente necessário para o desenvolvimento da região como um todo. Como nos diz Eves (2011):

Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. Projetos extensivos dessa natureza não só serviram para ligar localidades anteriormente separadas, como também a engenharia, o financiamento e a administração desses projetos, e os propósitos que os motivaram requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e da matemática concomitante. Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. (EVES, 2011, p. 57)

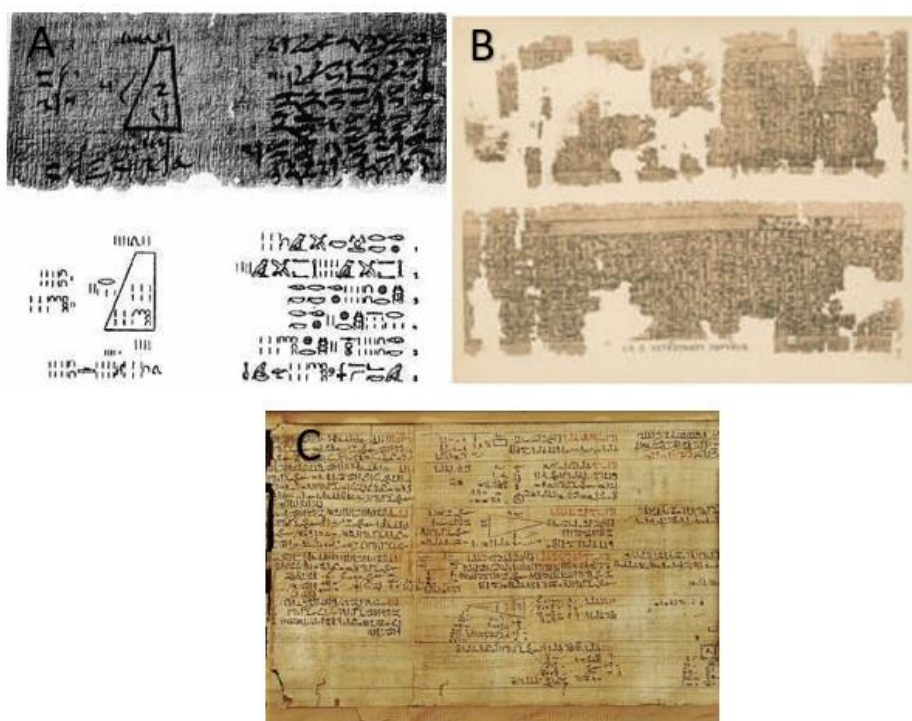
O conhecimento matemático do antigo Egito está na forma de papiros, diferentemente dos babilônicos. Devido à frágil constituição da matéria prima utilizada na confecção dos papiros, muitos desses artefatos se degradaram com a passagem do tempo, sendo assim uma tarefa árdua precisar exatamente quanto conhecimento os egípcios possuíam sobre a matemática (REIS, 2018).

Semelhantemente ao papel utilizado nos dias de hoje, os papiros são artefatos utilizados para a escrita de anotações por meio de símbolos. Feito a partir da planta junco, a qual crescia nas margens de rios, estas eram extraídas suas fibras, entrecadas, para que posteriormente fossem prensadas e formassem uma lâmina

que possibilitava a escrita. Entre os papiros egípcios mais conhecidos que envolvem a matemática, temos o de Moscou, Berlin, Kahun e Rhind.

O primeiro dos papiros egípcios é o papiro de Moscou (1850 a.C) o qual contém 25 problemas matemáticos. O Papiro de Berlim (1800 a.C) foi adquirido por um antiquário chamado Henry Rhind, por volta de 1850, porém devido ao seu estado deteriorado, foi considerável inadequado para pesquisa. O papiro de Kahun (1800 a.C) continha dados matemáticos e outros conhecimentos médicos, os quais demonstravam a evolução do povo egípcio. O Papiro de Rhind é constituído por 14 folhas, com 2 tabelas informativas de frações e cerca de 75 problemas matemáticos. Quando analisados, os problemas no papiro demonstram situações envolvendo conhecimentos de aritmética, equações lineares e de geometria, como o cálculo de áreas e volumes (Figura 2).

Figura 2 - Papiros de Moscou(A), Kuhn(B) e Rhind(C)



Fonte: GASPAR(2013)

A geometria egípcia concentra seus conhecimentos, abordando problemas de medidas em relação a volumes ou áreas de figuras planas, e sólidos. Essa civilização era capaz de calcular áreas de figuras geométricas como retângulos, triângulos e

trapézios, conhecimentos uteis no cálculo de engenharia para a construção das pirâmides sobretudo.

2.1.2 EUCLIDES, O PAI DA GEOMETRIA

O matemático platônico Euclides de Alexandria (360- 295 a.C) foi o criador da geometria euclidiana, a qual contém conceitos que se mantiveram imutáveis ao longo do período medieval e renascentista. Somente com a chegada da era moderna puderam ser construídos modelos geométricos não euclidianos (RIBEIRO; GUIMARÃES, 2020). Contudo, segundo Ávila (2001), é difícil precisar em que época Euclides viveu, pois o conhecimento que temos atual dele hoje vem de um filósofo grego chamado Proclus (410-485). Como diz Proclus:

Não mais jovem que estes (referência a dois discípulos de Platão) é Euclides, que reuniu os elementos, colocando em ordem muitos teoremas de Eudoxo e aperfeiçoando muitos de Teeteto e também trazendo em demonstrações irrefutáveis, coisas que foram provadas apenas frouxamente por seus antecessores. Este homem viveu no tempo de Ptolomeu I, pois Arquimedes, quem veio imediatamente depois de Ptolomeu I, faz menção a Euclides e, além disso, eles dizem que Ptolomeu uma vez lhe perguntou se havia um caminho mais curto em geometria que aquele dos elementos, e ele respondeu que não havia uma estrada real em geometria. Ele é então mais jovem que os alunos de Platão e mais velho que Eratóstenes e Arquimedes, pois o último foi contemporâneo daqueles, como diz Eratóstenes em algum lugar. (HEATH, 1956, v. I, p. 1).

Provavelmente, se o conhecimento de Proclus for considerado verdadeiro, o matemático Euclides viveu durante o reinado Ptolomeu I (306 a.C- 283 a.C). Isso nos leva a crer que Euclides viveu entre os primeiros alunos de Platão, o qual faleceu em 347 a.C, e Arquimedes (287 a.C- 212 a.C).

Diniz (2020) contesta a versão acima, expondo na verdade 3 possibilidades de existência do matemático Euclides. A primeira versão é que realmente Euclides foi uma figura histórica, autor da obra “Os Elementos”, além de outras obras. A segunda versão é que Euclides na verdade liderou um grupo de matemáticos, os quais escreveram e colaboraram com partes da obra “Os Elementos”, ancorados na suposição que a obra contém diversos estilos de escrita e exposição matemática. A terceira versão é quando consideramos que Euclides não existiu, sendo somente um pseudônimo para um grupo de matemáticos de Alexandria.

2.1.3 A OBRA “OS ELEMENTOS”

A obra “Os Elementos” de Euclides consiste em 13 livros, escritos em torno de 300 a.C, os quais reúnem conhecimentos do que se conhecia na época em geometria, aritmética e álgebra, no período em que o filósofo viveu. Os 4 primeiros livros abordam a geometria plana, assim como propriedades do círculo e problemas em que a solução se utiliza a régua e o compasso. Ressalta-se o 1º livro, o qual traz conceitos essenciais para entender a geometria. O 5º livro aborda proporções, enquanto o 6º livro aplica esse conhecimento ao estudo da geometria. O 7º, 8º e o 9º livro abordam a teoria dos números, enquanto o 10º livro trata dos números irracionais. Os 11º, 12º e 13º livros tratam de geometria espacial (BATISTA, 2018).

Euclides começou “Os Elementos” com 35 definições (COMMANDINO; FREDERICO, 1944):

- Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.
- Linha é o que tem comprimento sem largura.
- As extremidades da linha são pontos.
- Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades.
- Superfície é o que tem comprimento e largura.
- As extremidades da superfície são linhas.
- Superfície plana é aquela, sobre a qual assenta toda uma linha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.
- Ângulo plano é a inclinação recíproca de duas linhas, que se tocam em uma superfície plana, sem estarem em direitura uma com outra.
- Ângulo plano retilíneo é a inclinação recíproca de duas linhas retas, que se encontram, e não estão em direitura uma com outra.
- Quando uma linha reta, caindo sobre outra linha reta, fizer com esta dois ângulos iguais, um de uma, e outro de outra parte, cada um destes ângulos iguais se chama ângulo reto; e a linha incidente se diz perpendicular à outra linha.
- Ângulo obtuso é o que é maior, que o ângulo reto.
- Ângulo agudo é o que é menor, que o ângulo reto.
- Termo se diz aquilo, que é extremidade de alguma coisa.
- Figura é um espaço fechado por um ou mais termos.

- Círculo é uma figura plana fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência: de maneira que todas as linhas retas, que de um certo ponto existente no meio da figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si.
- O dito ponto se chama centro do círculo.
- Diâmetro do círculo é uma linha reta, que passa pelo centro, e que se termina por ambas as partes na circunferência.
- Semicírculo é uma figura compreendida entre o diâmetro e aquela parte da circunferência do círculo, que é cortada pelo diâmetro.
- Segmento de círculo é uma figura compreendida entre uma linha reta, e uma porção da circunferência.
- Figuras retilíneas são as que são formadas com linhas retas.
- As triláteras são aquelas, que são formadas com três linhas retas.
- As quadriláteras são aquelas, que são feitas por quatro linhas retas.
- As multiláteras são as que são feitas por mais de quatro linhas retas.
- Entre as figuras triláteras o triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais.
- Triângulo isósceles é o que tem dois lados iguais.
- Triângulo escaleno é o que tem os três lados desiguais.
- Triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto.
- Triângulo obtusângulo é o que tem um ângulo obtuso.
- O triângulo acutângulo é o que tem todos os ângulos agudos.
- Entre as figuras quadriláteras, o quadrado é o que é juntamente equilátero e retângulo.
- E a figura, que de uma parte, for mais comprida, pode ser retângula, mas não equilátera.
- Mas o rombo é uma figura equilátera, e não retângula.
- Romboide é uma figura, que tendo os lados opostos iguais, nem é equilátera, nem equiângula.
- Todas as mais figuras quadriláteras, que não são as referidas, se chamam trapézios.

- Linhas paralelas, ou equidistantes são linhas retas, que existindo no mesmo plano, e sendo produzidas de ambas as partes, nunca se chegam a tocar.

Depois das definições, ainda segundo Commandino (1944), Euclides partiu de 10 axiomas:

- As coisas, que são iguais a uma terceira, são iguais entre si.
- Se coisas iguais se juntarem a outras iguais, os todos serão iguais.
- E se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.
- E se coisas desiguais se juntarem outras iguais, os todos serão desiguais.
- E se de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os restos serão desiguais.
- As quantidades, das quais cada uma por si faz o dobro de outra quantidade, são iguais.
- E aquelas, que são metades de uma mesma quantidade, são também iguais.
- Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com outra; são iguais.
- O todo é maior do que qualquer das suas partes.
- Duas linhas retas não compreendem espaço.
- Todos os ângulos retos são iguais.
- E se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer os ângulos internos da mesma parte menores que dois retos, estas duas retas produzidas ao infinito concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos.

A Obra “Os elementos” segue uma lógica intuitiva, na qual o 1º livro contém uma série de definições e axiomas necessários para o entendimento dos conceitos geométricos. A partir de algumas definições, 9 axiomas e 5 postulados, Euclides deduz 465 teoremas. Podemos citar os postulados abaixo (BONGIOVANNI; JAHN,2010):

- **Postulado 1:** Pode-se traçar uma reta de qualquer ponto a outro ponto qualquer. Obs.: a palavra reta na obra de Euclides equivale ao nosso segmento de reta. É um postulado que garante a existência do segmento.

- **Postulado 2:** Pode-se prolongar uma reta infinitamente. Obs.: O postulado 2 garante a existência da reta.
- **Postulado 3:** Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio. Obs.: Esse postulado garante a existência da circunferência.
- **Postulado 4:** Pode-se considerar todos os ângulos retos iguais entre si.
- **Postulado 5:** Se duas retas interceptadas por uma terceira reta, formam, do mesmo lado dessa reta secante, dois ângulos internos cuja soma é menor que dois ângulos retos, as retas quando suficientemente prolongadas se interceptam por esse lado da secante.

Alguns autores dividem de maneiras distintas os axiomas e postulados de Euclides, isso explica a diferença entre (BONGIOVANNI; JAHN, 2010) e (COMMANDINO; FREDERICO, 1944) que classificam o postulado 4 que trata sobre a congruência de ângulos retos de maneiras diferentes.

3 ENSINO DE GEOMETRIA

O capítulo 3 do presente trabalho inicia com a abordagem do tema de geometria na escola, sua importância, assim como um resgate histórico do ensino deste ramo da matemática, como esta é tratada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e na Base Nacional Curricular Comum (BNCC), e por final, como as novas tecnologias podem ajudar no ensino de geometria.

O ramo da Geometria consiste em uma das grandes áreas da matemática, estando presente no cotidiano dos sujeitos das mais variadas formas, seja nos objetos, ferramentas, ou na forma como interpretamos e enxergamos a própria realidade. Segundo Passos (2000), o homem compreende o espaço onde vive de forma intuitiva e concreta. Através da geometria, este pode desenvolver ferramentas para criar, manipular, e estudar modelos que estão intimamente relacionados com o seu próprio cotidiano.

Esta ciência tem um amplo campo de abrangência, destacando-se o estudo das figuras planas e seu espaço, o estudo das figuras tridimensionais, efetuando análises entre conteúdos algébricos e conteúdos geométricos. Isto permite a correção destes elementos entre si, além de desenvolver conceitos e inovar a forma do ensino da geometria (LOBATO, 2019).

3.1 O ENSINO DE GEOMETRIA NA ESCOLA

A Geometria adquire especial importância na escola por possuir a capacidade de instigar ao aluno, tanto do ponto de vista prático quanto do pensamento lógico, a interpretação da realidade onde vive. Deste modo, o aluno aprende a fazer a relação entre o abstrato e o concreto. Sem o conhecimento, de geometria, sua visão de mundo torna-se incompleta (SILVA, 2021). Seu aprofundamento em conhecimentos em Geometria vai permitir ao aluno habilidades de argumentação, descobrimento, experimentação, dedução e conclusões, em um modo hipotético dedutivo.

Ela permite ao aluno o desenvolvimento do pensamento, tornando-o capaz de demonstrar, argumentar, descobrir, experimentar, deduzir, e chegar a conclusões, tendo visto todas estas questões (GRAVINA, 2001).

Segundo Santos e Leal (2020) a geometria atualmente se configura como um campo fértil, permitindo ao estudante encontrar ligações entre diferentes espaços,

facilitando e organizando as estruturas mentais, além de desenvolver o raciocínio, intuição e abstração reflexiva. O conhecimento de geometria também ajuda no raciocínio do campo visual do aluno, proporcionando a conexão entre mundo abstrato e mundo real (MARSHALL; FIRENZE, 2015).

Porém, hoje os professores enfrentam diversos obstáculos para o ensino da geometria nas escolas, como a falta de material pedagógico, formação inadequada ou abordagem pedagógica não condizente com o conteúdo.

Segundo Lorenzato (1995), inicialmente, no ensino fundamental, o posicionamento do conteúdo de geometria como um dos últimos no plano anual de ensino dificulta a assimilação, pois muitas vezes, outros conteúdos como Álgebra e Aritmética são bem trabalhados pelo docente, enquanto que a Geometria é deslocada a segundo plano.

Posteriormente, ou ainda no ensino fundamental, a utilização de materiais bidimensionais, como quadros e giz, por exemplo dificulta a compreensão do conteúdo de geometria (SILVA, 2014). Outro fator reside no baixo interesse dos alunos, devido às metodologias adotadas pelos docentes para o ensino, considerando-as desinteressantes (MARQUES; CALDEIRA, 2018). Corroborando esses fatos, Santos e Leal (2020) irão nos trazer que diversos docentes recorrem ao método tradicional, no qual este ramo da matemática é apresentado através de conhecimentos estáticos, e cabe ao aluno somente a memorização de tais conhecimentos.

3.1.1 OS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS

Segundo Santos (2014), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (1998) são definidos como um dos documentos normatizadores da educação Brasileira. Estes foram construídos em vista da urgência de se obter referências nacionais para serem utilizadas em todas as regiões do Brasil. Os PCNs consistem em diretrizes elaboradas para a orientação dos educadores, normatizando alguns elementos fundamentais de cada disciplina, facilitando e norteando os diretores, coordenadores e professores para o ensino, de modo que os mesmos podem ser adaptados para cada realidade. De acordo com os PCNs:

O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.(BRASIL,1998, p.52)

Para orientação no campo da matemática, houve a elaboração de dois documentos, especificando o ensino desta ciência dos 1ºs aos 4ºs anos (BRASIL,1997), e dos 5ºs aos 8ºs anos (BRASIL, 1998), sendo o ensino fundamental dividido, portanto, em quatro ciclos, onde se estruturam temas como Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

3.1.2 BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo o qual é definido o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica, de modo orgânico e progressivo, assegurando seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento (BRASIL,2018). Segundo a BNCC:

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL,2018)

A BNCC para o ensino médio objetiva a construção de uma visão integrada da matemática, especificando no ensino da geometria, o desenvolvimento de habilidades, interpretação e o deslocamento da figura no plano cartesiano, além da identificação de transformações isométricas, ampliações e reduções de figuras. Isso se traduz através 12 habilidades, presentes nas 4 competências:

- (EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento

e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

- (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.
- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).
- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
- (EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- (EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
- (EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).
- (EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
- (EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
- (EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
- (EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital ver.

3.1.3 A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA

As construções geométricas surgem ainda na antiguidade grega, através do matemático Euclides, no qual em sua obra *Os Elementos*, estabelece os fundamentos da Geometria Euclidiana. A partir dos 5 postulados de sua obra, Euclides permite a resolução de problemas teóricos e práticos com o uso de dois instrumentos, a régua não graduada e o compasso (GOMES, 2017).

Na obra *os Elementos*, Euclides dá instruções para a construção geométrica, mas também, para as possibilidades de uso dos instrumentos euclidianos, ou seja, a régua e o compasso. Assim, pode-se por exemplo, traçar retas de comprimento indefinido, e com o compasso, pode-se ser traçado circunferências com um ponto passando por outro ponto (SILVA, 2018).

De acordo com Rodrigues (2017), através das construções geométricas, é possível o aluno; desenvolver o raciocínio lógico, pois através da construção geométrica, o aluno elabora estratégias para chegar à resolução do problema; demonstrar teoremas utilizando ou formulando conceitos matemáticos ou geométricos. O autor Jesus (2008, p.76-77) ainda ressalta que:

pois entendo que, ao trabalhar com Construções Geométricas, deve-se: (a) mostrar o que se faz, ou seja, realizar a construção geométrica; (b) explicar por que se fez, ou seja, justificar se a resposta obtida é, de fato, a resposta procurada; (c) discutir a solução verificando o número de soluções-problema e analisando se ele é realmente compatível, se existe apenas uma, se pode haver mais de uma solução e sob quais condições se poderia ampliar ou reduzir o número de soluções.

Para o autor Putnoki (1988), não existe geometria sem a utilização da régua e do compasso. O mesmo fala de uma “meia geometria” com a ausência dos referidos instrumentos, sendo a régua e o compasso, instrumentos que permitem ao estudante “experimentar”, dando uma outra dimensão aos conceitos e propriedades geométricas.

O ensino das construções geométricas permeia diversas épocas da nossa história, tendo grande presença durante a era Vargas com grande destaque para o ensino do desenho sob forma de desenho natural, desenho decorativo, desenho geométrico e desenho convencional ao primeiro segmento do Ensino Fundamental. Academias militares, e vestibulares de diversos cursos adotavam o desenho geométrico em seus processos seletivos, porém, o movimento da matemática

moderna, mas décadas de 60 e 70, reformulou o ensino da geometria, privilegiando o ensino da álgebra. A promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, em 1961 transforma o ensino do desenho geométrico em uma disciplina optativa facultada a sua escolha aos estabelecimentos de ensino (SALGADO, 2013).

3.1.4 A CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA, A PANDEMIA E AS NOVAS TECNOLOGIAS

No início do ano de 2020, o Brasil foi surpreendido por um vírus pertencente à família do Coronavírus (SARS-CoV-2). A Organização Mundial de Saúde (OMS) nomeou a doença como COVID-19. A pandemia do vírus Sars-CoV-2, ou Coronavírus mudou os paradigmas de trabalho e educação, surgindo o ensino remoto emergencial como uma possível alternativa para instituições de ensino (LOSEKANN; MOURÃO, 2020).

O vírus com sua alta letalidade e seu rápido poder de propagação, fez não só o Brasil, mas o mundo inteiro parar e realizar rápidas mudanças comportamentais e sociais. Tudo parou, inclusive as escolas e isto exigiu um esforço maior da família na aprendizagem dos seus filhos.

Por conta do período de pandemia o Governo junto com estados e municípios trataram de criar medidas que pudessem resolver ou amenizar os impactos que a educação estava sofrendo por conta da situação. Entre as diversas portarias e decretos criados, destaca-se a portaria, 343/2020 que autoriza a substituição de “aulas presenciais por aulas ou atividades por meios e tecnologia de informação e comunicação e flexibiliza os 200 dias letivos, previstos na LDB, Lei nº9394/96 art. 24, inciso I, admitindo-se o cumprimento de 180 dias” (SILVA, 2020,p.12). Porém, após 1 ano de pandemia, cerca de 800 milhões de estudantes ainda encontram dificuldades relevantes em sua educação, seja com déficit na aprendizagem ou ausência de aulas durante o período pandêmico (CLARE O'HAGAN, 2021).

O desenvolvimento tecnológico se torna crescente a cada ano, surgindo novas tecnologias nos mais variados campos de atuação, ao passo que a faixa etária da maioria dos estudantes tem grande interesse em novas formas de se comunicar e informar. No âmbito escolar, a utilização de novas tecnologias favorece o aprendizado, colocando o aluno como protagonista do seu próprio aprendizado (MÜHLBEIER, 2012).

Diante de um quadro de pandemia em que docentes e discentes necessitaram se adaptar ao ambiente de trabalho e estudo de uma nova forma, as tecnologias para a aprendizagem tomam papel central nesse processo.

Muitos professores procuraram novas metodologias e equipamentos que melhorasse o ensino de matemática que ficou remoto até meados de 2021. Com isso, o ensino de construções geométricas através de régua e compasso ficou ainda mais distante da realidade.

Foi nesse contexto que ocorreu a difusão dos softwares para o ensino de matemática e mais especificamente de geometria. Entre esses destaca-se o software *OpenBoard* que possibilita o usuário fazer construções geométricas com régua e compasso de forma digital, além de outras funcionalidades, se destaca a possibilidade de adicionar formas, imagens, textos, músicas, vídeos, documentos pdf, caixas de atividades ou aplicativos do próprio *OpenBoard*. É possível até rabiscar por cima de janelas de aplicativos que estejam abertos, fazendo assim anotações, ele conta também com um navegador de internet e um gravador de podcasts dentro da sua própria aplicação.

É importante frisar que o *OpenBoard* é um software gratuito e com muitas funcionalidades matemáticas e que será usado nas construções geométrica desse trabalho.

Outros aplicativos de construção geométrica podem ser citados como facilitadores do ensino de geometria que possibilita a internalização dos conceitos relativos ao aprendizado de geometria pelos alunos. Podemos citar como exemplos de aplicativos os quais permitem a exploração das construções geométricas em ambiente escolar o *Geogebra*, *Cabri-Géomètre*, *Sketchpad*, *Geometricks*, *Régua e Compasso*, *Euklid*, entre outros (SOUZA, 2013).

O *Geogebra* é um software de matemática que pode ser usado para diversos níveis de educação. Markus Hohenwarter (2020), CEO da companhia, coloca que esta plataforma utiliza vários recursos como a confecção de sólidos geométricos, planilhas, gráficos estatísticas e cálculos. A plataforma é gratuita, além de existir uma comunidade de colaboração onde os usuários podem compartilhar seus conteúdos de aprendizado. Diversos autores utilizam este aplicativo em pesquisas educacionais, demonstrando aumento do aprendizado dos alunos para a geometria, como Nascimento (2019), Sampaio, Paulo e Oliveira (2018) e Araújo e Pazuch (2019).

Pedro *et al.* (2012) desenvolveram um aplicativo para sistema Android para o estudo da geometria interativa, na qual o aplicativo tem possibilidades de realização das funções básicas da Geometria Interativa como, por exemplo, a criação e remoção de retas, pontos e circunferências; a manipulação dinâmica dos objetos criados; e a possibilidade de criar interseções simples tais como pontos sobre objetos.

Já Gomes *et al.* (2019) utilizou a criação de um aplicativo, o *GeometriAR*, no qual este aplica o conceito de Realidade aumentada para aumentar a aprendizagem em geometria espacial. O aplicativo é capaz de reproduzir construções geométricas em 3 dimensões a partir de imagens de figuras planas.

Outro software que permite a construção e interação entre si de construções geométricas é o *iGeom6*, desenvolvido pela Universidade de São Paulo, pelo pesquisador Leônidas de Oliveira Brandão. *iGeom6* permite a disponibilização das construções criadas de modo online, facilitando alunos que estejam em modo de aprendizado por educação à distância (VIEIRA, 2018).

A década de 90 também teve o desenvolvimento de softwares voltados para as construções geométricas, no qual um exemplo é o *Poly7*, desenvolvido pela empresa *Pedagoguery Software*. Nesse software há a possibilidade de o aluno investigar sólidos tridimensionais, movimentando-os, além de ter uma vasta coleção de sólidos, platônicos entre outros (MONTEIRO; VASQUEZ, 2019). Outro software desenvolvido nessa época é o *Régua e Compasso*, pelo professor René Grothmann. Este programa permite a formulação de conjecturas e confirmação de resultados de maneira dinâmica e interativa (COUTO; SANTOS JÚNIOR, 2019).

3.1.5 A UTILIZAÇÃO DA CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA PELOS PROFESSORES

Segundo os autores Santos e Ferreira (2017), o ensino da geometria no Brasil por muito tempo esteve comprometido devido a uma série de fatores, entre eles, o movimento da matemática moderna, a falta de preparo do docente quanto às metodologias para o ensino dos componentes geométricos, e de modo semelhante a falta de material didático nas instituições de ensino.

Já Santos e Leal (2021) ressaltam que há uma fragmentação do ensino da matemática, pois a geometria é ensinada de modo isolado dos demais componentes, sem uma integração ou analogias para tornar o aprendizado significativo. Adicionalmente, os mesmos autores ressaltam que por muitas vezes, os livros

didáticos traziam o conteúdo de geometria no final, e devido à escassez de tempo no final do ano, não era possível ministrar o conteúdo com qualidade, repassando rapidamente aos alunos.

Silva e Andrade (2021) pontuam que a integração das tecnologias ao ensino da matemática deve ser considerada nas políticas públicas educacionais, pois durante sua pesquisa, os mesmos avaliaram que professores formadores apontaram a necessidade de se inserir mais horas de formação para o uso das ferramentas tecnológicas, assim como o planejamento da disciplina com momentos de atividade prática. As principais dificuldades apontadas pelos autores foram a escassez de laboratórios adequados, falhas de internet, ou compatibilidade de arquivos, ou mesmo a posse de smartphones ou computadores nas residências estudantis.

No capítulo 4 serão apresentadas as construções elementares acompanhadas das justificativas, quando necessário. Essas construções serão utilizadas nos capítulos posteriores.

4. CONSTRUÇÕES ELEMENTARES

Iniciamos esse capítulo sugerindo um passo a passo para as construções geométricas de forma geral, em seguida apresentamos as construções elementares com intuito de preparar o leitor para as construções que são sugeridas nos capítulos posteriores, para cada ano do ensino médio.

Diante do público que está sendo direcionado esse trabalho, o leitor já deve ter ideia do que vem a ser um ponto, uma reta e um plano. Portanto assumiremos essas noções como conceitos primitivos já conhecidos.

Assumiremos também que o leitor já saiba manusear régua e compasso, ferramentas necessárias e suficientes nesse estudo. Como diz Wagner (2015), sem escala nas construções geométricas são permitidos apenas a régua não graduada e o compasso. A régua é usada para traçar retas, semirretas e segmentos de retas e o compasso é usado para traçar circunferências e arcos de circunferências. As construções contidas nesse trabalho possuem soluções puramente geométricas, ou seja, utilizam como instrumentos de desenho, apenas a régua e o compasso.

4.1 PASSOS PARA O DESENHO GEOMÉTRICO

Para Costa (2016, p. 38), “A intenção de estabelecer passos que facilitem a resolução de um problema não é a de engessar o processo ou de criar uma fórmula-padrão, um algoritmo, a ser seguido, mas sim de ajudar os iniciantes nesta arte a organizar as informações, relacioná-las e direcionar o foco para o problema”. Sendo assim, sugerimos os seguintes passos para o desenho geométrico:

Passo 1: Supor o problema resolvido.

Nessa etapa deve-se atentar para as propriedades matemáticas abordadas no problema e em seguida esboçar de forma ilustrativa o desenho com a finalidade de buscar uma orientação para iniciar a construção geométrica proposta.

Passo 2: Construir os pontos-chaves para a resolução.

Entende-se por ponto-chave, uma etapa, que uma vez construída, torna possível as construções subsequentes. Nessa etapa deve-se construir os principais elementos; traçar uma reta ou um segmento dados dois pontos, traçar uma circunferência dados

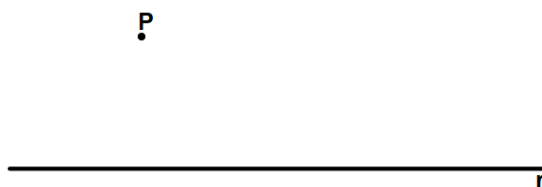
centro e raio, transportar um segmento, transportar um ângulo e etc.. É interessante dividir essa etapa em outras etapas para facilitar o entendimento do leitor, conforme a proposta desse trabalho.

4.1.1 PROBLEMAS ELEMENTARES

Para efetivarmos as resoluções de alguns problemas mais sofisticados, é necessário aprendermos algumas construções geométricas, chamadas de construções ou problemas elementares, como retas paralelas e perpendiculares. Tais construções é tema desta seção.

PROBLEMA 1: Dada uma reta r e um ponto $P \notin r$. Trace por P uma reta s paralela à reta r (Fig. 3).

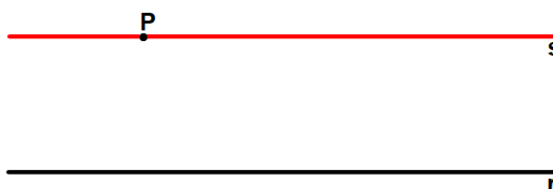
Figura 3 – Reta e ponto não pertencente à reta



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, como mostra a Fig. 4.

Figura 4 – Retas paralelas ($s \parallel r$)



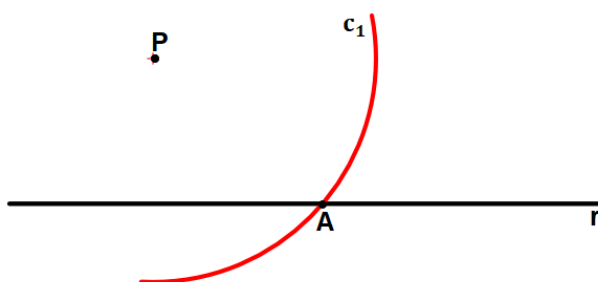
Fonte: Elaboração própria

Na Fig. 4, para resolver o problema, a ideia é construir um quadrilátero de lados paralelos com um de seus lados sobre a reta r e o outro lado paralelo a este passando pelo ponto P . Escolheremos o paralelogramo para essa construção, pois segundo

Pompeo (2005, p. 105) todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é um paralelogramo, sendo assim seus lados opostos são paralelos.

Passo 2: Fixando a Fig. 3, com o auxílio do compasso, trace um arco de circunferência c_1 centrado em P de raio arbitrário que corte a reta r em A , como mostra a fig. 5.

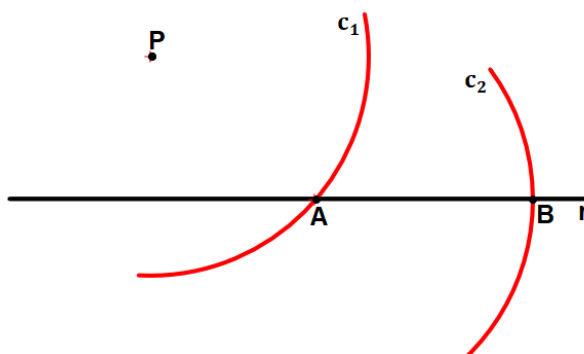
Figura 5 – Traçando o arco de circunferência c_1



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Fixando a Fig. 5, com o auxílio do compasso, trace um arco de circunferência c_2 centrado em A de mesmo raio da circunferência c_1 intersectando a reta r em B , conforme mostra a Fig. 6.

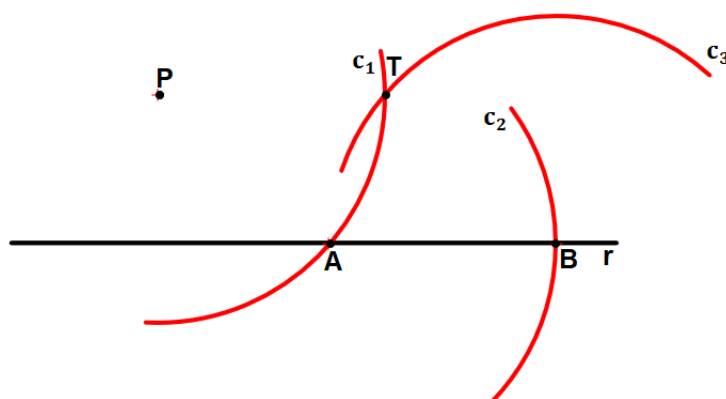
Figura 6 – Traçando o arco de circunferência c_2



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Fixando a Fig. 6, com o auxílio do compasso, trace um arco de circunferência c_3 , centrado em B , de mesmo raio que c_2 , intersectando c_1 no ponto T (Fig. 7).

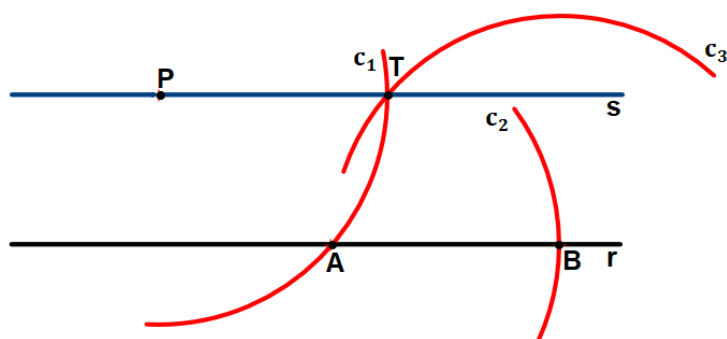
Figura 7 – Traçando o arco de circunferência c_3



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Fixando a Fig. 7, com o auxílio de uma régua, trace a reta $\overleftrightarrow{PT} = s$ e $s \parallel r$ (Fig. 8).

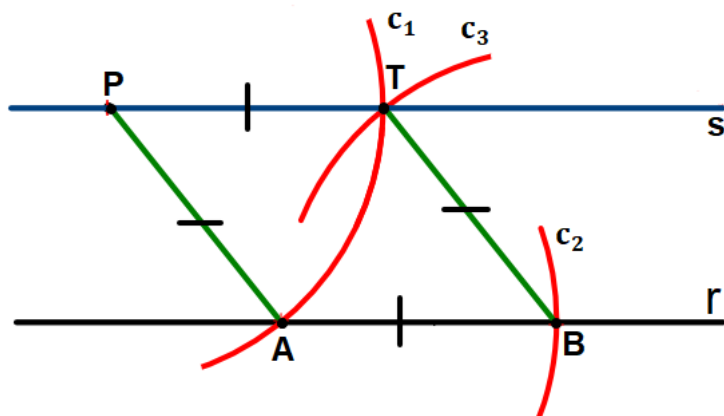
Figura 8 – Traçando a reta s paralela à reta r



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Fixando a Fig. 8, traçando os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{BT}$, obtemos um paralelogramo $\overline{APT B}$ (Fig. 9), pois por construção $\overline{AP} = \overline{PT} = \overline{TB} = \overline{BA}$ são segmentos que compreendem circunferências de mesmo raio, e como em todo paralelogramo seus lados opostos são paralelos e congruentes, ou seja, $\overline{PT} \parallel \overline{AB}$ e como $\overline{PT} = s$ e $\overline{AB} = r$, vem que $s \parallel r$.

Figura 9 – Traçando os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{BT}$



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 2: Dada uma reta r e um ponto $P \notin r$, trace por P uma reta s perpendicular a r (Fig. 10).

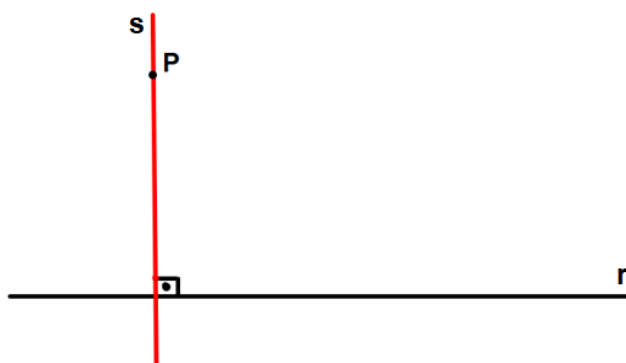
Figura 10 – Ponto P e reta r



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, tal como na Fig. 11.

Figura 11 – Retas perpendiculares ($r \perp s$)

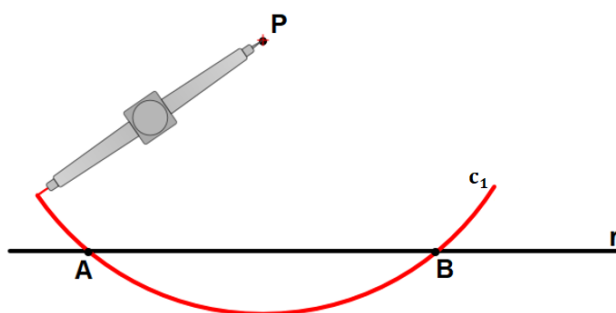


Fonte: Elaboração própria

Observando a Fig. 11, a ideia é construir um losango em que **P** é um de seus vértices e uma das suas diagonais está sobre a reta **r**. Segundo Pompeo (2005, p. 109) todo losango tem diagonais perpendiculares, sendo assim, uma vez construído esse losango, sabemos que seus lados serão congruentes e suas diagonais serão perpendiculares entre si, encontrando dessa forma a reta **s** que contém a outra diagonal do losango, determinado assim a reta **s** que é perpendicular à reta **r**.

Passo 2: Fixando a Fig. 10, com o auxílio do compasso, trace um arco de circunferência c_1 centrado em **P**, de raio arbitrário **n**, intersectando a reta **r** em **A** e em **B** (Fig. 12).

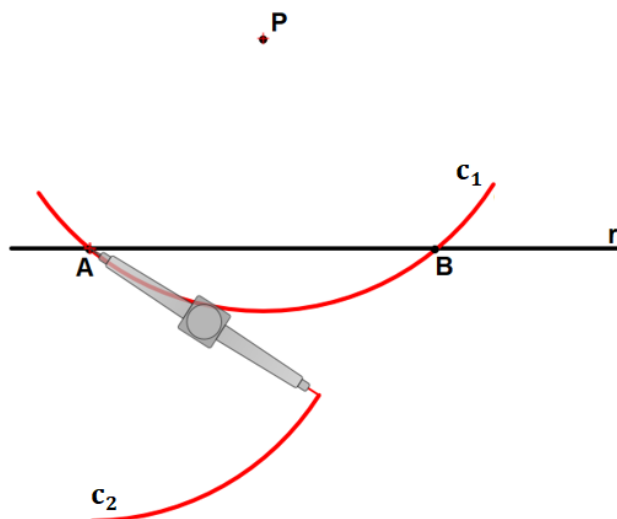
Figura 12 – Traçando arco c_1 intersectando a reta **r** em **A** e **B**



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Fixando a Fig. 12, com o auxílio do compasso, trace um arco de circunferência c_2 de mesmo raio **n** centrado em **A** (Fig. 13).

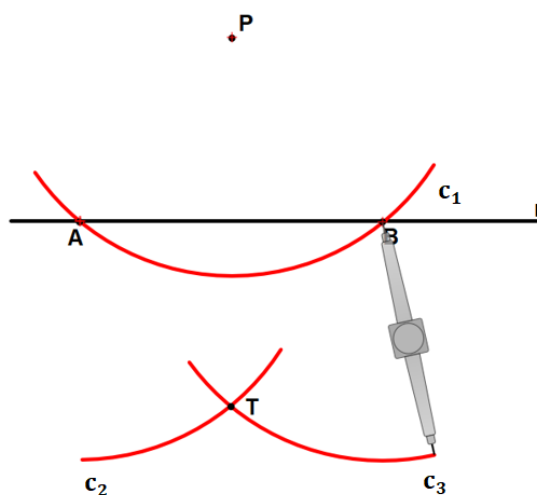
Figura 13 – Traçando arco c_2 centrado no ponto **A**



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Fixando a Fig. 13, com o auxílio do compasso, trace um arco de circunferência c_3 de mesmo raio n centrado em B , intersectando o arco de circunferência c_2 no ponto T (Fig. 14).

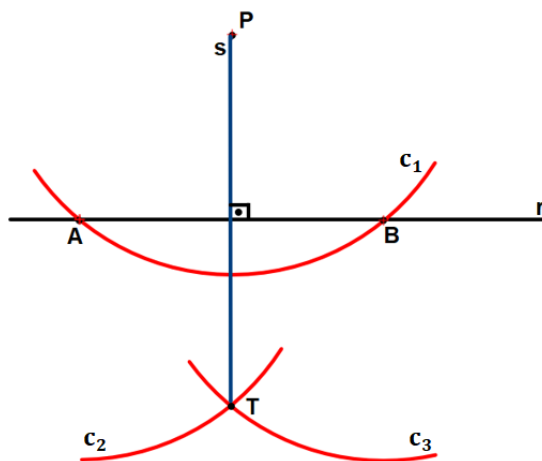
Figura 14 – Traçando o arco c_3 com centro no ponto B



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o auxílio de uma régua, trace a reta $\overleftrightarrow{PT}$ tal que $\overleftrightarrow{PT} = s$. Logo as retas r e s são perpendiculares (Fig. 15).

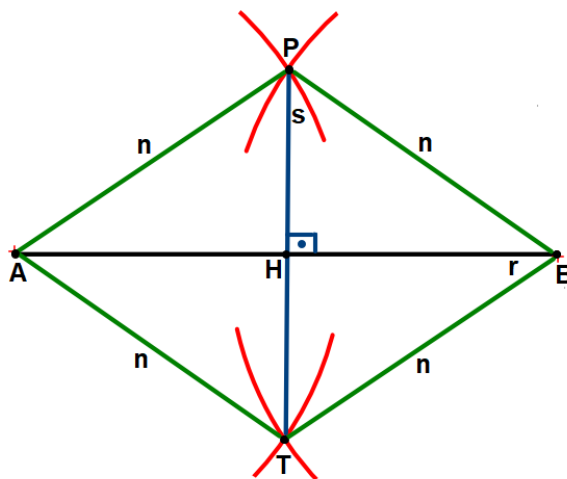
Figura 15 – Traçando a reta s perpendicular à reta r



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Fixando a Fig. 15, traçando os segmentos **AP**, **BP**, **AT** e **BT** obtemos por construção, o losango **APBT** (Fig. 16), pois $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{AT} = \overline{BT} = n$ são segmentos que compreendem circunferências de mesmo raio **n**. Como as diagonais de um losango são perpendiculares, digamos em **H**, temos que $PT \perp AB$ e como $\overrightarrow{PT} = s$ e $\overrightarrow{AB} = r$, vem que $s \perp r$.

