



Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira
Instituto de Ciências Exatas e da Natureza
Curso de Licenciatura em Física

LUIZ DAVI DUARTE SERAFIM

O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

REDENÇÃO-CE
2024

LUIZ DAVI DUARTE SERAFIM

O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação da Graduação do Curso de Licenciatura em Física, da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito para a obtenção do Título de Licenciado.

Aluno: Luiz Davi Duarte Serafim

Orientador: Prof. Dr. Aurélio Wildson Teixeira de Noronha

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Serafim, Luiz Davi Duarte.

S481d

O problema restrito de três corpos / Luiz Davi Duarte Serafim. -
Redenção, 2024.

54f: il.

Monografia - Curso de Física, Instituto de Ciências Exatas e da
Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira, Redenção, 2024.

Orientador: Prof. Dr. Aurélio Wildson Teixeira de Noronha.

1. Problemas dos três corpos. 2. Ensino de Física. 3.
Mecânica clássica. I. Título

CE/UF/BSP

CDD 530

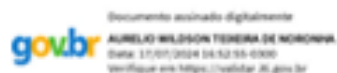
LUIZ DAVI DUARTE SERAFIM

O PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação da Graduação do Curso de Licenciatura em Física, da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito para a obtenção do Título de Licenciado.

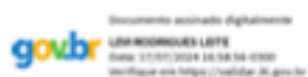
Aprovado em: 15/07/2024

BANCA EXAMINADORA



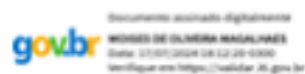
Prof. Dr. Aurélio Wildson Teixeira de Noronha

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira-UNILAB



Prof. Dr. Levi Rodrigues Leite

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira-UNILAB



Prof. Me. Moisés de Oliveira Magalhães

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira-UNILAB

Viva com orgulho. Se sua fraqueza o dominar, aqueça seu coração, cerre os dentes e siga em frente. Mesmo que sua covardia o retarde, não impedirá a passagem do tempo.

Kyojuro Rengoku - Demon Slayer - Kimetsu no Yaiba

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a Deus, pelo dom da vida, à minha família, especialmente meus pais, Iolanda e Serafim, por serem meus maiores exemplos de vida. Sou grato pelo apoio, pelas conversas, pelos conselhos e, acima de tudo, pelo amor incondicional de vocês durante toda a minha vida. Obrigado por estarem presentes ao meu lado nas minhas conquistas e também nos meus fracassos, por serem meu suporte e exemplo nos momentos difíceis, e por lutarem perante as dificuldades da vida para me concederem uma boa educação. Agradeço especialmente a você, mãe, por me ensinar a lutar pelos meus sonhos. Com este TCC, finalizo mais uma etapa da minha vida, graças ao apoio, carinho, zelo e, principalmente, amor de vocês. Nunca vou conseguir retribuir tudo o que vocês fizeram por mim, então a única coisa que consigo dizer é que EU AMO VOCÊS.

Agradeço também aos meus irmãos, Rafael e Isabele, por estarem sempre dispostos a me ajudar, às vezes nem sempre, né? Obrigado por cuidarem de mim e pelo apoio durante todos esses anos, mostrando o quão sortudo sou por ter vocês dois ao meu lado.

Sou grato a todos os meus professores de graduação: Prof. Aristeu, Prof. Michel, Prof. Philipe, Prof. Levi, Prof. Aurélio, Prof. Cinthia, Prof. Mylene e Prof. Silvia, por todo tempo, dedicação e conhecimento durante esses anos. Sei que não fui o melhor aluno, talvez o pior. A dedicação e disponibilidade de vocês me apresentaram o tipo de profissional e, acima de tudo, a pessoa que quero ser. Muitas vezes, vocês dedicaram seu tempo familiar para ajudar todos os alunos da melhor forma possível. A vocês, meu MUITO OBRIGADO. Espero que, no futuro, vocês possam olhar para mim e ter orgulho em dizer: "Ele foi meu aluno."

Especialmente, agradeço ao Prof. Dr. Aurélio Wildson Teixeira de Noronha pela orientação durante este trabalho, pela confiança que depositou em mim, pela oportunidade de ser seu bolsista de iniciação científica, pela paciência e por me fazer acreditar em mim mesmo, mesmo nos momentos em que nem eu acreditava que poderia vencer os desafios. O senhor, sem sombra de dúvidas, é um dos maiores exemplos do tipo de professor que quero me tornar: um professor que é muito profissional, mas também um bom companheiro e que sempre tenta ver o lado do aluno.

Ao GEPPAA, agradeço a todos os membros do grupo pelos momentos compartilhados, pela experiência adquirida e pelas aventuras vividas. Agradeço imensamente pelo processo de evolução que passei durante o convívio com o grupo, por me ajudarem a superar as barreiras da timidez, da ansiedade e da insegurança. Agradeço a todos os membros do grupo e, principalmente, ao líder, Prof. Dr. Michel Lopes Granjeiro, por sempre estar disposto a ajudar, por ser muitas vezes mais que um professor, um amigo, que ensina, aconselha e dá bons exemplos, por participar fielmente do meu processo de

evolução acadêmica e pessoal.

Agradeço aos meus colegas de turma, Alexsandra, Nilson, Larysse, Levi, Tayanne (Any), Átila, Marília, Emily, Luana, Thaynara (por incrível que pareça), Nicolas, Eurico, Carol, Saulo, Samuel, Wesley e Mateus. Todos vocês fizeram parte da minha vida e eu sou muito grato a vocês. Passamos por momentos difíceis, que muitas vezes acreditamos que seriam impossíveis, mas aqui estamos nós. Saibam que levarei vocês pelo resto da minha vida. Sei que muitas vezes não fui o amigo que vocês mereciam, mas adorei ter conhecido cada um de vocês.

Agradeço à CAPES, à UNILAB e a todos os funcionários que compõem essa incrível instituição. Minha formação foi graças a esse incrível conjunto de fatores que me deram a oportunidade de estudar e fazer parte dessa instituição.

Vencemos!

RESUMO

O problema dos três corpos é um dos mais intrigantes da física clássica. Sua aparência relativamente simples traz consigo um dos problemas mais complexos que a física já desenvolveu. Inicialmente formulado por Newton, esse problema recebeu muitas contribuições de diversos cientistas, como Euler, Lagrange, entre outros, na tentativa de compreendê-lo melhor. Essas contribuições trouxeram inúmeras possibilidades de enxergar o problema sob diferentes perspectivas. Uma dessas consequências é o problema dos três corpos no caso restrito, que até os dias de hoje é bastante procurado em áreas de inovação tecnológica espacial devido à sua grande aplicabilidade. Esse conhecimento é utilizado, por exemplo, na simulação e no lançamento de satélites em pontos específicos do espaço onde a força resultante é nula. Tendo isso em mente, e com o auxílio da linguagem de programação Python, que nos ajuda na criação de gráficos e ferramentas computacionais, apresentamos a formulação do problema, as considerações iniciais e a solução para o mesmo no caso restrito, utilizando Python como uma ferramenta para construção de gráficos e sistemas.

Palavras-chave:Caso restrito de três corpos. Ensino de Física. Mecânica Clássica.

ABSTRACT

The three-body problem is one of the most intriguing issues in classical physics. Despite its relatively simple appearance, it presents one of the most complex challenges that physics has ever encountered. Initially formulated by Newton, this problem has received numerous contributions from various scientists, such as Euler and Lagrange, among others, in an attempt to better understand it. These contributions have provided countless possibilities to approach the problem from different perspectives. One significant outcome is the three-body problem in the restricted case, which remains highly relevant in areas of space technological innovation due to its wide applicability. This knowledge is used, for example, in the simulation and launch of satellites at specific points in space where the resulting force is zero. With this in mind, and with the aid of the Python programming language, which assists us in creating graphics and computational tools, we present the formulation of the problem, the initial considerations, and the solution for it in the restricted case, using Python as a tool for building graphics and systems.