Figura 16 – Traçando os segmentos **AP**, **BP**, **AT** e **BT**



Fonte: Elaboração própria

Para as construções que se seguem se faz necessário definir **lugar geométrico**. Muniz Neto (2013, p. 90) faz a seguinte definição:

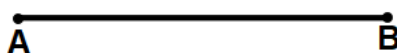
“Dada uma propriedade $\mathcal{P}$ relativa a pontos do plano, o **lugar geométrico** (abreviamos **LG**) dos pontos que possuem a propriedade $\mathcal{P}$ é o subconjunto $\mathcal{L}$ do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

- (i) Todo ponto de $\mathcal{L}$ possui a propriedade $\mathcal{P}$.
- (ii) Todo ponto do plano que possui a propriedade $\mathcal{P}$ pertence a $\mathcal{L}$.

No próximo problema faremos a construção da mediatriz de um segmento. Segundo Putnoki (1993, p. 71) “A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico que equidistam de seus extremos, sendo definida como uma reta perpendicular ao segmento dado passando pelo seu ponto médio”.

PROBLEMA 3: Dado um segmento **AB** qualquer, construa a mediatriz desse segmento (Fig.17).

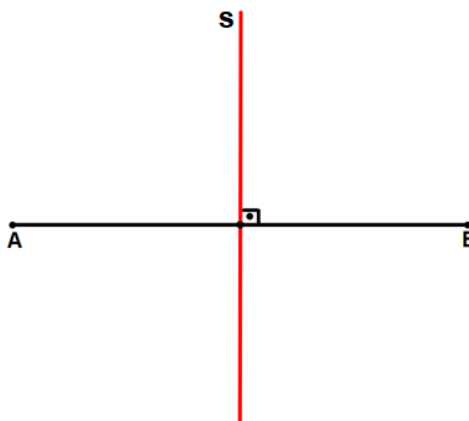
Figura 17 – Segmento AB



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, conforme a Fig. 18

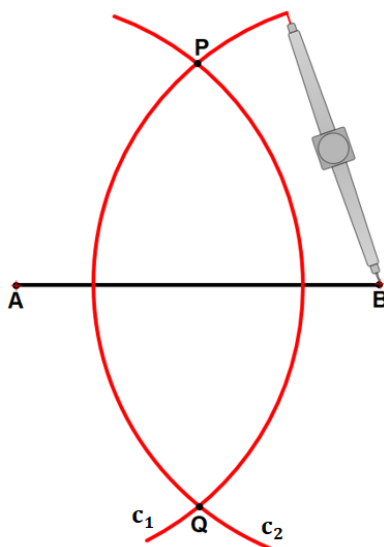
Figura 18 – Reta s perpendicular ao segmento AB



Fonte: Elaboração própria

Passo 2: Com o auxílio do compasso, trace dois arcs de circunferências c_1 e c_2 centrados em **A** e **B**, respectivamente, de mesmo raio $r > \frac{\overline{AB}}{2}$ e que se interceptam nos pontos **P** e **Q** (Fig. 19).

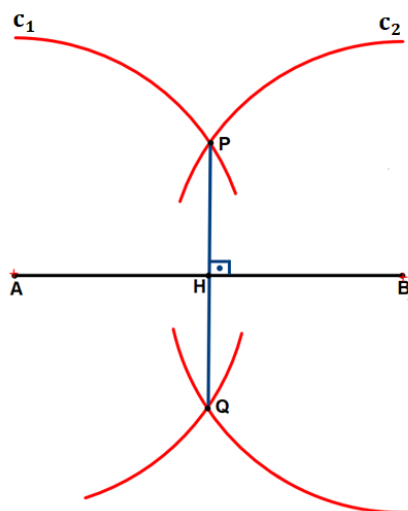
Figura 19 – Traçando arcs c_1 e c_2



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Fixando a Fig. 19, com auxílio de uma régua, trace o segmento **PQ**. Temos que $\overleftrightarrow{PQ}$ é a reta mediatriz do segmento **AB**, sendo **H** o ponto de interseção da mediatriz com o segmento **AB** (Fig. 20).

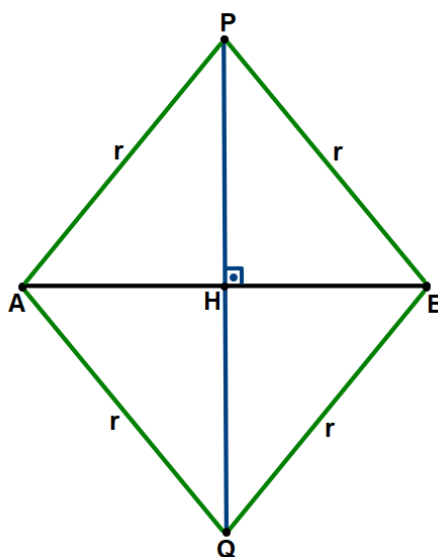
Figura 20 – Traçando a reta mediatriz **PQ**



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Fixando a Fig. 20, apagando os arcos traçados e mantendo os pontos **P** e **Q** e em seguida traçando os segmentos **AP**, **PB**, **BQ** e **QA** obtemos, por construção o losango **APBQ** (Fig. 21), pois $\overline{AP} \equiv \overline{BP} \equiv \overline{AQ} \equiv \overline{BQ} = r$ são segmentos que compreendem circunferências de mesmo raio **r**, e como as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e cortam-se ao meio, temos que $PQ \perp AB$ e $AH \equiv BH$, o que implica que **PQ** é a reta mediatriz do segmento **AB**.

Figura 21 – Traçando os segmentos **AP**, **PB**, **BQ** e **QA**

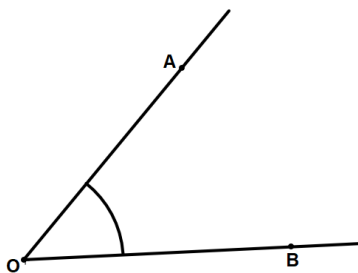


Fonte: Elaboração própria

No problema seguinte faremos a construção da bissetriz de um ângulo. Putnoki (1993, p. 71) define a bissetriz de um ângulo como sendo “O lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas concorrentes, **a** e **b**, constitui um par de retas perpendiculares, as quais contém as bissetrizes dos ângulos determinados por **a** e **b**”. Dessa forma a bissetriz de um ângulo é o conjunto dos pontos que equidistam de seus lados, sendo, portanto, uma semirreta que divide um ângulo em dois outros ângulos congruentes.

PROBLEMA 4: Dado um ângulo arbitrário $\widehat{AOB}$, construa sua bissetriz interna (Fig. 22).

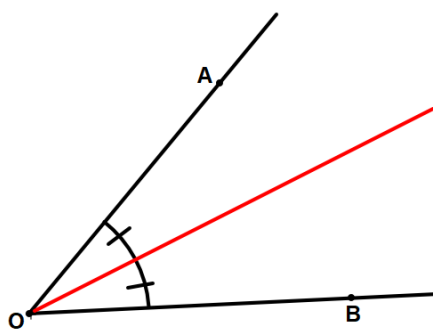
Figura 22 – Ângulo $\widehat{AOB}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, como mostra a Fig. 23.

Figura 23 – Traçando a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$

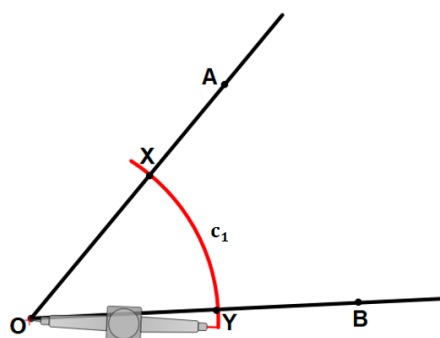


Fonte: Elaboração própria

A ideia é construir dois triângulos congruentes no interior do ângulo $\widehat{AOB}$ em que o vértice **O** (Fig. 23) seja comum a ambos os triângulos. Segundo Pompeo (2005, p. 42), se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes e como consequência seus ângulos também são ordenadamente congruentes.

Passo 2: Com o auxílio do compasso, trace um arco de circunferência c_1 de raio qualquer, centrado em **O**, que intercepta os lados do ângulo nos pontos **X** e **Y** (Fig. 24).

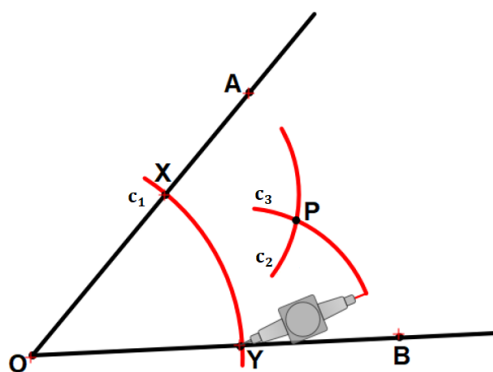
Figura 24 – Traçando o arco de circunferência **XY**



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o auxílio do compasso, trace dois arcs de circunferência c_2 e c_3 de mesmo raio r , centrados em X e Y , tal que o raio $r > \frac{\overline{XY}}{2}$. Seja P , a interseção entre c_2 e c_3 (Fig. 25).

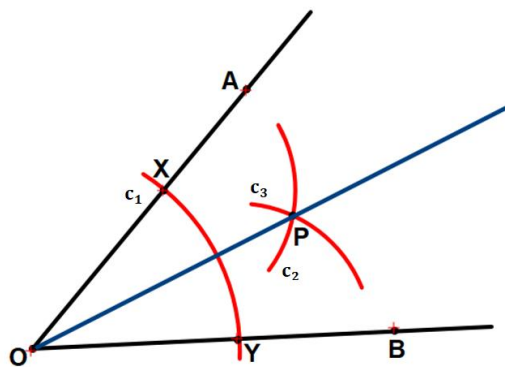
Figura 25 – Traçando a interseção entre os arcs c_2 e c_3



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o auxílio de uma régua, trace a semirreta $\overrightarrow{OP}$. Temos que $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$ (Fig. 26).

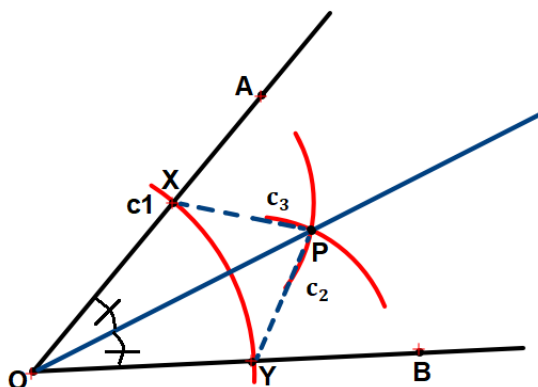
Figura 26 – Traçando a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Traçando os segmentos XP e YP , obtemos os triângulos OXP e OYP que são congruentes pelo caso **LLL**, pois $OX \equiv OY$ (raio da circunferência c_1) e $XP \equiv YP$ (mesmo raio das circunferências c_2 e c_3) e OP é lado comum. Logo $\widehat{XOP} = \widehat{YOP}$ e $\overrightarrow{OP}$ é bissetriz de $\widehat{AOB}$ (Fig. 27).

Figura 27 – Traçando os segmentos XP e YP

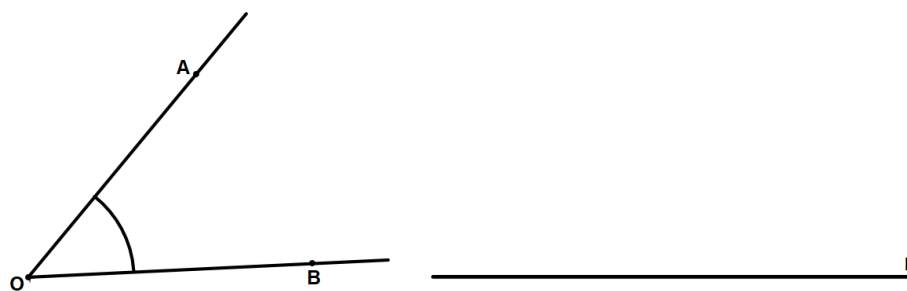


Fonte: Elaboração própria

No próximo problema mostraremos o transporte de ângulo. Costa (2016, p. 49) define ângulo como “A região do plano compreendida entre duas semirretas não opostas que têm o ponto de origem comum”. Portanto, ângulo é união de duas semirretas de mesma origem e não contidas numa mesma reta.

PROBLEMA 5: Transporte um ângulo arbitrário $\widehat{AOB}$ para a reta r dada, de modo que um dos lados do ângulo esteja contido na reta r (Fig. 28).

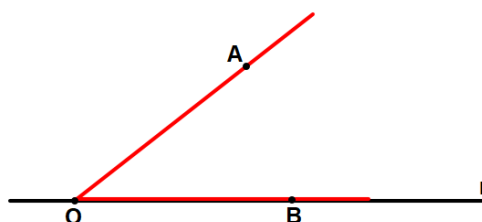
Figura 28 – Ângulo $\widehat{AOB}$ e reta r



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imaginando o desenho pronto, obtemos o esboço ilustrado na Fig. 29.

Figura 29 – Ângulo $\widehat{AOB}$ transportado para a reta r

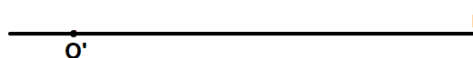


Fonte: Elaboração própria

Entende-se por transportar um ângulo como construir um novo ângulo $\widehat{A'O'B'}$ de mesma medida de $\widehat{AOB}$ em que um dos lados do ângulo $\widehat{A'O'B'}$ esteja sobre a reta r . Os próximos passos sugerem a construção.

Passo 2: Marque um ponto O' qualquer sobre a reta r , tal como na Fig. 30.

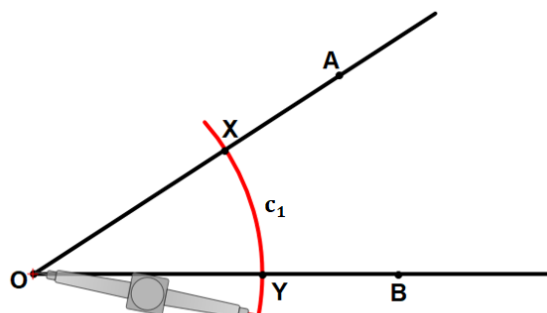
Figura 30 – Ponto O' sobre a reta r



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Trace uma circunferência c_1 de raio arbitrário R centrado no vértice O do ângulo $A\hat{O}B$ dado e marque os pontos X e Y de interseção com os lados desse ângulo (Fig. 31).

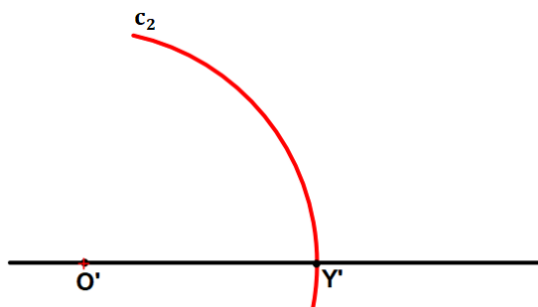
Figura 31 – Traçando o arco de circunferência c_1



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o compasso centrado em O' , na figura 30, trace um arco de circunferência c_2 de mesmo raio R intersectando a reta r no ponto Y' (Fig. 32).

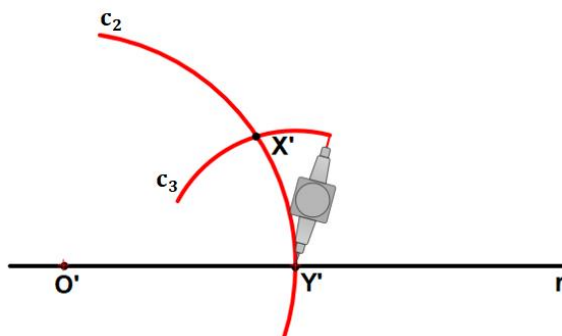
Figura 32 – Traçando o arco de circunferência c_2



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Com a abertura do compasso medindo $\overline{XY}$ (Fig. 31), trace a partir do ponto Y' (Fig. 32) um arco de circunferência c_3 que intercepta c_2 no ponto X' (Fig. 33).

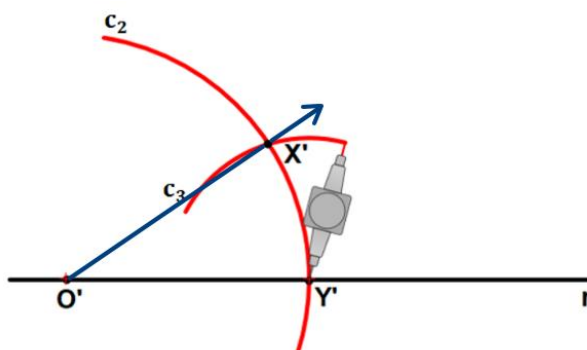
Figura 33 – Traçando a interseção dos arcos c_2 e c_3



Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Com o auxílio de uma régua trace a semirreta $\overrightarrow{O'X'}$ a partir de O' . Temos que o ângulo $\widehat{AOB} = \widehat{X'O'Y'}$ (Fig. 34).

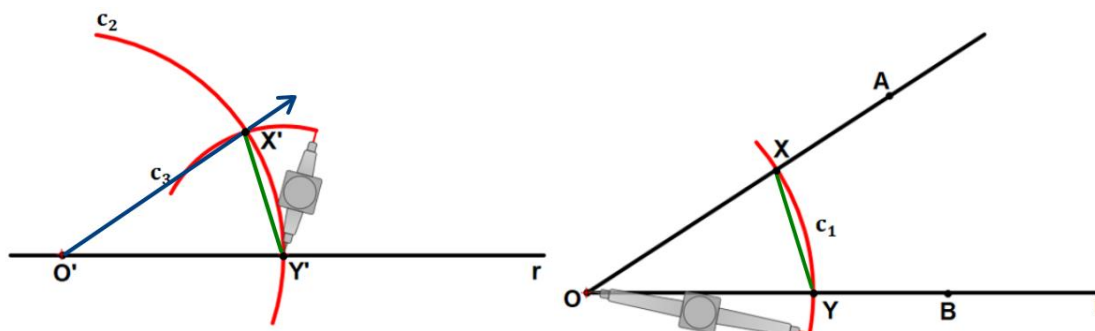
Figura 34 – Traçando a semirreta $\overrightarrow{O'X'}$



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Traçando o segmento $X'Y'$ na Fig. 34 e XY na Fig. 31, obtemos, respectivamente, os triângulos $X'O'Y'$ e XOY que são congruentes pelo caso **LLL**, pois por construção $\overline{XO} = \overline{X'O'} = R$ e $\overline{YO} = \overline{Y'O'} = R$ e $XY \equiv X'Y'$, pois o raio de c_3 , por construção (Fig. 34) mede exatamente $\overline{XY}$. Logo os triângulos $X'O'Y'$ e XOY são congruentes e desse fato concluímos que $\widehat{AOB} = \widehat{XOY} = \widehat{X'O'Y'}$.

Figura 35 – Traçando os segmentos $X'Y'$ e XY

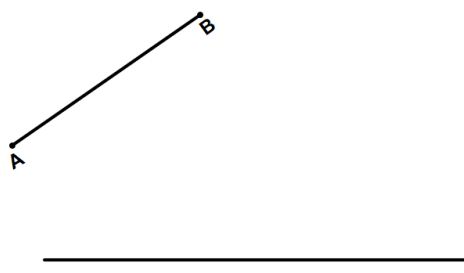


Fonte: Elaboração própria

A seguir mostraremos a construção conhecida como transporte de segmento. Faremos o transporte do segmento **AB** para a reta **r** dada (Fig. 36), construindo um novo segmento sobre a reta **r** de medida $\overline{AB}$.

PROBLEMA 6: Dado um segmento arbitrário **AB** não pertencente a uma reta **r** dada. Transporte o segmento **AB** para a reta **r** (Fig. 36).

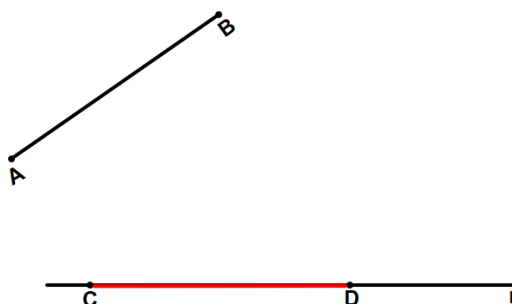
Figura 36 – Segmento **AB** e reta **r**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, como na Fig. 37.

Figura 37 – Segmento **AB** e segmento **CD** sobre a reta **r**

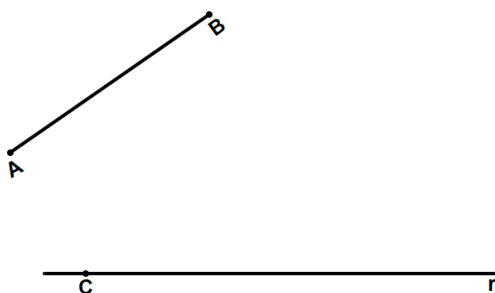


Fonte: Elaboração própria

Faremos o transporte do segmento **AB** para a reta **r**, utilizando apenas o compasso.

Passo 2: Marque um ponto qualquer **C** sobre a reta **r** (Fig. 38).

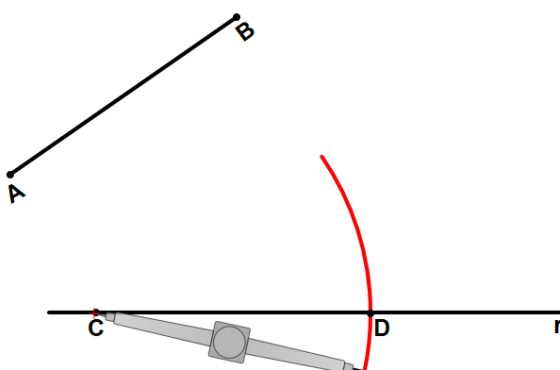
Figura 38 – Segmento **AB** e um ponto **C** pertencente à reta **r**



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com abertura do compasso medindo $\overline{AB}$ e com a ponta seca centrada em **C**, marque um ponto **D** $\in$ **r**, tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Temos que o segmento **CD** é congruente ao segmento **AB**, com isso fizemos o transporte de segmento, conforme pedido (Fig. 39).

Figura 39 – Segmento **AB** e arco de circunferência de raio $\overline{AB}$ interceptando a reta **r** em **D**



Fonte: Elaboração própria

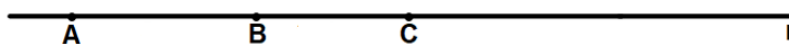
5. CONSTRUÇÕES SUGERIDAS PARA O 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

As construções desse capítulo e dos posteriores são sugeridas de acordo com o grau de dificuldade por série.

Nesta unidade faremos algumas construções relacionadas ao triângulo, polígono fundamental da geometria, dentre outras.

PROBLEMA 7: Sobre uma reta r estão marcados três pontos A , B e C , tais que B está entre A e C e mais próximo de C . Usando somente um compasso, marque sobre r um ponto D entre A e B , tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$ (Fig. 40).

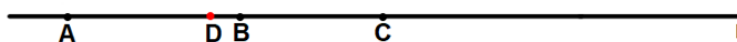
Figura 40 – Reta r com pontos A , B e C marcados



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, como ilustrado na Fig. 41.

Figura 41 – Ponto D entre A e B tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$

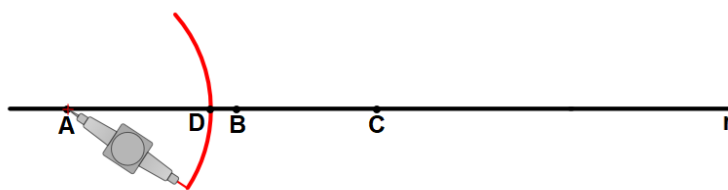


Fonte: Elaboração própria

Fazendo o uso somente do compasso, chegaremos a essa construção, seguindo o próximo passo:

Passo 2: Com o compasso com abertura BC , marque a partir do ponto A o ponto D entre A e B . Temos por construção que $AD \equiv BC$, como queríamos construir (Fig. 42).

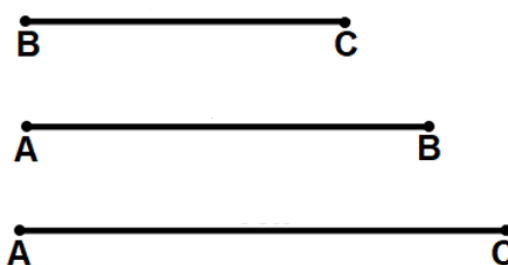
Figura 42 – Construção do ponto D entre A e B



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 8: Marque no plano, com o auxílio do compasso, três pontos **A**, **B** e **C** não colineares utilizando os segmentos **BC**, **AB** e **AC** da Fig. 43.

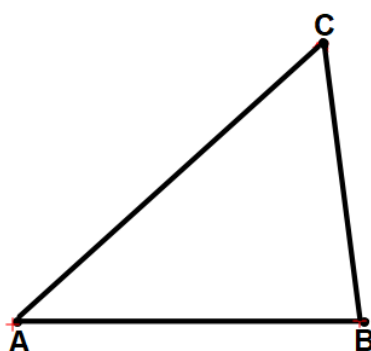
Figura 43 – Segmentos **BC**, **AB** e **AC**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, como na Fig. 44.

Figura 44 – Triângulo **ABC**

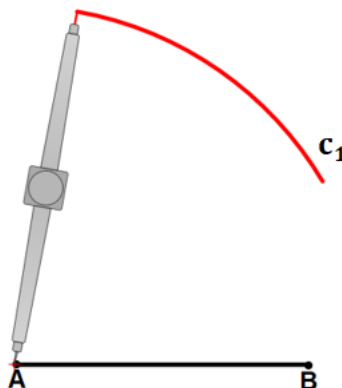


Fonte: Elaboração própria

Nesta construção faremos o uso apenas do compasso. Fixaremos o lado **AB** e a partir de suas extremidades **A** e **B**, construímos circunferências de raios medindo $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ que se interceptam no ponto **C**, como na Fig. 44.

Passo 2: Dado o segmento **AB**, com o compasso com abertura **AC** e centrado em **A**, trace um arco de circunferência c_1 , como na Fig. 45.

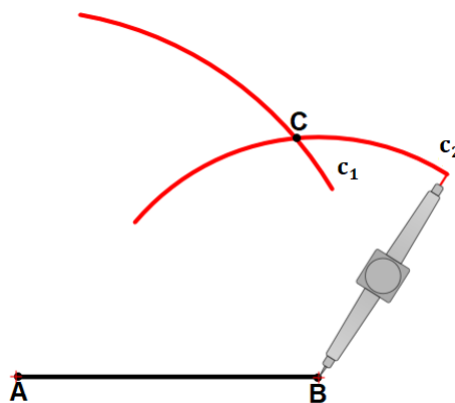
Figura 45 – Construção do arco de circunferência c_1



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso com abertura $\overline{BC}$, a partir de **B**, construa um arco de circunferência c_2 interceptando c_1 em **C** (Fig. 46).

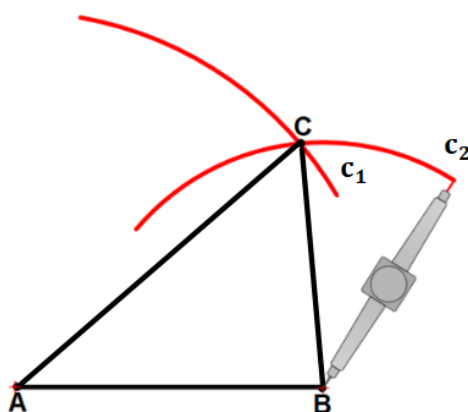
Figura 46 – Traçando o arco de circunferência c_2 a partir do ponto **B**



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o auxílio de uma régua, trace os segmentos **AC** e **BC** (Fig. 46). Temos então o triângulo **ABC** almejado (Fig. 47).

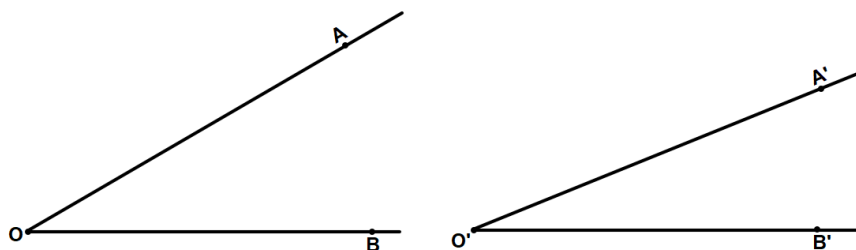
Figura 47 – Traçando os segmentos **AC** e **BC**



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 9: Construa, com régua e compasso, um ângulo cuja medida seja igual à soma das medidas dos ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{A'O'B'}$ dados conforme a Fig. 48.

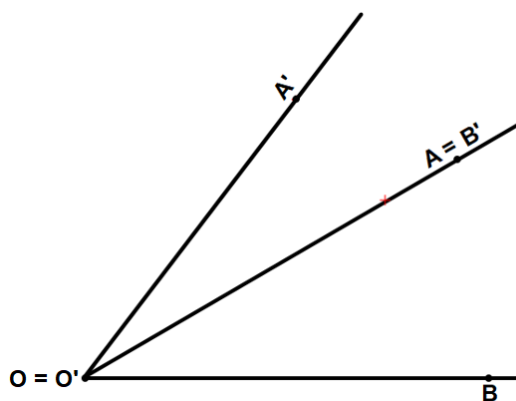
Figura 48 – Ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{A'O'B'}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto (Fig. 49).

Figura 49 – Ângulo resultante $\widehat{A'OB}$

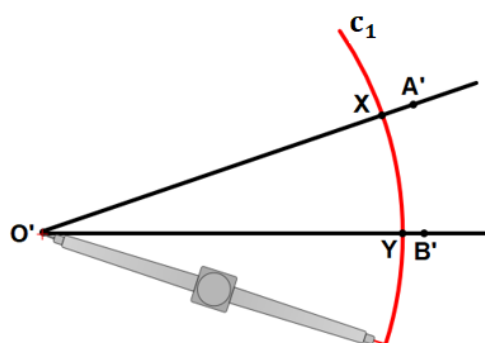


Fonte: Elaboração própria

A ideia é fazer o transporte do ângulo $\widehat{A'O'B'}$ para o semiplano superior da semirreta $\overrightarrow{OA}$ que é um dos lados do ângulo $\widehat{AOB}$, fazendo coincidir os centros O e O' e os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{O'A'}$ dos respectivos ângulos, como sugere a Fig. 49. Os próximos passos mostram como esse transporte será feito:

Passo 2: Com o compasso centrado em O' na Fig. 48, marque um arco de circunferência c_1 interceptando os lados do ângulo $\widehat{A'O'B'}$ em X e Y , conforme mostra a Fig. 50.

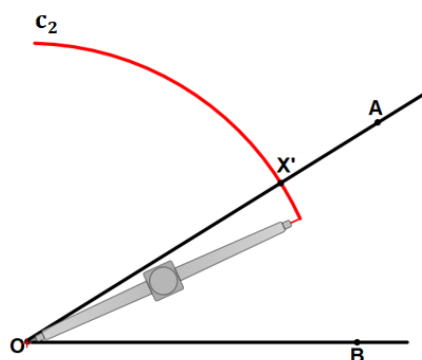
Figura 50 – Construção do arco de circunferência c_1



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso, com o mesmo raio de c_1 , centrado em O , na Fig. 49, marque um arco de circunferência c_2 interceptando o lado OA do ângulo $\widehat{AOB}$ em X' (Fig. 51).

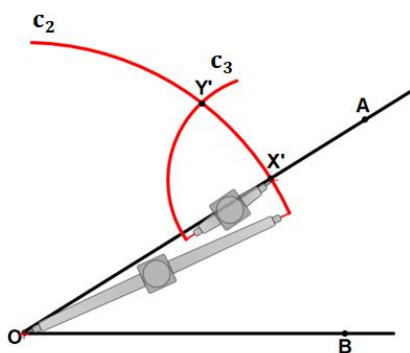
Figura 51 – Construção do arco de circunferência c_2 de raio OX' e centro O



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o compasso com abertura $\overline{XY}$ (Fig. 50), marque a partir do ponto X' da Fig. 51, um arco de circunferência c_3 interceptando o arco de circunferência c_2 em Y' (Fig. 52).

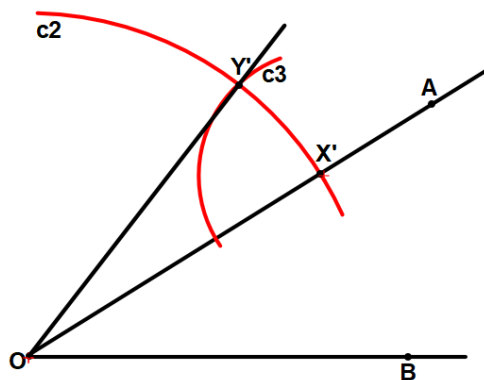
Figura 52 – Construção do arco de circunferência de raio $\overline{X'Y'}$ e centro X'



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Com auxílio de uma régua construa a semirreta $\overrightarrow{OY'}$. Temos que o ângulo $\widehat{Y'OX'}$ é congruente ao ângulo $\widehat{A'O'B'}$ (por construção) e, portanto, o ângulo $\widehat{Y'OB} = \widehat{A'O'B'} + \widehat{A'OB}$, uma vez que $\widehat{X'OB} = \widehat{B'OA}$ (Fig. 53).

Figura 53 – Construção da semirreta $\overrightarrow{OY'}$



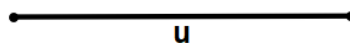
Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Traçando o segmento $Y'X'$ na Fig. 53, obtemos o triângulo $Y'OX'$. De forma análoga tracemos o segmento XY na fig. 50, obtendo um triângulo $XO'Y$ que é congruente ao triângulo $Y'OX'$ pelo caso **LAL**, pois $\overline{O'Y} = \overline{OX'}$ (raio de c_1 e c_2 de mesma medida) e $\overline{O'X} = \overline{OY'}$ (raio de c_1 e c_2 de mesma medida) e $\widehat{Y'OX'} \equiv \widehat{XO'Y}$ (por

construção). Como o ângulo $\widehat{AOB} = \widehat{X'OB}$ e $\widehat{A'O'B'} = \widehat{XO'Y} = \widehat{Y'O'X'}$ (por construção), concluímos que $\widehat{Y'OB} = \widehat{AOB} + \widehat{A'OB'}$, como queríamos demonstrar.

PROBLEMA 10: Construa com régua e compasso um triângulo equilátero **ABC** de lado **u** dado (Fig. 54).

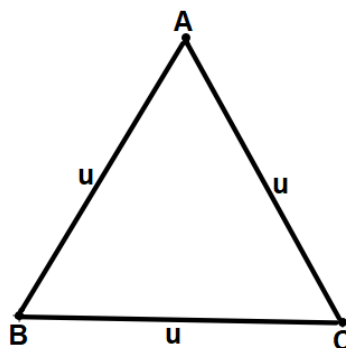
Figura 54 – Segmento de medida arbitrária **u**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, dado na Fig. 55.

Figura 55 – Triângulo equilátero **ABC** de lado **u**

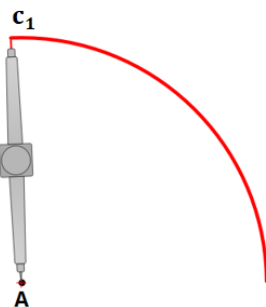


Fonte: Elaboração própria

Esta construção consiste em traçar duas circunferências de mesmo raio, sendo que o centro de uma delas esteja sobre a outra. Os passos seguintes mostram tal construção:

Passo 2: Marque no plano um ponto arbitrário **A** e com o compasso centrado em **A** e com abertura **u** trace um arco de circunferência c_1 (Fig. 56).

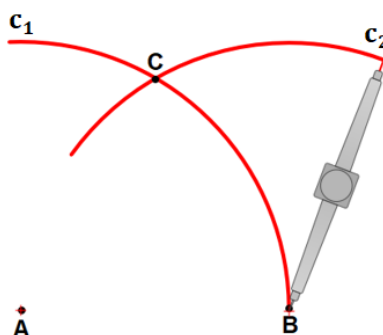
Figura 56 – Traçando o arco de circunferência c_1



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Marque sobre o arco c_1 um ponto genérico B e trace com o compasso centrado em B , um arco de circunferência c_2 de raio igual a u , interceptando c_1 em C (Fig. 57).

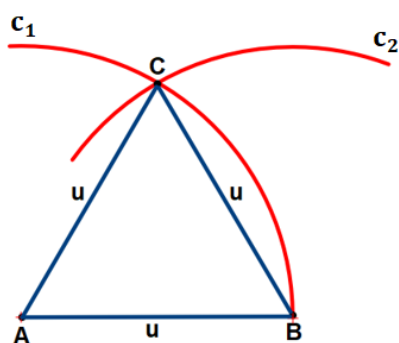
Figura 57 – Traçando o arco de circunferência c_2 e marcando o ponto C



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com auxílio de uma régua trace os segmentos AB , BC e AC . Temos então o triângulo equilátero ABC pedido (Fig. 58).

Figura 58 – Construção do triângulo equilátero ABC



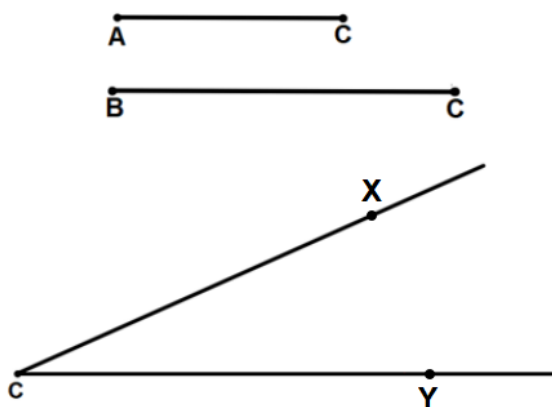
Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Notemos inicialmente que as circunferências c_1 e c_2 possuem o mesmo raio de medida u (por construção). Sendo assim AC , AB e BC são raios e, portanto, $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC} = u$. Concluimos com isso que o triângulo ABC é equilátero de lado u .

Essa construção pode ser usada como motivação para introduzir o conceito de congruência entre dois triângulos, pois ao resolvê-la aceitamos implicitamente o fato de que só há, essencialmente, um triângulo satisfazendo as propriedades pedidas. De outro modo, qualquer outro triângulo que construíssemos com os passos descritos mereceria ser qualificado como igual ao primeiro triângulo, uma vez que só diferiria desse por sua posição no plano. Essa discussão motiva a noção de igualdade de triângulos, a qual recebe o nome de congruência.

PROBLEMA 11: Construa com régua e compasso um triângulo ABC conhecendo dois de seus lados e o ângulo entre eles (Fig. 59).

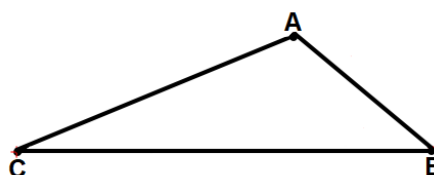
Figura 59 – Segmentos AC , BC e ângulo XCY



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto (Fig. 60).

Figura 60 – Triângulo ABC

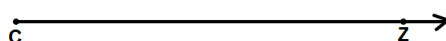


Fonte: Elaboração própria

A ideia nessa construção é fazer o transporte do ângulo $\widehat{XCY}$ (Fig. 59) para uma semirreta qualquer e sobre os lados do ângulo transportado, marcar os lados **AC** e **BC** dados, tal como os próximos passos:

Passo 2: Marque no plano um ponto **C** qualquer e em seguida trace uma semirreta **CZ** (Fig. 61).

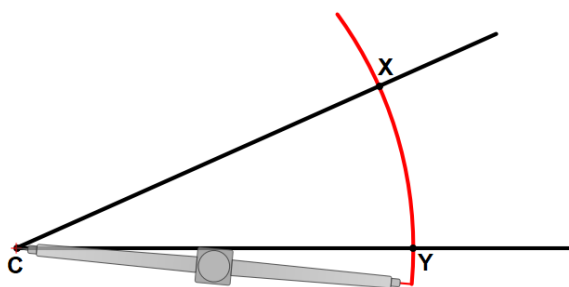
Figura 61 – Semirreta CZ



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso centrado no vértice **C** do ângulo dado (Fig. 64), trace um arco de circunferência de raio arbitrário que corte os lados do ângulo em **X** e **Y** (Fig.62).

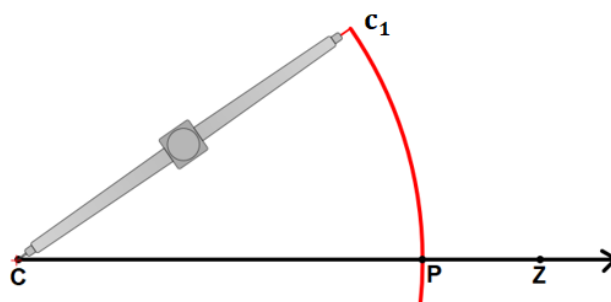
Figura 62 – Marcação do arco de circunferência XY a partir do ângulo $\widehat{C}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o compasso centrado no vértice **C** da semirreta **CZ** (Fig. 61) trace um arco de circunferência c_1 de raio $\overline{CX}$ (Fig. 62) que encontra a semirreta **CZ** (Fig. 63) no ponto **P**.

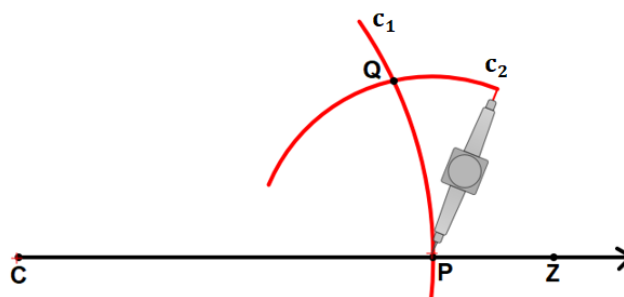
Figura 63 – Construção do arco de circunferência c_1



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Com o compasso centrado no vértice **P** da semirreta **CZ** (Fig. 63) e com abertura $\overline{XY}$ (Fig. 62), trace um arco de circunferência c_2 encontrando o arco de circunferência c_1 no ponto **Q** (Fig. 64).

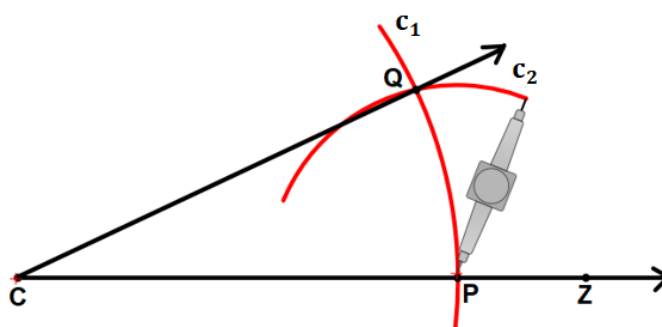
Figura 64 – Construção do arco de circunferência c_2



Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Com o auxílio de uma régua trace a semirreta **CQ**. Com isso foi feito o transporte do ângulo $\widehat{XCY}$ (Fig. 59) para a semirreta **CZ** (Fig. 61), uma vez que na Fig. 65 abaixo, $\widehat{XCY} = \widehat{QCP}$ (Por construção).