Keywords: Restricted three-body case. Teaching Physics. Classical Mechanics.

LISTA DE FIGURAS.

Figura 1. Exemplo do um MHS com posição inicial, sua velocidade inicial e a sua frequência angular Representação do sistema contendo três partículas pontuais denominadas, m_1, m_2 e m_3 . Ambas com massas distintas e em posições distintas	7
Figura 2. Representação do sistema contendo três partículas pontuais em distâncias distintas ao redor de um centro de massa que está disposto na origem do nosso sistema.	8
Figura 3. Representação do sistema contendo três partículas pontuais em distâncias distintas ao redor de um centro de massa que está disposto na origem do nosso sistema.	9
Figura 4. Configuração do Método de Euler.	9
Figura 5. Solução do polinômio de 5 ^o grau com $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ e $m_3 = 3$	16
Figura 6. Gráfico da solução colinear proposta por Euler.. . . .	17
Figura 7. Gráfico da solução equilátera proposta por Lagrange.	19
Figura 8. Idelização das posições das partículas.	20
Figura 9. Plot Pontos de Lagrange do Sistema Terra-Lua.	29
Figura 10. Plot Pontos de Lagrange do Sistema Sol-Júpiter.	30
Figura 11. Plot Posição Percorrida por Plutão na interferência de Sol e Júpiter. . . .	30

LISTA DE SÍMBOLOS

F	Força
P	Momento
L	Lagrangeana
q	Coordenada generalizada da posição
\dot{q}	Coordenada generalizada da velocidade
μ	Massa Reduzida
ω	Velocidade angular
G	Constante gravitacional

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	O PONTO DE PARTIDA: AS LEIS DE NEWTON E A EQUAÇÃO DE LAGRANGE	3
2.1	As Leis de Newton e o Princípio Fundamental da Dinâmica.	3
2.2	A Equação de Lagrange	4
3	INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS	5
3.1	Montagem do Sistema a partir de Mecânica Newtoniana.	5
4	APROXIMAÇÃO COM OS MÉTODOS DE EULER E LAGRANGE	10
4.1	Método de Euler	10
4.2	Método de Lagrange	17
5	O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS, O CASO RESTRITO CIRCULAR	20
5.1	O problema do movimento restrito dos três corpos.	20
5.2	Os Pontos de Lagrange	25
6	CONCLUSÃO	31
7	Referências Bibliográficas	32
A	APÊNDICE A - Comandos para a Exibição da Posição.	34
B	APÊNDICE B - Comandos do Plot dos Pontos de Lagrange	35
C	APÊNDICE C - Comando do Plot Raízes do polinômio $p(\lambda)$	36
D	APÊNDICE D - Comando do Plot da Solução de Lagrange	37
E	APÊNDICE E - Comando do Plot da Solução de Euler	38
F	APÊNDICE F - Comando do Plot da Sistema Júpiter-Sol	39

1 INTRODUÇÃO

A natureza do mundo é extremamente complexa. Acontecimentos cotidianos, como acender uma lâmpada em um quarto, observar o vapor saindo de uma xícara de café ou olhar para o céu e ver o movimento dos astros, revelam diversos fenômenos intrigantes da física. Momentos como esses passam despercebidos e são considerados eventos normais e sem importância. No entanto, aqueles que se dedicam a entender o desconhecido podem verdadeiramente apreciar a beleza dos pequenos detalhes. Dentre a diversidade de problemas que a física aborda, busca-se encontrar maneiras de descrevê-los, ou seja, expressá-los de forma conveniente, para posteriormente desvendar soluções para os mais diversos casos. Ao longo de mais de 2000 anos, inúmeros problemas surgiram, como a catástrofe do ultravioleta, o problema da órbita de Vênus, a equação de Navier-Stokes, o Princípio da Mínima ação entre outros ambos resolvidos, ou não, através teorias conhecidas como a Mecânica Quântica ou a Relatividade[1].

Durante anos, um problema tem chamado a atenção da Física e da Astronomia. A formulação desse problema é bem menos abstrata do que os problemas da relatividade e da mecânica quântica, e também possui um caráter menos complexo do que a determinação de conceitos como momento ou do tempo. Esse problema é denominado "o problema dos três corpos". Inicialmente formulado por Newton, ele propôs encontrar uma solução para um sistema de três partículas que interagem apenas entre si. Embora a proposta desse problema pareça mais simples que as anteriores, ele possui um grau de complexidade de tal modo que a solução analítica exata é inviável de ser calculada. Inúmeros cientistas tentaram encontrar uma solução, incluindo Euler, Jacobi, Lagrange, Laplace, Le Verrier, Hamilton, Poincaré e Birkhoff[2]. No entanto, nenhum deles encontrou uma solução concreta.

Por exemplo, Euler e Lagrange[3], estabeleceram métodos aproximativos para encontrar soluções para o problema dos três corpos, o que se mostrou de grande auxílio, pois as soluções por eles previstas demonstraram um certo grau de aplicabilidade. Além disso, a associação do problema dos três corpos traz uma importância fundamental para a astronomia, servindo como base para a identificação dos pontos de Lagrange. Esses pontos são locais no espaço, resultantes de uma certa configuração, onde um corpo, geralmente de massa muito menor em comparação com o sistema como um todo, encontra-se em equilíbrio.

Os objetivos desse trabalho são: Apresentar a formulação geral do problema de três corpos, Resolver as equações do problema restrito circular de três corpos e utilizar métodos numéricos para encontrar os pontos de Lagrange.

Nesse sentido, o presente trabalho foi dedicado ao estudo do problema dos três corpos, em especial o seu caso restrito. O trabalho foi dividido em seis capítulos,

distribuídos da seguinte maneira:

No Capítulo 1, foi apresentada a motivação para o estudo do problema dos três corpos, destacando sua perspectiva histórica e a origem do problema abordado neste trabalho de conclusão de curso.

O Capítulo 2 discute as três leis de Newton, sua importância e funcionamento. Além disso, aborda o uso do Python como ferramenta computacional para simulação de espaços reais e criação de gráficos, terminando com uma breve explicação sobre a equação de Lagrange, seu contexto de surgimento, aplicabilidade e interações.

No Capítulo 3, após estabelecer os conceitos fundamentais, inicia-se a montagem do problema partindo da segunda lei de Newton, dadas as condições iniciais.

No Capítulo 4, são introduzidos os métodos aproximativos de Euler e Lagrange para o problema dos três corpos.

No Capítulo 5, estuda-se o problema dos três corpos e seu caso restrito, que traz consigo o conceito de pontos de Lagrange.

No último capítulo, Capítulo 6, são apresentadas a conclusão do trabalho e suas perspectivas futuras.

2 O PONTO DE PARTIDA: AS LEIS DE NEWTON E A EQUAÇÃO DE LAGRANGE

Neste capítulo, será iniciado o destaque do advento da mecânica com a apresentação das três leis de Newton e a equação de Lagrange, que servirão de base para a construção do problema. O estudo começará utilizando as referências [4, 5, 6, 7, 8, 9], para posteriormente desenvolver o problema e encontrar uma expressão geral nos capítulos seguintes.

2.1 As Leis de Newton e o Princípio Fundamental da Dinâmica.

As Leis de Newton representam um dos maiores avanços científicos da humanidade. Embora não sejam completamente válidas em todos os referenciais, como quando os corpos se movem a velocidades próximas à da luz ou em escalas atômicas e subatômicas, as Leis de Newton ainda se mostram bastante úteis em sistemas que não se encontram nestas ordens de grandeza. Diante disso, elas servem como uma excelente ferramenta. Para iniciar o processo, serão enunciadas as Leis de Newton, que são escritas da seguinte forma:

1º) Todo o corpo persiste em seu estado de repouso, ou movimento uniforme, a menos que seja compelido a mudar seu estado através de forças impressas sobre ele.

2º) Um corpo sob a ação de uma força(\vec{F}) se move de tal forma que a taxa temporal de variação da quantidade de movimento(\vec{P}) é igual a força.

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F} \quad (2.1)$$

Já a 2º Lei estabelece o conceito de força, que é o agente causador da variação no estado do sistema. Isso diz, que a soma de todas as forças que atuam em um sistema é igual a taxa de variação do momento linear.

Por último, enunciamos a 3º Lei que pode ser dita da seguinte maneira,

3º) Se dois corpos exercem forças entre si, essas forças serão iguais em magnitude e opostas em termos da direção.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (2.2)$$

As leis de Newton possuem um caráter muito peculiar em sua aplicabilidade:

só é possível calcular a força resultante que atua em uma partícula quando se conhecem todas as forças que agem sobre ela. Com base nisso, serão utilizados os conhecimentos apresentados pelas Leis de Newton para montar o problema.

2.2 A Equação de Lagrange

Conforme já mencionado só é possível calcular o movimento de uma partícula ou de um sistema quando se conhecem todas as forças que atuam sobre ele. À primeira vista, isso pode parecer apenas um detalhe, mas para quem já trabalhou para descobrir a equação do movimento de um pêndulo simples, é evidente que, embora o problema possa não ser muito complexo, é bastante trabalhoso. Nessa situação, vê-se a importância de outra formulação que descreva o movimento das partículas sem depender diretamente da quantidade de forças que atuam sobre elas.

Uma outra maneira de descobrir a equação de movimento de um corpo, sem usar o método desenvolvido por Newton, é o método de Lagrange. O método de Lagrange é bastante útil quando se deseja escrever a equação que descreve o movimento sem considerar todas as forças atuando em um corpo. Para ser aplicável, esse método requer duas condições:

1º) As forças que agem no sistema (exceto quaisquer forças de restrição) devem ser deriváveis de um potencial (ou vários potenciais).

2º) As restrições devem ser holonômicas, ou seja, as equações de restrição devem ser relações que conectam as coordenadas das partículas e podem ser funções do tempo.

Para usar a equação de Lagrange, primeiro escrevemos a lagrangeana, que é:

$$L = T - V \quad (2.3)$$

Assim, L é a lagrangeana, T é a energia cinética e V a energia potencial. Com esses resultados em mãos, é possível escrever a equação de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.4)$$

Esta é a equação de Lagrange: q é a coordenada generalizada da posição e \dot{q} é a coordenada generalizada da velocidade. O resultado dessa expressão, atendendo às condições impostas inicialmente, é a equação do movimento do corpo a que ela se refere.

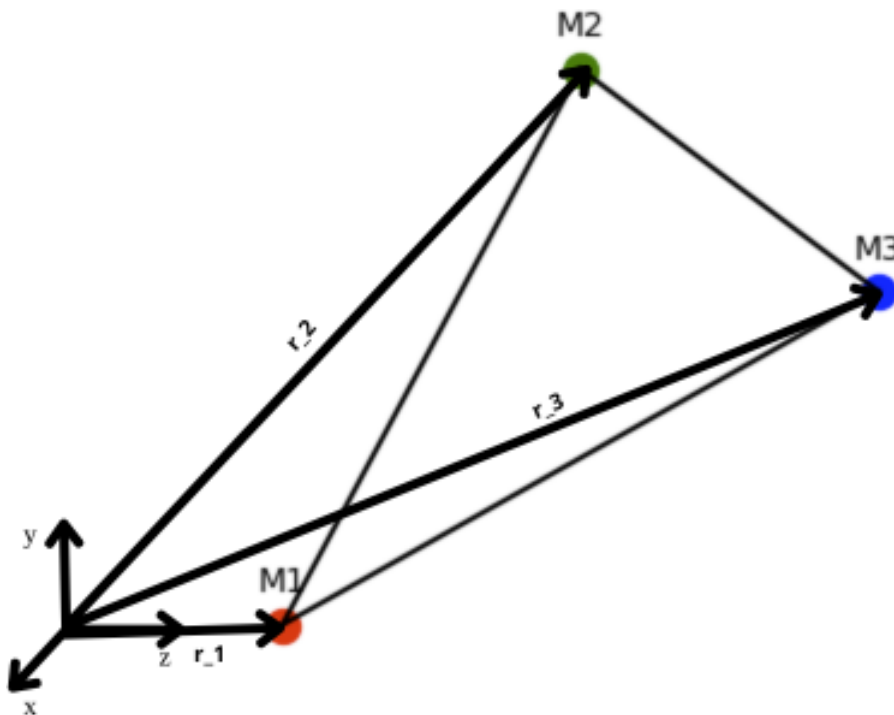
3 INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

Nesta seção, serão dados os primeiros passos na montagem do problema dos três corpos. Para isso, será iniciada uma formulação newtoniana do problema, analisando as forças que atuam sobre cada um dos corpos, de modo que o sistema possa ser adaptado a um novo conjunto de coordenadas que servirá como base para iniciar as aproximações[10].

3.1 Montagem do Sistema a partir de Mecânica Newtoniana.

Iniciamos o problema observando a figura 1, que mostra três corpos m_1, m_2 e m_3 . Esses corpos estão em um referencial separado e têm massas relativamente grandes, ocupando posições distintas. As grandes distâncias entre os corpos permitem que, em comparação com suas dimensões, possamos considerá-los como massas pontuais. Assim, temos:

Figura 1: Representação do sistema contendo três partículas pontuais denominadas, m_1, m_2 e m_3 . Ambas com massas e posições distintas.



Fonte: O próprio autor

Com o sistema visto na Figura 1, vamos agora aplicar a 2ª Lei de Newton, equação. (2.1), ao nosso sistema. Assim, obteremos, para o caso da partícula 1,

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_1 m_2 \left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \right) + Gm_1 m_3 \left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} \right) \quad (3.1)$$

Agora de maneira análoga para as partículas 2 e 3,

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_1m_2 \left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \right) + Gm_2m_3 \left(\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} \right) \quad (3.2)$$

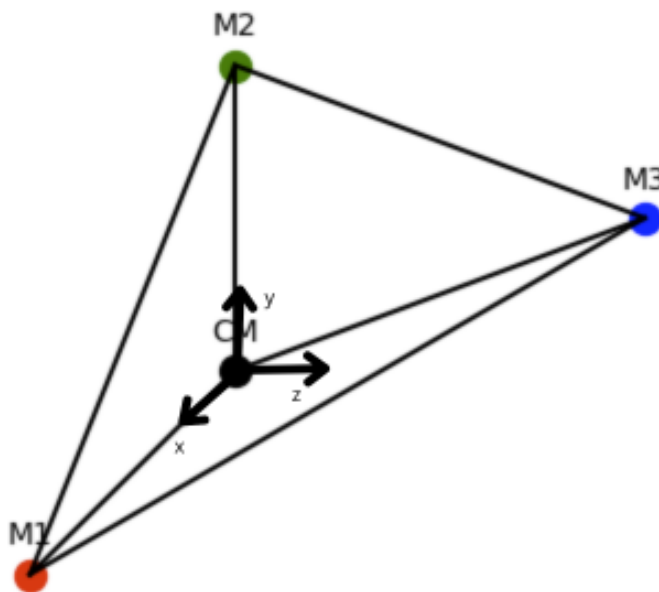
$$m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1m_3 \left(\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} \right) + Gm_2m_3 \left(\frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \right) \quad (3.3)$$