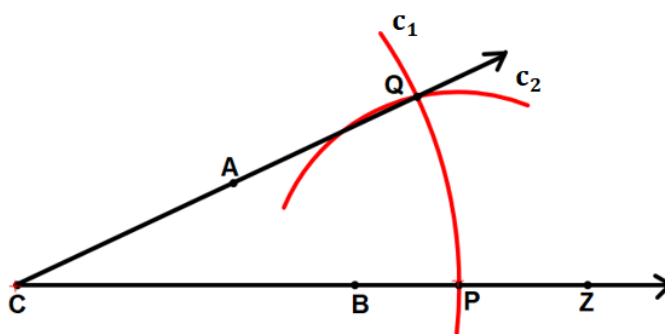
Figura 65 – Construção da semirreta **CQ**



Fonte: Elaboração própria

Passo 7: Com o auxílio do compasso com abertura $\overline{BC}$ (Fig. 59) marque sobre a semirreta CZ (Fig. 65), com origem em C , um ponto B tal que $\overline{CB}$ tenha a medida do segmento BC da Fig. 59. De maneira análoga, com abertura do compasso $\overline{AC}$ (Fig. 59) marque sobre a semirreta CQ , com origem C , um ponto A tal que $\overline{CA}$ tenha a medida do segmento AC da Fig. 59, tal como na Fig. 66.

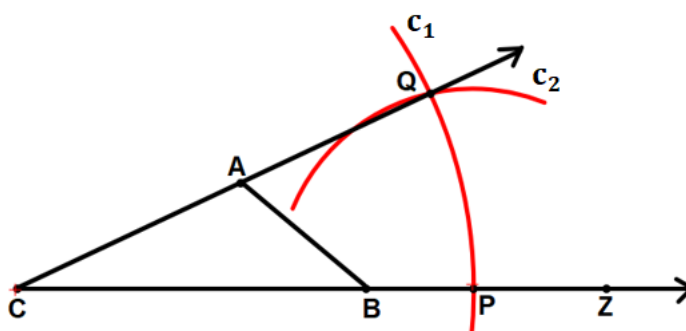
Figura 66 – Marcação dos pontos A e B sobre os lados do ângulo $Q\hat{C}P$



Fonte: Elaboração própria

Passo 8: Com auxílio de uma régua, trace o segmento AB na Fig. 66. Teremos então o triângulo ABC de lados AC , BC e AB dados (Fig. 67).

Figura 67 – Triângulo ABC

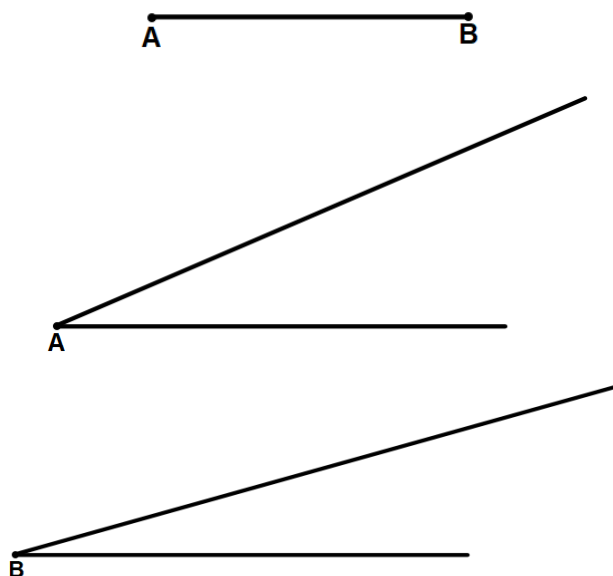


Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Notemos que o triângulo ABC obtido na Fig. 67, por construção, contém as medidas de lados e ângulos dados no problema, independentemente de sua posição no plano. Essa construção motiva a congruência de triângulos pelo caso **LAL**.

PROBELMA 12: Construa com régua e compasso um triângulo **ABC** conhecendo um lado e os dois ângulos adjacentes a esse lado (Fig. 68).

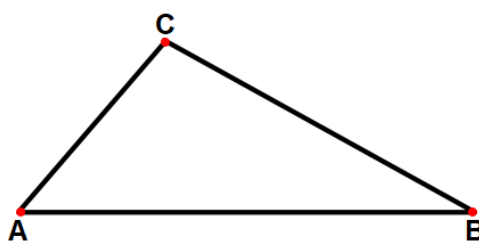
Figura 68 – Segmento **AB** e ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto (Fig. 69).

Figura 69 – Triângulo **ABC** pedido

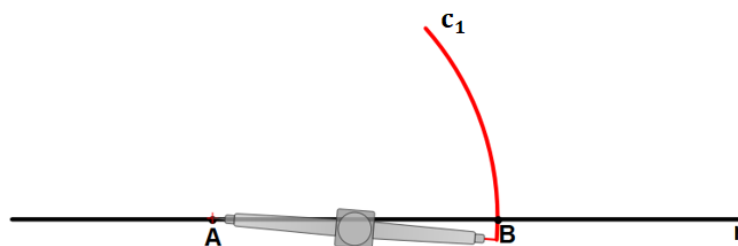


Fonte: Elaboração própria

A construção proposta consiste em fixar o segmento **AB** dado e fazer o transporte dos ângulos para suas extremidades, de acordo com os passos seguintes:

Passo 2: Trace uma reta **r** qualquer e marque sobre ela o ponto **A** e em seguida com auxílio do compasso com abertura $\overline{AB}$ (Fig. 68), trace um arco de circunferência c_1 centrado em **A**, interceptando a reta **r** em **B** (Fig. 70).

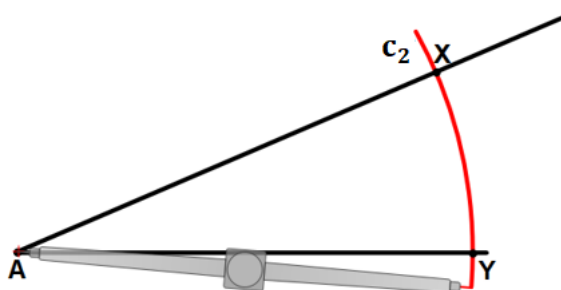
Figura 70 – Traçando o arco de circunferência c_1



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso centrado no vértice $\hat{A}$ (Fig. 68), trace um arco de circunferência c_2 de raio arbitrário cortando os lados desse ângulo nos pontos X e Y , conforme mostra a Fig. 71.

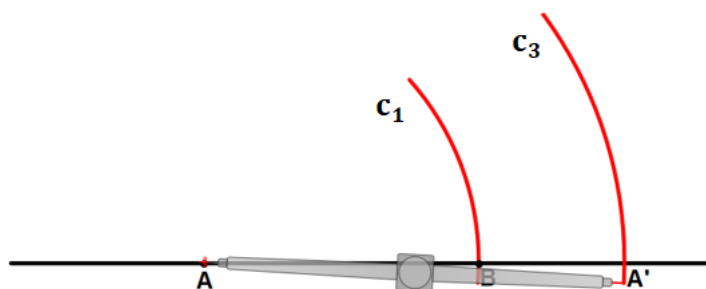
Figura 71 – Construção do arco de circunferência c_2



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o compasso centrado no vértice $\hat{A}$ (figura 70) e com abertura $\overline{AX}$ (Fig. 71) trace um arco de circunferência c_3 interceptando a reta r em A' (Fig. 72).

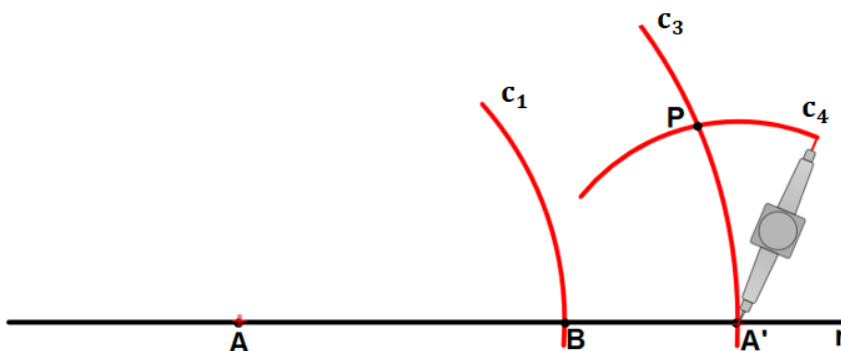
Figura 72 – Traçando o arco de circunferência c_3



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Com o compasso centrado em A' (Fig. 72) e com abertura $\overline{XY}$ (Figura 71) trace um arco de circunferência c_4 interceptando c_3 em P (Fig. 73).

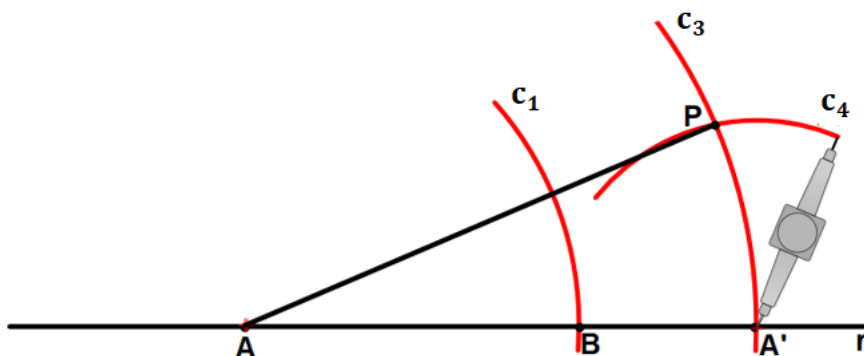
Figura 73 – Traçando o arco de circunferência c_4



Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Com o auxílio de uma régua, trace o segmento AP .

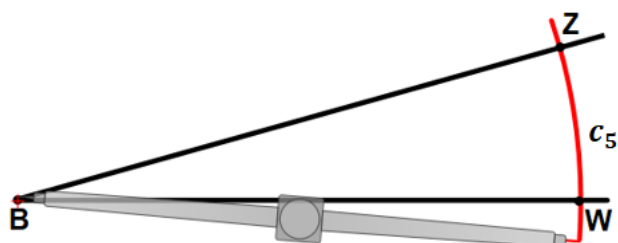
Figura 74 – Construção do triângulo ABC



Fonte: Elaboração própria

Passo 7: Com o compasso centrado no vértice B do ângulo $\hat{B}$ (Fig. 68), trace um arco de circunferência c_5 de raio arbitrário cortando os lados desse ângulo em Z e W (Fig. 75).

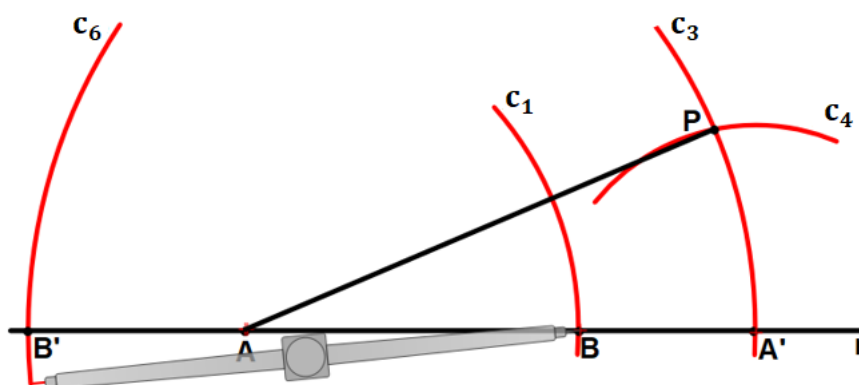
Figura 75 – Traçando o arco de circunferência c_5



Fonte: Elaboração própria

Passo 8: Com o compasso centrado no ponto **B** da reta **r** (Fig. 74) e com abertura $\overline{BZ}$ (Fig. 75), trace um arco de circunferência c_6 interceptando a reta **r** em **B'** (Figura 76).

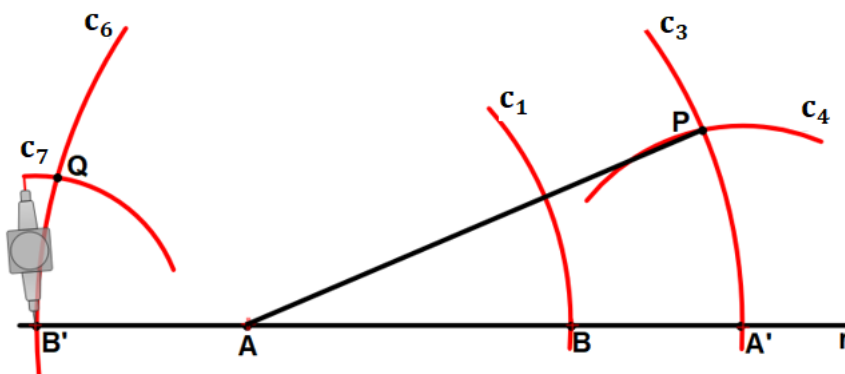
Figura 76 – Traçando arco de circunferência c_6 de centro **B**



Fonte: Elaboração própria

Passo 9: Com o compasso centrado em **B'** (Fig. 76) e com abertura $\overline{ZW}$ (Fig. 75) trace um arco de circunferência c_7 interceptando o arco de circunferência c_6 em **Q**.

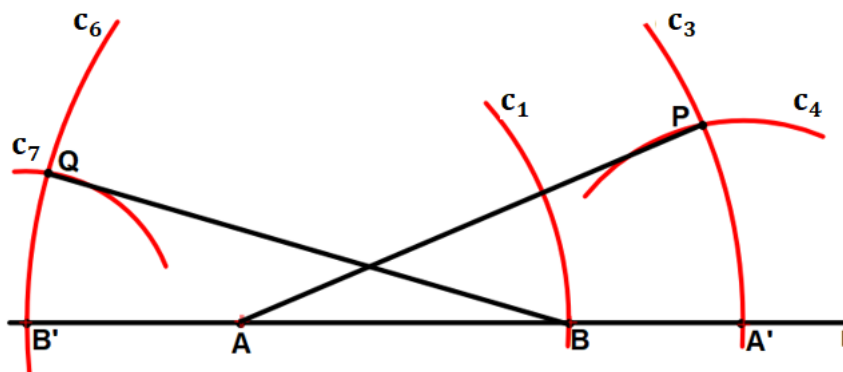
Figura 77 – Traçando o arco de circunferência c_7 de centro **B'**



Fonte: Elaboração própria

Passo 10: Com o auxílio de uma régua, trace o segmento **BQ** (Fig. 77)

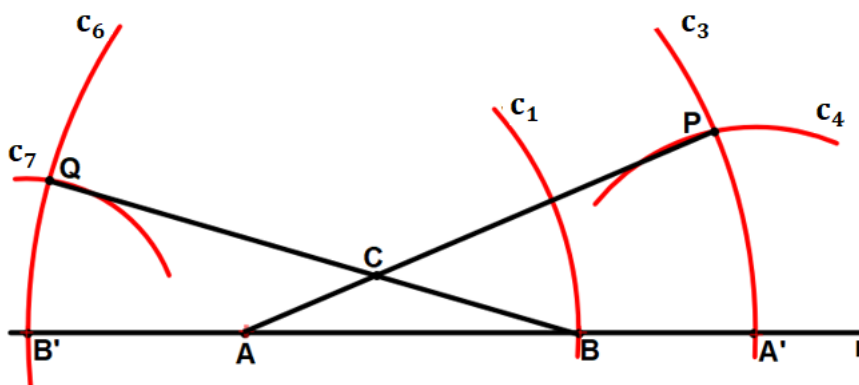
Figura 78 – Segmento **BQ** traçado



Fonte: Elaboração própria

Passo 11: Seja **C** o ponto de interseção dos segmentos **AP** e **BQ**. Com isso, temos o triângulo **ABC** pedido de lado **AB** e ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ dados (Fig. 79).

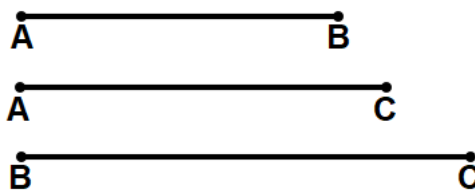
Figura 79 – Triângulo **ABC**



Fonte: Elaboração própria

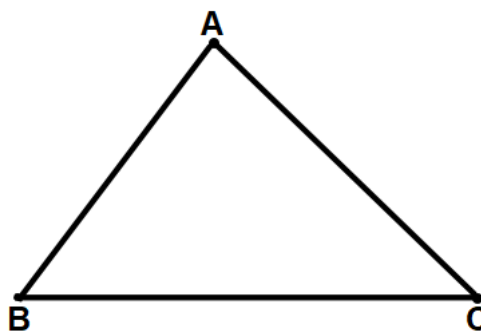
Justificativa: Notemos que o triângulo **ABC** obtido na Fig. 80 é congruente pelo caso **ALA**, ao triângulo de lados e ângulos dados na figura, independentemente de sua posição no plano. Essa construção justifica a congruência de triângulos pelo caso **ALA**.

PROBLEMA 13: Construa com régua e compasso um triângulo **ABC** conhecendo os seus três lados (Fig. 80)

Figura 80 – Lados dados **AB**, **AC** e **BC**

Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o problema resolvido, como mostra a Fig. 81.

Figura 81 – Triângulo **ABC**

Fonte: Elaboração própria

Este problema construtivo consiste em fixar o lado **BC** do triângulo, que já contém os vértices **B** e **C**, e em seguida, construir dois arcos de circunferências de raios de medidas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ com centros em **B** e **C**, respectivamente. A interseção entre esses dois arcos nos dará o vértice **A** do triângulo, como mostraremos nos passos seguintes:

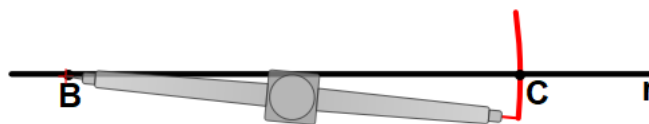
Passo 2: Trace uma reta **r** qualquer no plano e marque sobre ela um ponto **B** (Fig. 82).

Figura 82 – Ponto **B** sobre a reta **r**

Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso com abertura $\overline{BC}$ (Fig. 80) trace a partir do ponto **B** (Fig. 82), um ponto **C** à direita de **B** e pertencente à reta r (Fig. 83).

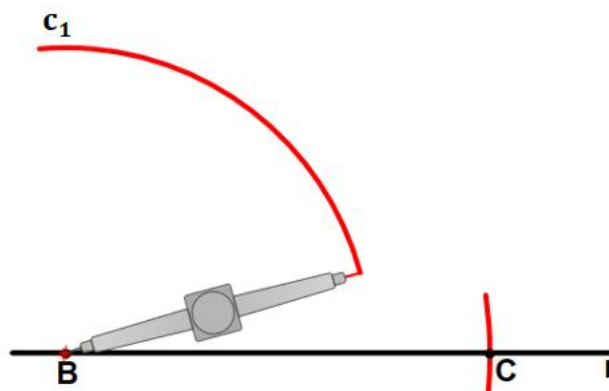
Figura 83 – Marcando o ponto **C** sobre a reta r



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o compasso com abertura $\overline{AB}$ (Fig. 80), trace a partir de **B** (figura 83) um arco de circunferência c_1 (Fig. 84).

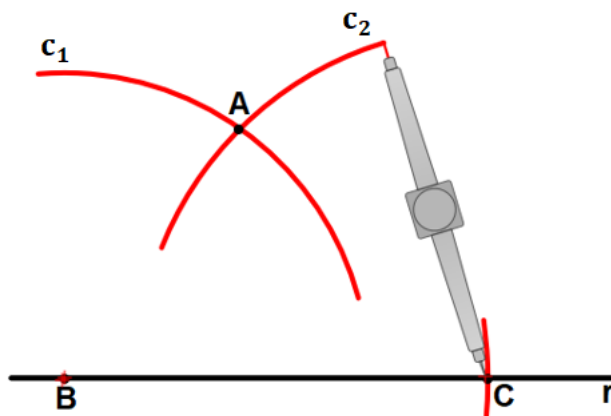
Figura 84 – Traçando o arco de circunferência c_1 de centro **B**



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: De maneira análoga, com o compasso agora com abertura $\overline{AC}$ (Fig. 80), trace a partir de **C** (Fig. 84) um arco de circunferência c_2 encontrando c_1 no ponto **A** (Fig. 85).

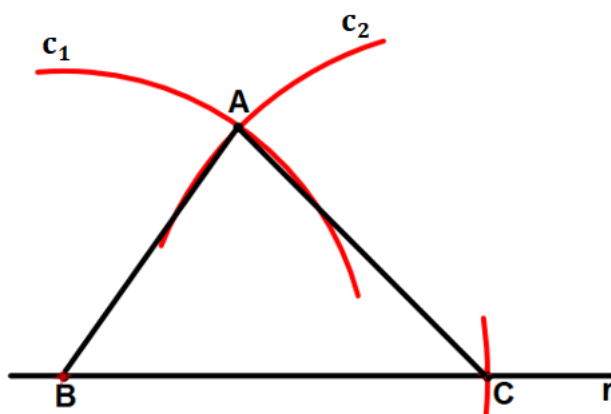
Figura 85 – Traçando o arco c_2 e o ponto de interseção **A** dos arcos c_2 e c_1



Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Com o auxílio de uma régua trace os segmentos **AB** e **AC**. Com isso, temos o triângulo de lados **AB**, **AC** e **BC** pedido (Fig. 86).

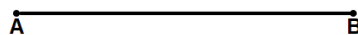
Figura 86 – Triângulo **ABC** pedido



Fonte: Elaboração própria

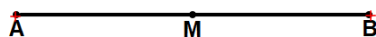
Justificativa: Notemos que o triângulo **ABC** obtido na Fig. 86 é congruente, pelo caso **LLL**, ao triângulo de lados dados inicialmente, conforme a Fig. 81, independente de sua posição no plano. Essa construção motiva a congruência de triângulos pelo caso **LLL**. Se escolhida outra posição no plano para a base **BC**, mantendo as medidas dadas, obteríamos outro triângulo que tem a propriedade de ter lados congruentes ao triângulo da Fig. 81.

PROBLEMA 14: Construa com régua e compasso o ponto médio do segmento **AB** dado (Fig. 87).

Figura 87 – Segmento **AB** dado

Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto (Fig. 88).

Figura 88 – Ponto médio **M** do segmento **AB**

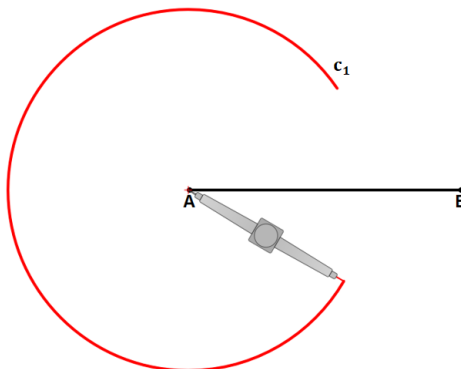
Fonte: Elaboração própria

A ideia dessa construção é utilizar o compasso para encontrar o ponto médio **M** do segmento **AB**, seguindo os seguintes passos:

Passo 2: Com o compasso centrado em **A** (Fig. 87) e com abertura $r > \frac{\overline{AB}}{2}$ (Fig. 89), trace um arco de circunferência c_1 nos semiplanos superior e inferior do segmento **AB** (Fig. 90).

Figura 89 – Compasso com abertura $r > \frac{\overline{AB}}{2}$ 

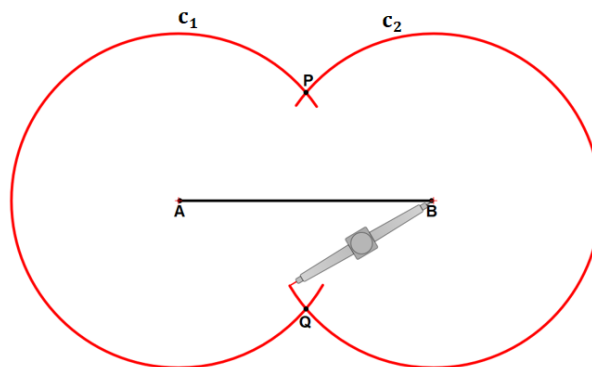
Fonte: Elaboração própria

Figura 90 – Traçando o arco de circunferência c_1 de centro **A**

Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso centrado em **B** (Fig. 90) e também com abertura $r > \frac{\overline{AB}}{2}$, trace um arco de circunferência c_2 nos semiplanos superior e inferior do segmento **AB**, encontrando c_1 nos pontos **P** e **Q** (Fig. 91).

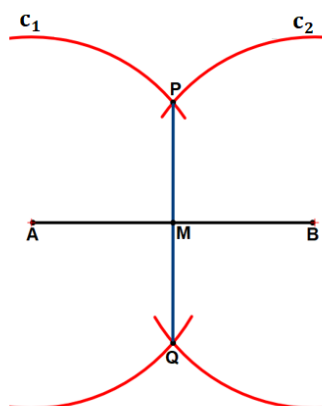
Figura 91 – Traçando o arco de circunferência c_2 e os pontos de interseção **P** e **Q** entre c_1 e c_2



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o auxílio de uma régua, trace o segmento **PQ** (Fig. 91), encontrando o segmento **AB** em **M** (Fig. 92). Chamamos de **M** o ponto médio do segmento **AB**, uma vez que $\overline{AM} = \overline{BM}$.

Figura 92 – Marcação do ponto médio **M** do segmento **AB**

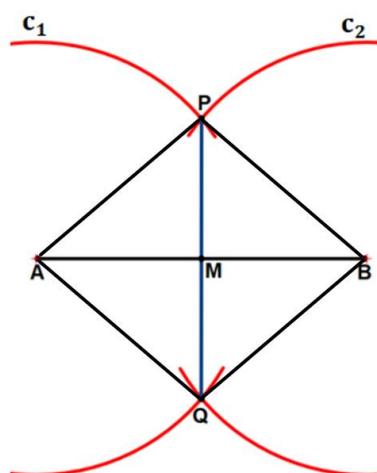


Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Na figura 92, traçando os segmentos **AP**, **PB**, **BQ** e **QA** obtemos os triângulos **APQ** e **BPQ** que são congruentes pelo caso **LLL**, pois **PQ** é lado comum,

$\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\overline{BQ}$ e $\overline{QA}$ são raios de c_1 e c_2 e como c_1 e c_2 têm o mesmo raio r , temos que $\overline{AP} = \overline{PB} = \overline{BQ} = \overline{QA} = r$. Com isso, $\widehat{APQ} = \widehat{BPQ}$ ou, ainda, $\widehat{APM} = \widehat{BPM}$. Agora, note que os triângulos $\triangle APM$ e $\triangle BPM$ são congruentes pelo caso **LAL**, pois $\overline{AP} = \overline{BP}$ (raio r), $\overline{PM}$ é lado comum e $\widehat{APM} = \widehat{BPM}$ como visto anteriormente. Desse fato vem que $\overline{AM} = \overline{BM}$, sendo M ponto médio do segmento $\overline{AB}$ (Fig. 93).

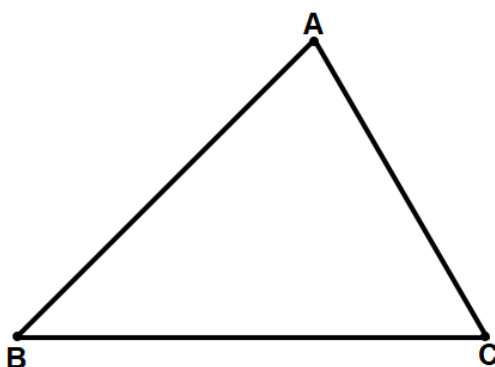
Figura 93 – Traçando os segmentos $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\overline{BQ}$ e $\overline{QA}$



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 15: Construa com régua e compasso as três bissetrizes dos ângulos internos do triângulo $\triangle ABC$ da Fig. 94.

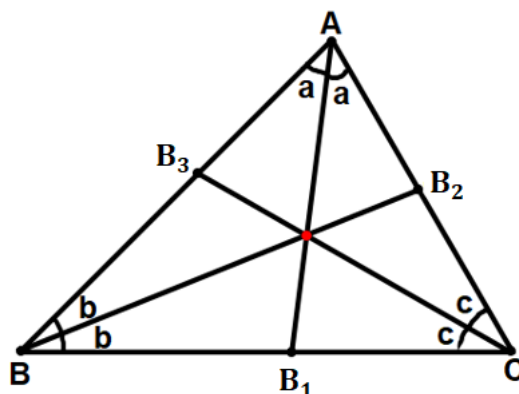
Figura 94 – Triângulo $\triangle ABC$



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, tal como ilustra a Fig. 95.

Figura 95 – Triângulo **ABC** com suas bissetrizes internas **AB₁**, **BB₂** e **CB₃** traçadas

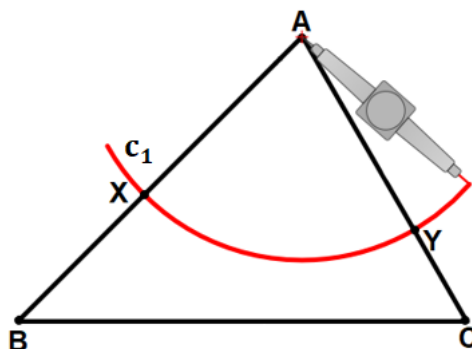


Fonte: Elaboração própria

Como visto no problema 4, já sabemos traçar a bissetriz de um ângulo dado, sendo assim, vamos traçar as três bissetrizes referentes aos três ângulos internos do triângulo **ABC**, como veremos nos passos seguintes:

Passo 2: Com o compasso centrado no vértice **A** do triângulo **ABC** (Fig. 94), trace um arco de circunferência c_1 que intercepta os lados do ângulo $\hat{A}$ em **X** e **Y** (Fig. 96).

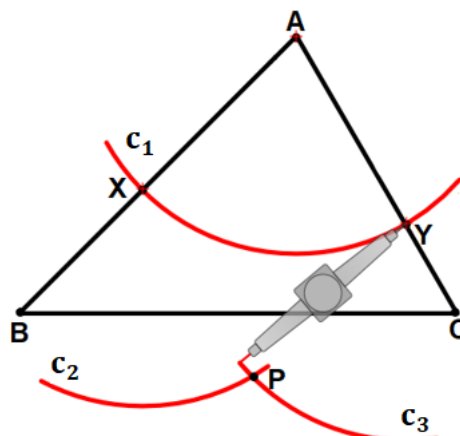
Figura 96 – Traçando arco de circunferência c_1



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso com abertura $r > \frac{\overline{XY}}{2}$ (Fig. 96) trace a partir de **X** e depois de **Y**, dois arcos de circunferências c_2 e c_3 que se interceptam em **P** (Fig. 97).

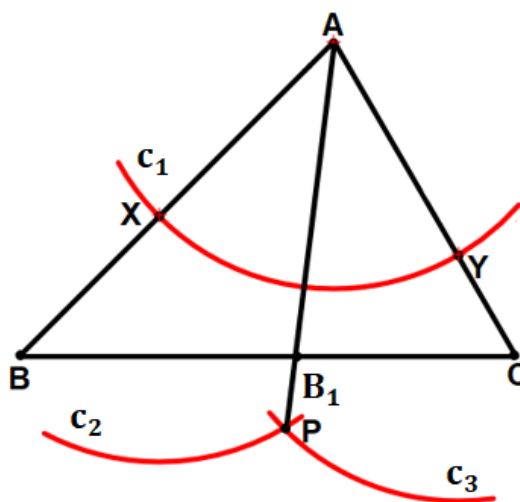
Figura 97 – Traçando os arcos c_2 e c_3



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com auxílio de uma régua, trace o segmento **AP** na Fig. 97. Logo **AP** é bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$. Seja **B₁** a interseção de **AP** com o lado **BC** do triângulo **ABC**, daí **AB₁** é a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$ do triângulo **ABC** (Fig. 98).

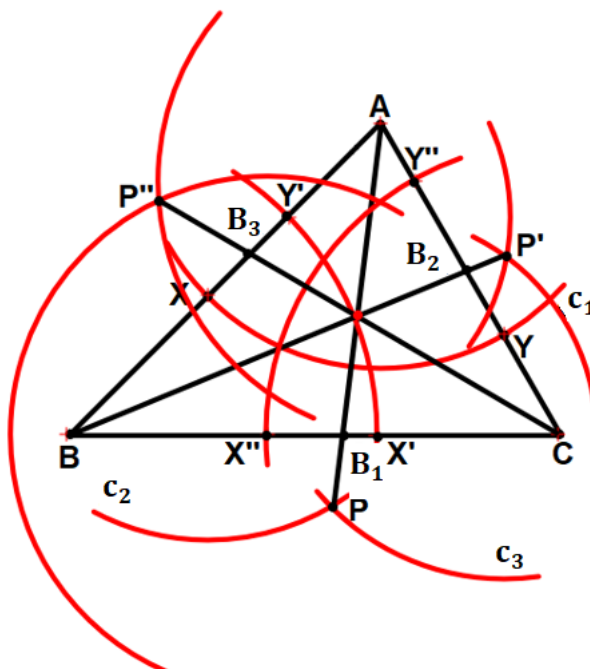
Figura 98 – Construção da bissetriz **AB₁** do triângulo **ABC**



Fonte: Elaboração própria

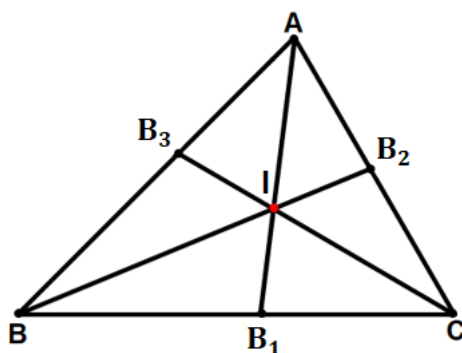
Passo 5: Seguindo os passos 2, 3 e 4 em relação aos outros vértices **B** e **C** do triângulo **ABC** (Fig. 94) obtemos as bissetrizes internas **BB₂** e **CB₃**, resultando na construção da Fig. 99. Note que as três bissetrizes concorrem em um mesmo ponto **(I)** chamado que **Incentro** do triângulo (Fig.100).

Figura 99 – Construção das bissetrizes **BB₂** e **CB₃**



Fonte: Elaboração própria

Figura 100 – Triângulo **ABC** com suas bissetrizes internas e seu incentro (**I**)



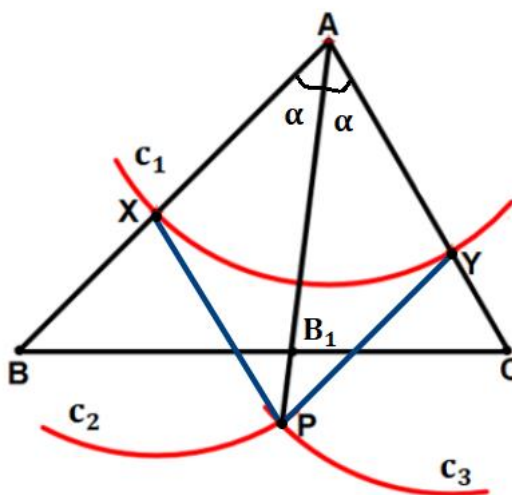
Fonte: Elaboração própria

No **PROBLEMA 29** deste material mostraremos que de fato as três bissetrizes de um triângulo se interceptam num ponto **I** (incentro).

Justificativa: Fixando a Fig. 98, considerando a bissetriz **AP**, traçamos os segmentos **XP** e **YP** obtendo dois triângulos **AXP** e **AYP** que são congruentes pelo **caso LLL**, pois $\overline{AX} = \overline{AY}$ (mesmo raio de c_1), **AP** é lado comum e $\overline{XP} = \overline{YP}$ (**XP** e **YP** são raios das circunferências c_2 e c_3 que têm o mesmo raio) desse fato vem que $\widehat{XAP} = \widehat{YAP}$ ou mais precisamente, $\widehat{BAB_1} = \widehat{CAB_1} = \alpha$. Procedendo de maneira análoga para as

demais bissetrizes chega-se a mesma conclusão, ou seja, $\widehat{ABB_2} = \widehat{CBB_2} = \theta$ e $\widehat{ACB_3} = \widehat{BCB_3} = \gamma$ (Fig. 101).

Figura 101 – Traçando os segmentos **XP** e **YP**

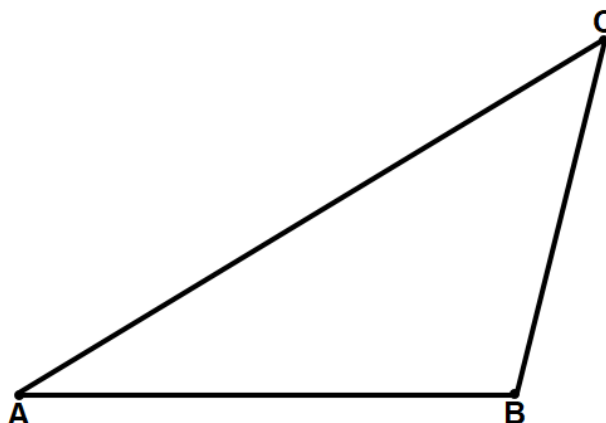


Fonte: Elaboração própria

O próximo problema abordará a construção das medianas de um triângulo. Pompeo (2005, p. 44) define mediana de um triângulo como sendo “um segmento com extremidades num dos vértices e no ponto médio do lado oposto”. Como visto no problema 14, já sabemos construir o ponto médio de um segmento e com isso basta encontrar o ponto médio de cada lado do triângulo e depois unir com seus respectivos vértices.

PROBLEMA 16: Construa com régua e compasso as três medianas do triângulo **ABC** da Fig. 102.

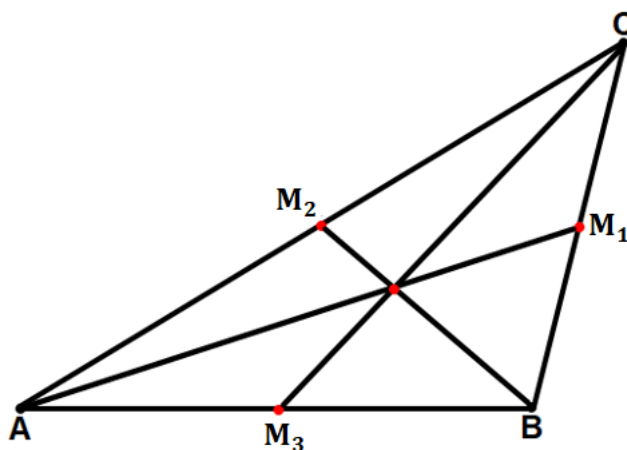
Figura 102 – Triângulo **ABC**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto (Fig. 103).

Figura 103 – Triângulo **ABC** com as três medianas AM_1 , BM_2 e CM_3

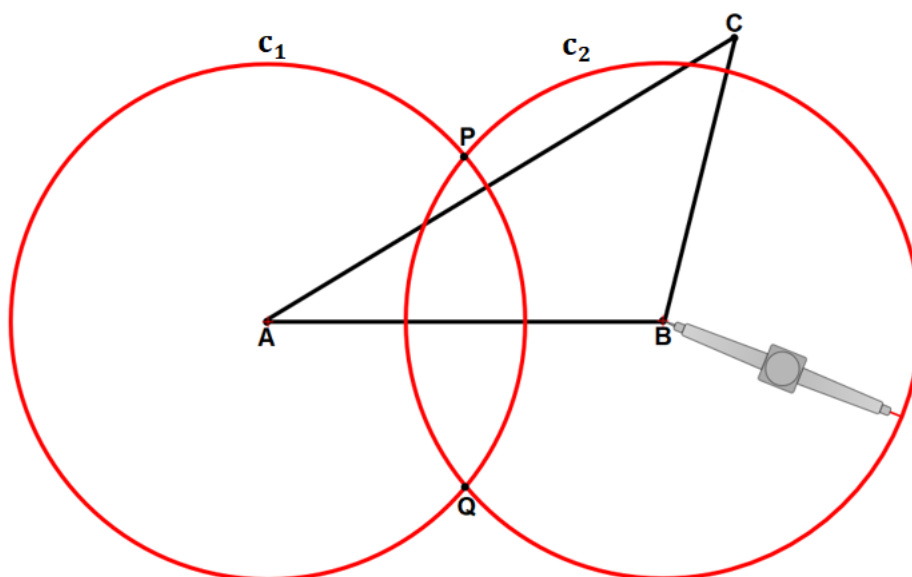


Fonte: Elaboração própria

A Fig. 103 sugere encontrar os três pontos médios M_1 , M_2 e M_3 referentes aos lados do triângulo **ABC** e em seguida traçar os segmentos AM_1 , BM_2 e CM_3 que são as três medianas do triângulo **ABC**. Veja nos passos seguintes o desenvolvimento dessa construção:

Passo 2: Tomando o lado **AB** do triângulo **ABC** (Fig. 102) e com o compasso com abertura $r > \frac{\overline{AB}}{2}$, trace duas circunferências c_1 e c_2 com centros em **A** e em **B**, respectivamente, cruzando-se em dois pontos distintos **P** e **Q** (Fig. 104).

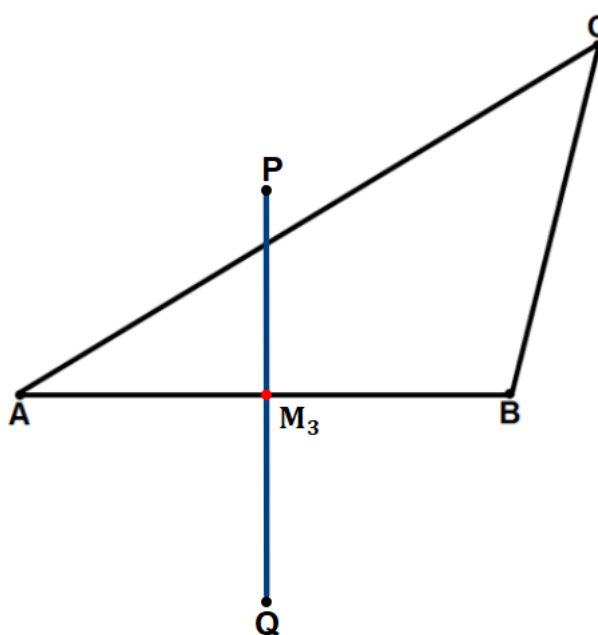
Figura 104 – Traçando as circunferências c_1 e c_2 de centros **A** e **B**, respectivamente, e os pontos de interseções **P** e **Q** entre essas circunferências



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o auxílio de uma régua, trace o segmento **PQ** que encontra o lado **AB** em seu ponto médio **M₃** (Fig. 105).

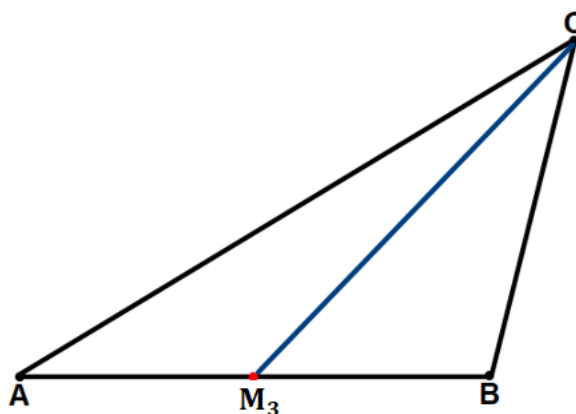
Figura 105 – Segmento **PQ** passando pelo ponto médio **M₃** de **AB**



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o auxílio de uma régua trace o segmento $\overline{CM_3}$ e apague o segmento $\overline{PQ}$. Temos então a mediana $\overline{CM_3}$ referente ao vértice C do triângulo ABC . Lembrando que $\overline{AM_3} = \overline{BM_3}$, pois M_3 é ponto médio de $\overline{AB}$ (Fig. 106).