As equações (3.1), (3.2) e (3.3) representam a força resultante em cada uma das partículas do sistema, ou seja, a unidades de cada equação é em Newton. Realizando a soma das equações (3.2) e (3.3) com a equação (3.1) para encontrar a aceleração total do sistema. Ao realizar essa soma, encontraremos o seguinte resultado:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 + m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = \vec{0} \quad (3.4)$$

A partir da equação (3.4), pode-se inferir que a força resultante do sistema é nula. Sendo assim, pode-se dizer que o sistema está em repouso ou em movimento uniforme. Com a condição apresentada na equação (3.4), adotaremos um sistema no qual ele estará em repouso e seu centro de massa estará localizado na origem. O esquema proposto é mostrado na figura 2,

Figura 2: Representação do sistema contendo três partículas pontuais em distâncias distintas ao redor de um centro de massa que está disposto na origem do sistema.



Fonte: O próprio autor

Com o sistema construído, inicialmente para facilitar sua descrição, será realizada uma mudança de variáveis nele, a fim de obter uma melhor notação. A mudança em questão seguirá a seguinte relação:

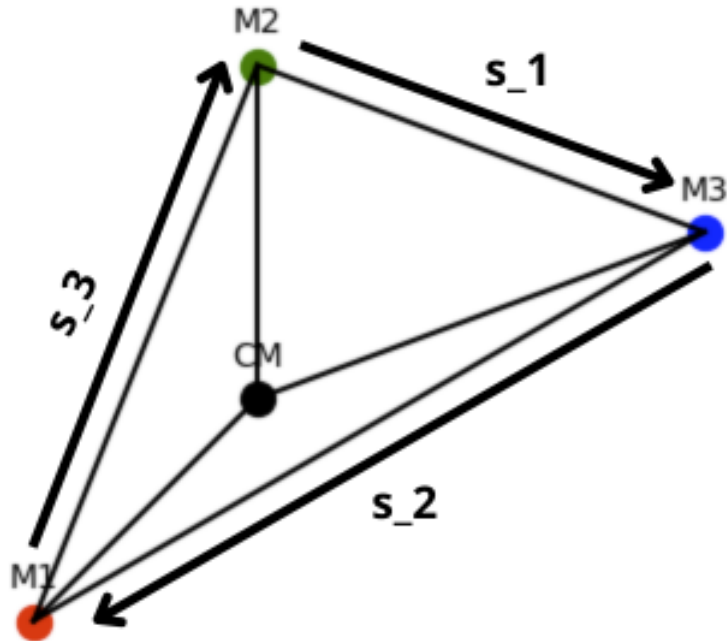
$$\vec{s}_1 = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \quad (3.5)$$

$$\vec{s}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 \quad (3.6)$$

$$\vec{s}_3 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (3.7)$$

Nessa mudança de variável, as equações (3.5), (3.6) e (3.7) são denominados de vetor deslocamento entre as partículas. Como ilustrado na figura 3,

Figura 3: Representação do sistema contendo três partículas pontuais em distâncias distintas ao redor de um centro de massa que está disposto na origem do sistema.



Fonte: O próprio autor

Com o sistema montado, realizaremos uma alteração para conseguirmos escrever nas coordenadas do sistema em função das nossas novas coordenadas, para isso partiremos da equação (3.4).

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2 - m_3 \vec{r}_3 \quad (3.8)$$

Agora será somada em ambos os lados da equação (3.8) a seguinte expressão $m_2 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_1$. Além disso, será chamado $M = m_1 + m_2 + m_3$.

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_1 = m_3 \vec{r}_1 - m_3 \vec{r}_3 - m_2 \vec{r}_2 + m_2 \vec{r}_1$$

Chega-se ao seguinte resultado,

$$\vec{r}_1 = \frac{m_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) - m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{M} \quad (3.9)$$

Com os resultado das equações (3.6) e (3.7) chega-se,

$$\vec{r}_1 = \frac{m_3 \vec{s}_2 - m_2 \vec{s}_3}{M} \quad (3.10)$$

De maneira análoga para \vec{r}_2 e \vec{r}_3 ,

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1 \vec{s}_3 - m_3 \vec{s}_1}{M} \quad (3.11)$$

$$\vec{r}_3 = \frac{m_2 \vec{s}_1 - m_1 \vec{s}_2}{M} \quad (3.12)$$

Através das equações anteriores, consegue-se reescrever as equações do movimento em função de nossas novas coordenadas. Agora, descrevendo o movimento utilizando nossa mudança de variável.

Com a equação (3.5) e as equações (3.3) e (3.2),

$$\vec{s}_1 = Gm_1 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} + Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3} \quad (3.13)$$

Com a mudança de variáveis realizada, equação. (3.5), (3.6) e (3.7). Teremos,

$$\vec{s}_1 = Gm_1 \frac{\vec{s}_2}{|\vec{s}_2|^3} + Gm_2 \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} + Gm_1 \frac{\vec{s}_3}{|\vec{s}_3|^3} - Gm_3 \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} \quad (3.14)$$

Na equação (3.14) somemos e subtrairemos a expressão $Gm_1 \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3}$, assim:

$$\ddot{\vec{s}}_1 = -GM \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} + Gm_1 \vec{s}_T \quad (3.15)$$

Onde,

$$\vec{s}_T = \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} + \frac{\vec{s}_2}{|\vec{s}_2|^3} + \frac{\vec{s}_3}{|\vec{s}_3|^3} \quad (3.16)$$

As equações do movimento para as outras coordenadas podem ser escritas da seguinte forma,

$$\ddot{\vec{s}}_2 = -GM \frac{\vec{s}_2}{|\vec{s}_2|^3} + Gm_2 \vec{s}_T \quad (3.17)$$

$$\ddot{\vec{s}}_3 = -GM \frac{\vec{s}_3}{|\vec{s}_3|^3} + Gm_3 \vec{s}_T \quad (3.18)$$

Este sistema de equações (3.15) a (3.18) é um sistema de 3 equações com 18 variáveis independentes e não possuem solução analítica geral e somente são resolvidas numericamente sob condições iniciais e de restrição aplicadas em cada problema.

4 APROXIMAÇÃO COM OS MÉTODOS DE EULER E LAGRANGE

Esta parte do trabalho foi realizada a partir das seguintes referências, [11, 12, 13, 14]. O problema dos três corpos não possui uma solução analítica. Isso faz com que as equações (3.15), (3.17) e (3.18) sejam o máximo que extraímos do problema e, portanto, não há como expressá-lo de uma maneira mais geral. No entanto, mesmo que não seja possível uma resposta geral para o problema, existem soluções aproximadas por meio de métodos aproximativos. Embora essas soluções não sejam definitivas, elas ajudam na compreensão de uma variedade de exemplos, o que será muito útil para os casos abordados neste trabalho.

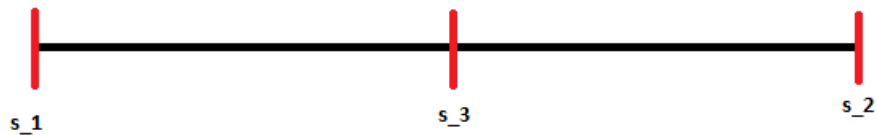
Havendo sido montado um sistema com as novas variáveis, (3.15), (3.17) e (3.18). exploramos métodos de resolução para o mesmo. A partir dos métodos desenvolvidos por Euler e Lagrange na tentativa de responder ao problema.

4.1 Método de Euler

Este método propôs, o qual propôs encontrar soluções para as equações: (3.15), (3.17) e (3.18) em que os corpos se posicionassem de maneira colinear.

Foi assumido que os três corpos estão alinhados, e um corpo qualquer, como m_3 , está posicionado entre os corpos m_1 e m_2 . conforme apresentado na figura 4,

Figura 4: Configuração da Método de Euler.



Além disso, também foi posta a condição de que esses mesmos corpos não podem colidir, ou seja, não há choques no sistema. Dadas essas condições impostas, podemos expressar as soluções da seguinte forma,

$$\vec{s}_1(t) = \vec{s}_1(t) \quad (4.1)$$

$$\vec{s}_2(t) = \lambda(t)\vec{s}_1(t) \quad (4.2)$$

$$\vec{s}_3(t) = -(1 + \lambda(t))\vec{s}_1(t) \quad (4.3)$$

Onde $\lambda(t)$ é uma função estritamente positiva. Com as equações (4.1), (4.4) e (4.3) vamos há seguinte manipulação. Vamos derivar a equação $\vec{s}_2(t) = \lambda(t)\vec{s}_1(t)$ duas vezes e substituir na equação (3.17).

$$\ddot{\vec{s}}_2(t) = \ddot{\lambda}\vec{s}_1(t) + 2\dot{\lambda}\dot{\vec{s}}_1(t) + \lambda\ddot{\vec{s}}_1(t) \quad (4.4)$$

Por praticidade, foi alterado $\lambda(t)$ por λ para que não houvesse um excesso de notação. Alternando primeiro termo da equação (4.4) pela expressão já visualizada na equação (3.17):

$$-GM \frac{\lambda\vec{s}_1(t)}{|\lambda\vec{s}_1(t)|^3} + Gm_2\vec{s}_T = \ddot{\lambda}\vec{s}_1(t) + 2\dot{\lambda}\dot{\vec{s}}_1(t) + \lambda\ddot{\vec{s}}_1(t) \quad (4.5)$$

A priori, trabalha-se com o lado esquerdo da equação antes de combiná-lo com o lado direito. Portanto, ao desenvolver a expressão anterior utilizando a equação (3.16), chega-se ao seguinte resultado.

$$\begin{aligned} & \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} \left(-GM \frac{\lambda}{\lambda^3} \right) + Gm_2 \left(\frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} + \frac{\vec{s}_2}{|\vec{s}_2|^3} + \frac{\vec{s}_3}{|\vec{s}_3|^3} \right) \\ & \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} \left(-GM \frac{\lambda}{\lambda^3} \right) + Gm_2 \left(\frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} + \frac{\lambda}{\lambda^3} \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} + \frac{-(1+\lambda)}{|-(1+\lambda)|^3} \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} \right) \\ & \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} \left(\frac{-GM}{\lambda^2} + Gm_2 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1+\lambda}{|-(1+\lambda)|^3} \right) \right) \end{aligned}$$

Havendo terminado a simplificação da parte esquerda, parte-se para a parte direita. Para isso, utiliza-se a equação (3.15) para reescrever a equação $\lambda\ddot{\vec{s}}_1(t)$,

$$\lambda \ddot{\vec{s}}_1(t) = \lambda \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} (-GM) + Gm_1 \lambda \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \frac{-(1+\lambda)}{|-(1+\lambda)|^3} \right)$$

$$\frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} \left(-\lambda GM + Gm_1 \lambda \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \frac{-(1+\lambda)}{|-(1+\lambda)|^3} \right) \right)$$

Realizando algumas manipulações obtemos a seguinte expressão,

$$2\dot{\lambda}(t)\vec{s}_1(t) + \ddot{\lambda}(t)\vec{s}_1(t) = K(t) \frac{\vec{s}_1}{\|\vec{s}_1\|^3} \quad (4.6)$$

$$K(t) = -GM \frac{1}{\lambda^2} + Gm_2 \left[1 + \frac{1}{\lambda^2} \frac{-(1+\lambda)}{|-(1+\lambda)|^3} \right] + \lambda GM - Gm_1 \lambda \left[1 + \frac{1}{\lambda^2} \frac{-(1+\lambda)}{|-(1+\lambda)|^3} \right]$$

Onde se vê $K(t)$ é, um expressão que envolve as funções λ e as constantes: G , e M . A partir dos resultados obtidos podemos considerar duas hipóteses,

1. $\dot{\lambda}(t) = 0$, e conjecturamos que a função $\lambda(t)$ é uma constante.
2. $\ddot{\vec{s}}_1 = a(t)\vec{s}_1$, onde atribuímos o $a(t)$ como uma função de t .

Logo, assume-se que o primeiro item não se verificará, o que se deve ao fato de que, de acordo com o obtido, a função $\lambda(t)$ é uma função positiva e possui derivada primeira igual a zero. Sendo assim, resta trabalhar com a segunda expressão..

Vamos assumir que o vetor \vec{s}_1 é da seguinte forma,

$$\vec{s}_1(t) = a(t)\vec{s}_1(0) \quad (4.7)$$

Em que, $\vec{s}_1(0)$ é o vetor posição do corpo 1 em relação ao corpo 3 no instante $t = 0$ e $a(t)$ é uma função real que assume apenas valores positivos. Através dessa ideia, o vetor posição pode ser escrito de maneira mais geral que a escrita anteriormente, $\lambda(t)$. Assim, podemos reescrever as equações (4.1), (4.4) e (4.3) levando em consideração da equação (4.7).

$$\vec{s}_1(t) = a(t)\vec{s}_1(0) \quad (4.8)$$

$$\vec{s}_2(t) = \lambda a(t)\vec{s}_1(0) \quad (4.9)$$

$$\vec{s}_3(t) = -(1 + \lambda a(t))\vec{s}_1(0) \quad (4.10)$$

Com as equações (4.8), (4.9) e (4.10) temos a representação da solução do nosso problema com as condições impostas inicialmente. Agora podemos reescrever as expressões para as posições usando as seguintes equações, dadas as considerações impostas: (3.6), (3.7) e (3.5). Assim,

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_2 = a(t)(\vec{r}_3(0) - \vec{r}_2(0)) \quad (4.11)$$

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_3 = \lambda a(t)(\vec{r}_3(0) - \vec{r}_2(0)) \quad (4.12)$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -(1 - \lambda a(t))(\vec{r}_3(0) - \vec{r}_2(0)) \quad (4.13)$$

As equações anteriores descrevem as posições do sistema, e graças a esse artifício podemos também expressar facilmente que as partículas se movem sempre sobre a mesma reta.