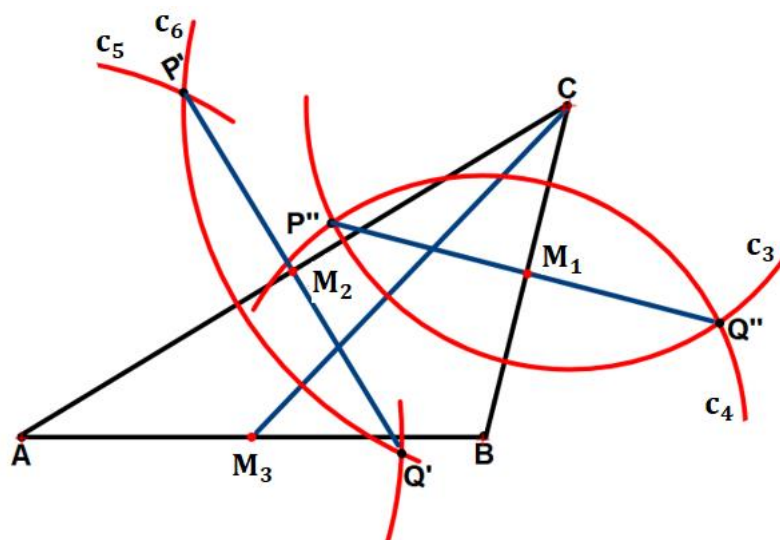
Figura 106 – Triângulo ABC com mediana $\overline{CM_3}$ traçada



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Tomando os outros dois lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ na Fig. 106 e seguindo os passos 2, 3 e 4 de maneira análoga, constrói-se os pontos médios M_1 e M_2 como representados na Fig. 107.

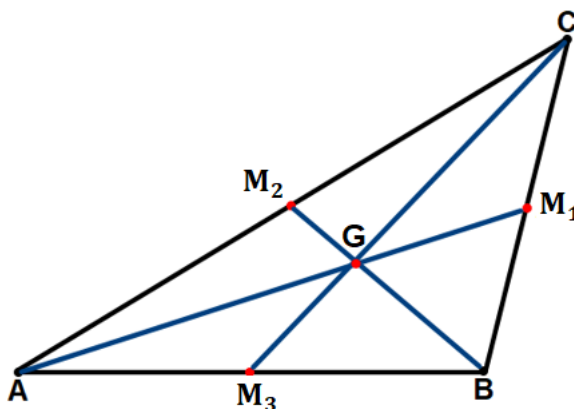
Figura 107 – Traçando os pontos médios M_1 e M_2 em relação aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente



Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Apagando os traçados de circunferências c_3 , c_4 , c_5 e c_6 , e os segmentos $P'Q'$ e $P''Q''$ do passo anterior e mantendo os pontos médios M_1 , M_2 e M_3 e a mediana CM_3 traçada no passo 4, podemos traçar as medianas AM_1 , BM_2 e ponto G que é a interseção dessas três medianas, finalizando assim a construção pedida (Fig. 108).

Figura 108 – Triângulo ABC com as medianas AM_1 , BM_2 e CM_3 traçadas, e o ponto de interseção G entre elas



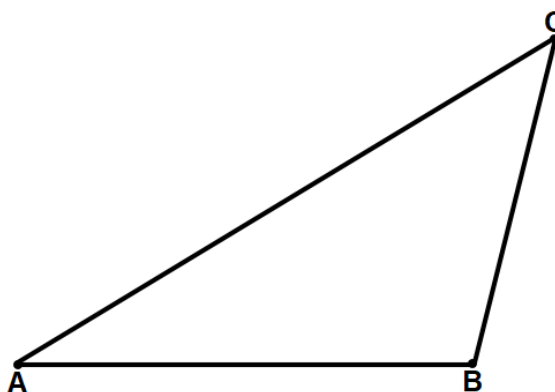
Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Como já justificada a construção do ponto médio de um segmento no problema 14 e como M_1 , M_2 e M_3 são pontos médios dos lados BC , AC e AB , respectivamente, temos por definição de mediana que a construção da figura 108 está bem definida. O ponto G na Fig. 108 é o ponto de encontro das três medianas, que denominamos de baricentro do triângulo ABC . No **PROBLEMA 30** provaremos que as três medianas de qualquer triângulo se encontram num mesmo ponto.

O próximo problema abordará a construção das alturas de um triângulo. Pompeo (2005, p. 84) define a altura de um triângulo como sendo “O segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado”. Como visto no problema 2, já sabemos construir uma reta perpendicular à outra passando por um ponto. Com isso, basta encontrar o pé da perpendicular baixada a partir de cada vértice em relação ao lado oposto do vértice considerado e depois unir o pé dessas perpendiculares aos seus respectivos vértices.

PROBLEMA 17: Construa com régua e compasso as três alturas do triângulo **ABC** da Fig. 109.

Figura 109 – Triângulo **ABC**

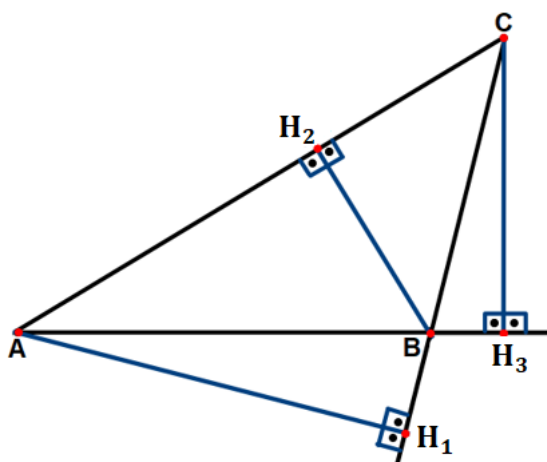


Fonte: Elaboração própria

Note que o triângulo da Fig. 109 é obtusângulo, suas alturas não necessariamente estão no interior do triângulo, como veremos nos passos seguintes.

Passo 1: Imagine o desenho pronto como o da Fig. 110.

Figura 110 – Triângulo **ABC** com as alturas AH_1 , BH_2 e CH_3 traçadas

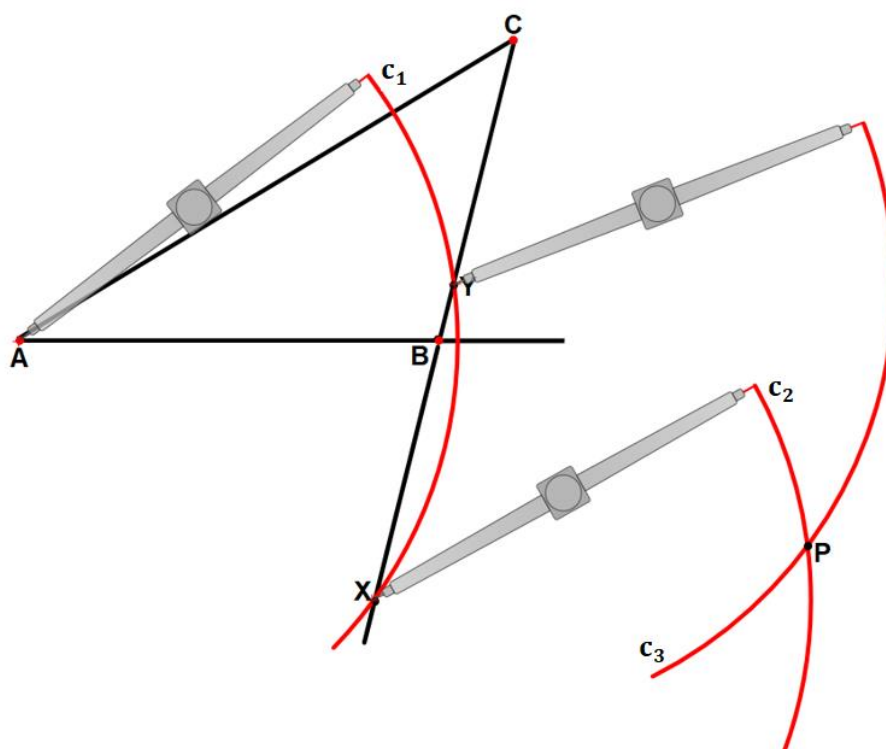


Fonte: Elaboração própria

A Fig. 110 sugere os prolongamentos dos lados **AB** e **BC** do triângulo **ABC**, e em seguida a construção das perpendiculares baixadas de cada vértice em relação aos seus respectivos lados opostos, como mostra as próximas etapas da construção:

Passo 2: Tomando a Fig. 109, prolongue os lados **AB** e **BC**, e em seguida, com o compasso centrado em **A**, trace um arco de circunferência c_1 interceptando a reta $\overleftrightarrow{BC}$ nos pontos **X** e **Y**. Mantendo a abertura do compasso, trace duas circunferências c_2 e c_3 de centros **X** e **Y**, respectivamente, que se cruzam no ponto **P** (Fig. 111).

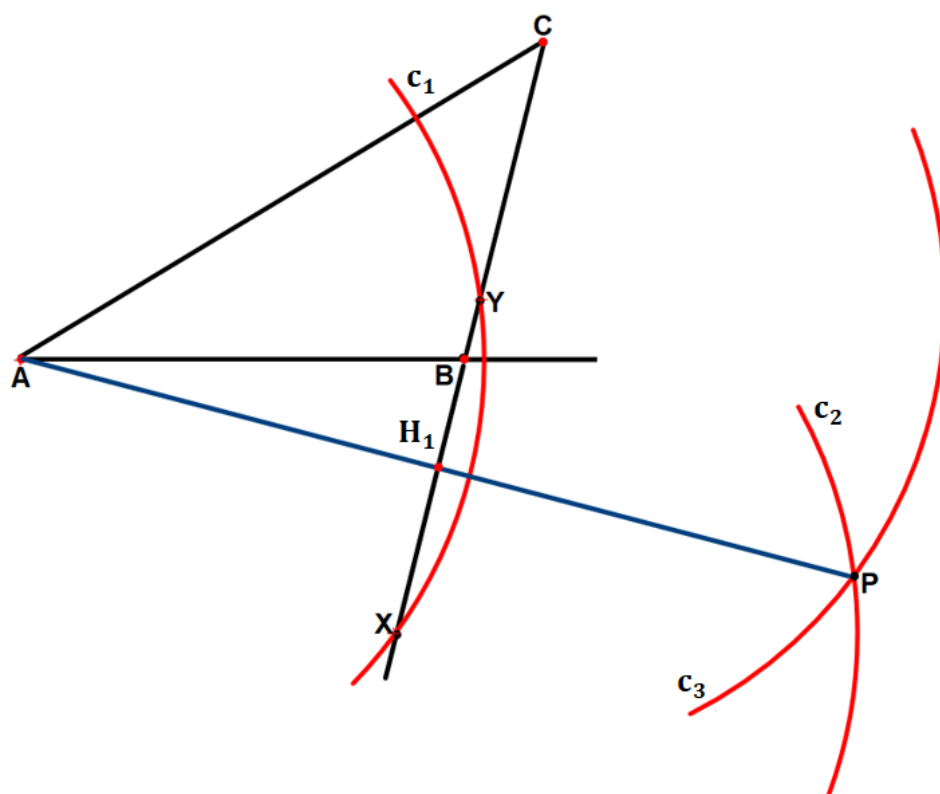
Figura 111 – Traçando arcos de circunferências c_1 , c_2 e c_3



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o auxílio de uma régua, na Fig. 111, trace o segmento **AP** que encontra o prolongamento do lado **BC** em **H₁**. Dessa forma construímos a altura **AH₁** referente ao lado **BC** do triângulo **ABC** (Fig. 112).

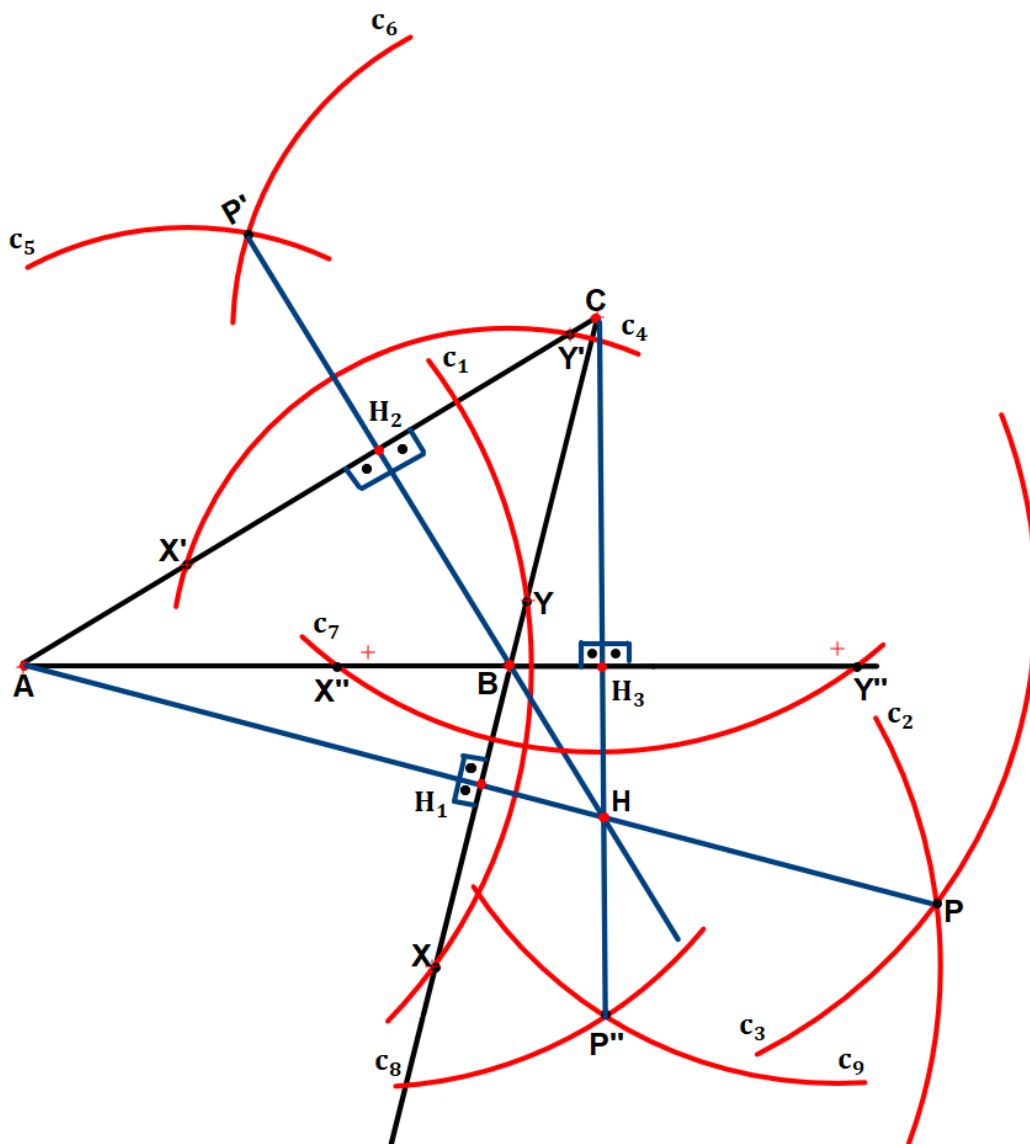
Figura 112 – Triângulo **ABC** com altura **AH₁** traçada



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Tomando os outros dois vértices **B** e **C** do triângulo da Fig. 112 e seguindo os passos 2 e 3 de maneira análoga, constrói-se as alturas **BH₂** e **CH₃** como representado na Fig. 113.

Figura 113 – Traçando as alturas **BH₂** e **CH₃**

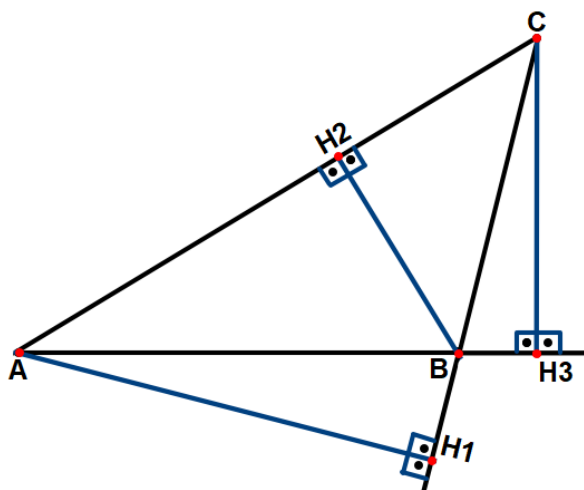


Fonte: Elaboração própria

Observe na Fig. 113 que as retas suportes das três alturas; $\overrightarrow{AH_1}$, $\overrightarrow{BH_2}$ e $\overrightarrow{CH_3}$ se encontraram num mesmo ponto **H**.

Passo 5: Apagando convenientemente alguns elementos traçados, obtemos o triângulo **ABC** com suas alturas AH_1 , BH_2 e CH_3 . É interessante notar que as alturas de um triângulo não necessariamente são internas ao mesmo, como pode-se notar nessa construção (Fig. 114).

Figura 114 – Triângulo **ABC** com suas alturas traçadas



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: No problema 2 deste material foi feita uma abordagem sobre a construção da reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto também dado. Como já justificamos naquele tópico o perpendicularismo e como H_1 , H_2 e H_3 , na Fig. 114, são os pés das perpendiculares baixadas dos seus respectivos vértices, temos então que estas alturas estão bem definidas. No **PROBLEMA 28** mostramos que as três alturas de um triângulo se encontraram num mesmo ponto, denominado ortocentro do triângulo **ABC**. Voltando a Fig. 113, temos que o ponto **H** de encontro das três alturas $\overrightarrow{AH_1}$, $\overrightarrow{BH_2}$ e $\overrightarrow{CH_3}$ é o ortocentro do triângulo **ABC**.

6. CONSTRUÇÕES SUGERIDAS PARA O 2º ANO DO ENSINO MÉDIO

Iniciamos esta seção mostrando como dividir um segmento dado em partes iguais, utilizando apenas o compasso. Vejamos no problema seguinte:

PROBLEMA 18: Dado um segmento arbitrário **AB**, divida-o em 5 partes iguais (Fig. 115).

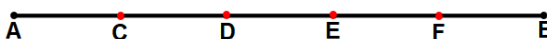
Figura 115 – Segmento AB



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, tal como na Fig. 116.

Figura 116 – Segmento AB dividido em 5 partes iguais $AC \equiv CD \equiv DE \equiv EF \equiv FB$

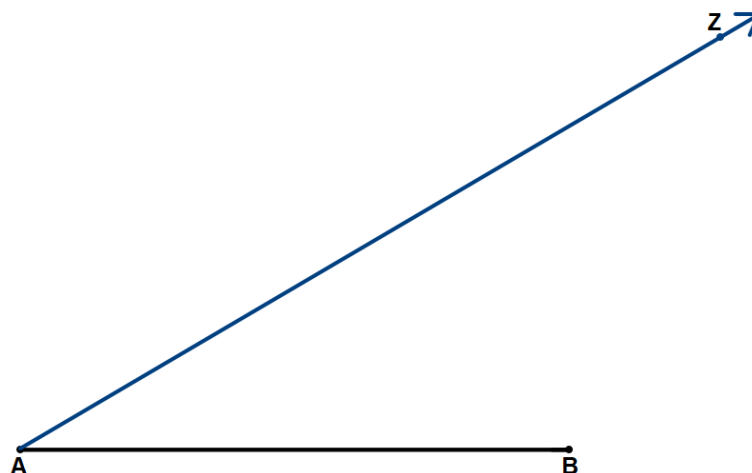


Fonte: Elaboração própria

A primeira ideia que vem ao pensar na solução deste problema, é dividi-lo igualmente utilizando uma régua. Porém nem sempre é trivial dividir um segmento em partes iguais com o uso da régua, pois as medidas dos segmentos não são necessariamente inteiras. Com isso, a proposta deste problema é utilizar somente o compasso como instrumento de medição, como pode ser visto nos passos seguintes:

Passo 2: Tome o segmento **AB** e trace uma semirreta **AZ**, conforme a Fig. 117.

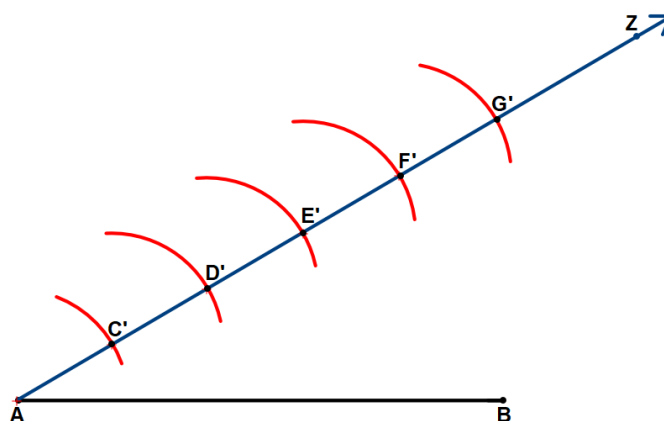
Figura 117 – Segmento AB e semirreta AZ



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Na Fig. 117, com o compasso centrado em **A** e com raio **r** qualquer, marque os pontos **C', D', E', F'** e **G'** tais que $\overline{AC'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = \overline{E'F'} = \overline{F'G'} = r$, conforme a Fig. 118.

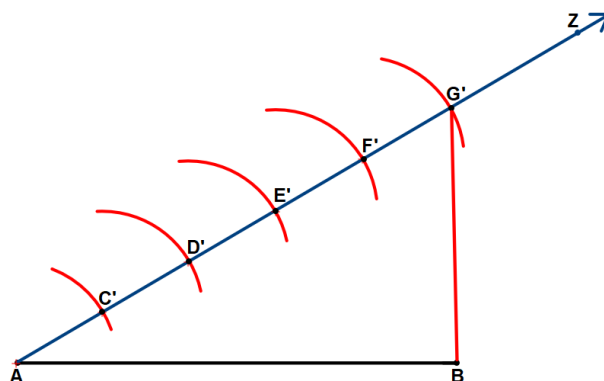
Figura 118 – Construção de segmentos congruentes sobre a semirreta **AZ**



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Fixando a Fig. 118, trace o segmento $\overline{BG'}$, como mostra a Fig. 119.

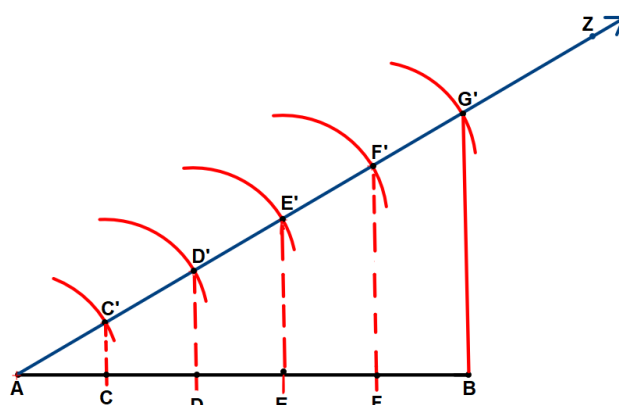
Figura 119 – Traçando o segmento $\overline{BG'}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Ainda na Fig. 119, trace retas paralelas a $\overleftrightarrow{BG'}$ passando por C', D', E' e F' . Sejam respectivamente, os pontos C, D, E e F as interseções dessas paralelas com o segmento AB . Temos então que $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$, obtendo a divisão do segmento AB em partes iguais como desejado (Fig. 120).

Figura 120 – Divisão do segmento AB em cinco partes iguais



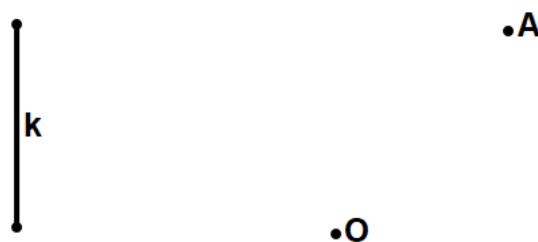
Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Na Fig. 120, os triângulos $\triangle ACC'$, $\triangle ADD'$, $\triangle AEE'$, $\triangle AFF'$ e $\triangle ABG'$ são semelhantes entre si pelo caso de semelhança ângulo, ângulo (AA). Fazendo a prova para os triângulos $\triangle ACC'$ e $\triangle ADD'$ e considerando de maneira análoga para os demais triângulos, temos que o ângulo $\hat{A}$ é comum aos dois triângulos e pelo fato do paralelismo de $\overleftrightarrow{CC'}$ e $\overleftrightarrow{DD'}$ (Por construção), os ângulos $\hat{AC'C}$ e $\hat{AD'D}$ são correspondentes, e portanto $\hat{AC'C} \equiv \hat{AD'D}$. Por semelhança de triângulos os lados desses triângulos são proporcionais, ou seja, $\frac{\overline{AC'}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{DD'}}$ (I), mas $\overline{AD'} = 2 \cdot \overline{AC'}$ (por

construção), substituindo em (I) vem que $\frac{\overline{AC'}}{\overline{AD'}} = \frac{\overline{AC'}}{2 \cdot \overline{AC'}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{DD'}}$, da igualdade $\frac{1}{2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$, resulta que $\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AC}$, mas $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD}$, com isso, $\overline{AC} = \overline{CD}$, como queríamos provar.

PROBLEMA 19: Construa com um compasso uma circunferência de centro **O** e passando pelo ponto **A**. Em seguida, marque sobre a mesma todos os possíveis pontos **B** para os quais a corda **AB** tenha o comprimento **k** dado, conforme a Fig. 121.

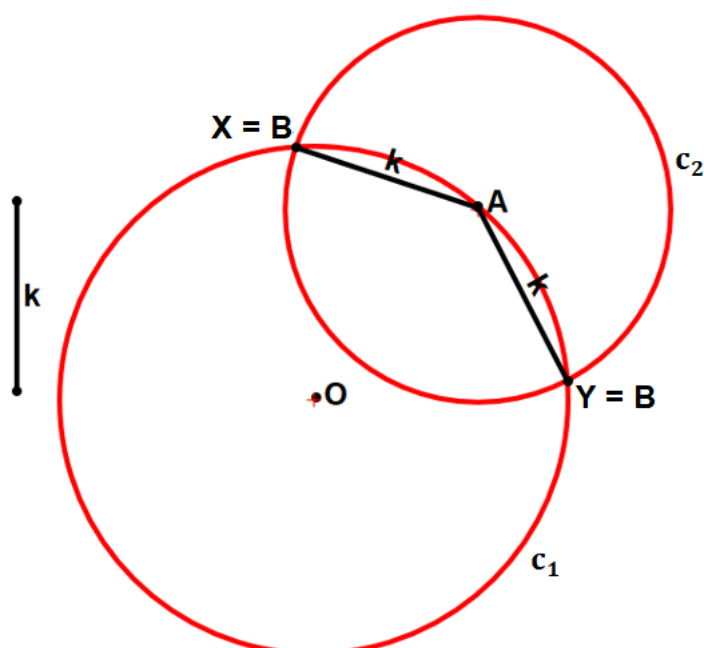
Figura 121 – Segmento de medida **k** e pontos **O** e **A** dados



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Uma ilustração do desenho pronto está na Fig. 122.

Figura 122 – Possíveis posições do ponto **B**

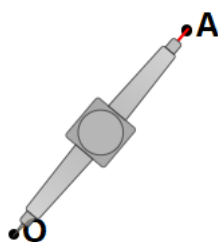


Fonte: Elaboração própria

A ilustração da Fig. 122 é intuitiva, uma vez que são pedidos a construção de uma circunferência de centro **O** e passando por **A**, e a possível posição de um ponto **B**, tal que a corda **AB** tenha medida **k**. Neste contexto, pensa-se numa circunferência de centro **A** e raio **k**. As interseções das circunferências c_1 e c_2 são justamente as possíveis posições do ponto **B**, uma vez que $\overline{AX} = \overline{AY} = \overline{AB} = k$.

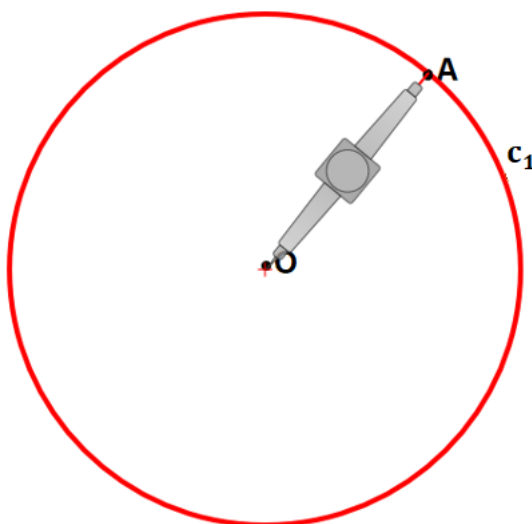
Passo 2: Fixando as informações da Fig. 121, com o compasso centrado em **O** e abertura $\overline{OA}$ (Fig. 123), trace uma circunferência c_1 (Fig. 124).

Figura 123 – Compasso com abertura $\overline{OA}$



Fonte: Elaboração própria

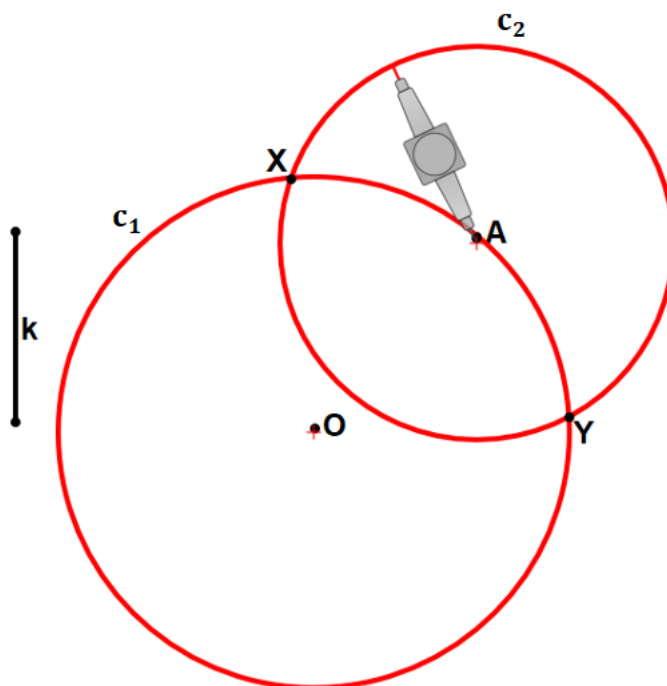
Figura 124 – Traçando a circunferência c_1 de centro **O** e raio $\overline{OA}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso com abertura **k** (Fig. 121), trace uma circunferência c_2 de centro **A** e raio **k** encontrando c_1 nos pontos **X** e **Y** (Fig. 125).

Figura 125 – Traçando a circunferências c_2 de centro **A** e raio **k**

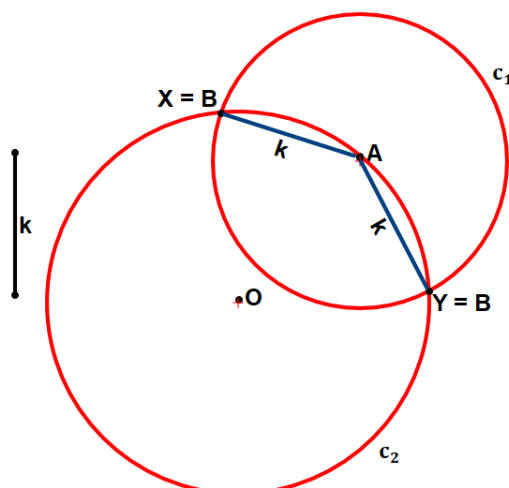


Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Os pontos **X** e **Y** da Fig. 125 são justamente as posições possíveis do ponto **B** procurado.

Justificativa: Como $\overline{XA} = \overline{YA} = k$ (Fig. 126), podemos concluir que $X = B$ ou $Y = B$, ou seja, **XA** e **YA** são as duas cordas **AB** possíveis.

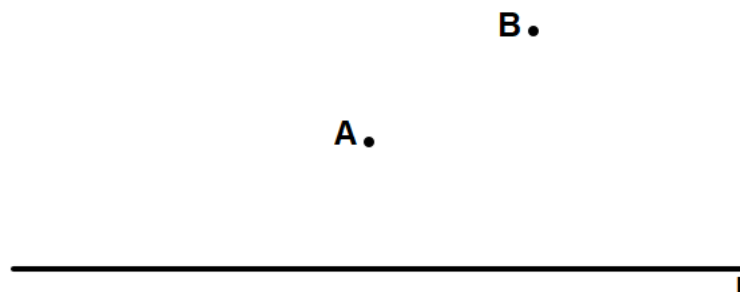
Figura 126 – Traçando os segmentos **AX** e **AY** de medida **k**



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 20: Construa com régua e compasso o ponto $P \in r$ para o qual a soma $\overline{PA} + \overline{PB}$ seja a menor possível. Os pontos A , B e a reta r são dados na Fig. 127.

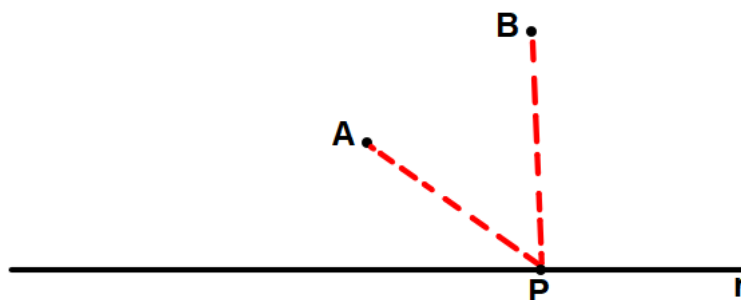
Figura 127 – Reta r e pontos A e B



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, como na Fig. 128.

Figura 128 – Reta r e segmentos AP e BP traçados

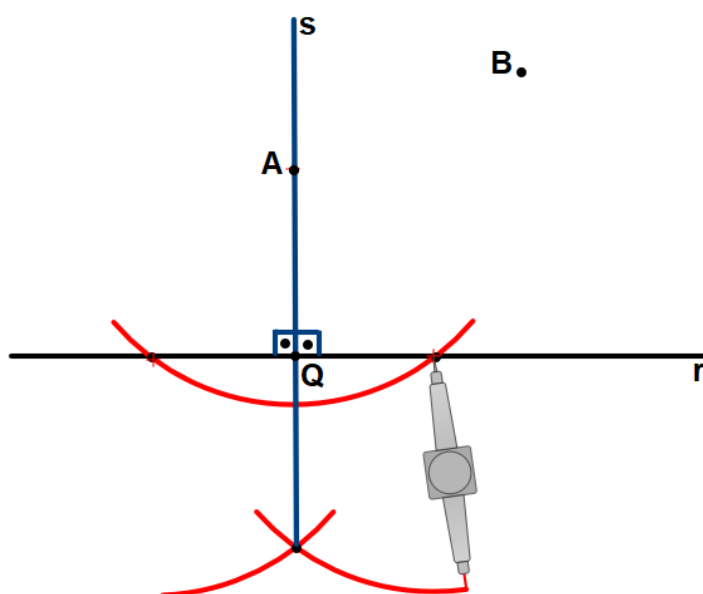


Fonte: Elaboração própria

Essa construção não é intuitiva por se tratar de menor distância. No entanto, é possível esboçar seu entendimento por meio da Fig. 128, uma vez que a posição do ponto P é discutível, pois devemos ter $\overline{PA} + \overline{PB}$ menor possível. Os passos seguintes mostram o desenvolvimento dessa construção.

Passo 2: A partir da Fig. 127, construa o ponto A' simétrico de A em relação à reta r . Pontos simétricos, são pontos que tem a propriedade de serem equidistantes da reta r (no caso), ou seja, $d_{A,r} = d_{A',r}$. Sabendo disso, construa uma reta s perpendicular à r passando pelo ponto A de acordo com os passos do **PROBLEMA 2** desse material. Seja Q o ponto de interseção das retas r e s (Figura 129).

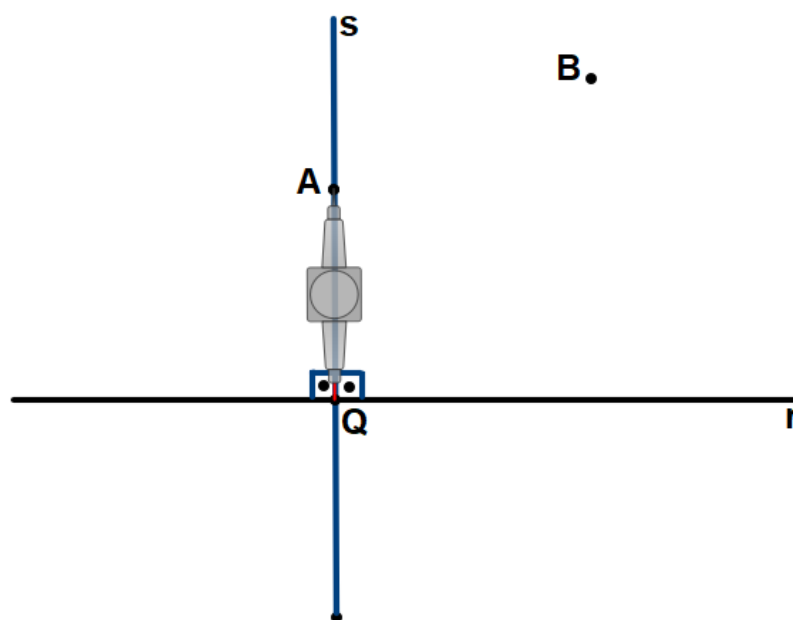
Figura 129 – Construção da reta s perpendicular à r passando por A



Fonte: Elaboração própria

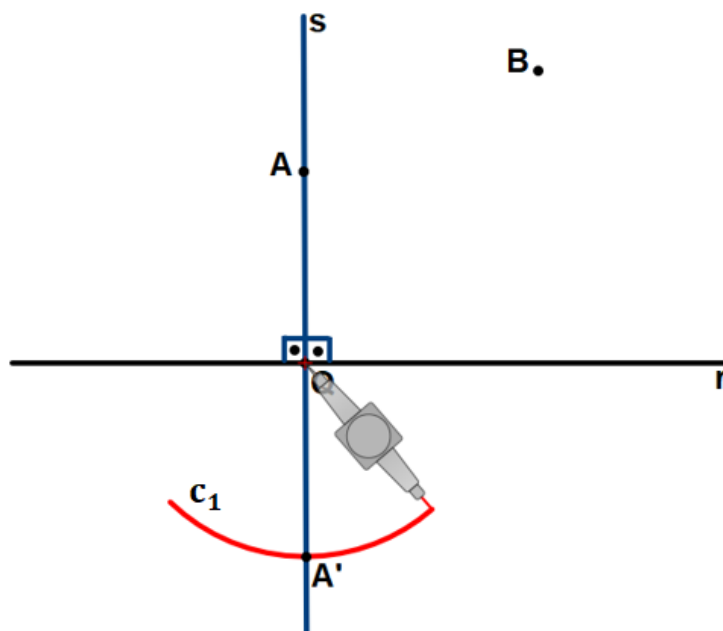
Passo 3: Com o compasso centrado em Q e com abertura $\overline{QA}$ (Fig. 130) trace um arco de circunferência c_1 interceptando a reta s em A' (Fig. 131) que é o ponto simétrico de A em relação à reta r .

Figura 130 – Compasso com abertura $\overline{QA}$



Fonte: Elaboração própria

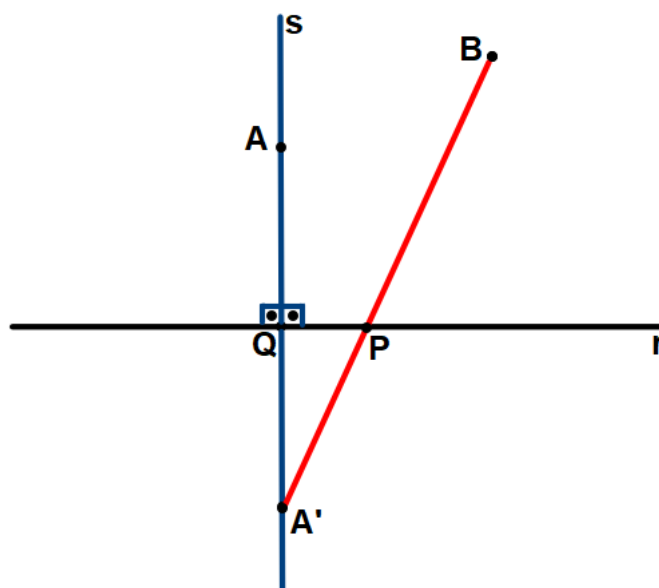
Figura 131 – Marcando o ponto A' simétrico de A em relação à reta r



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o auxílio de uma régua, trace o segmento $A'B$. O ponto P procurado é o ponto de interseção do segmento $A'B$ com a reta r (Fig. 132).

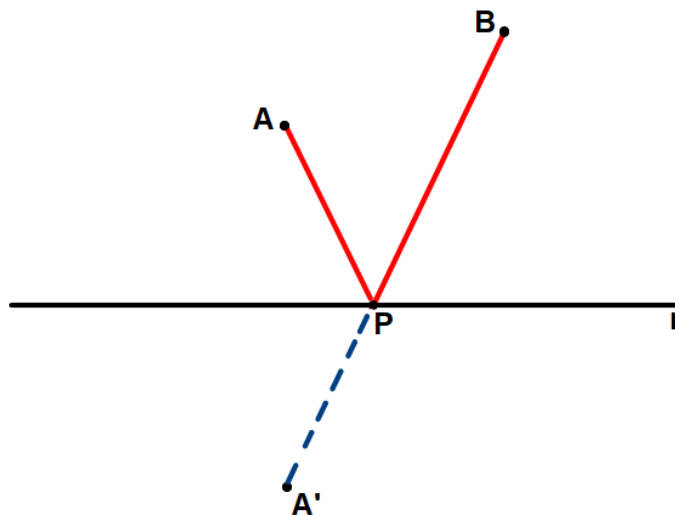
Figura 132 – Construção do segmento $A'B$



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Apagando convenientemente alguns elementos traçados na Fig. 132 e com o auxílio de uma régua, trace o segmento $\overline{PA}$. Temos então que $\overline{PA} + \overline{PB}$ é a menor distância possível de A para B passando pela reta r (Fig. 133).

Figura 133 – Construção do segmento $\overline{AP}$



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Na Fig. 134, seja Q um ponto qualquer sobre a reta r , tal que $Q \neq P$. Note que a reta r é a mediatriz do segmento $\overline{AA'}$ e por consequência $\overline{PA} = \overline{PA'}$ e $\overline{QA} = \overline{QA'}$. Partido da soma dos segmentos $\overline{PA} + \overline{PB}$, note que:

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA'} + \overline{PB} = \overline{A'B}. \quad \text{Eq. (1)}$$

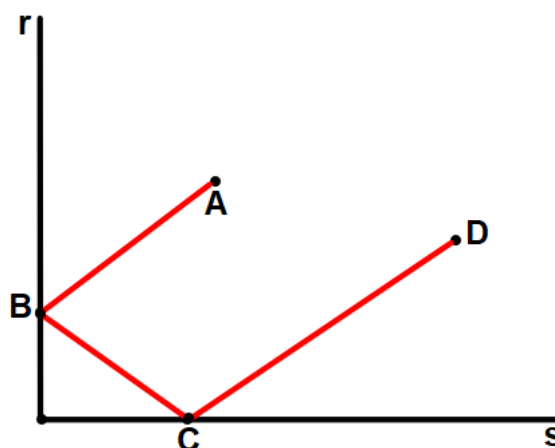
Segundo Muniz Neto (2013, p. 60), “Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados”. Essa relação é conhecida como desigualdade triangular. Sendo assim, no triângulo $A'BQ$, por desigualdade triangular, temos:

$\overline{A'B} < \overline{QB} + \overline{QA'}$, mas $\overline{QA'} = \overline{QA}$ (r é mediatriz de $\overline{AA'}$), logo

$$\overline{A'B} < \overline{QB} + \overline{QA}. \quad \text{Eq. (2)}$$

De (1) e (2) podemos concluir que $\overline{PA} + \overline{PB} < \overline{QA} + \overline{QB}$, ou seja, para qualquer outro ponto $Q \neq P$ sobre a reta r , teremos que a soma $\overline{PA} + \overline{PB}$ será sempre a menor possível.