Dada todas as deliberações até então, vamos em busca das soluções colineares para as equações em que λ é constante. Assim, vamos voltar a reescrever as equações (4.1), (4.4) e (4.3). Assumindo agora a condição que λ é um número real positivo. Elas acabam por se tornar,

$$\vec{s}_1(t) \quad (4.14)$$

$$\vec{s}_2(t) = \lambda \vec{s}_1(t) \quad (4.15)$$

$$\vec{s}_3(t) = (1 + \lambda)\vec{s}_1(t) \quad (4.16)$$

Partindo disso, vamos derivar as equações anteriores, (4.14), (4.15) e (4.16), duas vezes,

$$\ddot{\vec{s}}_1 = \ddot{\vec{s}}_1$$

$$\ddot{\vec{s}}_2 = \lambda \ddot{\vec{s}}_1$$

$$\ddot{\vec{s}}_3 = (1 - \lambda) \ddot{\vec{s}}_1$$

Agora, substituir nas equações de seus respectivos termos nas equações (3.15), (3.17) e (3.18).

$$\ddot{\vec{s}}_1 = -GM \frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|^3} + Gm_1 \vec{s}_T$$

$$\lambda \ddot{\vec{s}}_1 = -GM \frac{\vec{s}_2}{|\vec{s}_2|^3} + Gm_2 \vec{s}_T$$

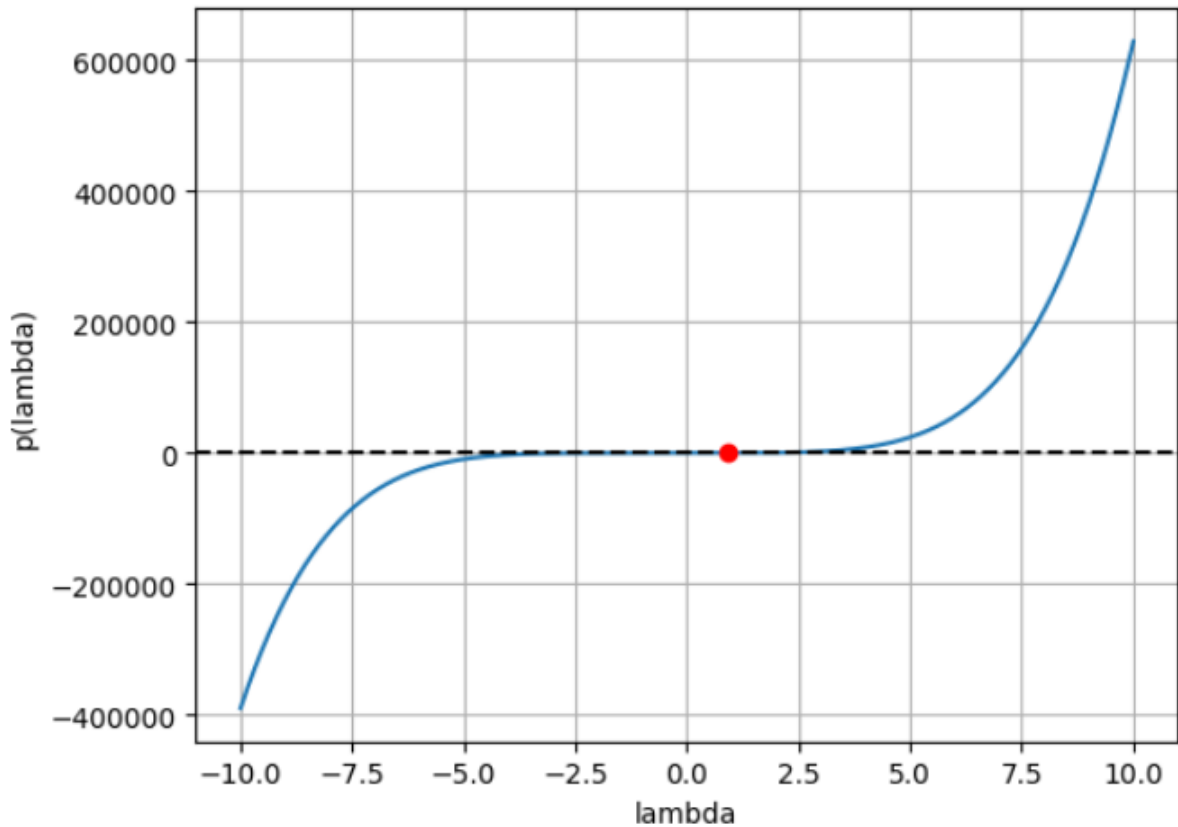
$$(1 - \lambda) \ddot{\vec{s}}_1 = -GM \frac{\vec{s}_3}{|\vec{s}_3|^3} + Gm_3 \vec{s}_T$$

Ao final, reescreveremos as equações anteriores levando em conta, (4.14), (4.15) e (4.16) e igualemos as expressões.

$$p(\lambda) = (m_2 + m_3)\lambda^5 + (3m_2 + 2m_3)\lambda^4 + (3m_2 + m_3)\lambda^3 - (3m_1 + m_3)\lambda^2 - (3m_1 + m_3)\lambda - (m_1 + m_3) \quad (4.17)$$

Com tudo isto, chegamos em λ se apresenta como uma a raiz positiva do polinômio de quinto grau. A mesma pode ser visualizada a partir da Figura 5

Figura 5: Solução do polinômio de 5^o grau com $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ e $m_3 = 3$.

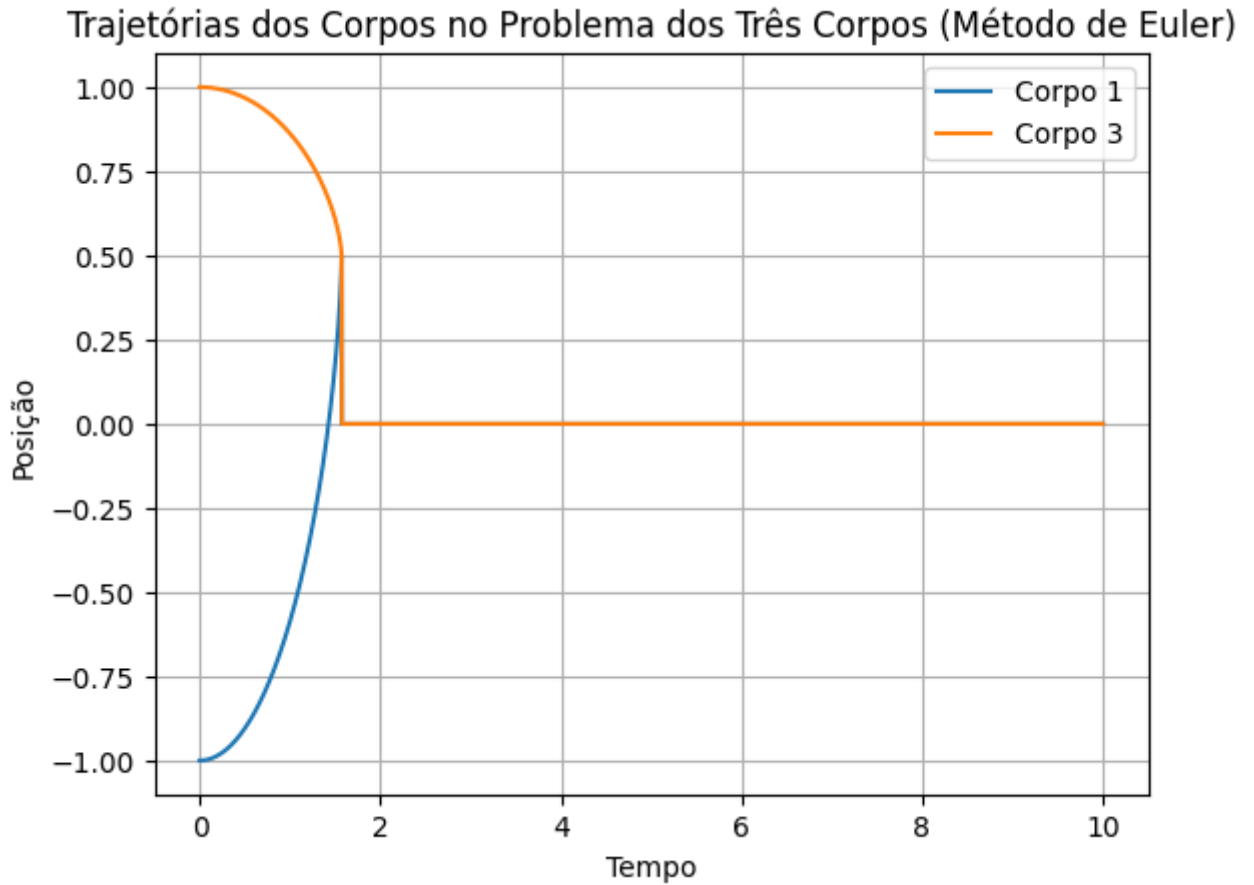


Fonte: O próprio autor

O gráfico da figura 5 apresenta que $p(0) < 0$ e $p(\infty) > 0$, o polinômio possui uma raiz positiva. A unicidade dessa raiz pode ser observada pelo método de Descartes e é única para quaisquer valores das massas que consideremos. Vale salientar que a existência dessa raiz traz consigo um resultado muito importante, pois indica a existência e a estabilidade das soluções colineares no sistema. Assim, concluímos que o valor $p(\lambda)$ possui uma raiz positiva e utilizaremos esse resultado.