Figura 134 – Traçando segmentos

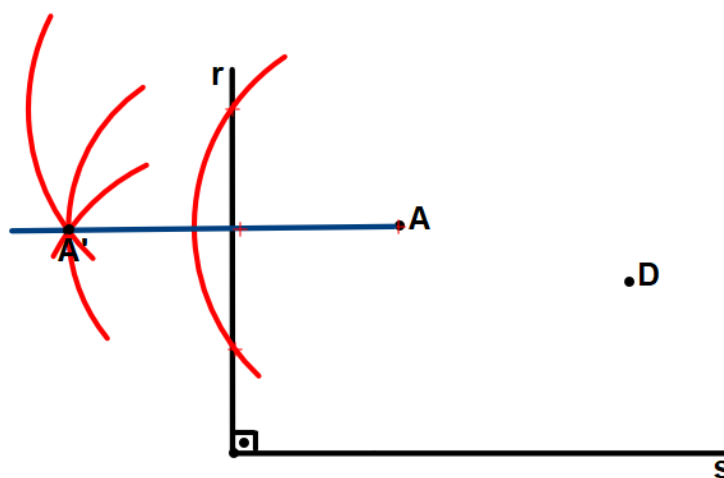


Fonte: Elaboração própria

A ideia da Fig. 136 é marcar os pontos simétricos A' e D' de A e D , respectivamente, em relação às semirretas r e s , também respectivamente. Em seguida traçar uma reta com extremidades nos pontos simétricos A' e D' encontrando os pontos B e C de interseção com as semirretas r e s , respectivamente. Vejamos nos passos seguintes o desenvolvimento desta construção:

Passo 2: Como visto no **PROBLEMA 20**, marque o ponto A' simétrico de A em relação à reta r (Fig. 137).

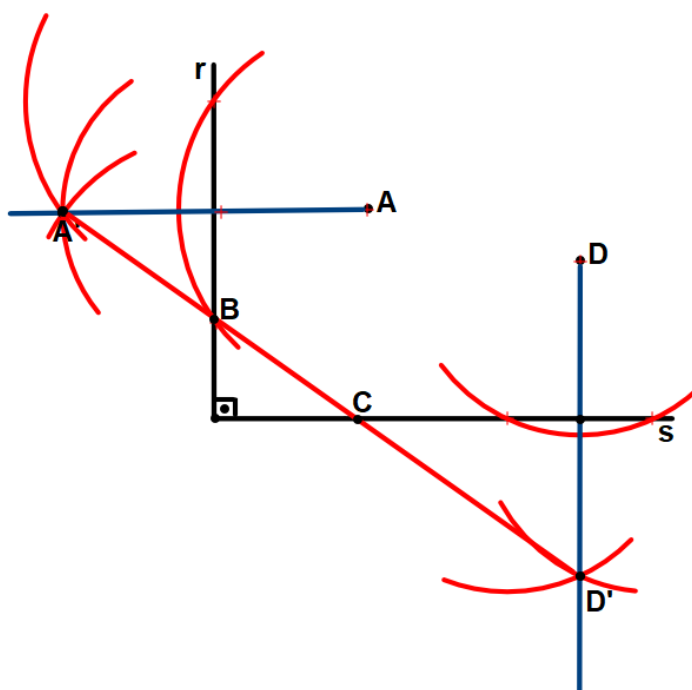
Figura 137 – Traçando o ponto A' simétrico de A em relação à reta r



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Trace o ponto D' simétrico de D em relação à semirreta s . Em seguida trace o segmento $A'D'$ que intersectam as semirretas r e s em B e C respectivamente (Fig. 138).

Figura 138 – Traçando o segmento $A'D'$



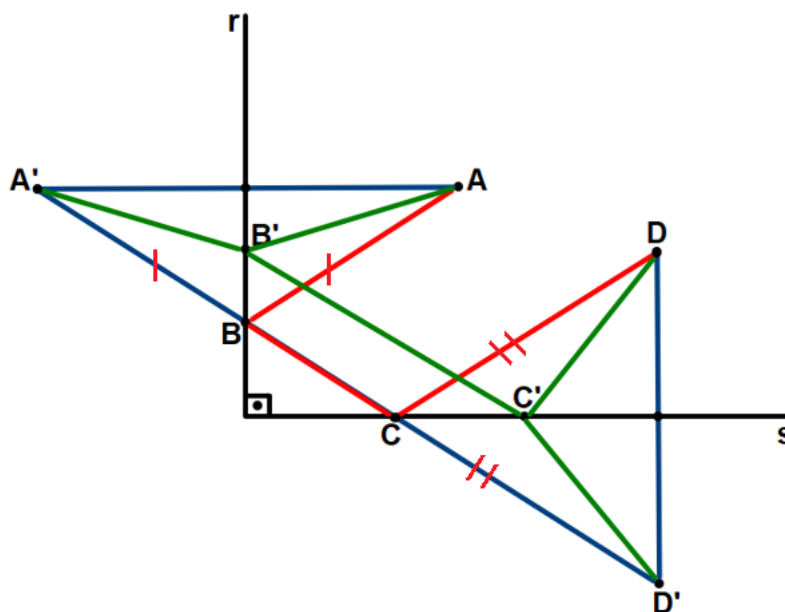
Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Apagando convenientemente alguns elementos traçados na figura 138, obtemos as posições de B e C que satisfazem o problema (Fig. 139).

Figura 139 – Segmentos AB , BC e CD

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ será sempre a menor, justificando assim a resolução do **PROBLEMA 21**.

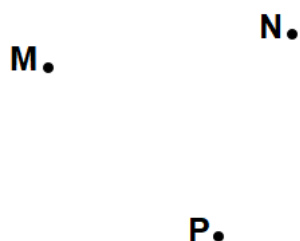
Figura 140 – Traçando segmentos



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 22: Construa com régua e compasso um triângulo **ABC** conhecidas as posições dos pontos médios **M**, **N** e **P** dos lados **AB**, **AC** e **BC**, respectivamente, conforme a Fig. 141.

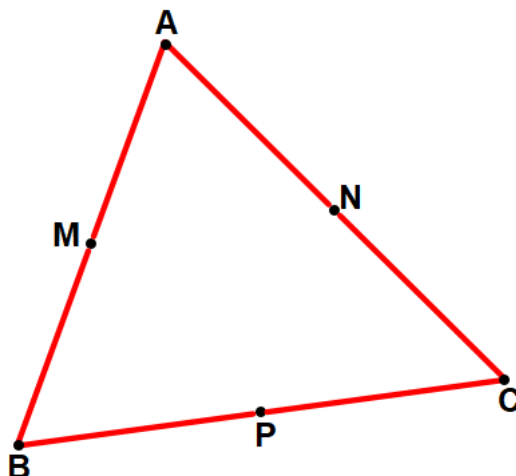
Figura 141 – Pontos **M**, **N** e **P**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Supondo o desenho pronto, temos o que mostra a Fig. 142.

Figura 142 – Triângulo ABC e os respectivos pontos médios de seus lados

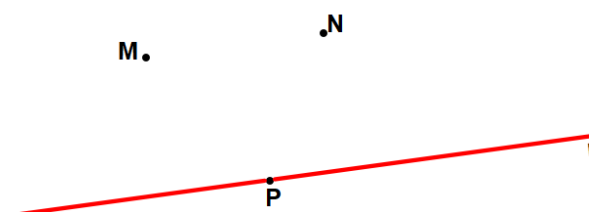


Fonte: Elaboração própria

A ideia desse problema é traçar retas paralelas por **M**, **N** e **P** em relação aos segmentos **NP**, **MP** e **MN**, respectivamente, de tal forma que as interseções dessas retas traçadas resultem exatamente nos três vértices **A**, **B** e **C** do triângulo **ABC**, como veremos nos passos seguintes:

Passo 2: Trace pelo ponto **P** a reta **r** paralela a $\overleftrightarrow{MN}$, conforme os passos descritos no **PROBLEMA 1** desse material. (Fig. 143).

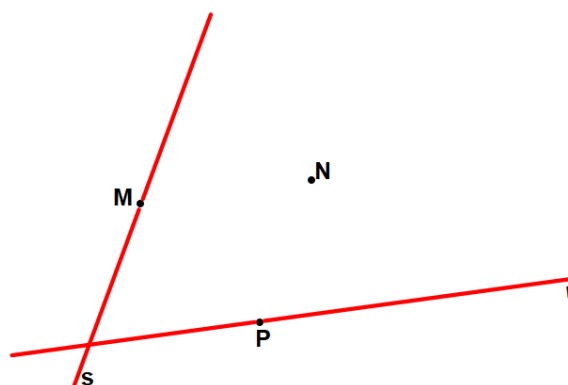
Figura 143 – Reta **r** paralela a $\overleftrightarrow{MN}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Trace pelo ponto **M** a reta **s** paralela a $\overleftrightarrow{NP}$ (Fig. 144).

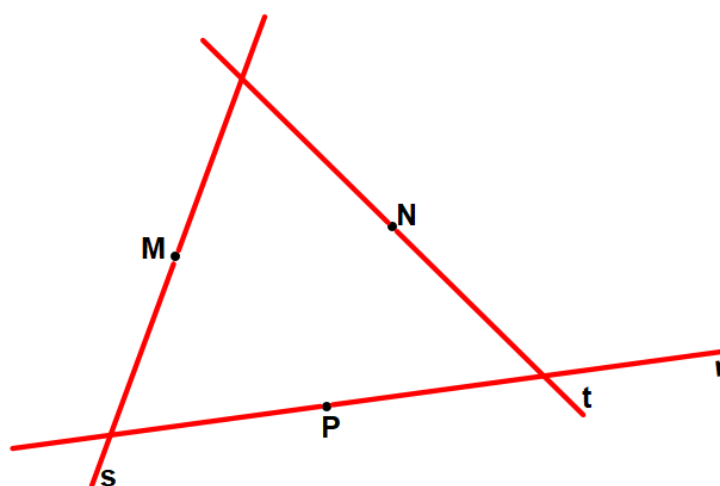
Figura 144 – Traçando a reta **s** passando por **M**



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Trace pelo ponto **N** a reta **t** paralela a $\overleftrightarrow{MP}$ (Fig. 145).

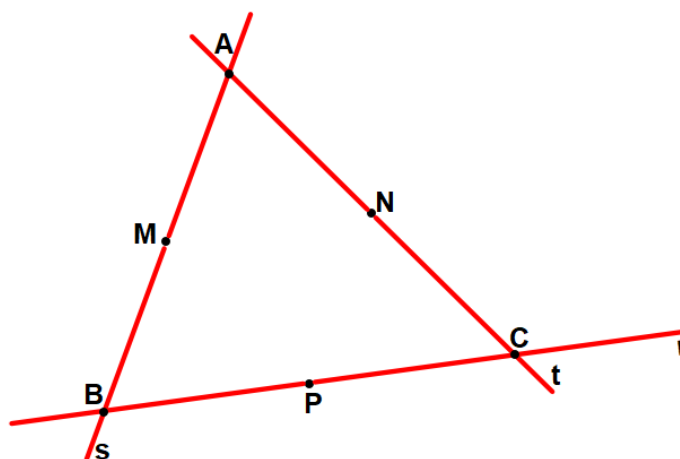
Figura 145 – Traçando a reta **t** passando por **N**



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Marque o ponto **A** de interseção das retas **s** e **t**, **B** de interseção das retas **s** e **r** e **C** de interseção das retas **r** e **t**. Com isso temos o triângulo **ABC** procurado em que **M**, **N** e **P** são pontos médios dos lados **AB**, **AC** e **BC**, respectivamente (Fig. 146).

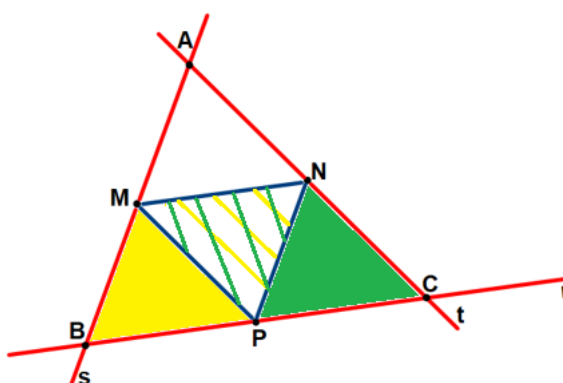
Figura 146 – Triângulo **ABC** com os respectivos pontos médios de seus lados



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Na Fig. 146, traçando os segmentos **MN** e **NP**, obtemos o paralelogramo **MNPB** que possui os lados paralelos, pois $\overline{MN} \parallel \overline{BP}$ e $\overline{MB} \parallel \overline{NP}$ (por construção). Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, vem que $\overline{MN} = \overline{BP}$. De maneira análoga, traçando o segmento **MP** na Fig. 146 obtemos outro paralelogramo **MNCP**, pois $\overline{MN} \parallel \overline{PC}$ e $\overline{MP} \parallel \overline{NC}$ (por construção). Daí obtemos que $\overline{MN} = \overline{PC}$. Como $\overline{MN} = \overline{BP}$ e $\overline{MN} = \overline{PC}$, então $\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$, mostrando que **MN** é base média do triângulo **ABC**, segundo o teorema da base média de um triângulo (MUNIZ NETO, 2013, p. 71), e, portanto, **M** e **N** são pontos médios dos lados **AB** e **AC**, respectivamente. Como $\overline{BC} = \overline{BP} + \overline{PC}$ e $\overline{BP} = \overline{PC}$ vem que **P** é ponto médio do lado **BC**, finalizando assim nossa justificativa (Fig. 147).

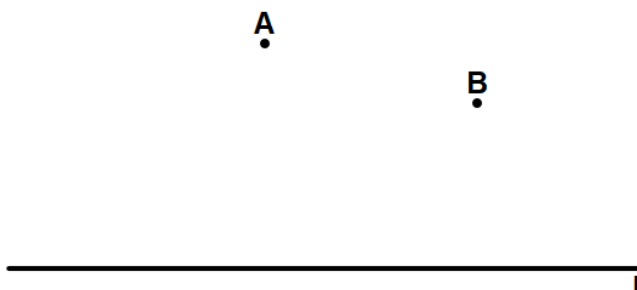
Figura 147 – Traçando os segmentos **MN**, **NP** e **MP**



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 23: Construa com régua e compasso um círculo passando pelos pontos **A** e **B** e tendo seu centro sobre a reta **r**, de acordo com a Fig. 148.

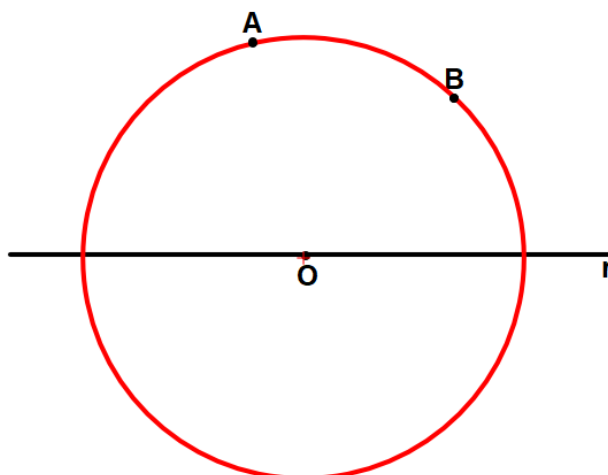
Figura 148 – Reta **r** e pontos **A** e **B**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: A Fig. 149 ilustra o desenho pronto.

Figura 149 – Circunferência de centro **O** e raios $\overline{OB} = \overline{OA}$

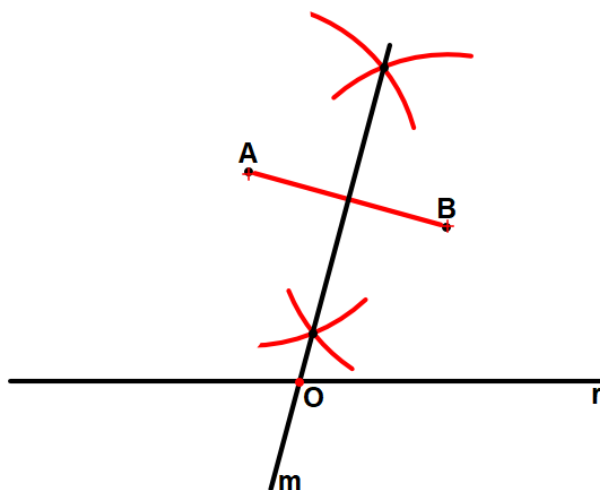


Fonte: Elaboração própria

A Fig. 149 sugere encontrarmos um ponto $O \in r$ tal que $d_{O,A} = d_{O,B}$, ou seja, um ponto **O** que seja equidistante de **A** e de **B**. A mediatriz do segmento **AB** satisfaz essa propriedade, como veremos nos seguintes passos:

Passo 2: Fixando a Fig. 148 e voltando aos passos descritos no **PROBLEMA 3** desse material, trace o segmento **AB** e em seguida a mediatriz **m** de **AB**, intersectando a reta **r** em **O** (Fig. 150).

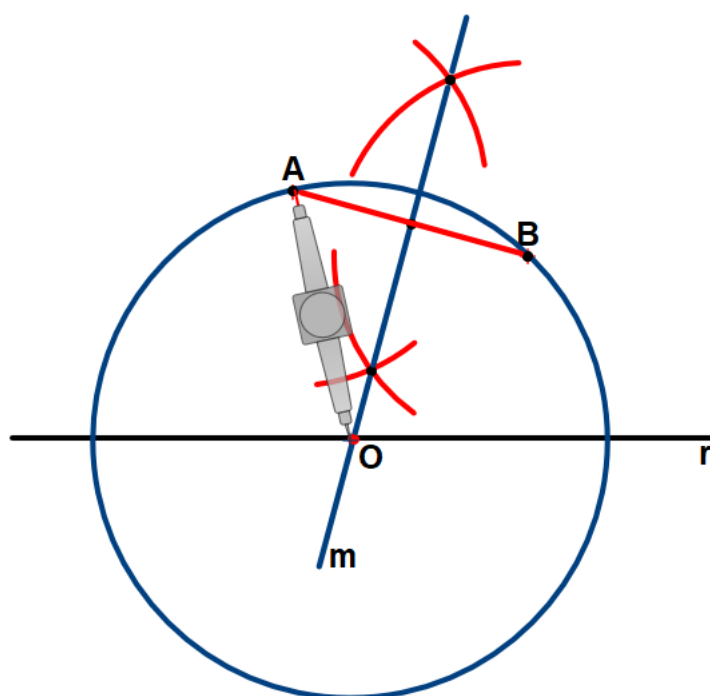
Figura 150 – Traçando a mediatriz m do segmento AB



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: A partir da Fig. 150, com o compasso centrado em O e com abertura $\overline{OA}$, trace uma circunferência de centro O e raio $\overline{OA} = \overline{OB}$ passando pelos pontos A e B (Fig. 151).

Figura 151 – Traçando a circunferência de centro O e raio $\overline{OA} = \overline{OB}$ passando pelos pontos A e B



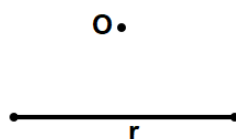
Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Na Fig. 151 temos que $\overline{OA} = \overline{OB}$, pois m é mediatriz do segmento AB . Assim $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são raios da circunferência de centro O que passa por A e B .

Os problemas seguintes abordarão a construção de alguns **LG'S** que são muito importantes para a construção dos pontos notáveis de um triângulo que faremos mais adiante.

PROBLEMA 24: Construa com régua e compasso o **LG** dos pontos do plano que estão à distância r do ponto O , dados na Fig. 152.

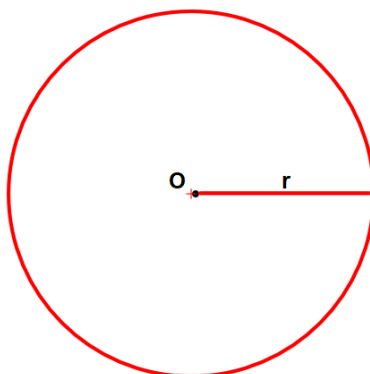
Figura 152 – Ponto O e reta r



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, conforme a Fig. 153.

Figura 153 – Circunferência de centro O e raio r

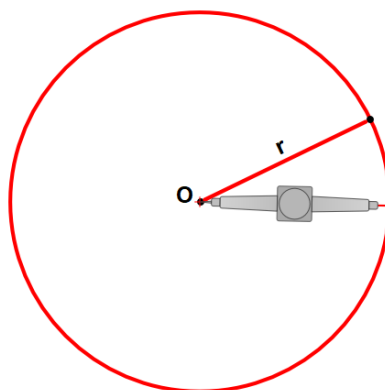


Fonte: Elaboração própria

A ideia desse problema é imaginar todos os pontos do plano que estão a uma distância r do ponto O . A circunferência de centro O e raio r da Fig. 153 tem essa propriedade, portanto, o próximo passo descreve como obter essa circunferência:

Passo 2: Com auxílio do compasso com abertura r , trace uma circunferência de centro O e raio r .

Figura 154 – Circunferência de centro O e raio r



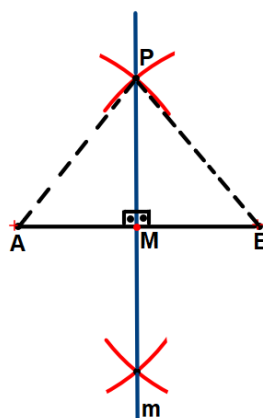
Fonte: Elaboração própria

Portanto o **LG** dos pontos pedidos é a circunferência de centro O e raio r .

PROBLEMA 25: Construa com régua e compasso o **LG** dos pontos do plano que equidistam dos extremos **A** e **B**.

Como visto no **PROBLEMA 3**, esse **LG** trata-se da mediatriz de um segmento, pois todos os pontos pertencentes a mediatriz m de um segmento **AB** são equidistantes dos extremos **A** e **B**. Como já vimos sua construção, faremos a construção sem os passos, apenas para a justificação. (Fig. 155).

Figura 155 – Mediatriz m do segmento **AB**

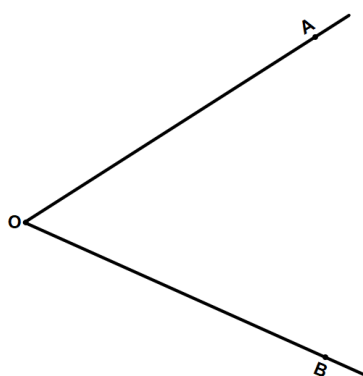


Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Fixando a figura 155, dado um ponto P qualquer pertencente a mediatriz m , vamos provar que para todo $P \in m$ teremos que $\overline{PA} = \overline{PB}$, constituindo-se o **LG** procurado. Pela definição de mediatriz, M é ponto médio de AB e com isso $\overline{AM} = \overline{BM}$. Fixemos agora os triângulos PAM e PBM que são congruentes pelo caso **LAL**, pois $\overline{AM} = \overline{BM}$, PM é lado comum e $\widehat{PMA} = \widehat{PMB} = 90^\circ$. Daí vem que $\overline{PA} = \overline{PB}$ como queríamos provar.

PROBLEMA 26: Construa com régua e compasso o **LG** dos pontos do plano que equidistam dos lados OA e OB do ângulo $A\hat{O}B$ da Fig. 156.

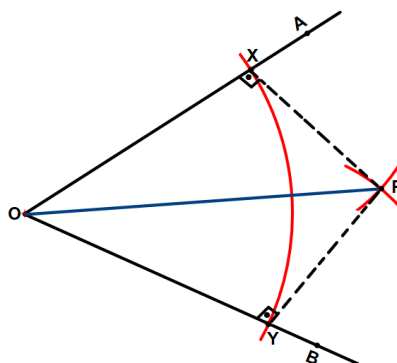
Figura 156 – Ângulo $A\hat{O}B$



Fonte: Elaboração própria

Como visto no **PROBLEMA 4**, esse **LG** trata-se da bissetriz de um ângulo que é formado pelo conjunto dos pontos que equidistam de seus lados. Como já vimos sua construção, faremos a construção sem os passos, apenas para a justificação (Fig. 157).

Figura 157 – Construção da bissetriz OP do ângulo $A\hat{O}B$



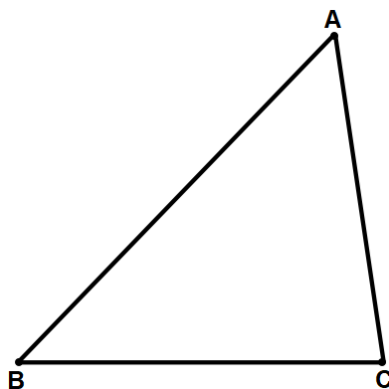
Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Fixando a Fig. 157, seja OP a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, X e Y os pés das perpendiculares baixadas de P aos lados OA e OB respectivamente. Provemos que para todo ponto $P \in OP$ teremos que as distâncias aos lados do ângulo são equivalentes, ou seja $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$. Fixando os triângulos OXP e OYP , eles são congruentes pelo caso LAA_0 , uma vez que OP é lado comum, $O\hat{X}P = O\hat{Y}P = 90^\circ$ e $X\hat{O}P = Y\hat{O}P$ (Por construção). A partir disso, concluímos que $\overline{XP} = \overline{YP}$ o que implica que a $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$ para todo ponto P pertencente a bissetriz OP , sendo portanto o **LG** procurado.

Nesse problema faremos a construção do circuncentro de um triângulo e, portanto, é importante defini-lo como sendo o ponto de encontro das três mediatrizes de seus lados, como diz Muniz Neto (2013, p. 98): “Em todo triângulo, as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto, o circuncentro do mesmo.”

PROBLEMA 27: Construa, com régua e compasso, o circuncentro do triângulo **ABC** dado na Fig. 158.

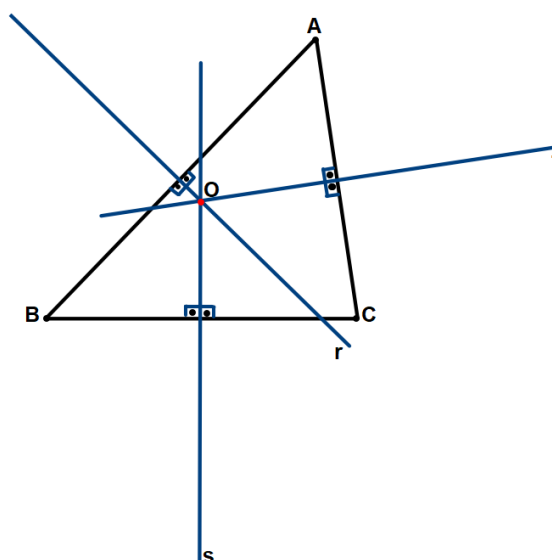
Figura 158 – Triângulo ABC



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, como na Fig. 159.

Figura 159 – Triângulo ABC com as mediatrizes r , s e t dos lados AB , BC e AC , respectivamente

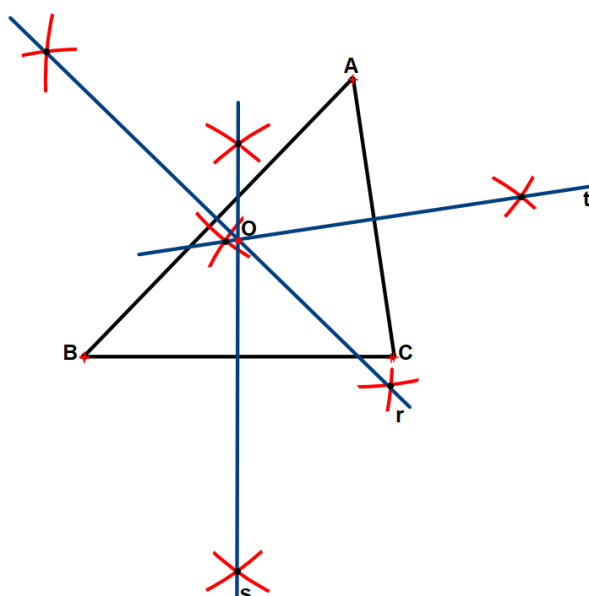


Fonte: Elaboração própria

A Fig. 159 sugere encontrarmos inicialmente as três mediatrizes referentes aos três lados do triângulo ABC, como veremos no passo seguinte:

Passo 2: Tomando a Fig. 158, construa as mediatrizes **r**, **s** e **t** dos lados **AB**, **BC** e **AC**, respectivamente, conforme os passos descritos no **PROBLEMA 3** deste material. O circuncentro do triângulo **ABC** é o ponto **O** de interseção das mediatrizes **r**, **s** e **t** (Fig. 160).

Figura 160 – Traçando as mediatrizes **r**, **s** e **t** e o circuncentro **O**



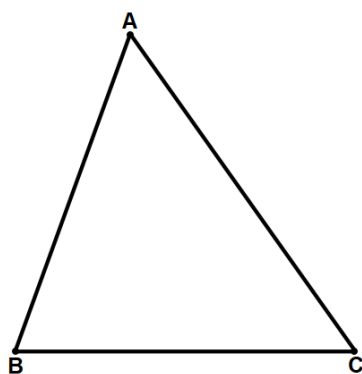
Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Na Fig. 160, provemos que o ponto **O** é realmente o ponto de interseção das três mediatrizes **r**, **s** e **t**. Pela caracterização da mediatriz de um segmento como **LG**, temos que $\overline{OA} = \overline{OB}$, pois **O** $\in$ **r**. Da mesma forma $\overline{OB} = \overline{OC}$, pois **O** $\in$ **s**. De forma análoga, $\overline{OA} = \overline{OC}$, pois **O** $\in$ **t**. Como as três retas **r**, **s** e **t** são concorrentes em um único ponto e o ponto **O** é comum as três mediatrizes, logo as três mediatrizes se cruzam no ponto **O**.

Nesse problema faremos a construção do ortocentro de um triângulo e, portanto, é importante defini-lo como sendo o ponto de encontro das três alturas relativas aos seus lados, como diz Muniz Neto (2013, p. 99): “Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto, o ortocentro do triângulo.”

PROBLEMA 28: Construa, com régua e compasso, o ortocentro do triângulo **ABC** dado na Fig. 161.

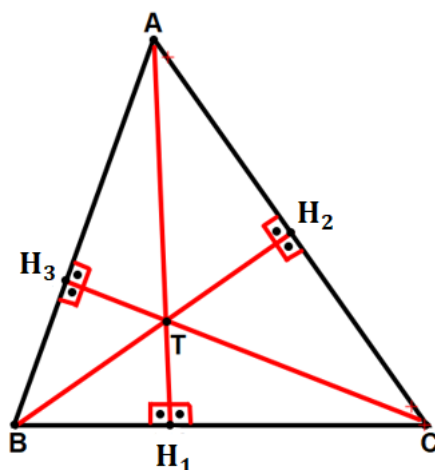
Figura 161 – Triângulo **ABC**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto (Fig. 162).

Figura 162 – Triângulo **ABC** com suas alturas **AH₁**, **BH₂** e **CH₃** traçadas

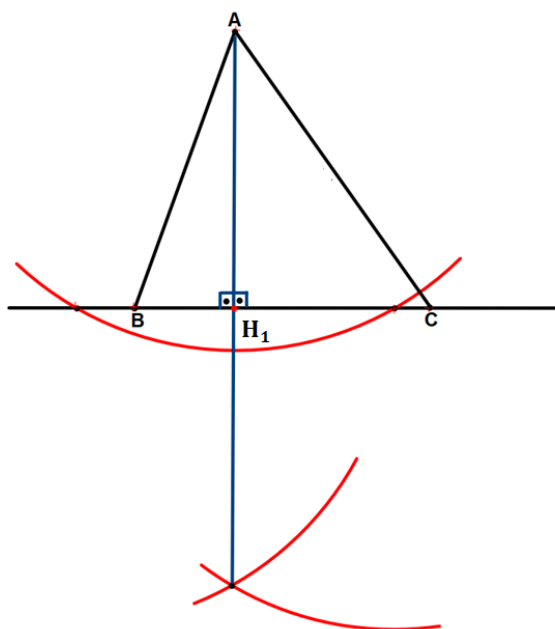


Fonte: Elaboração própria

A Fig. 162 sugere traçarmos as três alturas do triângulo ABC referentes aos seus três lados, o ortocentro será o ponto de interseção das três alturas, como veremos nos passos seguintes:

Passo 2: Como visto no **PROBLEMA 2**, já sabemos traçar uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado. Sendo assim, fixando a Fig. 161, trace a partir do vértice **A**, a altura relativa ao lado **BC** do triângulo **ABC**. Seja **H₁** o pé da perpendicular baixada do vértice **A** ao lado **BC** (Fig. 163).

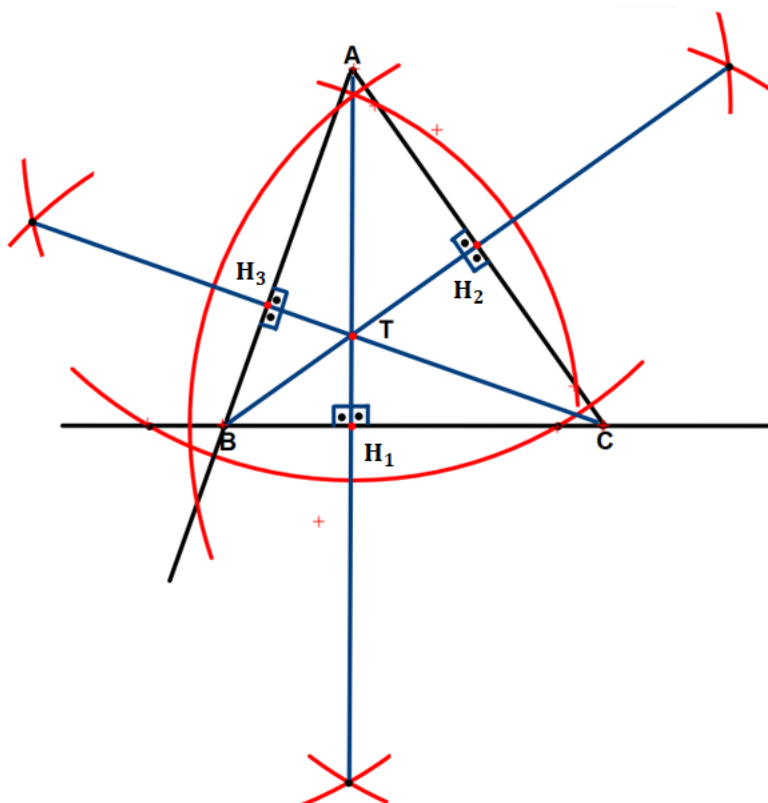
Figura 163 – Traçando a altura **AH₁** relativa ao lado **BC**



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: De maneira análoga ao passo anterior, a partir da Fig. 163, trace as alturas BH_2 e CH_3 relativas aos lados AC e AB , respectivamente, sendo H_2 e H_3 os pés das perpendiculares baixadas pelos vértices B e C aos lados AC e BC , respectivamente (Fig. 164).

Figura 164 – Traçando as alturas BH_2 e CH_3

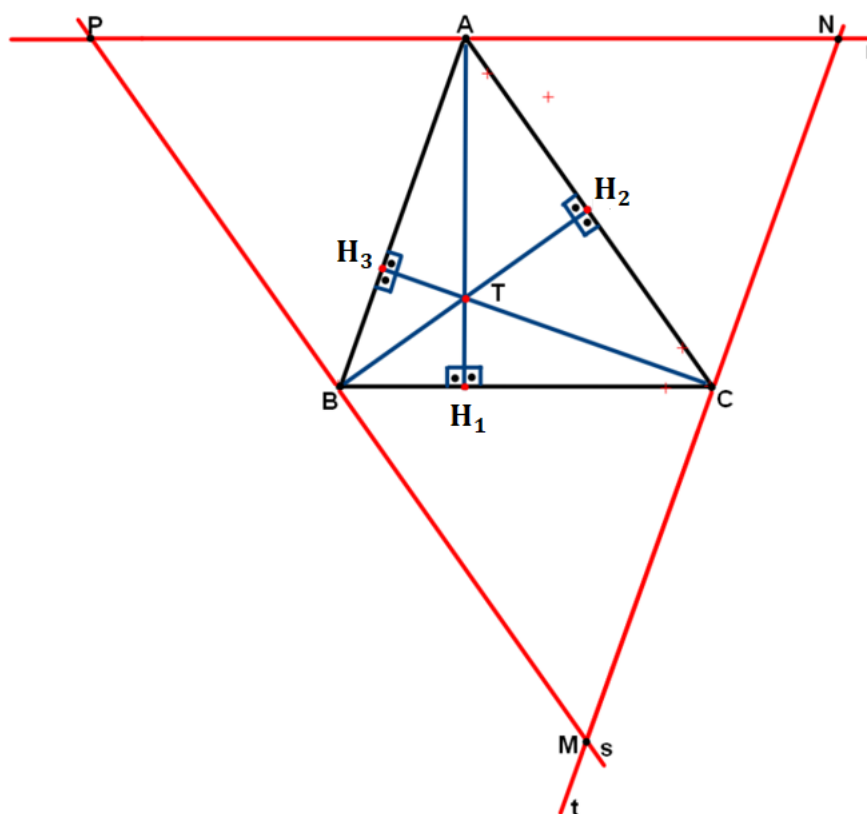


Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Fixando a Fig. 164, provemos que o ponto T é realmente o ponto de interseção das três alturas AH_1 , BH_2 e CH_3 . Trace, respectivamente, por A , B e C , retas r , s e t paralelas a BC , AC e AB , respectivamente, e seja $r \cap s = \{P\}$, $s \cap t = \{M\}$, $t \cap r = \{N\}$. Então, os quadriláteros $ABCN$ e $ABMC$ são paralelogramos, de sorte que $\overline{CN} = \overline{AB} = \overline{CM}$ e, daí, C é o ponto médio de MN . Analogamente, B é o ponto médio de MP e A é o ponto médio de NP . Por outro lado, a altura relativa à BC também é perpendicular à NP , já que as retas $\overline{BC}$ e $\overline{NP}$ são paralelas. Do mesmo modo, as alturas relativas a AC e AB são respectivamente perpendiculares a MP e MN . Segue que as alturas do triângulo ABC são as mediatrizes dos lados do triângulo MNP . Mas já provamos no **PROBLEMA 27** que as mediatrizes dos lados de um triângulo se

cruzam em mesmo ponto chamado circuncentro. Desse modo fica provado que as alturas também concorrem em um mesmo ponto **T** que é exatamente o circuncentro do triângulo **MNP** que por sua vez é o ortocentro do triângulo **ABC**. Veja na Fig. 165 um esboço da construção resultante:

Figura 165 – Traçando as retas **r**, **s** e **t** paralelas aos lados **BC**, **AC** e **AB**, respectivamente, do triângulo **ABC**

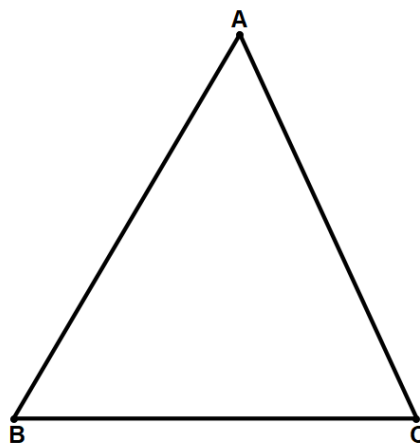


Fonte: Elaboração própria

Neste problema abordaremos a construção do incentro de um triângulo e, portanto, é importante defini-lo como sendo o ponto de encontro das três bissetrizes relativas aos seus ângulos internos. Como diz Muniz Neto (2013, p. 102): “As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto, o incentro do triângulo.”

PROBLEMA 29: Construa, com régua e compasso, o incentro do triângulo **ABC** dado na Fig. 166.

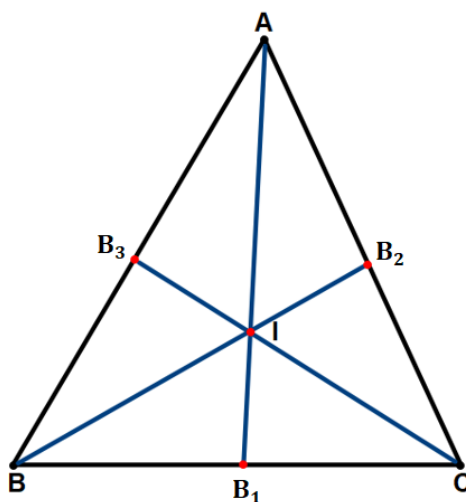
Figura 166 – Triângulo **ABC**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, tal como na Fig. 167.

Figura 167 – Triângulo **ABC** com suas bissetrizes internas **AB₁**, **BB₂** e **CB₃**

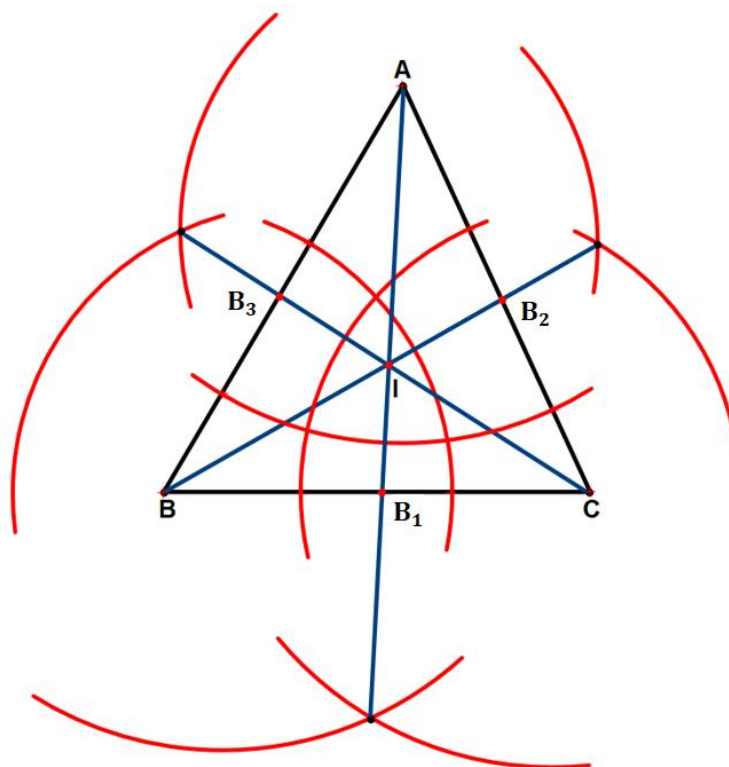


Fonte: Elaboração própria

A Fig. 167, sugere a construção das três bissetrizes dos ângulos internos do triângulo **ABC**. Veremos que essas bissetrizes se intersectam num mesmo ponto, como mostra os passos seguintes:

Passo 2: No **PROBLEMA 4**, já aprendemos a traçar a bissetriz de um ângulo dado. Sendo assim, fixando a Fig. 166, trace as bissetrizes **AB₁**, **BB₂** e **CB₃** dos ângulos internos **Â**, **Ĥ** e **Ĉ**, respectivamente. Seja **I** o ponto de concorrência dessas bissetrizes que chamaremos de incentro. Veja na Fig. 168 um esboço da construção resultante.

Figura 168 – Construção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo **ABC**



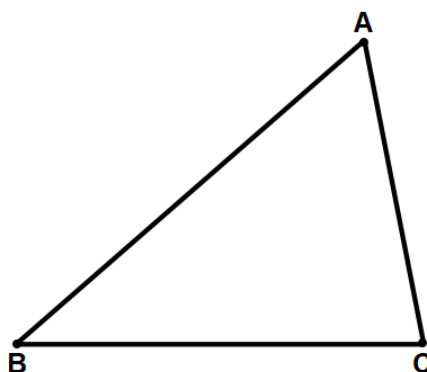
Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Na Fig. 168, provemos que o ponto **I** é realmente o ponto de interseção das três bissetrizes $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BB_2}$ e $\overrightarrow{CB_3}$. Sejam as semirretas $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BB_2}$ e $\overrightarrow{CB_3}$ bissetrizes dos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ do triângulo **ABC**. Seja **I** o ponto de interseção das semirreta $\overrightarrow{AB_1}$ e $\overrightarrow{BB_2}$. Como $I \in \overrightarrow{AB_1}$, segue da caracterização das bissetrizes como **LG** que **I** equidista dos lados **AB** e **AC** do triângulo **ABC**. De forma análoga, $I \in \overrightarrow{BB_2}$ garante que **I** equidista dos lados **AB** e **BC**. Portanto, **I** equidista de **AC** e **BC** e, usando novamente a caracterização das bissetrizes como **LG**, concluímos que **I** pertence à bissetriz do ângulo $\hat{C}$, ou seja, à semirreta $\overrightarrow{CB_3}$. Assim $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{BB_2}$ e $\overrightarrow{CB_3}$ concorrem em **I**.

No problema seguinte, faremos a construção do baricentro de um triângulo e, portanto, é importante defini-lo como sendo o ponto de encontro das três medianas relativas aos seus lados. Como diz Muniz Neto (2013, p. 73): “Em todo triângulo, as três medianas passam por um único ponto, o baricentro do triângulo. Ademais, o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2 : 1.”

PROBLEMA 30: Construa, com régua e compasso, o baricentro do triângulo **ABC** dado na Fig. 169.

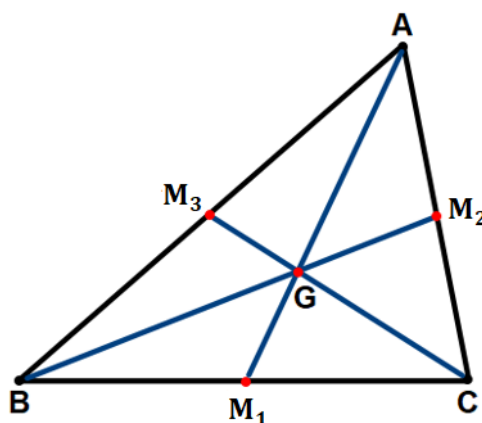
Figura 169 – Triângulo **ABC**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Supondo o desenho pronto, tal como na Fig. 170.

Figura 170 – Triângulo **ABC** com suas medianas AM_1 , BM_2 e CM_3 traçadas

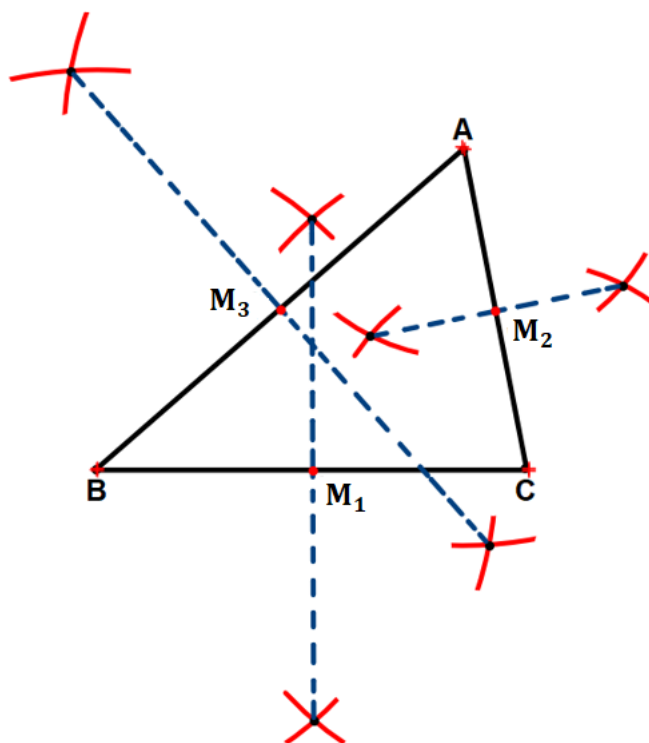


Fonte: Elaboração própria

A Fig. 170 sugere construirmos as três medianas referentes a cada vértice do triângulo **ABC**. Os passos seguintes mostrarão que essas três medianas se interceptam num mesmo ponto **G**.

Passo 2: Como visto no **PROBLEMA 14**, já sabemos marcar o ponto médio de um segmento. Sendo assim, na Fig. 169, trace os pontos médios M_1 , M_2 e M_3 dos lados **BC**, **AC** e **AB**, respectivamente. Veja na Fig. 171 um esboço dessa construção.

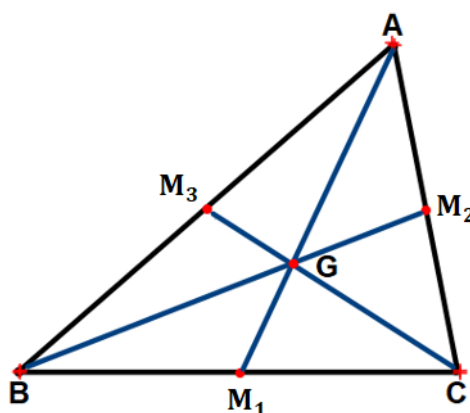
Figura 171 – Marcando os pontos médios M_1 , M_2 e M_3



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Trace as medianas AM_1 , BM_2 e CM_3 . Seja G o ponto de concorrência dessas medianas que chamaremos de baricentro do triângulo ABC (Fig. 172).

Figura 172 – Triângulo ABC com as medianas AM_1 , BM_2 e CM_3 traçadas

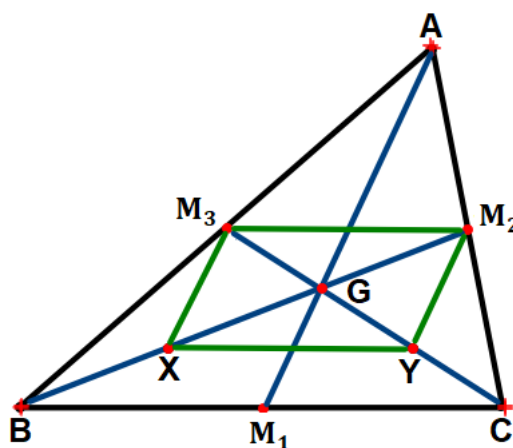


Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Fixando a Fig. 172, provemos que o ponto G é realmente o ponto de interseção das três medianas AM_1 , BM_2 e CM_3 e que o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão $2 : 1$, ou seja, $\overline{AG} = 2\overline{GM_1}$, $\overline{BG} =$

$2\overline{GM}_2$ e $\overline{CG} = 2\overline{GM}_3$. Na Fig. 173 abaixo, supondo que **G** seja o ponto de interseção das medianas **BM**₂ e **CM**₃. Sejam, ainda, **X** e **Y** os pontos médios dos segmentos **BG** e **CG**, respectivamente. Note que **M**₃**M**₂ é base média do triângulo **ABC** relativa a base **BC**. De maneira análoga, **XY** é base média do triângulo **BCG** relativa a **BC**; logo, pelo teorema da base média, **M**₃**M**₂ e **XY** são paralelos a **BC** e têm comprimento igual à metade de $\overline{BC}$. Portanto, $\overline{M_3M_2} = \overline{XY}$ e $\overline{M_3M_2} \parallel \overline{XY}$, daí concluímos que **M**₃**M**₂**YX** é um paralelogramo. Como as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio, vem que $\overline{M_3G} = \overline{GY}$ e $\overline{M_2G} = \overline{GX}$. Mas do fato de **X** e **Y** serem pontos médios de **BG** e **CG**, respectivamente, vem que $\overline{BX} = \overline{XG}$ e $\overline{CY} = \overline{YG}$ e disso resulta que $\overline{BX} = \overline{XG} = \overline{GM}_2$ e $\overline{CY} = \overline{YG} = \overline{GM}_3$, dessas igualdades concluímos que $\overline{BG} = 2\overline{GM}_2$ e $\overline{CG} = 2\overline{GM}_3$.

Figura 173 – Triângulo **ABC** com o paralelogramo **M**₃**M**₂**YX** destacado

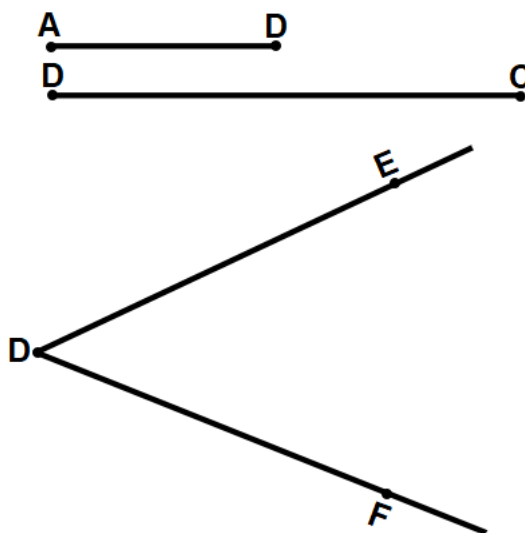


Fonte: Elaboração própria

Ainda na Fig. 173, seja **AM**₁ a mediana relativa ao **BC** e suponha que **G'** seja o ponto de interseção das medianas **AM**₁ e **BM**₂, concluímos analogamente que **G'** divide **AM**₁ e **BM**₂ também na razão **2:1** a partir de cada vértice. Daí concluímos que $\overline{BG} = 2\overline{GM}_2$ e $\overline{BG'} = 2\overline{G'M}_2$. Desse fato resulta que **G** = **G'**. Enfim concluímos que de fato **G** é o ponto de interseção das três medianas **AM**₁, **BM**₂ e **CM**₃; ocorre ainda que **G** divide cada mediana na razão de **2:1** a partir do vértice correspondente.

PROBLEMA 31: Construa com régua e compasso um paralelogramo **ABCD**, conhecendo dois de seus lados $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$ e o ângulo $\widehat{EDF}$ entre eles, com **E** ∈ **AD** e **F** ∈ **DC**, conforme os dados da Fig. 174.

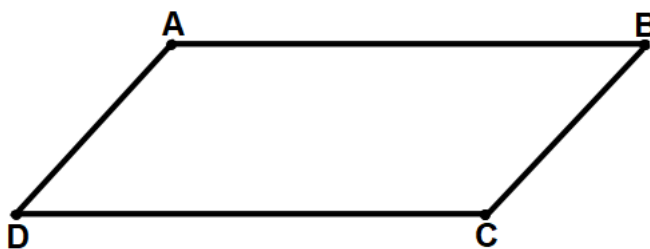
Figura 174 – Segmentos **AD**, **DC** e ângulo **$\widehat{XDY}$**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, como mostra a Fig. 175.

Figura 175 – Paralelogramo **ABCD**

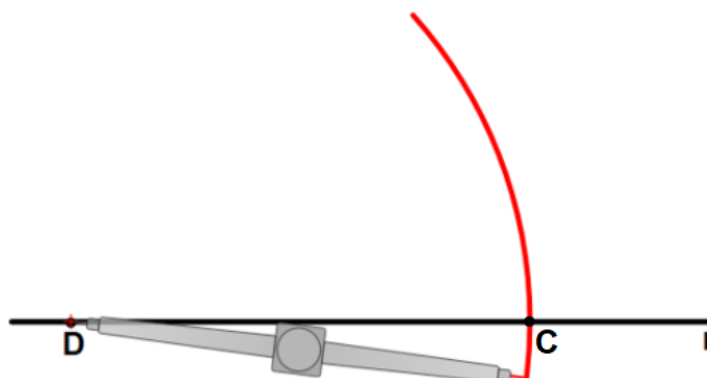


Fonte: Elaboração própria

A Fig. 175 sugere fixar o lado **DC** e sobre ele fazer o transporte do ângulo **$\widehat{EDF}$** para o vértice **D** no semiplano superior de **DC**. Em seguida, marcamos sobre o lado **DX** do ângulo **$\widehat{EDF}$** já transportado, o segmento **$\overline{AD}$** . Depois devemos traçar **$\overline{AB}$** paralelo a **$\overline{DC}$** pelo vértice **A** e **$\overline{BC}$** paralelo a **$\overline{AD}$** pelo vértice **C** como mostram os passos seguintes:

Passo 2: Trace uma reta **r** qualquer e marque sobre ela um ponto **D**. Com o compasso centrado em **D**, com abertura **$\overline{DC}$** (Fig. 174), marque um ponto **C**, transportando assim o segmento **DC** para a reta **r**. (Fig. 176).

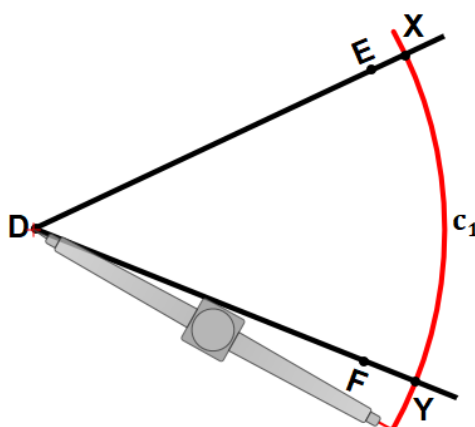
Figura 176 – Transporte do segmento **DC** para a reta **r**



Fonte: Elaboração própria

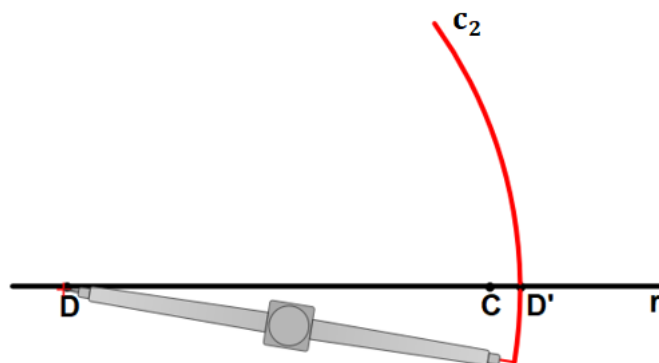
Passo 3: Fixando a Fig. 176, transporte o ângulo $\widehat{EDF}$ (Fig. 174) para o semiplano superior da reta **r**, com vértice em **D**, da seguinte forma: Com o compasso centrado no vértice **D** do ângulo $\widehat{EDF}$, trace um arco de circunferência c_1 arbitrário cortando os lados do ângulo $\widehat{EDF}$ nos pontos **X** e **Y** conforme a Fig. 177. Em seguida, com o compasso com abertura $\overline{DX}$ trace um arco de circunferência c_2 cortando a reta **r** no ponto **D'**, veja a Fig. 178. Agora com o compasso centrado em **D'**, trace um arco de circunferência c_3 de abertura $\overline{XY}$ (Fig. 177) interceptando c_2 no ponto **P** (Fig. 179).

Figura 177 – Traçando o arco de circunferência c_1



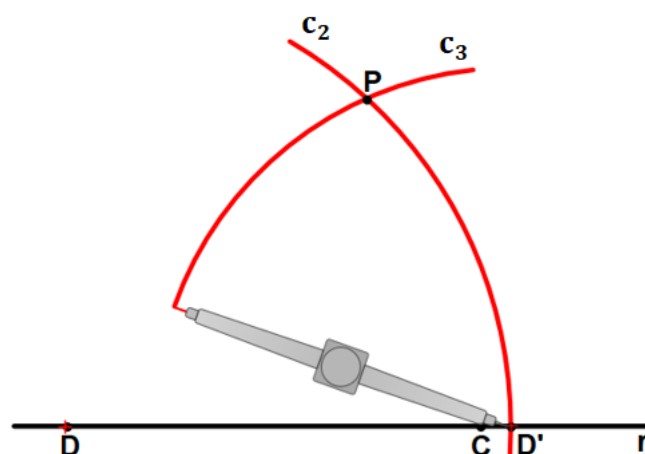
Fonte: Elaboração própria

Figura 178 – Traçando o arco de circunferência c_2



Fonte: Elaboração própria

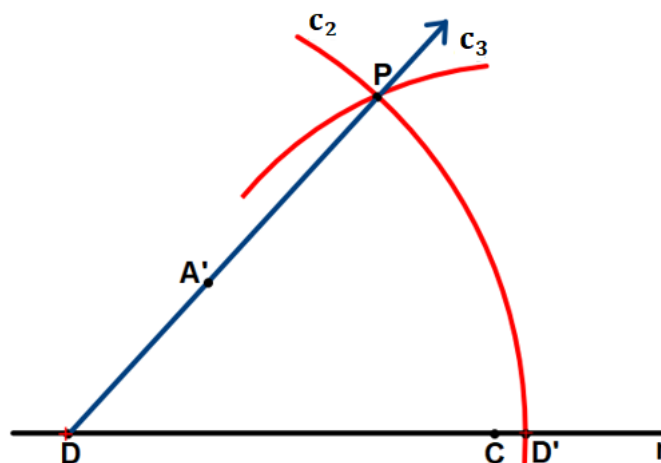
Figura 179 – Traçando o arco de circunferência c_3



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Trace a semirreta $\overrightarrow{DP}$ de origem D e com o auxílio de uma régua, marque sobre a semirreta $\overrightarrow{DP}$ o ponto A' tal que o segmento DA' seja congruente ao segmento AD da Fig. 174. Desta forma, o ângulo $P\hat{D}D'$ é congruente ao ângulo $E\hat{D}F$ da Fig. 174, conforme a Fig. 180.

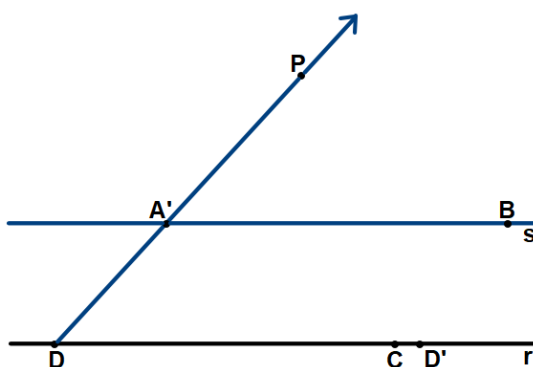
Figura 180 – Traçando a semirreta $\overrightarrow{DP}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Trace por A' uma reta s paralela à r , conforme os passos descritos no **PROBLEMA 1**. Em seguida, marque sobre a reta s , com o auxílio de uma régua, o segmento $A'B$ tal que $A'B$ seja congruente ao segmento DC da Fig. 174. Este passo está ilustrado na Fig. 181.

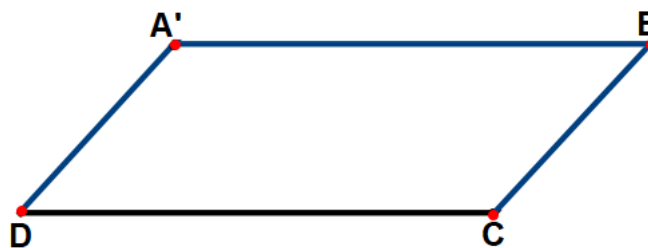
Figura 181 – Marcando sobre a reta s o ponto B



Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Trace o segmento BC . Temos que o quadrilátero $A'BCD$ da Fig.182 é o paralelogramo pedido.

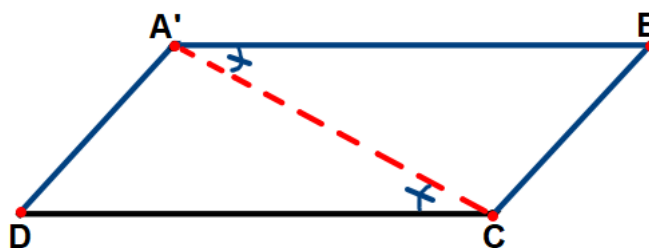
Figura 182 – Paralelogramo $A'BCD$



Fonte Elaboração própria

Justificativa: De fato o quadrilátero $A'B'CD$ é um paralelogramo, pois $A'B' \parallel DC$ (por construção) e traçando o segmento $A'C$ (Fig. 183), obtemos os triângulos $A'CD$ e $A'CB$ que são congruentes pelo caso **LAL**, pois $\overline{A'B'} = \overline{DC}$ (por construção), $A'C$ é lado comum e os ângulos $\widehat{DCA'}$ e $\widehat{BA'C}$ são correspondentes em relação as retas paralelas $A'B'$ e DC que foram obtidas por construção, e portanto $\widehat{DCA'} = \widehat{BA'C}$.

Figura 183 – Traçando a diagonal $A'C$ do quadrilátero $A'B'CD$

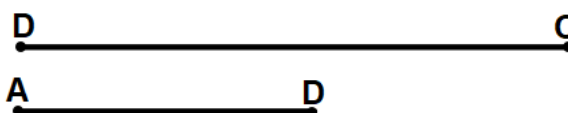


Fonte: Elaboração própria

Do fato dos triângulos $A'CD$ e $A'CB$ serem congruentes, temos como consequência que $\overline{A'D} = \overline{BC}$ e $\overline{A'B'} = \overline{DC}$. Como os pares de lados opostos são iguais, é suficiente dizer que $A'B'CD$ é um paralelogramo que satisfaz as medidas da Fig. 174 (por construção).

PROBLEMA 32: Construa com régua e compasso um retângulo $ABCD$, conhecendo dois de seus lados $\overline{DC}$ e $\overline{AD}$, conforme os dados da Fig. 184.

Figura 184 – Segmentos DC e AD



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: O desenho pronto está ilustrado na Fig. 185.

Figura 185 – Retângulo ABCD

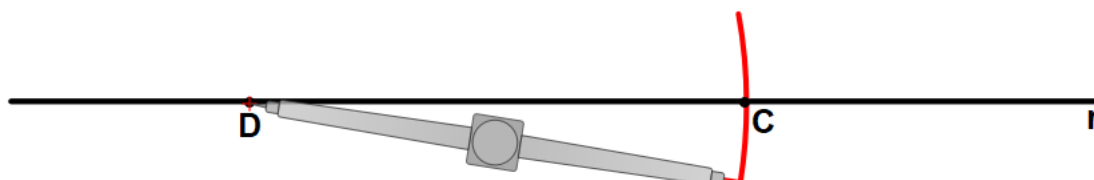


Fonte: Elaboração própria

A Fig. 185 sugere fixarmos o lado **DC** e a partir dos vértices **D** e **C** construirmos as perpendiculares $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ e em seguida traçarmos $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{DC}$, como mostram os próximos passos:

Passo 2: Trace uma reta **r** qualquer e sobre ela marque um ponto **D**. Em seguida, com o compasso com abertura $\overline{DC}$ (Fig. 184), trace a partir do ponto **D** um arco de circunferência que encontra a reta **r** em **C**. Dessa forma transportamos o segmento **DC** para a reta **r**, conforme mostra a Fig. 186.

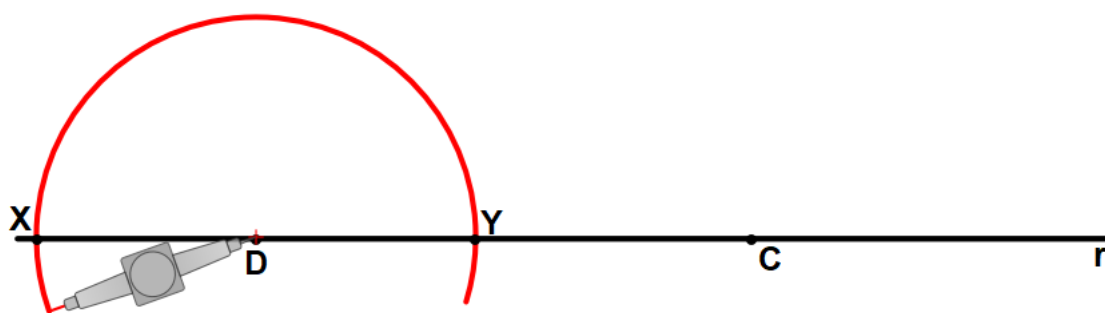
Figura 186 – Traçando um arco de circunferência intersectando a reta **r no ponto **C****



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso com abertura arbitrária, trace um arco de circunferência de centro **D**, intersectando a reta **r** em **X** e **Y**, conforme a Fig. 187.

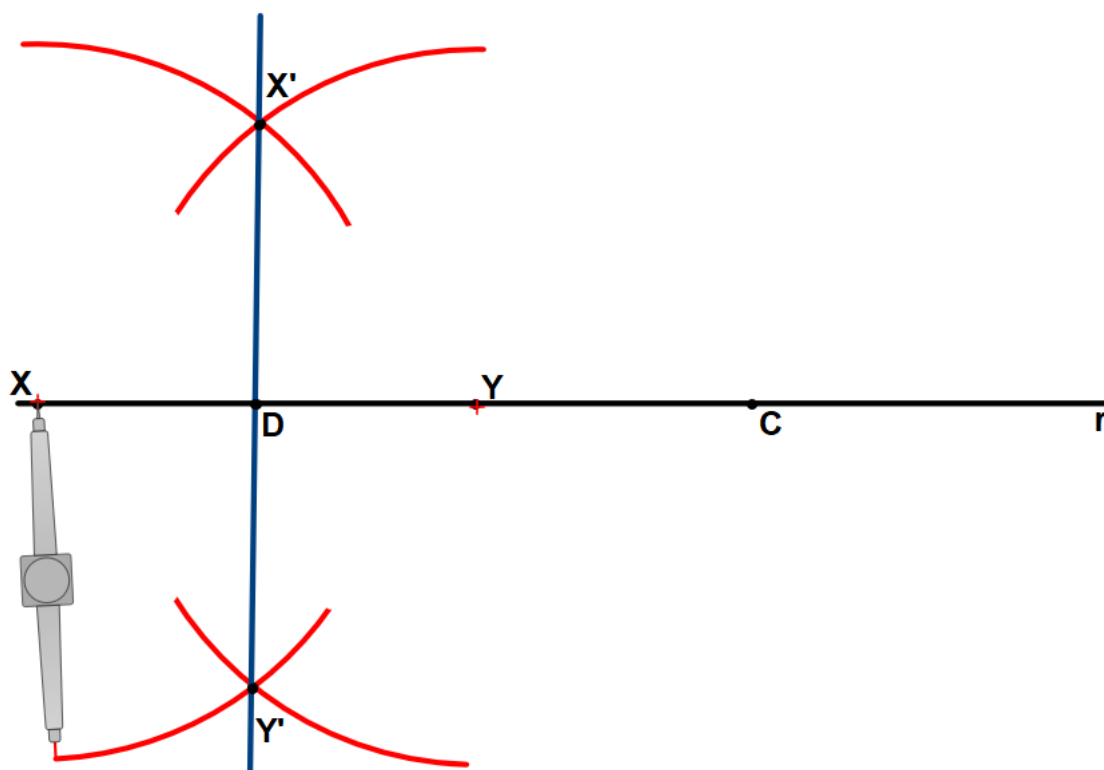
Figura 187 – Traçando um arco de circunferência de centro **D**



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Trace a mediatriz do segmento **XY**. Em detalhes, com o compasso com abertura $r > \frac{\overline{XY}}{2}$, trace dois arcos de circunferências com centros em **X** e em **Y** que se cortam nos pontos **X'** e **Y'**. Com auxílio de uma régua, trace a reta **X'Y'** (Fig. 188).

Figura 188 – Traçando a mediatriz do segmento **XY**

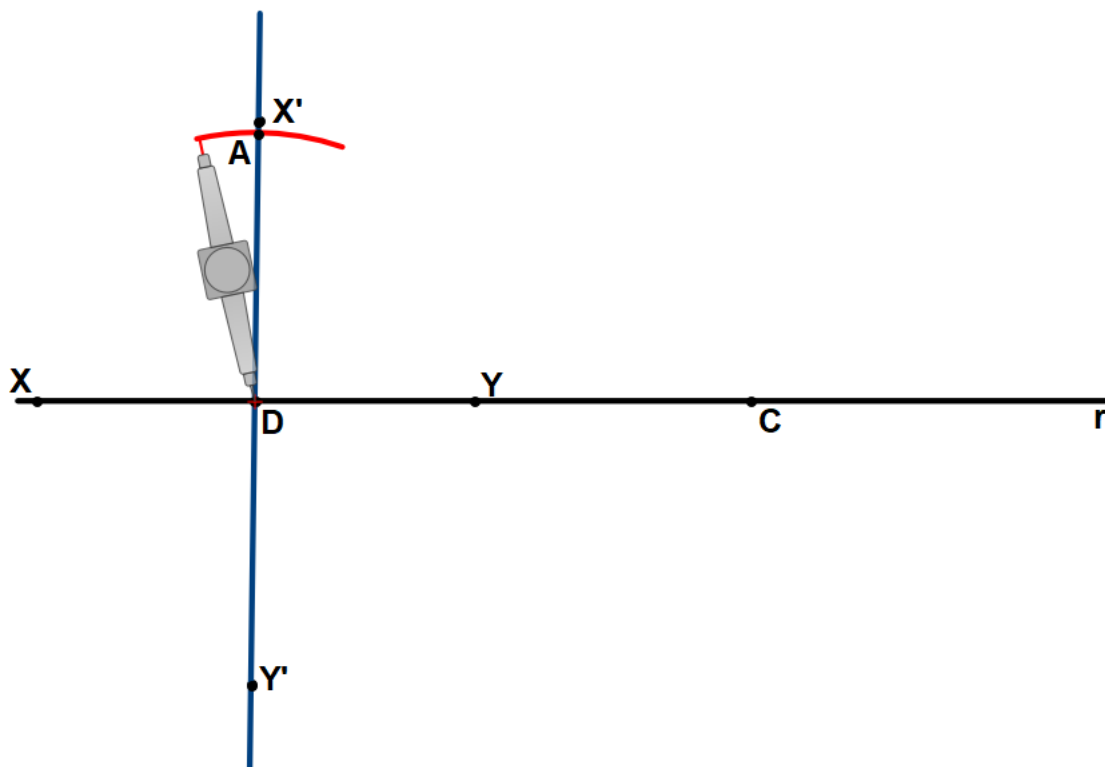


Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Apagando os arcos traçados na Fig. 188 e com o compasso com abertura $\overline{AD}$ (Fig. 184) e centrando no ponto **D**, trace um arco de circunferência intersectando

a reta $X'Y'$ em **A**. Fizemos assim o transporte do segmento **AD** para a reta $X'Y'$ (Fig. 189).

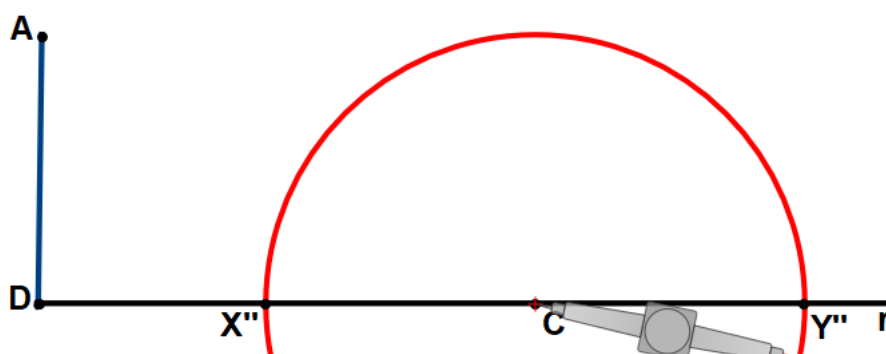
Figura 189 – Marcando o ponto **A** sobre a reta $X'Y'$



Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Apagando convenientemente alguns elementos traçados da Fig. 189, com o compasso com abertura arbitrária, trace um arco de circunferência de centro **C** intersectando a reta r em X'' e Y'' , conforme a Fig. 190.

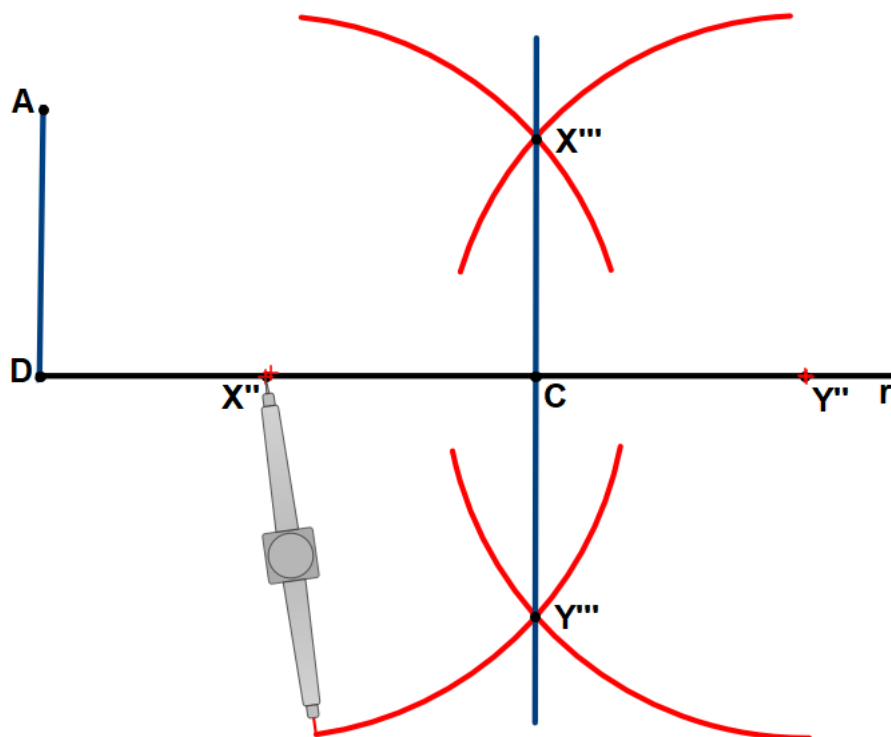
Figura 190 – Traçando um arco de circunferência de centro **C** e raio arbitrário



Fonte: Elaboração própria

Passo 7: Trace a mediatriz do segmento $X''Y''$. Em detalhes, com o compasso com abertura $s > \frac{\overline{X''Y''}}{2}$, trace dois arcos de circunferências com centros em X'' e em Y'' que se intersectam nos pontos X''' e Y''' . Com o auxílio de uma régua, trace a reta $X'''Y'''$ (Fig. 191).

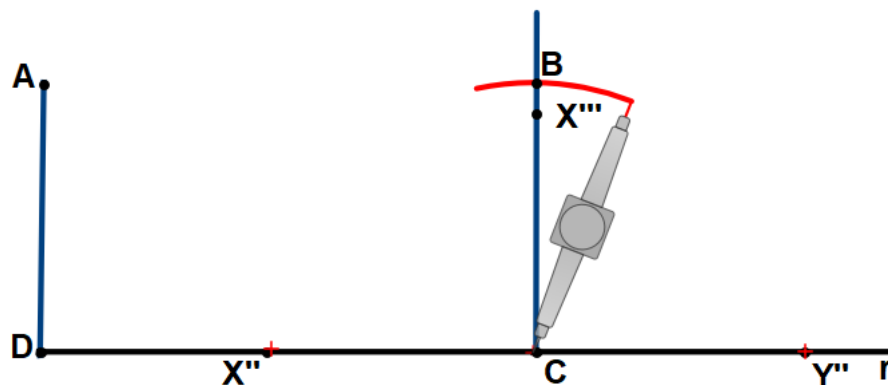
Figura 191 – Traçando a mediatriz do segmento $X''Y''$



Fonte: Elaboração própria

Passo 8: Apagando convenientemente alguns elementos traçados da Fig. 191, com o compasso com abertura $\overline{AD}$ (Fig. 184) e centrando no ponto C , trace um arco de circunferência que intersecta a reta $X'''Y'''$ em B . Fizemos assim o transporte do segmento AD para a reta $X'''Y'''$ (Fig. 192).

Figura 192 – Marcando o ponto B sobre a reta $X'''Y'''$



Fonte: Elaboração própria

Passo 8: Apagando convenientemente alguns elementos traçados da Fig. 192, com o auxílio de uma régua, trace o segmento **AB**, obtemos o retângulo **ABCD** pedido, conforme ilustra a Fig. 193.

Figura 193 – Retângulo ABCD



Fonte: Elaboração própria

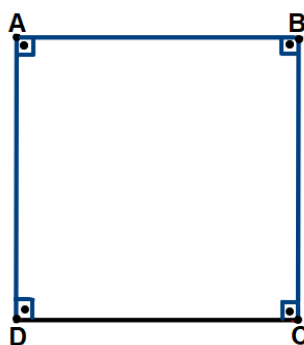
Justificativa: De fato o quadrilátero **ABCD** da Fig. 193, é um retângulo, pois $\overline{AD} = \overline{BC}$ (por construção) e com isso a distância entre as retas **AD** e **BC** é constante o que caracteriza o paralelismo entre elas. Como os segmentos **AD** e **BC** são perpendiculares ao segmento **DC** (por construção) e como $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ vem que os segmentos **AD** e **BC** são perpendiculares também ao segmento **AB**. Desses fatos, resulta que os ângulos internos do quadrilátero **ABCD** são todos retos.

PROBELMA 33: Construa com régua e compasso um quadrado **ABCD**, sendo dado um de seus lados $\overline{DC}$, conforme a Fig. 194.

Figura 194 – Segmento DC

Fonte: Elaboração própria

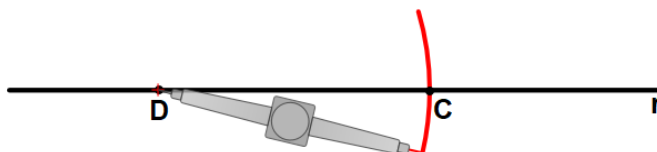
Passo 1: O desenho pronto está ilustrado na Fig. 195.

Figura 195 – Quadrado ABCD

Fonte: Elaboração própria

A Fig. 195 sugere fixarmos o lado **DC** e a partir dos vértices **D** e **C** construirmos as perpendiculares $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ e em seguida traçarmos $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{DC}$, com $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DC}$ como mostram os próximos passos:

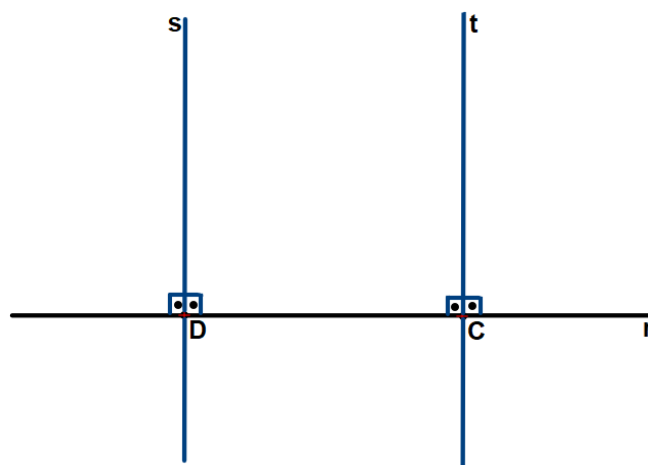
Passo 2: Trace uma reta **r** e marque sobre ela um ponto **D**. Em seguida, com o compasso com abertura $\overline{DC}$ (Fig. 194), trace um arco de circunferência centrado em **D** que intersecta a reta **r** em **C**. Fizemos assim o transporte do segmento **DC** para a reta **r**, conforme ilustra a Fig. 196.

Figura 196 – Segmento DC sobre a reta r

Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Trace uma reta **s** perpendicular à **r** passando por **D**. De maneira análoga, trace uma reta **t** perpendicular à **r** passando por **C** (Fig. 197).

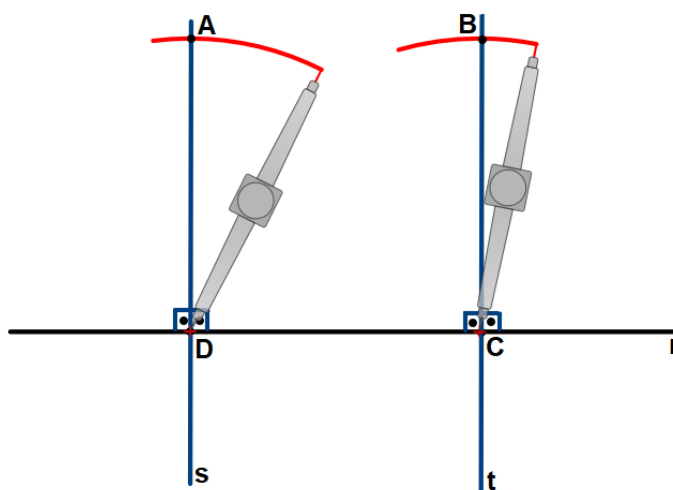
Figura 197 – Traçando as retas **s** e **t** perpendiculares a **r**



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o compasso com abertura $\overline{DC}$ (Fig. 194), trace dois arcos de circunferências centrados em **D** e em **C** intersectando as retas **s** e **t** em **A** e **B**, respectivamente (Fig. 198).

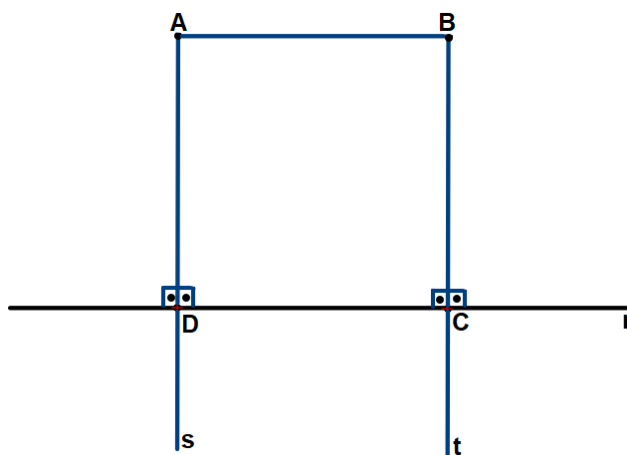
Figura 198 – Marcando os pontos **A** e **B** sobre as retas **s** e **t** respectivamente



Fonte: Elaboração própria

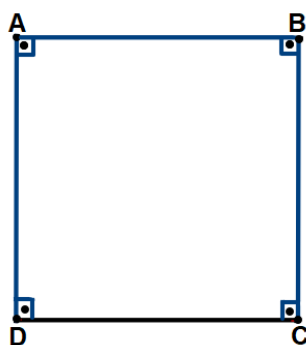
Passo 4: Com o auxílio de uma régua, trace o segmento **AB** (Fig. 199). Temos que o quadrilátero **ABCD** da Fig. 200 é um quadrado.

Figura 199 – Traçando o segmento **AB**



Fonte: Elaboração própria

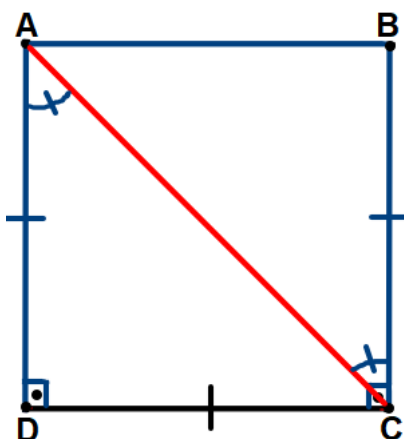
Figura 200 – Quadrado **ABCD**



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Por construção temos que $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BC}$ e $\hat{D} = \hat{C} = 90^\circ$. Observe a Fig. 201. Traçando a diagonal $\overline{AC}$, obtemos os triângulos **ADC** e **ABC** que são congruentes pelo caso **LAL**, pois $\overline{AD} = \overline{BC}$, **AC** é lado comum e os ângulos $\hat{DAC}$ e $\hat{BCA}$ são correspondentes, pois as retas **AD** e **BC** são paralelas e, portanto, temos que $\hat{DAC} = \hat{BCA}$. Pela congruência dos triângulos **ADC** e **ABC** resulta que $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{BC} = \overline{AB}$ e $\hat{D} = \hat{C} = \hat{B} = 90^\circ$. Mas como a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é igual a 360° , daí obtemos que $\hat{A} = 90^\circ$. Portanto o quadrilátero **ABCD** da Fig. 200 é um quadrado de lado medindo $\overline{DC}$.

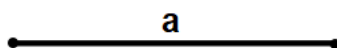
Figura 201 – Traçando a diagonal $\overline{AC}$ do quadrilátero **ABCD**



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 34: Construa com régua e compasso um losango **ABCD** de lado **a**, dado na Fig. 202.