Com o resultado anterior obtido, podemos construir o gráfico da solução colinear de Euler no Problema dos Três corpos, o mesmo pode ser visualizado na Figura 6

Figura 6: Gráfico da solução colinear proposta por Euler.



Fonte: O próprio autor

A Figura 6 foi plotado com as seguintes condições: As massas foram dispostas como: m_1 , m_2 e m_3 : 1,2 e 3. A força de interação gravitacional é $G = 1$ e as posições iniciais são $x_{10} = -1.0$, $v_{12} = 0$, $x_{30} = 1.0$ e $v_{30} = 0$. No eixo x temos o tempo e no eixo y representa a posição dos corpos 1 e 3. O corpo 2 não é indicado aqui, pois está coincidente com o nosso centro de massa de acordo com as manipulações realizadas. Como as massas dos corpos são diferentes, esperamos que as amplitudes das oscilações sejam diferentes para cada um.

Agora voltemos as equações, (3.15), (3.17) e (3.18). Para isso, vamos usar as equação (3.15) e multiplicá-la por m_3 e a equação (3.18) por m_1 e ao final subtraímos e utilizamos as equações vistas em (4.1), (4.4) e (4.3), Teremos:

$$\ddot{\vec{s}}_1 = -GM \frac{m_1 + m_3(1 + \lambda)^2}{(1 + \lambda)^2(m_3 + m_1(1 + \lambda)) |\vec{s}_1|^3} \vec{s}_1 \quad (4.18)$$

A equação (4.18) descreve o movimento de um corpo de massa 1 no problema das órbitas de Kepler. As soluções geométricas para o mesmo já são conhecidas e são classificadas em função de Energia total, E , e do seu momento angular, \vec{M} , sendo classificadas da seguinte forma,

1. Semiretas, se $\vec{M} = \vec{0}$;
2. Elipses, se $\vec{M} \neq \vec{0}$ e $E < 0$;
3. Parábolas, se $\vec{M} \neq \vec{0}$ e $E = 0$;
4. Ramos de Hiperbole, se $\vec{M} \neq \vec{0}$ e $E > 0$.

A semirreta possui uma origem em O e cada umas destas cônicas tem um foco em O .

4.2 Método de Lagrange

Tendo visto o método de Euler, vamos agora explorar o método de Lagrange. Neste método, procuraremos soluções das equações: (3.15), (3.17) e (3.18). Aos quais se verificam que, $\vec{s}_T = \vec{0}$ em qualquer instante de tempo. Usaremos a seguinte relação,

$$\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 = \vec{0} \quad (4.19)$$

Juntamente com a relação (4.19) e a condição impostas no começo da seção, temos espaço para duas afirmações:

1. $\vec{s}_1(t)$, $\vec{s}_2(t)$ e $\vec{s}_3(t)$ são colineares (Onde entramos no caso das soluções de Euler);
2. $\vec{s}_1(t) = \vec{s}_2(t) = \vec{s}_3(t)$, em qualquer instante t .

As soluções que satisfazem as condições impostas inicialmente são chamadas de soluções equiláteras e foram propostas pela primeira vez por Lagrange. Esta condição indica que a cada instante de tempo os três corpos estão posicionados de maneira a formar os vértices de um triângulo equilátero. Esse triângulo pode variar em tamanho e posição conforme o valor de t .

Ao voltarmos para a própria condição de equilateralidade as equações (3.15), (3.17) e (3.18), resultam em três problemas de Kepler que são bem semelhantes.

$$\vec{s}_1 = -GM \frac{\vec{s}_1}{|s_1|^3} \quad (4.20)$$

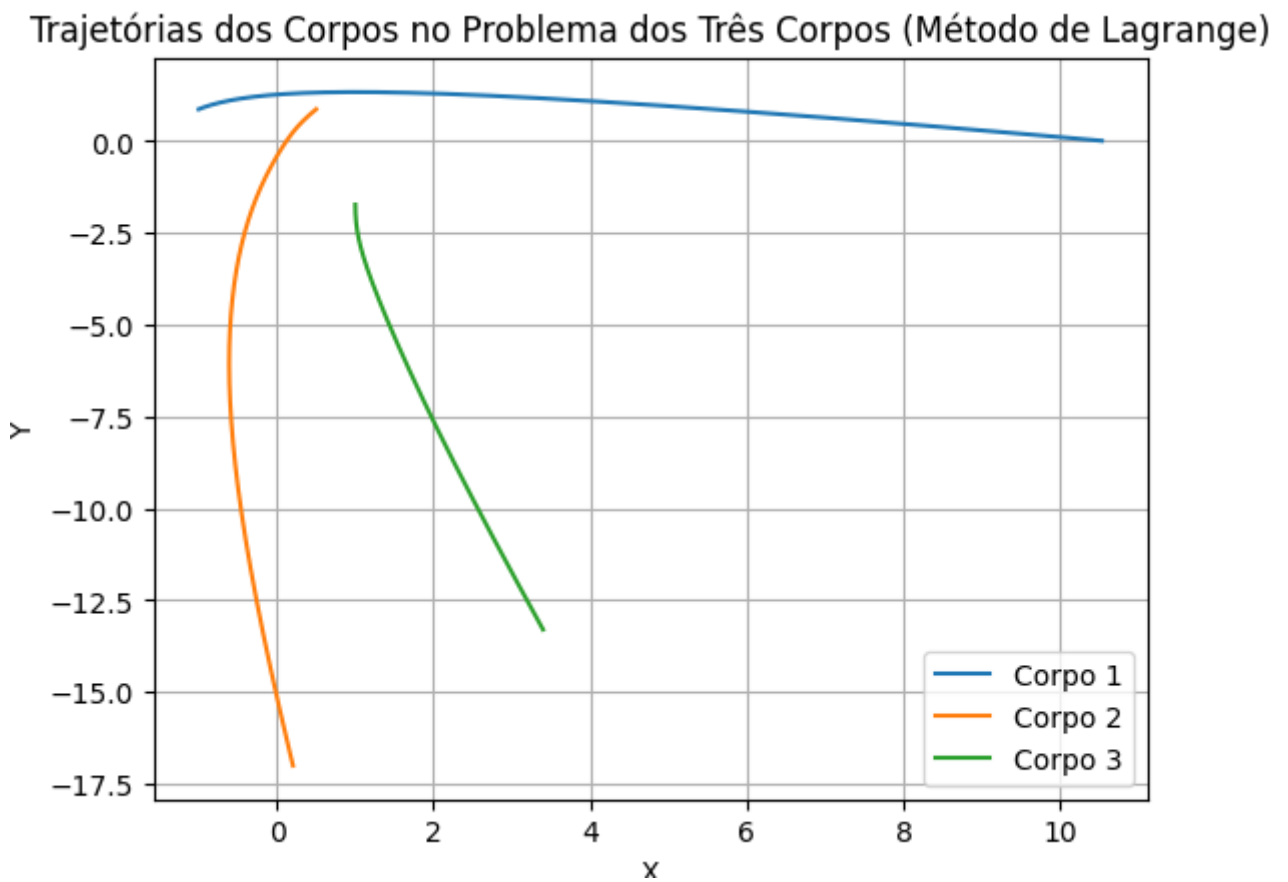
$$\vec{s}_2 = -GM \frac{\vec{s}_2}{|s_2|^3} \quad (4.21)$$