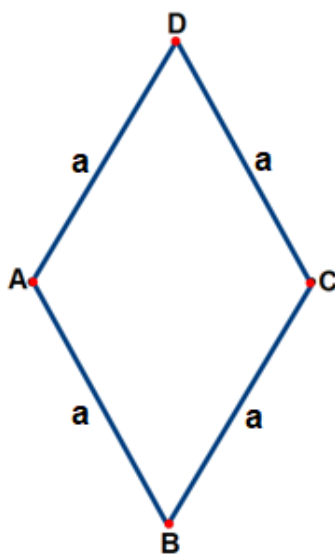
Figura 202 – Segmento de medida **a**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Supondo o problema resolvido, como o losango da Fig. 203.

Figura 203 – Losango **ABCD**



Fonte: Elaboração própria

A Fig. 203 sugere construirmos duas circunferências secantes de raios medindo a , como podemos ver nos passos seguintes.

Passo 2: Trace uma reta r qualquer e marque sobre ela um segmento arbitrário de extremos A e C de medida $d < 2a$, como mostram as Figs. 204 e 205. Caso $d \geq 2a$ não será possível o passo 3, pois as circunferências não serão secantes, condição determinante para a construção.

Figura 204 – Compasso com abertura $d < 2a$



Fonte: Elaboração própria

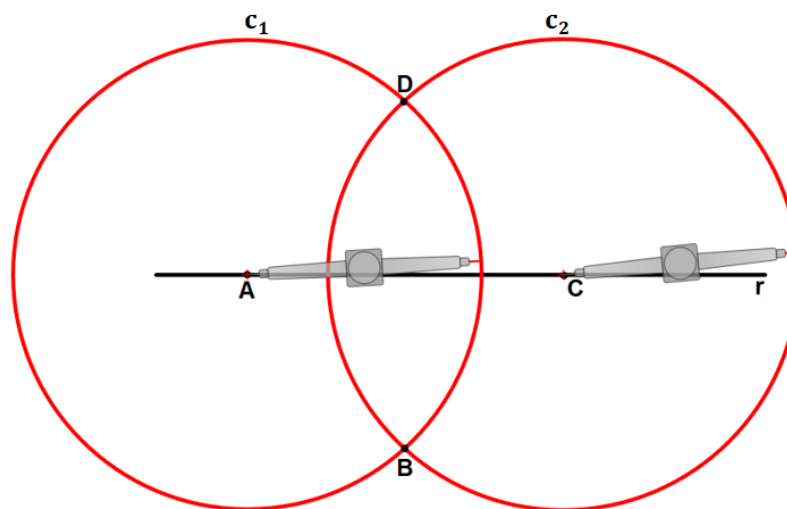
Figura 205 – Marcando o ponto C sobre a reta r



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso centrado em A e com abertura a , trace uma circunferência c_1 . Em seguida, trace uma circunferência c_2 centrada em C de abertura a . Sejam D e B as interseções de c_1 e c_2 (Fig. 206).

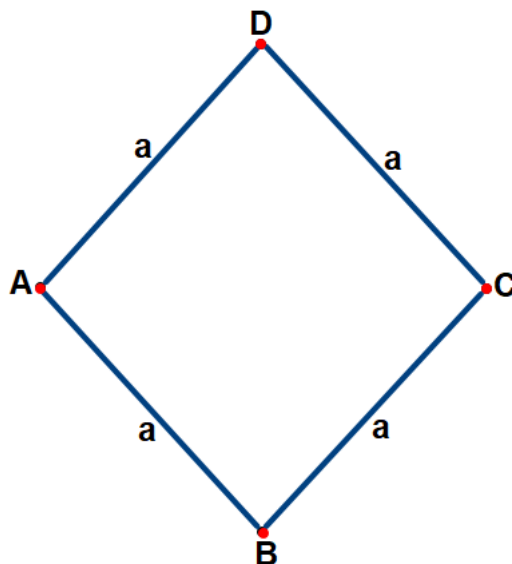
Figura 206 – Traçando duas circunferências c_1 e c_2 de centros A e C , respectivamente, e de raios iguais a a



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Apagando convenientemente alguns elementos traçados na Fig. 206 e com o auxílio de uma régua, trace os segmentos **AB**, **BC**, **CD** e **DA**. Com isso, temos que o quadrilátero **ABCD** é um losango de lado **a** como representado na Fig. 207.

Figura 207 – Losango **ABCD** de lado **a**



Fonte: Elaboração própria

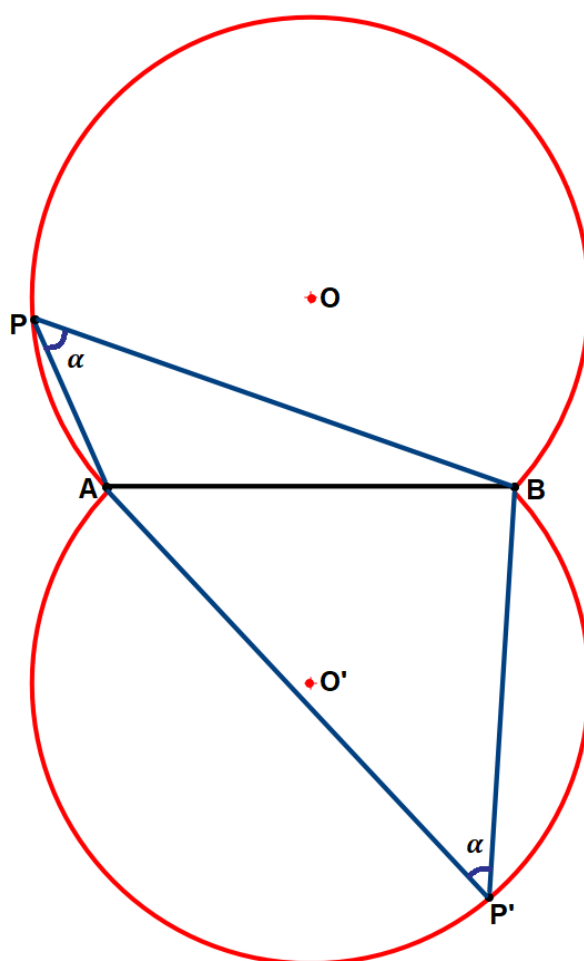
Justificativa: Na Fig. 207, temos que **AB**, **BC**, **CD** e **DA** são raios das circunferências c_1 e c_2 , mas c_1 e c_2 têm o mesmo raio **a** (por construção), logo vale a igualdade $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$. Com isso, **ABCD** é um losango de lado **a**.

7. CONSTRUÇÕES SUGERIDAS PARA O 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Para as construções que se seguem se faz necessário definir **arco capaz**. Muniz Neto (2013, p. 112) define: “Dados um segmento **AB** e um ângulo α , com $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, o lugar geométrico (**LG**) dos pontos **P** do plano tais que $\widehat{APB} = \alpha$ é a reunião de dois arcos de círculos, simétricos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e tendo os pontos **A** e **B** em comum.”

Tais arcos são os arcos capazes de α em relação a **AB**. Na medida em que os pontos **P** e **P'** se movimentam sobre os arcos nos semiplanos acima e abaixo do segmento **AB**, o ângulo α não se altera, conforme ilustra a Fig. 208.

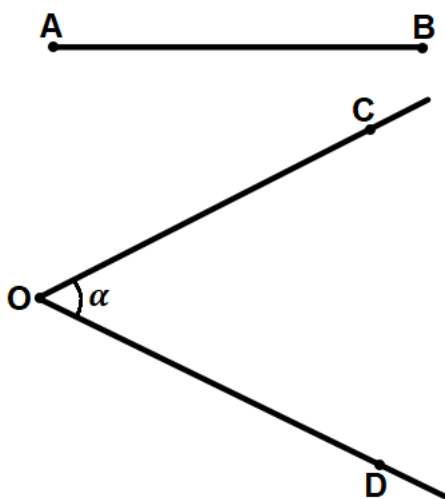
Figura 208 – Arcos capazes de α em relação a **AB**



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 35: Construa com régua e compasso os arcos capazes do ângulo $\widehat{COD} = \alpha$ em relação ao segmento **AB**, conforme os dados da Fig. 209.

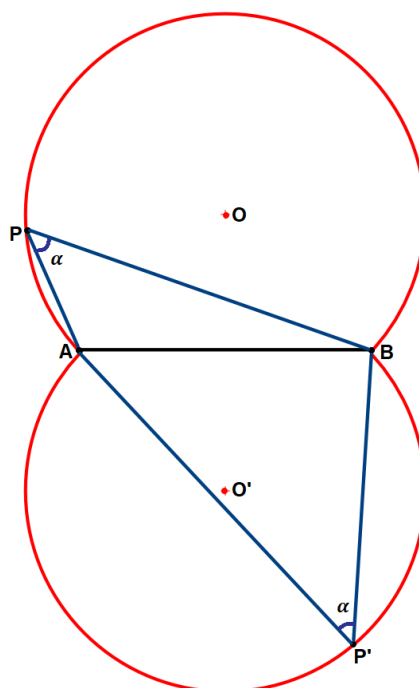
Figura 209 – Segmento **AB** e ângulo **$\widehat{COD}$** de medida α



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: A Fig. 210 ilustra o desenho pronto.

Figura 210 – Arcos capazes de α em relação a **AB**

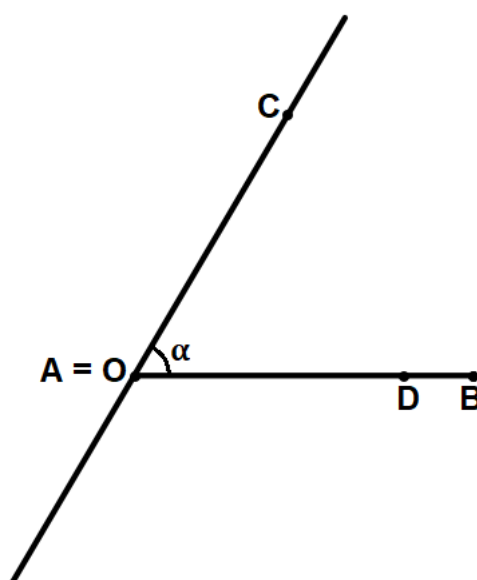


Fonte: Elaboração própria

A Fig. 210 sugere encontrarmos dois arcos de circunferências subentendidos sob o mesmo segmento **AB** de modo que o ângulo α seja inscrito a tais arcos. Os passos seguintes mostram como isso pode ser feito.

Passo 2: Transporte o ângulo α para o semiplano superior do segmento **AB**, conforme os passos descritos no **PROBLEMA 5**, de modo que o vértice **O** do ângulo $\widehat{COD}$ coincida com o ponto **A** do segmento **AB**, conforme a Fig. 211.

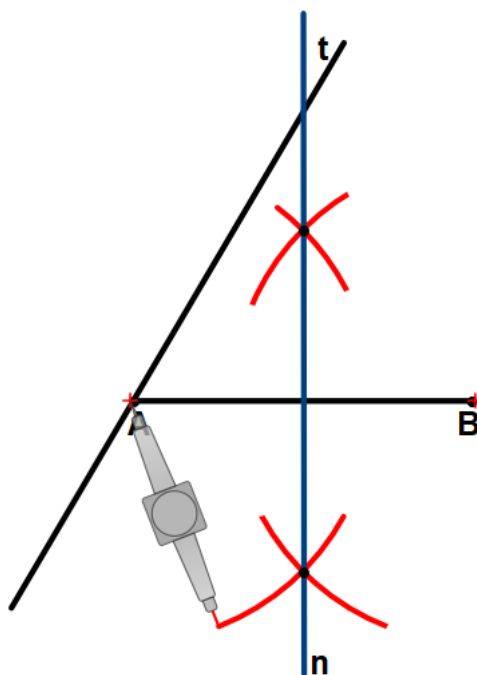
Figura 211 – Ângulo de medida α sobre o segmento **AB**



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Trace a mediatriz **n** do segmento **AB**. Seja **t** a reta que não contém o ponto **B**, mas contém o ponto **A** (Fig. 212).

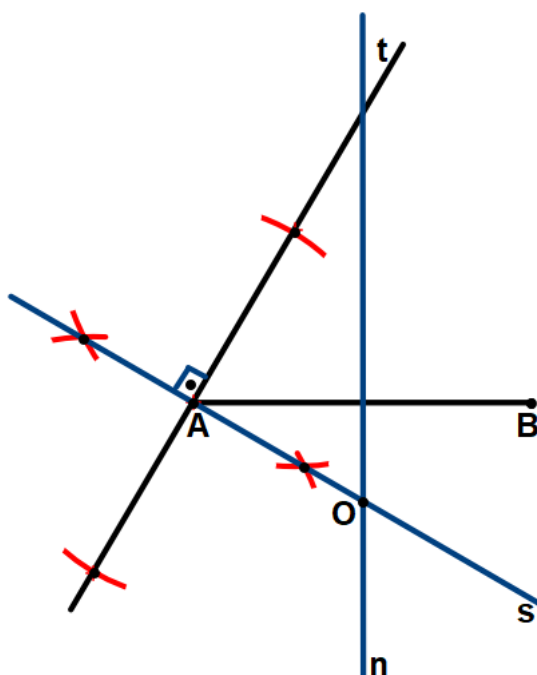
Figura 212 – Traçando a mediatriz **n** do segmento **AB**



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Trace a reta **s** perpendicular à **t** passando por **A**. Seja **O**, o ponto de interseção das retas **n** e **s** (Fig. 213).

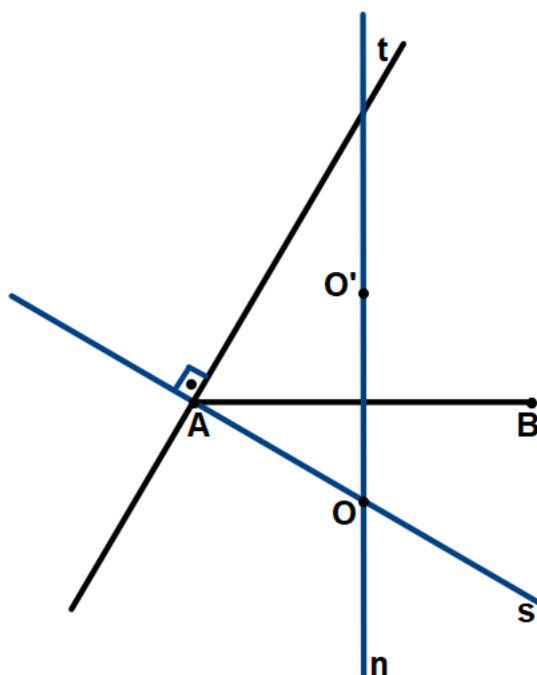
Figura 213 – Traçando a reta **s** perpendicular à reta **t** passando por **A**



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Marque o ponto O' simétrico O em relação ao segmento AB (Fig. 214).

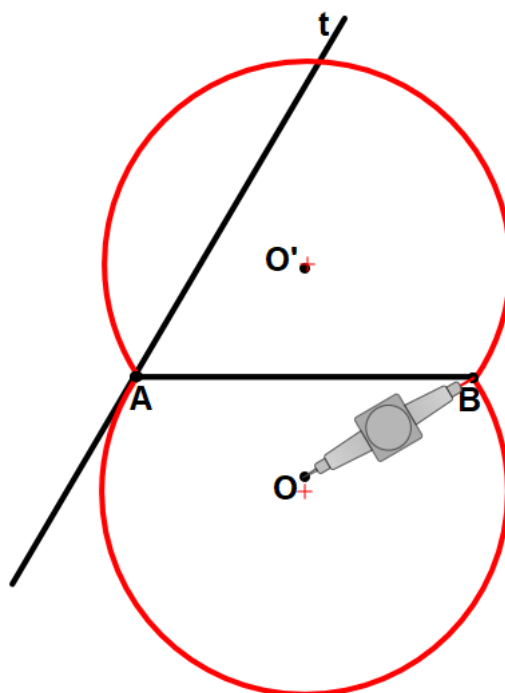
Figura 214 – Marcando o ponto O' simétrico O em relação ao segmento AB



Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Trace dois arcos de circunferências de centros O e O' , de raio $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$, com extremos em A e em B (Fig. 215).

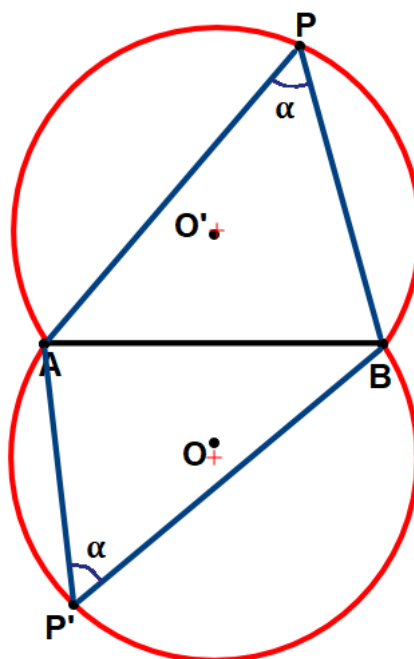
Figura 215 – Traçando os arcos capazes do ângulo α em relação a AB



Fonte: Elaboração própria

Passo 7: Apagando reta t , tome um ponto P qualquer sobre o arco do semiplano superior do segmento AB e P' sobre o arco do semiplano inferior. Temos que ambos os ângulos $\widehat{APB}$ e $\widehat{AP'B}$ tem medida α , independente das posições dos pontos P e P' sobre os arcos citados. Portanto construímos os arcos capazes do ângulo α em relação ao segmento AB , conforme ilustra a Fig. 216.

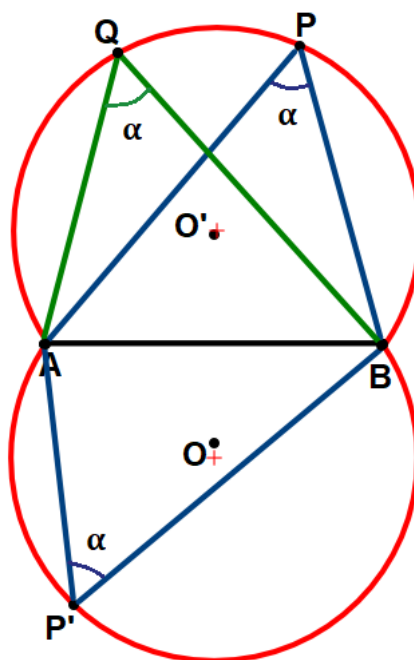
Figura 216 – Arcos capazes do ângulo α em relação ao segmento AB



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Na Fig. 215, sendo α ângulo formado pela reta t com o segmento AB (por construção). Na Fig. 216, note que o ângulo α é inscrito a circunferência do semiplano superior determinada por AB . Seja $Q \neq P$ outro ponto sobre o arco AB superior. O ângulo AQB também é inscrito e está subentendido pelo mesmo arco AB em que o ângulo α está subentendido, e portanto, o ângulo $AQB = \alpha$. Sendo assim, para qualquer posição de P sobre o arco AB superior teremos $APB = \alpha$. De maneira análoga ocorre para o arco AB inferior em relação ao segmento AB (Fig. 217).

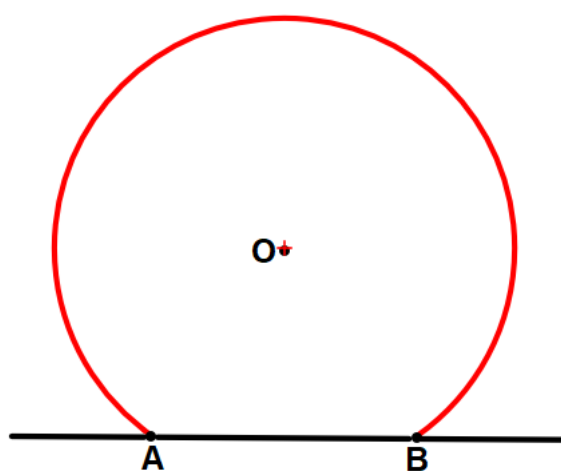
Figura 217 – Marcando o ponto Q sobre o arco AB



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 36: A Fig. 218 mostra um dos arcos capazes do ângulo α sobre o segmento **AB**. Construa, com régua e compasso, o arco capaz de $\frac{1}{2}\alpha$ sobre **AB**, correspondente ao arco capaz dado.

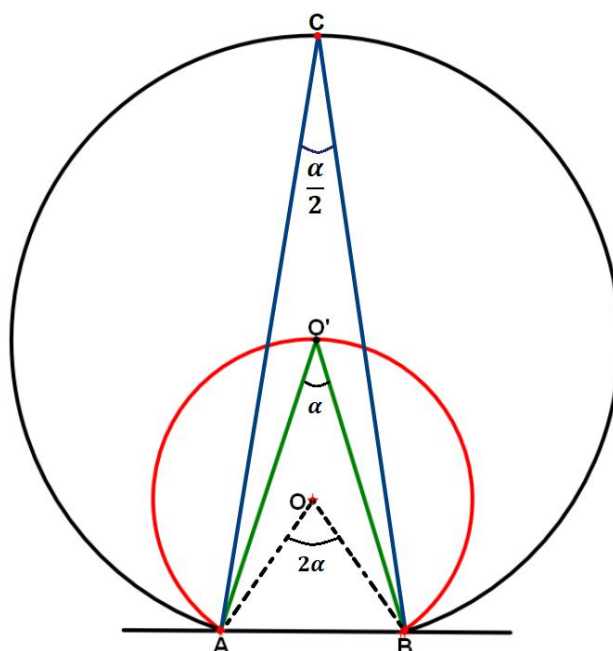
Figura 218 – Arco capaz de um ângulo de medida α sobre **AB**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: A Fig. 219 ilustra o desenho pronto.

Figura 219 – Arco capaz de $\frac{1}{2}\alpha$ sobre o segmento **AB**

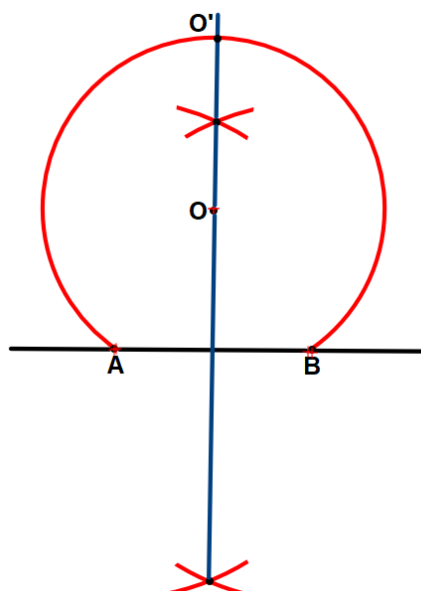


Fonte: Elaboração própria

A ideia é traçarmos uma circunferência com centro sobre o arco **AB** dado na Fig. 218 de tal forma que o ângulo inscrito $\widehat{AO'B}$ da Fig. 219 seja o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito $\widehat{ACB}$ que pertence ao arco capaz de $\frac{1}{2}\alpha$ sobre **AB**. Os passos seguintes mostram os detalhes desta construção.

Passo 2: Na Fig. 218, trace a mediatriz do segmento **AB** e chame de **O'** sua interseção com o arco dado (Fig. 220).

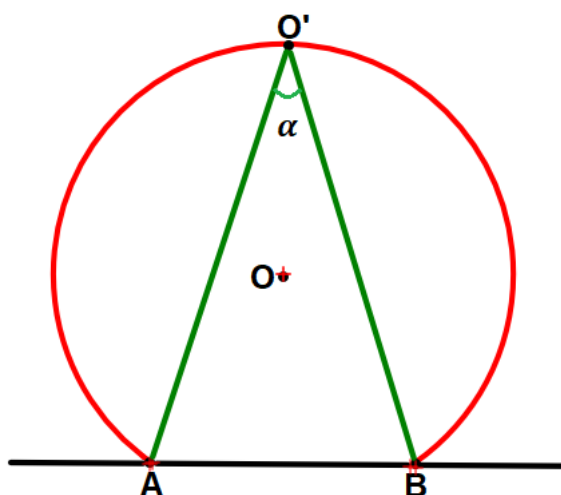
Figura 220 – Traçando a mediatriz do segmento **AB**



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Apagando a mediatriz traçada e conservando o ponto O' , trace os lados AO' e BO' do ângulo inscrito $\widehat{AO'B}$ de medida α (Fig. 221).

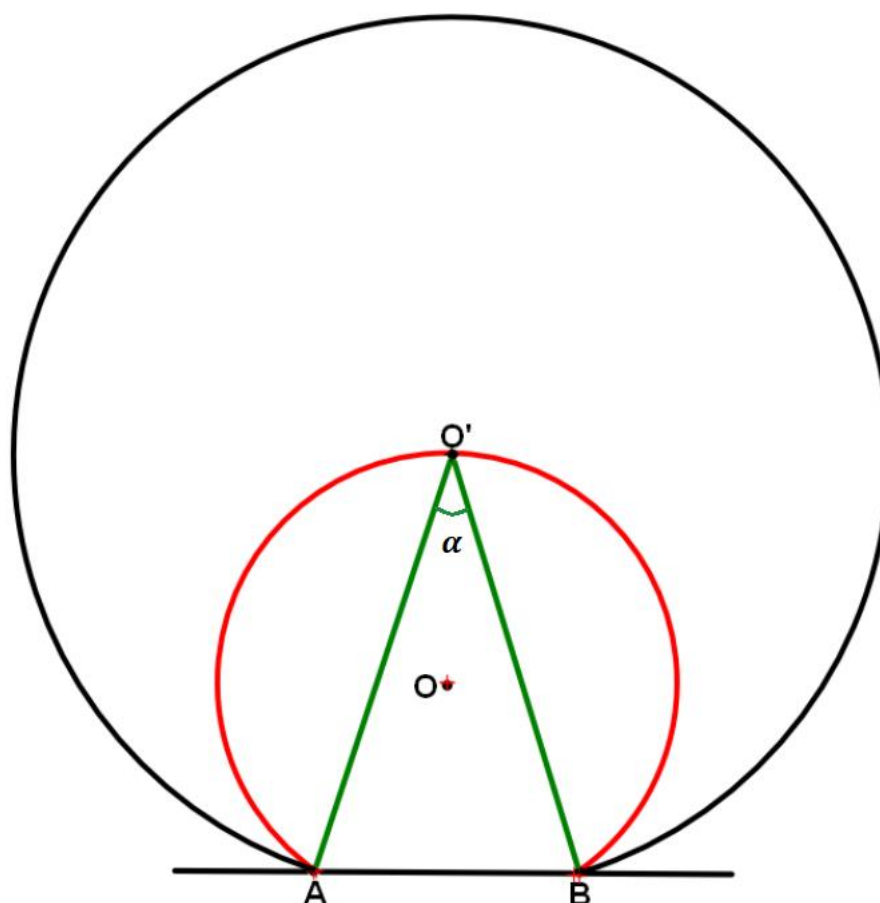
Figura 221 – Traçando os lados AO' e BO' do ângulo inscrito $\widehat{AO'B}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com o compasso centrado em O' e raio $\overline{BO'}$, trace um arco de circunferência no semiplano superior da reta AB (Fig. 222).

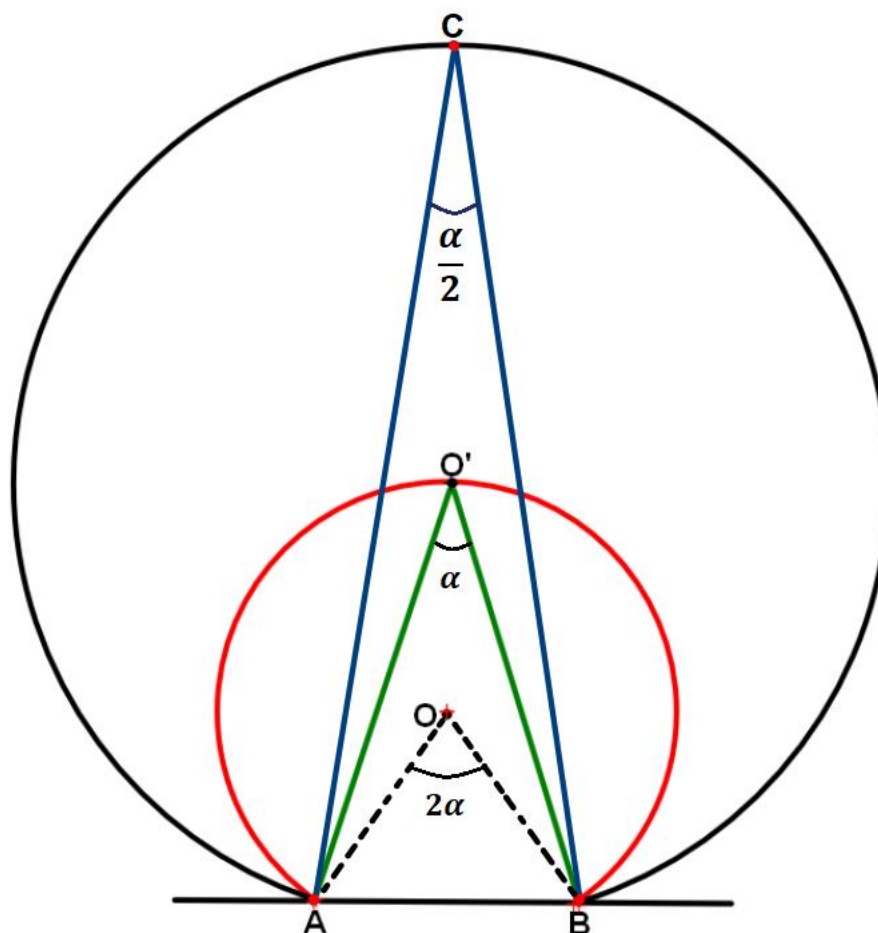
Figura 222 – Traçando o arco AB de centro O' e raio $\overline{BO'}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Marque um ponto **C** qualquer sobre o arco de circunferência de centro **O'** e raio $\overline{BO'}$ e construa os lados **AC** e **BC** do ângulo inscrito $\widehat{ACB}$. Temos que o ângulo $\widehat{ACB} = \frac{\alpha}{2}$. Dessa forma construímos o arco capaz de $\frac{1}{2}\alpha$ sobre **AB** (Fig. 223).

Figura 223 – Construção do ângulo inscrito $\widehat{ACB}$ de medida $\frac{1}{2}\alpha$ sobre o arco de circunferência **AB** de centro **O'** e raio $\overline{BO'}$

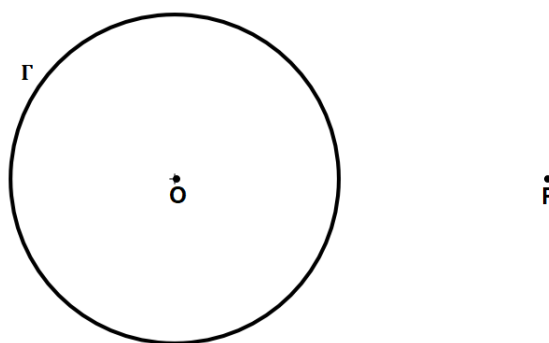


Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Na Fig. 223 a medida do ângulo central correspondente ao arco **AB** maior (circunferência de centro **O**) é 2α . Como o ângulo $\widehat{AO'B}$ é inscrito ao arco **AB** maior (circunferência de centro **O**), pelo teorema do ângulo inscrito, temos que $\widehat{AO'B} = \alpha$. De maneira análoga, o ângulo $\widehat{ACB}$ é inscrito ao arco **AB** maior (circunferência de centro **O'**) cujo ângulo central $\widehat{AO'B}$ (circunferência de centro **O'**) coincide exatamente com o ângulo inscrito $\widehat{AO'B}$ em relação ao arco de circunferência de centro **O**, tal que $\widehat{AO'B} = \alpha$. Novamente pelo teorema do ângulo inscrito, o ângulo $\widehat{ACB}$ mede metade do ângulo central $\widehat{AO'B}$, portanto, $\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AO'B}}{2} = \frac{1}{2}\alpha$.

PROBLEMA 37: Construa, com régua e compasso, as retas tangentes a Γ e passando por **P**, conforme a Fig. 224.

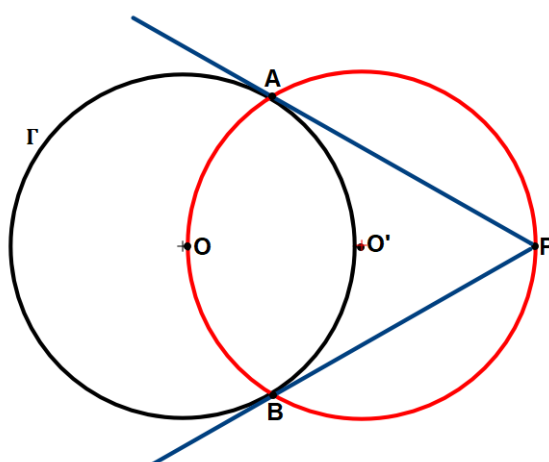
Figura 224 – Círculo Γ e ponto **P** exterior



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, tal como na Fig. 225.

Figura 225 – Semirretas **PA** e **PB** tangentes a Γ

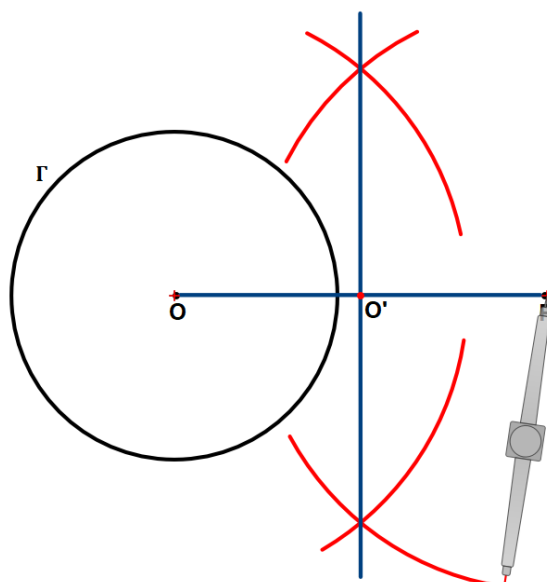


Fonte: Elaboração própria

Analisando a Fig. 225, devemos encontrar os arcos capazes do segmento **OP**, sendo **OP** diâmetro do círculo de centro **O'**. Os passos seguintes mostram como isso pode ser feito.

Passo 2: Na Fig. 224, trace o segmento **OP** e marque o seu ponto médio **O'**.

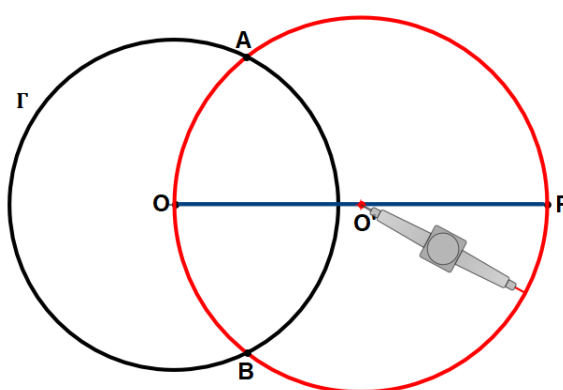
Figura 226 – Traçando o segmento **OP** e o seu ponto médio **O'**



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o compasso centrado em O' trace uma círculo de raio $\overline{O'O} = \overline{O'P}$ que intercepta o círculo Γ em A e B (Fig. 227).

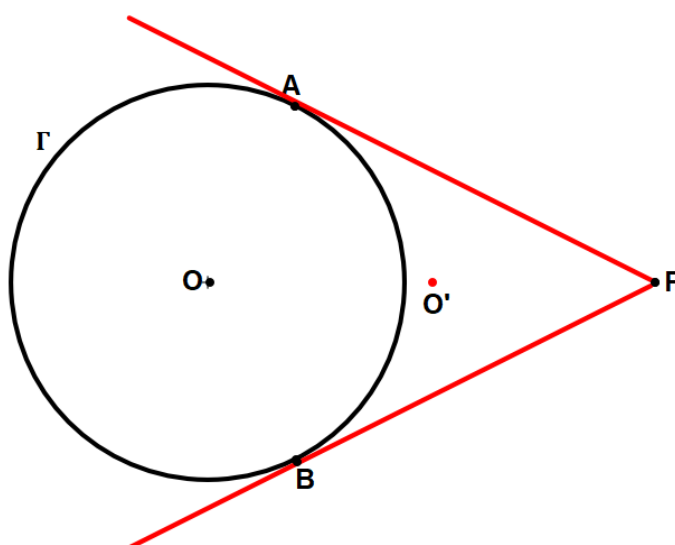
Figura 227 – Traçando o círculo de centro O' e raio $\overline{O'O} = \overline{O'P}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Apague convenientemente alguns elementos traçados nos passos anteriores, em seguida, trace as semirretas PA e PB , tangentes a Γ em A e B . Assim temos a construção pedida (Fig. 228).

Figura 228 – Semirretas PA e PB tangentes a Γ em A e B



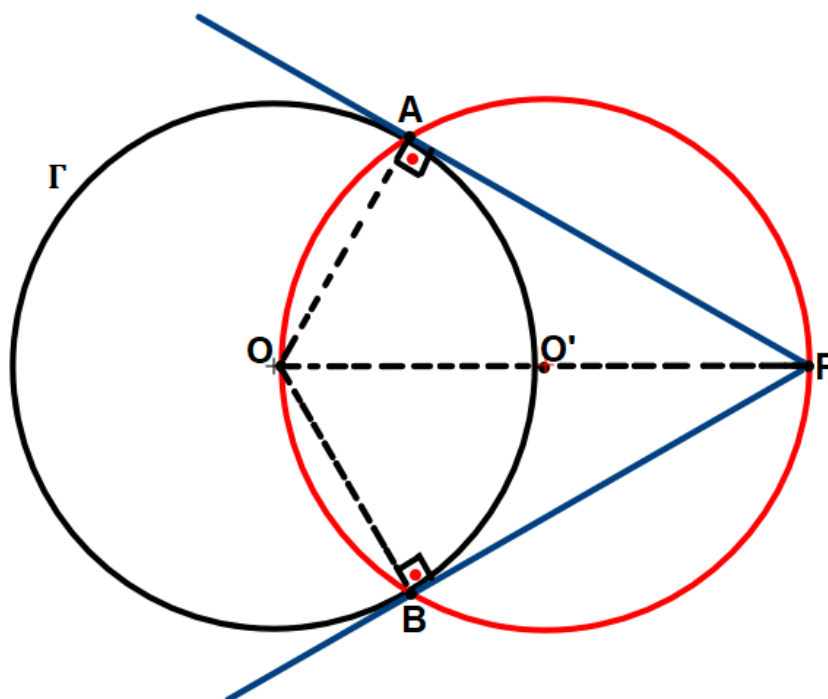
Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Para justificar tal construção, devemos provar a seguinte proposição sobre retas tangentes a uma circunferência: “Dados, no plano, um círculo Γ e um ponto P exterior ao mesmo, há exatamente duas retas tangentes a Γ passando por P .”

Demonstração:

→ Dados dois círculos secantes em A e B , seja O o centro do primeiro, O' o centro do segundo e P um ponto exterior ao círculo Γ e pertencente a circunferência de diâmetro OP , conforme mostra a Fig. 229.

Figura 229 – Construção das semirretas PA e PB tangentes a Γ



Fonte: Elaboração própria

Os semicírculos superior e inferior do círculo traçado de diâmetro OP podem ser vistos como os arcos capazes de 90° sobre o segmento OP , daí, $\widehat{OAP} = \widehat{OBP} = 90^\circ$. Portanto, os raios OA e OB são perpendiculares às retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$, respectivamente, logo essas retas são tangentes ao círculo Γ .

← Reciprocamente, supondo existir uma reta r passando por P e tangente ao círculo Γ em X , tal que $OX \perp \overleftrightarrow{XP}$. Logo, X pertence a um dos arcos capazes de 90° sobre OP e, portanto, X é comum aos dois círculos traçados, daí concluímos que $X = A$ ou $X = B$.

Nos próximos problemas, faremos construções baseadas em equações algébricas, adotando como incógnita algum segmento desconhecido e vamos tentar exprimi-lo em função de elementos já conhecidos. Com isso, obteremos uma "fórmula" que calcula esse segmento desconhecido em função dos dados do problema. Para início é importante as definições a seguir:

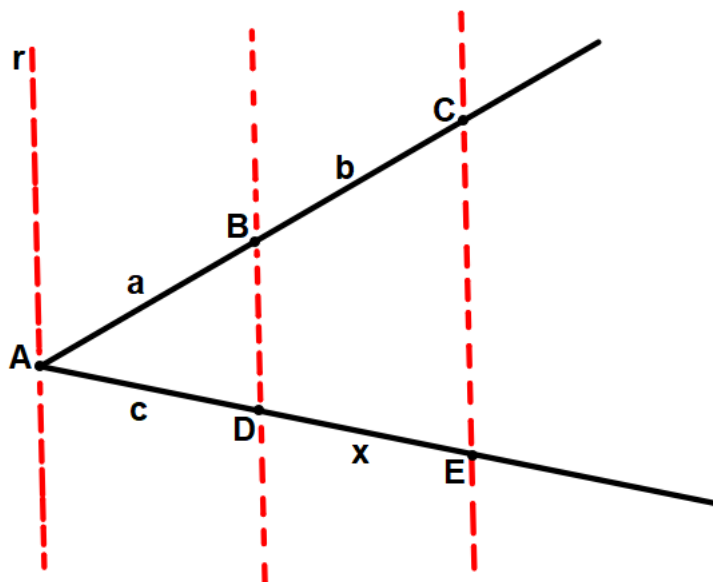
a) **A 4ª proporcional**: Dados três segmentos de medidas conhecidas a , b , c e seja x a medida de um quarto segmento desconhecido que se quer conhecer, o qual

chamaremos de quarta proporcional. Fazendo uma interpretação baseada na propriedade de proporção temos a seguinte relação:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \Leftrightarrow ax = bc \text{ (I)}$$

Fazendo uma interpretação geométrica para essa relação, baseada no **Teorema de Tales** o qual Dolce e Pompeo (2005, p. 185) define: “Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra”. Sendo assim, imagine um ângulo de vértice **A** de lados tais que sobre um deles tenhamos os segmentos $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, e sobre o outro lado, o segmento $\overline{AD} = c$. Tracemos por **C** uma reta paralela a **BD** que encontra a reta $\overline{AD}$ no ponto **E**, de modo que $\overline{DE} = x$ é uma solução para o problema da relação (I), uma vez que podemos traçar por **A** uma reta **r** paralela a **BC**, obtendo assim três retas paralelas: **r**, $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ cortadas pelas transversais $\overline{AC}$ e $\overline{AE}$. Pelo **Teorema de Tales**, os segmentos determinados por essas retas são proporcionais e, portanto, o segmento de medida **x** é uma solução para a equação $ax = bc$. Veja na Fig. 230 um esboço dessa construção.

Figura 230 – Retas paralelas cortadas por retas transversais



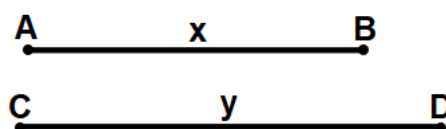
Fonte: Elaboração própria

b) Dados dois segmentos de medidas x e y , e suas médias:

- Média Aritmética: $\frac{x+y}{2}$
- Média Geométrica: $\sqrt{xy}$

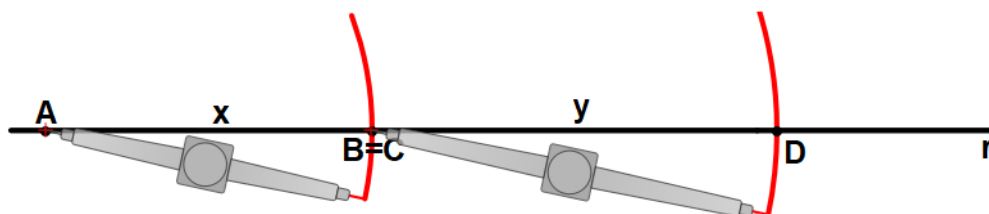
Pensado em uma construção para a **média aritmética**, podemos pensar da seguinte maneira: Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tais que $\overline{AB} = x$ e $\overline{CD} = y$ (Figura 231), é possível encontrarmos os segmentos que equivalem a metade do segmento $\overline{AD} = x + y$, bastando para isso traçar uma reta r , e com o compasso, traçar os segmentos de medidas $\overline{AB} = x$ e $\overline{CD} = y$ consecutivamente, uma vez que $\overline{AD} = x + y$. Ainda com o compasso, marque o ponto médio M do segmento AD . Temos que os segmentos $\overline{AM}$ ou $\overline{DM}$ são soluções para o problema inicial, uma vez que $\overline{AM} = \overline{DM} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} = \frac{x+y}{2}$. As Figuras 232 e 233 esboçam os passos descritos anteriormente.

Figura 231 – Segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de medidas x e y respectivamente



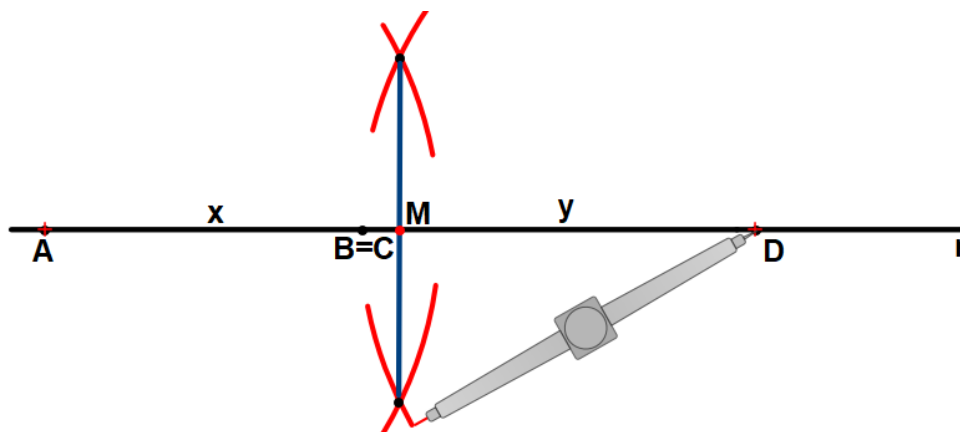
Fonte: Elaboração própria

Figura 232 – Transporte dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ para a reta r



Fonte: Elaboração própria

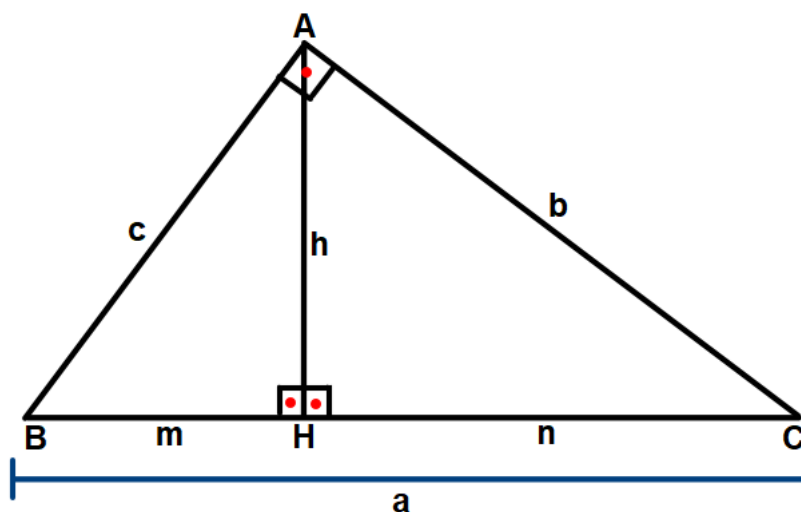
Figura 233 – Marcando o ponto médio M do segmento AD



Fonte: Elaboração própria

Pensando agora em uma construção geométrica que se relaciona com a **média geométrica**, recorreremos ao conhecimento de relações métricas no triângulo retângulo, para isso vamos relembrar as principais relações métricas no triângulo métrico da Fig. 234.

Figura 234 – Triângulo métrico ABC



Fonte: Elaboração própria

Dolce e Pompeo (2005, p. 222) elenca as seguintes relações métricas:

(I) $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras)

(II) $b^2 = a \cdot n$

(III) $c^2 = a \cdot m$

(IV) $a \cdot h = b \cdot c$

(V) $h^2 = m \cdot n$

Destacando as relações (II) e (III) e (V) temos uma aplicação direta da média geométrica, à saber:

(II) $b^2 = a \cdot n \Leftrightarrow b = \sqrt{a \cdot n}$, ou seja, o cateto **b** é igual a média geométrica da hipotenusa com a projeção ortogonal do cateto **b**.

(III) $c^2 = a \cdot m \Leftrightarrow c = \sqrt{a \cdot m}$, ou seja, o cateto **c** é igual a média geométrica da hipotenusa com a projeção ortogonal do cateto **c**.

(V) $h^2 = m \cdot n \Leftrightarrow h = \sqrt{m \cdot n}$, ou seja, a altura relativa a hipotenusa **h** é igual a média geométrica das projeções ortogonais dos catetos **b** e **c**.

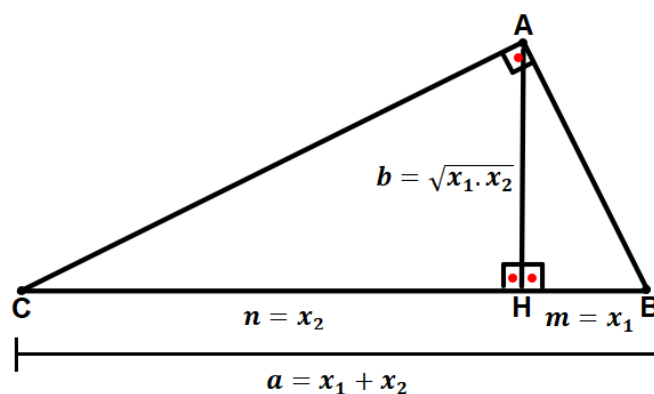
Com as noções de 4ª proporcional e média geométrica, vamos resolver algumas **equações do 2º grau** em que seus coeficientes são segmentos dados.

PROBLEMA 38: Resolva graficamente a equação do 2º grau $x^2 - ax + b^2 = 0$, em que **a** e **b** são segmentos.

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - ax + b^2 = 0$. Suponha que $x_1 + x_2 = a$ e que $x_1 \cdot x_2 = b^2$. Da última igualdade, podemos escrever que $b = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$, ou seja, **b** é a média geométrica das raízes da equação dada. Dessa forma temos que encontrar dois segmentos **a** e **b**, tais que o primeiro se conhece supostamente sua soma e o segundo sua média geométrica.

Passo 1: Imagine o desenho pronto.

Ao se pensar em um segmento **b** tal que sua medida seja igual a média geométrica entre as raízes x_1 e x_2 da equação dada e que outro segmento **a** tem medida igual à soma dessas mesmas raízes, isso nos remete ao que foi visto no triângulo métrico e suas relações. Pois sabemos que a altura **h** relativa a hipotenusa do triângulo métrico (Fig. 235) corresponde justamente a média geométrica das projeções **m** e **n**, de tal forma que $a = m + n$. Fixando a Fig. 234, os segmentos **h** e **a** cumprem as características de **b** e **a**, respectivamente, do problema em questão. Dessa forma podemos chamar $h = b$, $m = x_1$, $n = x_2$ e $a = x_1 + x_2$. Assim a altura (**h**) do triângulo métrico é o segmento **b** procurado, e a hipotenusa **a** do triângulo métrico coincide exatamente com o segmento **a** procurado. Veja na Fig. 235 um esboço desse raciocínio.

Figura 235 – Triângulo métrico ABC

Fonte: Elaboração própria

Nos passos seguintes, iremos fazer a construção focada no triângulo métrico em questão.

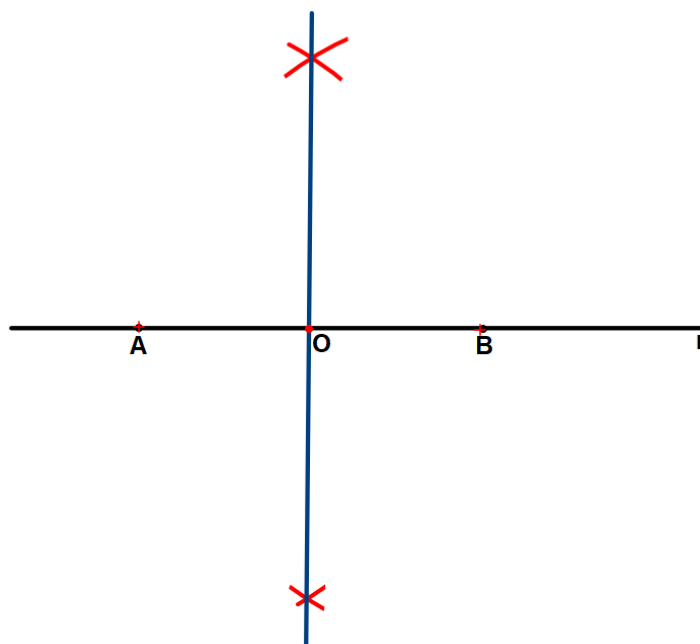
Passo 2: Trace uma reta r e marque sobre ela dois pontos **A** e **B** (Fig. 236).

Figura 236 – Pontos A e B sobre a reta r 

Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Marque o ponto médio **O** do segmento **AB** (Fig. 237).

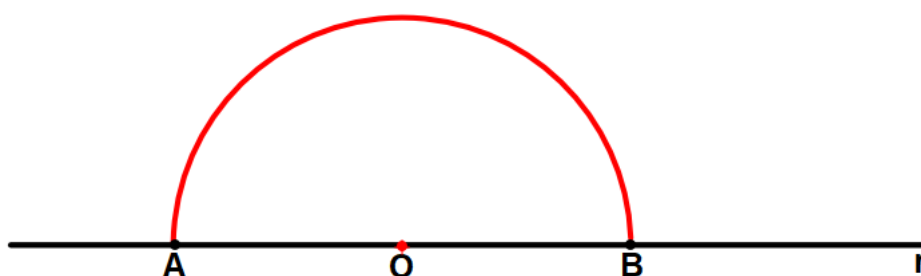
Figura 237 – Traçando o ponto médio O de AB



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Com auxílio de um compasso, trace uma semicircunferência **AB** de centro **O** e raio $\overline{OA} = \overline{OB}$ no semiplano superior da reta **r** (Fig. 238).

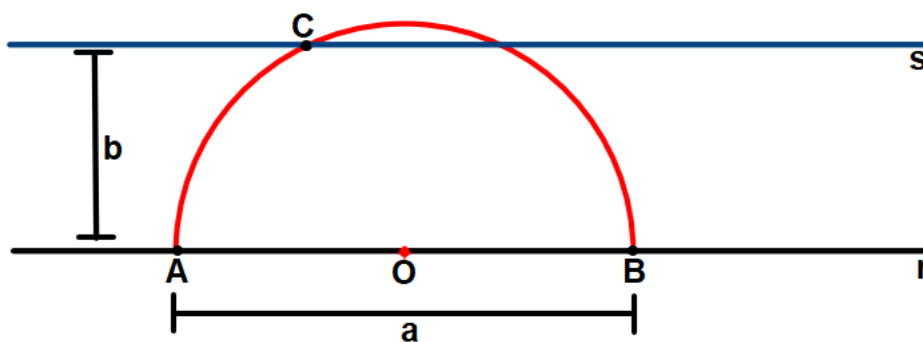
Figura 238 - Semicircunferência **AB**



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Faça $\overline{AB} = a$ e em seguida trace uma reta **s** paralela à **r** que corta o arco **AB** em **C**, tal que a distância entre **r** e **s** seja igual a **b**. É necessário que tenhamos um critério para a medida **b** baseada nas condições $b = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ e $a = x_1 + x_2$. Com isso, da desigualdade de médias, considere para construção que devemos ter $\frac{a}{2} > b$ (Fig. 239).

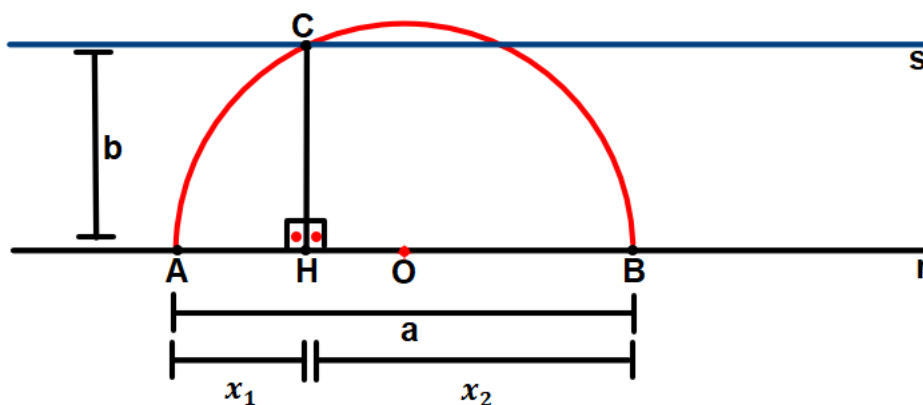
Figura 239 – Traçando a reta **s** paralela à reta **r** pelo ponto **C**



Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Trace por **C** uma perpendicular à **AB**. Chamemos de **H** o pé dessa perpendicular. Com isso encontramos os segmentos **a** e **b** procurados; $b = \overline{CH}$ e $a = \overline{AH} + \overline{BH}$, com $\overline{AH} = x_1$ e $\overline{BH} = x_2$ (Fig. 240).

Figura 240 – Traçando a perpendicular à **AB** passando por **C**



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Traçando os segmentos **AC** e **BC** na Fig. 240, obtemos um triângulo **ABC** que é retângulo em **C**, pois o centro **O** do semicírculo pertence ao diâmetro **AB** e o ângulo **ACB** é inscrito na semicircunferência e mede metade do ângulo central **AOB** correspondente. Com isso temos que o ângulo **ACB** mede metade do ângulo raso $\widehat{AOB} = 180^\circ$, ou seja, $\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Desse modo, o triângulo **ABC** é um triângulo métrico, como visto na página 167. Portanto $b = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$ e $a = x_1 + x_2$ são os segmentos procurados que satisfazem a equação $x^2 - ax + b^2 = 0$.

Para a próxima construção se faz necessário enunciar e provar o **teorema das cordas** (potência de ponto) o qual Muniz Neto (2013, p. 202) anuncia: “Se **A**, **B**, **C** e **P** são pontos distintos do plano, com $B \in AP$ e $C \notin \overleftrightarrow{AB}$, se o círculo que passa pelos pontos **A**, **B** e **C** é tangente à reta $\overleftrightarrow{PC}$ em **C**, então $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$.”

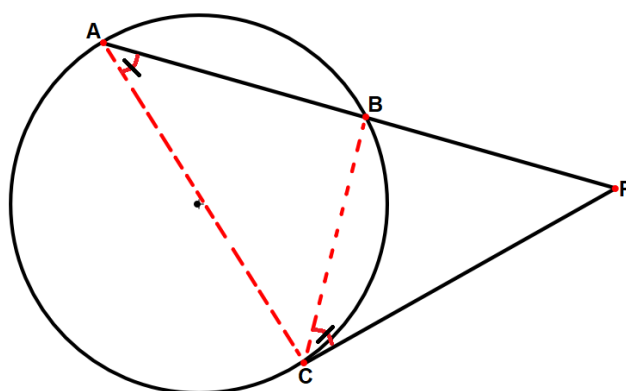
Demonstração:

Supondo que o círculo que passa pelos pontos **A**, **B** e **C** (Fig. 241) é tangente à reta $\overleftrightarrow{PC}$ em **C** e o segmento **PA** é secante a mesma. Os triângulos **PCA** e **PCB** são semelhantes (caso **AA**), pois possuem o ângulo $\hat{P}$ em comum e os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{PCB}$ são ângulos inscritos na circunferência subtendidos sobre mesmo arco **BC** menor, portanto temos que $\hat{A} = \hat{PCB}$. Como consequência da congruência dos triângulos **PCA** e **PCB**, os seus lados correspondentes são proporcionais, vem:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \leftrightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$$

Como queríamos provar.

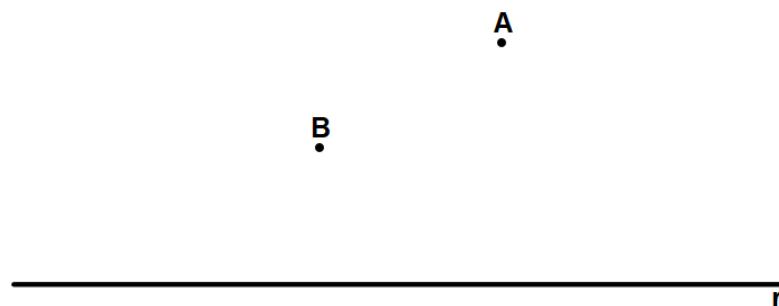
Figura 241 – Circunferência passando pelos pontos **A**, **B** e **C**, e ponto **P** exterior a mesma



Fonte: Elaboração própria

PROBLEMA 39: São dados dois pontos **A** e **B** de um mesmo lado de uma reta **r**, tal que o segmento **AB** não é paralelo à reta **r**. Construa uma circunferência passando por **A** e **B** e que seja tangente a reta **r** (Fig. 242).

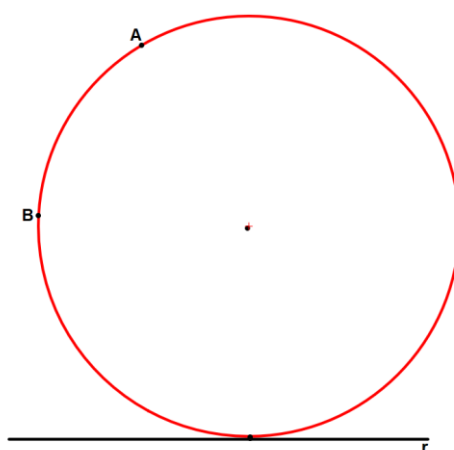
Figura 242 – Reta **r** e pontos **A** e **B**



Fonte: Elaboração própria

Passo 1: Imagine o desenho pronto, tal como na Fig. 243.

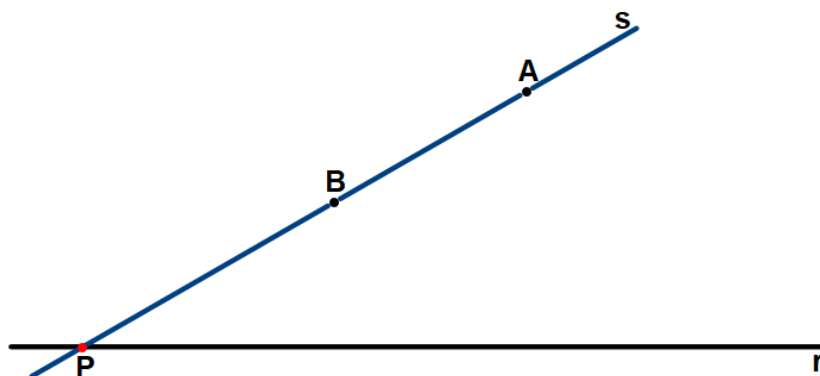
Figura 243 – Circunferência passando pelos pontos **A** e **B** e tangente a reta **r**



Fonte: Elaboração própria

Passo 2: Na Fig. 242, trace uma reta **s** passando por **A** e **B** que intercepta a reta **r** no ponto **P** (Fig. 244).

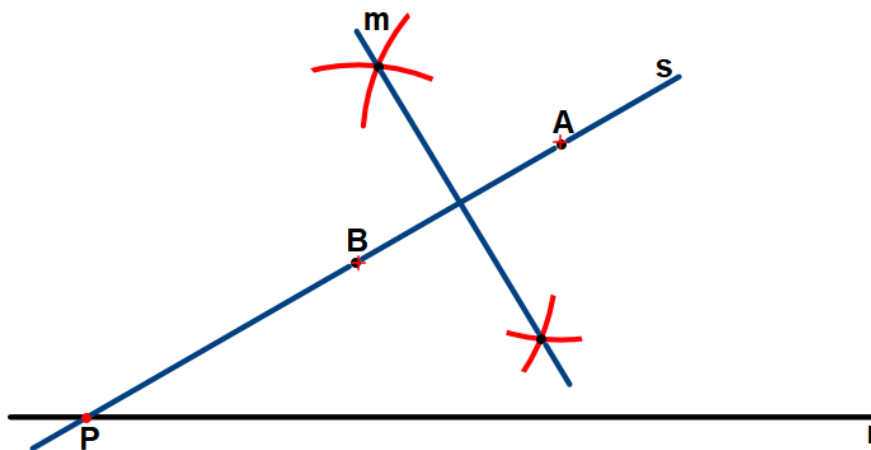
Figura 244 – Traçando a reta **s**



Fonte: Elaboração própria

Passo 3: Com o auxílio de um compasso, trace a mediatriz **m** do segmento **AB** (Fig. 245).

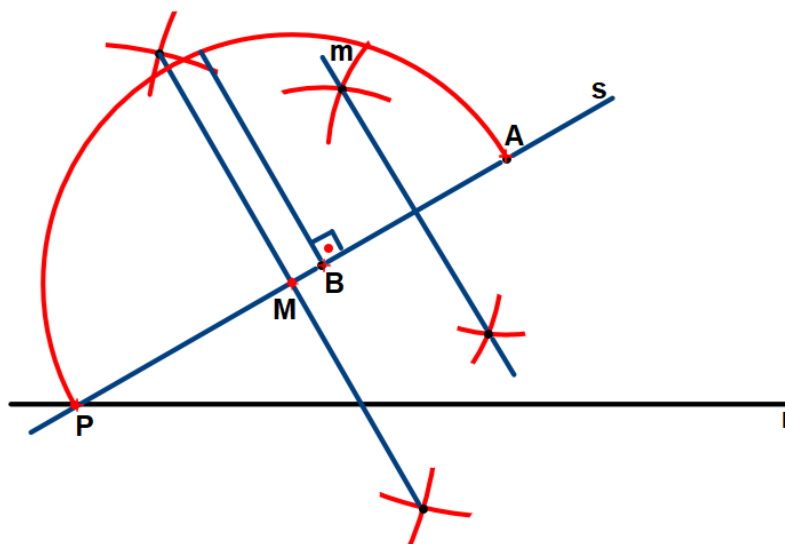
Figura 245 – Traçando a mediatriz **m** de **AB**



Fonte: Elaboração própria

Passo 4: Supondo que exista uma circunferência passando por **A** e **B** e tangente a reta **r** em **T**, de tal forma que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$, conforme o teorema das cordas enunciado na Pág. 170. Para esse feito, devemos inicialmente encontrar o centro dessa circunferência. Dessa forma, na Fig. 245, marque o ponto médio **M** do segmento **PA** e em seguida trace o semicírculo de centro **M** e raio $\overline{MP} = \overline{MA}$ (Fig. 246).

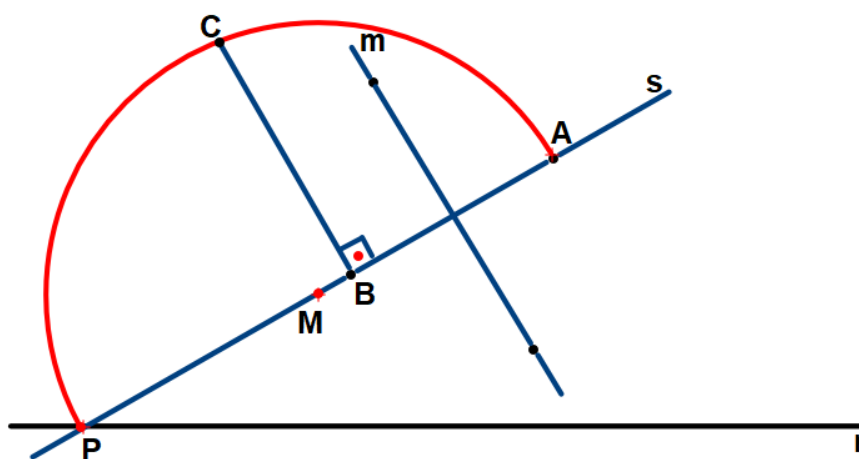
Figura 246 – Traçando o semicírculo **PB** de centro **M** e raio $\overline{MP} = \overline{MA}$



Fonte: Elaboração própria

Passo 5: Apagando convenientemente alguns elementos traçados na Fig. 246, em seguida, trace uma perpendicular à reta s passando por B que encontra o semicírculo PA no ponto C (Fig. 247).

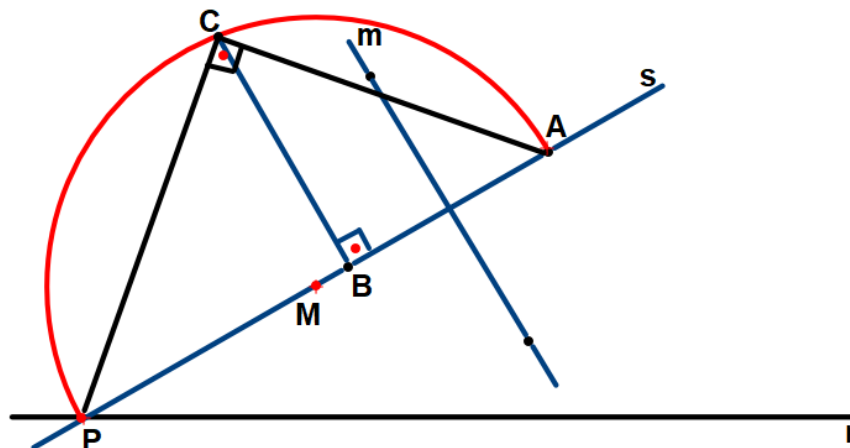
Figura 247 – Traçando a perpendicular à reta s por A



Fonte: Elaboração própria

Passo 6: Trace os segmentos PC e AC . Obtemos o triângulo métrico PAC retângulo em C (Fig. 248).

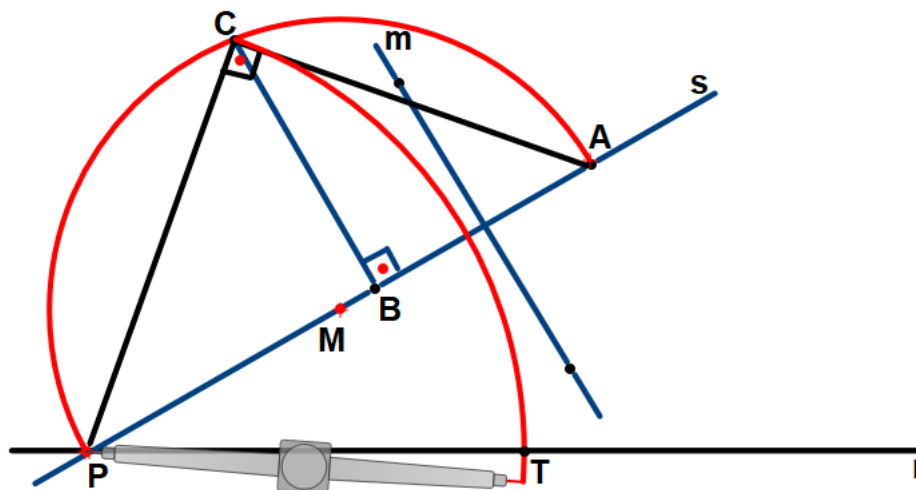
Figura 248 – Traçando os segmentos PC e BC



Fonte: Elaboração própria

Passo 7: Trace um arco de circunferência de raio $\overline{PC}$ e centro P que encontra a reta r em T , como ilustrado na Fig. 249.

Figura 249 – Traçando arco de circunferência de centro P e raio $\overline{PC}$

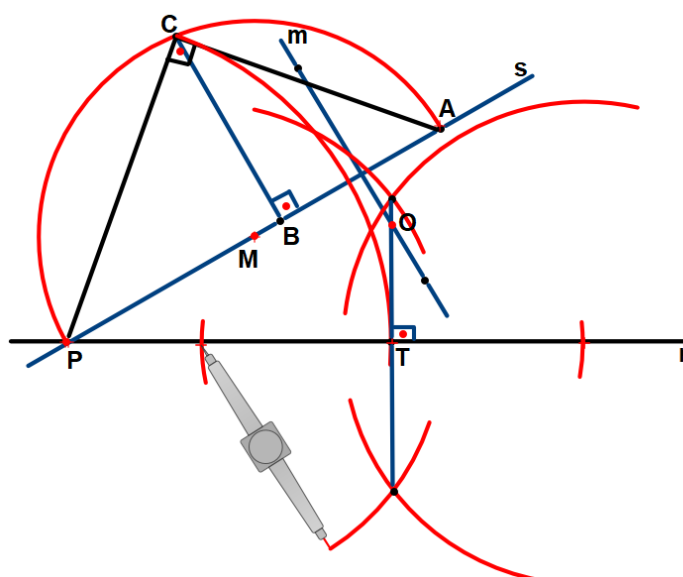


Fonte: Elaboração própria

O teorema das cordas anunciado na Pág. 170, garante que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$ e pelas relações métricas apresentadas nas páginas 165 e 166, temos que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$, dessas duas relações, vem que $\overline{PC} = \overline{PT}$.

Passo 7: A partir da Fig. 249, trace uma perpendicular à r passando por T que encontra a mediatriz m em O (Fig. 250).

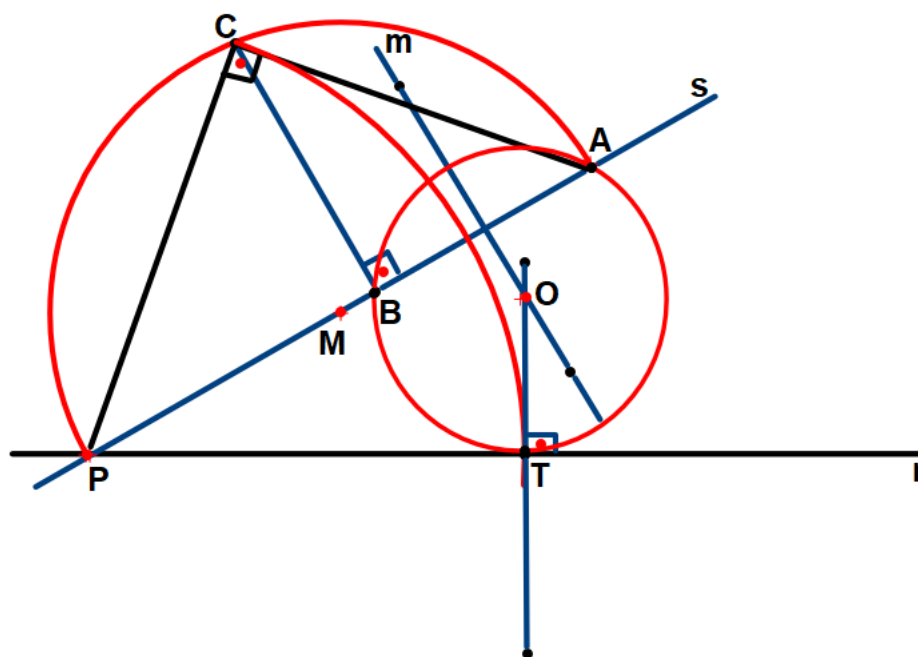
Figura 250 – Traçando a reta TO perpendicular à r



Fonte: Elaboração própria

Passo 8: Apagando convenientemente alguns elementos traçados na Fig. 250, em seguida, trace uma circunferência de centro O e raio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OT}$ que passa pelos pontos A , B e T . Com isso fizemos o desenho almejado (Fig. 251).

Figura 251 – Traçando circunferência de centro O e raio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OT}$



Fonte: Elaboração própria

Justificativa: Na Fig. 251, provemos que a circunferência de centro **O** traçada acima, passa pelos pontos **A** e **B** e é tangente a reta **r** no ponto **T**. Como **m** é mediatriz de **AB**, pela sua caracterização como **LG**, temos que $\overline{OA} = \overline{OB}$. Como **OT** é perpendicular a reta **r** em **T** (Por construção), vem que **OT** é raio da circunferência de centro **O**, pois a mesma é tangente a reta **r** em **T** (Por construção). Desse fato, temos que a circunferência de centro **O** e raio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OT}$ é a circunferência que passa pelos pontos **A** e **B**, e é tangente a reta **r** em **T**.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho dissertamos sobre a história do desenho geométrico ao longo das civilizações, mostrando sua importância para a matemática, sobre o ensino do desenho geométrico nas escolas, seus desafios e sobre a necessidade de aplicação em sala de aula como ferramenta prática e facilitadora do processo de ensino e aprendizagem.

Por outro lado, este trabalho atende a seu propósito por oferecer um material estruturado com sugestões de construções com diferenciação do nível de dificuldade por série. Com as construções apresentadas, o nosso objetivo foi alcançado, na medida em que ofertamos aos professores da área, um material de apoio para eventual aplicação em sala de aula.

As construções foram feitas com muitos detalhes e em vários passos, todos com figuras e acompanhadas de justificativas quando necessário, com o objetivo de facilitar o entendimento do leitor e ser de fácil acessibilidade.

Com isso, espera-se que os professores da educação básica encontrem nesse trabalho uma espécie de manual de construções geométricas de fácil entendimento e aplicação em sala de aula.

REFERÊNCIAS

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**: coleção formação de professores. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2010.

ÁVILA, Geraldo. Euclides, **Geometria e fundamentos**. Revista do Professor de Matemática, edição 45, p. 16-20, 2010.
Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/45/1.htm>.
Acesso em: 27 Nov. 2022.

PUTNOKI, J. C. **Elementos de geometria e desenho geométrico**. São Paulo: Spicione, 1993. 192 p.

OLIVEIRA, Clézio Lemes. **Importância do desenho geométrico**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Católica de Brasília. Brasília. 2005.
Disponível em <http://www.matematica.ucb.br/sites/000/68/00000002.pdf>
Acesso: 27 nov. 2022.

OLIVEIRA, Lucas Maken da Silva Oliveira. **Ensinando geometria com régua e compasso, uma proposta para o 8º ano**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional) - Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, RJ, 2015.
Disponível em:
<https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wpcontent/uploads/sites/14/2017/09/27112015Lucas-Maken-da-Silva-Oliveira.pdf>
Acesso em: 28 nov. 2022.

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro: Impa, 2015.

LOBATO, Lydia Fernandes *et al.* **Desafios do ensino de geometria no ensino médio**. 2019. Disponível em:
http://bia.ifpi.edu.br:8080/jspui/bitstream/123456789/582/2/2019_tcc_lflobato.pdf.
Acesso em: 13 jan. 2023.

PEREIRA, Josivaldo Francisco. **O ensino da geometria na sala de aula do ensino médio e uma experiência com o PIBID - UEPB**. Monografia - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, Paraíba 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental, **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

FONSECA, Maria da Conceição F.R., LOPES, Maria da Penha, BARBOSA, Maria das Graças Gomes, GOMES, Maria Laura Magalhães, DAYRELL, Mônica Maria Machado S. S. **O ensino da geometria na escola fundamental: três questões para formação do professor de matemática dos ciclos iniciais**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

MIRANDA, G.R; SILVA, V.C. **Geometria: uma breve história e possibilidades para o ensino**. Gnosis Carajás, [S.L.], v. 1, n. 1, p. 1-12, 2021.

BURNS, E. M. **História da civilização ocidental**. 40. ed. São Paulo: Globo, 401 p, 2000.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. São Paulo: Zahar 2012.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

ALMEIDA, Manoel de Campos. **Pré-história da geometria**: origens, evolução e neurociência da geometria. Curitiba: Cbl, 2020.

MORAIS, Érica Siani. **Heródoto e o Egito**: tradução e comentário do livro ii das histórias. 5. ed. São Paulo: Issn, 2000

BROCA, J.B. **Horodoto história**: o relato clássico da guerra entre gregos e persas. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2020. 392 p.

DOMINGUES, J.E. **Oso de ishang**: os primórdios da Matemática na África Paleolítica Obrigado por compartilhar. - Blog: Ensinar História -. Disponível em: <https://ensinarhistoria.com.br/osso-de-ishango-primordios-da-matematica-na-africa-paleolitica/>. Acesso em: 26 maio 2022.

JESUS, B.G. **Série educar**: linguagem matemática. Belo Horizonte: Poisson, 2020. 138 p.

REIS, A.M. **A matemática Egípcia** – solução de alguns problemas algébricos do papiro de Rhind. 2018. 58 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Superior Federal de Tecnologia, São Paulo, 2018.

GASPAR, J. **Matemática no antigo Egito**. 2013. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/antigoegito2%20.htm>. Acesso em: 01 dez. 2022

GORODSKI, Claudio. Um breve panorama histórico da geometria. **Revista matemática universitária**, n. 44, p. 14-29, 2009.

RIBEIRO, Adriano; GUIMARÃES, Túlio. **História da geometria não-euclidiana**. Scientia Generalis, Patos, v. 2, n. 1, p. 1-16, 2020.

DINIZ, Alex Santos Moura. **Uma análise histórica sobre Os Elementos de Euclides**. 2020. 82 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Rede – Matemática em Rede Nacional/CCET) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2020.

HEATH, Thomas Little et al. (Ed.). **The thirteen books of Euclid's Elements**. Courier Corporation, 1956.

BATISTA, Amazilde de Farias. **Construções geométricas, insolubilidade de soluções dos problemas clássicos e aplicações no ensino básico**. 2018. 58 f.

Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2018.

BONGIOVANNI, V; JAHN, A.P. **De Euclides às geometrias não euclidianas**. UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, v. 22, p. 37-51, 2010.

LOBATO, Lydia Fernandes. **Desafios do ensino de geometria no ensino médio**. 2019. 13 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em docência do ensino de Matemática) - Instituto Federal do Piauí - Campus Corrente, Corrente, 2019.

SILVA, Silvia Renata Florentino Camargo. **O ensino da geometria no ensino fundamental e sua importância**. 2021. 22 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Pedagogia, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes da geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 277 f. Tese (Doutorado) - Curso de Informática da Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

SANTOS, S.M.F; LEAL, D.A. **O ensino da matemática no brasil com ênfase na geometria / the teaching of mathematics in brazil with an emphasis on geometry**. Brazilian Journal Of Development, [S.L.], v. 7, n. 1, p. 10647-10662, 2021.

MARSCHALL, J.; FIOREZE, L. A. **GeoGebra no ensino das transformações geométricas: uma investigação baseada na teoria da negociação de significados**. Porto Alegre: UFRGS, 2015.

SILVA, Rosângela Araújo da. **As dificuldades do professor no ensino da geometria espacial nas escolas estaduais no município de Santa Cruz**. In: IV ENCONTRO DE INICIAÇÃO A DOCÊNCIA DA UEPB, 4., 2014, Campina Grande. IV encontro de iniciação a docência da UEPB. Si: Si, 2014. p. 1-5.

MARQUES, V. D.; CALDEIRA, C. R. da C. **Dificuldades e carências na aprendizagem da matemática do ensino fundamental e suas implicações no conhecimento da geometria**. Revista Thema, [S. l.], v. 15, n. 2, p. 403–413, 2018.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** A Educação Matemática em Revista, SBEM, ano 3, p.3-13, jan/jun.1995.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática 1º e 2º ciclos**. Brasília: MEC: SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC: SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília, 2018.

CLARE O'HAGAN. Unesco. **Dados da UNESCO mostram que, em média, dois terços de um ano acadêmico foram perdidos em todo o mundo devido ao fechamento das escolas devido à COVID-19**. 2021.

GONÇALVES CALDEIRA BRANT LOSEKANN, R.; CARDOSO MOURÃO, H. **Desafios do teletrabalho na pandemia covid-19: quando o home vira office**. Caderno de Administração, v. 28, p. 71-75, 5 jun. 2020.

MARKUS HOHENWARTER (Austria). **Geogebra. O que é o GeoGebra?** 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 04 dez. 2022.

NASCIMENTO, D.L; VIEIRA J.R.. **Aplicativo para dispositivos móveis no ensino de geometria plana**. Revista Educação Pública, v. 19, nº 7, 9 de abril de 2019.

SAMPAIO, R.S; PAULO, R.M; OLIVEIRA, V. **Estudando volumes: possibilidades no ensino de geometria com o GeoGebra**. Revista Educação & Tecnologia, Curitiba, v. 1, n. 18, p. 90-108, 2018.

ARAUJO, R.E.G; PAZUCH, V. **Elaboração de objetos de aprendizagem com o software GeoGebra para o ensino de geometria**. Boletim Online de Educação Matemática, [S.L.], v. 6, n. 12, p. 55-74, 22 jan. 2019.

PEDRO, Laís Z. *et al.* **Projeto e desenvolvimento de um aplicativo de geometria interativa para dispositivos móveis**. Sbte, Si, v. 2, n. 1, p. 2-10, 2012.

GOMES, Allisson Pierre Lino *et al.* **GeometriAR: aplicativo educacional com realidade aumentada para auxiliar o ensino de sólidos geométricos**. Novas Tecnologias na Educação, Si, v. 17, n. 1, p. 2-10, 2019.

SOUZA, Rodrigo Duarte de. **O resgate do ensino de construções geométricas na educação básica**. 2013. 61 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissionalizante em Matemática, Departamento de Ciências Exatas e Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Santa Cruz, 2013.

SILVA, Henrique José de Ornelas. **Construções geométricas com régua, compasso e dobraduras**. 2018. 100 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissionalizante em Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2018.

PUTNOKI, José Carlos. **Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso**. Revista do professor de matemática, Sociedade Brasileira de Matemática São Paulo; Associação Palas.Athena do Brasil, 13, pag 13-17, 1988.

RODRIGUES, Andreia Alves. **O desenho geométrico no 9º ano como estratégia didática no ensino da geometria**. 2017. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissionalizante em Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceio, 2017.

JESUS, Gilson Bispo de. **Construções geométricas: uma alternativa para desenvolver conhecimentos acerca da demonstração em uma formação continuada**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

GOMES, Fabricio de Jesus Leite. **Construções geométricas teoria e aplicações**. 2017. 67 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

SALGADO, Jacymar de Almeida. **Reflexões quanto à importância das construções geométricas no ensino da geometria plana**. 2013. 100 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

VIEIRA, A.A; ESCHER, M.A. **Construções geométricas utilizando régua e compasso e softwares educacionais**. Revista de Educação, Ciências e Matemática, v. 8, n. 1, 2018.

MONTEIRO, J.M; VASQUEZ, E.L. **Ensino de poliedro regular com uso do software Poly: uma experiência desenvolvida na educação escolar indígena**. ReDiPE: Revista Diálogos e Perspectivas em Educação, v. 1, n. 1, p. 92-110, 2019.

COUTO, C.B; DOS SANTOS JÚNIOR, R.A. **O uso da tecnologia no ensino da matemática: a utilização do software régua e compasso na geometria plana**. Revista Femass, v. 4, n. 1, p. 94 a 111-94 a 111, 2021.

SANTOS, M. L. T; FERREIRA, M. B. C. **Anos finais do ensino fundamental: opinião de professores de matemática sobre o ensino de geometria**. *Anais do XVII Encontro Baiano de Educação Matemática*. Alagoinhas: 2017.

SANTOS, Simone Maria Ferreira dos; LEAL, Débora Araújo. **O ensino da matemática no Brasil com ênfase na geometria / the teaching of mathematics in Brazil with an emphasis on geometry**. Brazilian Journal Of Development, [S.L.], v. 7, n. 1, p. 10647-10662, 2021.

SILVA, E.S; ANDRADE, S.A. **A ótica do professor formador sobre a integração das tecnologias à licenciatura em matemática**. Ciência & Educação (Bauru), [S.L.], v. 27, p. 1-11, 2021.

COSTA, Jorge Luis. **Prática de ensino: construções geométricas**, Cabo Frio, RJ: Ed. VISÃO, 2016.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana**. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de matemática elementar: geometria euclidiana plana**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2013.