$$\vec{s}_3 = -GM \frac{\vec{s}_3}{|s_3|^3} \quad (4.22)$$

Existem três problemas de Kepler que, aparentemente independentes, são na realidade dependentes pela condição de equilateralidade. Isso significa que os corpos orbitam em torno do centro de massa com diferenças de fase constantes.

Dada toda a argumentação feita inicialmente, podemos apresentar o gráfico da solução que é visualizado na Figura 7. Os parâmetros utilizados nas soluções podem ser encontrados nos apêndices.

Figura 7: Gráfico da solução Equilátera proposta por Lagrange.



Fonte: O próprio autor

O gráfico da Figura 7 foi plotado com as seguintes condições. As massas foram dispostas como: m_1 , m_2 e m_3 : 1,2 e 3. A força de interação gravitacional é $G = 1$ e as posições iniciais são $x_{10} = -0.5$, $y_{10} = 0.86$, $v_{x10} = 0$, $v_{y10} = 0$, $x_{20} = 0.5$, $y_{20} = 0.86$, $v_{x20} = -0.5$, $v_{y20} = -0.86$, $x_{30} = 0$, $y_{30} = -1,4$, $v_{x30} = 0$ e $v_{y30} = -0.86$. O movimento descrito corresponde a uma configuração equilátera, em que os corpos se movem em uma configuração que suas posições formam um triângulo equilátero.

Nesta capítulo, observamos o métodos de Euler e Lagrange, esses métodos são soluções particulares para o problema restrito dos três corpos. No entanto, eles não muito utilizados pela sua falta de aplicabilidade e por causa disso acabam sendo deixadas de lado.

5 O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS, O CASO RESTRITO CIRCULAR

Esta seção foi tomada como base através de [15,16,17]. toda a discussão realizada foi através de entender o problema dos três corpos. De modo geral, foi comentado a sua introdução, a montagem do sistema, e os métodos aproximativos para entendermos o mesmo e calcularmos os pontos de Lagrange.

5.1 O problema do movimento restrito dos três corpos.

Este problema é aplicado quando trabalhamos com objetos, como cometas, que possuem uma massa muito pequena comparada a massa do Sol ou da Terra.

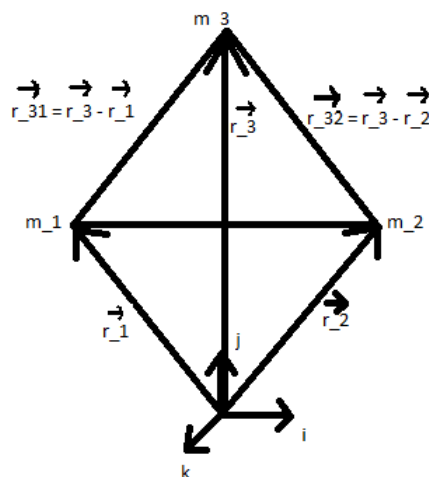
Inicialmente, consideramos três corpos: m_1 , m_2 e m_3 , onde suas massas obedecem a seguinte relação: $m_1 > m_2 > m_3$.

A posição de m_3 em relação a m_1 e m_2 são:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{31} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \\ \vec{r}_{32} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \\ \vec{r}_{21} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1\end{aligned}\tag{5.1}$$

A ilustração da esquematização do problema fica,

Figura 8: Idealização das posições das Partículas.



Fonte: O próprio autor

O centro de massa do sistema é,

$$M\vec{R} = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 \quad (5.2)$$

Como $m_3 \ll m_1$ e $m_3 \ll m_2$, reescreve-se a equação (5.2) como:

$$M\vec{R} \approx m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 \quad (5.3)$$

O triângulo relativo do sistema é,

$$\vec{r}_{31} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \vec{r}_{32} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \quad (5.4)$$

A posição da partícula 3 em relação a 1 e 2 são dada pelas equações:

$$\begin{aligned} (r_{31})^2 &= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \\ (r_{32})^2 &= (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

A energia cinética do corpo 3 é,

$$T = \frac{1}{2}m_3(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (5.6)$$

A energia potencial é:

$$V(\vec{r}_3) = -G\frac{m_1m_3}{r_{31}} - G\frac{m_2m_3}{r_{32}} \quad (5.7)$$

Agora consideraremos que o sistema de coordenadas de m_1 e m_2 começa a sofrer uma rotação ω =constante. O corpo 3 realiza uma rotação em torno do sistemas de corpos 1 e 2, logo a rotação do sistema de coordenadas de 3 é dado pelo sistema:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t) \\ y'(t) &= x\sin(\omega t) - y\cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Dadas as considerações, vamos calcular a energia cinética do mesmo, para isso realizaremos a derivada das posições do corpo 3 que realiza a rotação e através de algumas manipulações usaremos o resultado na equação da energia cinética, temos:

$$T = \frac{1}{2}m_3[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega(xy - y\dot{x}) + \omega^2(x^2 + y^2)] \quad (5.9)$$

Usando (5.7) juntamente com a (5.9) construímos a equação de Lagrange para o nosso sistema em rotação,

$$L = \frac{1}{2}m_3[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega(xy - y\dot{x}) + \omega^2(x^2 + y^2)] + Gm_3 \left(\frac{m_1}{r_{31}} + \frac{m_2}{r_{32}} \right) \quad (5.10)$$

Usando a equação diferencial de Lagrange, como vista em (2.4), calcularemos o movimento para a coordenada x:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2}m_3[2\dot{x} - 2\omega y]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m_3(\ddot{x} - \omega \dot{y})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}m_3[2\omega \dot{y} + 2\omega^2 x] - Gm_3 \left(\frac{m_1(x - x_1)}{r_{31}^3} + \frac{m_2(x - x_2)}{r_{32}^3} \right)$$

Logo,

$$m_3\ddot{x} = m_3\omega \dot{y} + m_3[\omega \dot{y} + \omega^2 x] - Gm_3 \left(\frac{m_1(x - x_1)}{r_{31}^3} + \frac{m_2(x - x_2)}{r_{32}^3} \right)$$

A equação que descreve o movimento da coordenada x é,

$$\ddot{x} = 2\omega \dot{y} + \omega^2 x - G \left(\frac{m_1(x - x_1)}{r_{31}^3} + \frac{m_2(x - x_2)}{r_{32}^3} \right) \quad (5.11)$$

De maneira análoga para o movimento da coordenada y é,

$$\ddot{y} = -2\omega \dot{x} + \omega^2 y - G \left(\frac{m_1(y - y_1)}{r_{31}^3} + \frac{m_2(y - y_2)}{r_{32}^3} \right) \quad (5.12)$$

Pelas equações (5.11) e (5.12) é possível observar que a trajetória não depende da partícula 3. Apenas é movido pela ação gravitacional devido a 1 e 2.

Como o corpo 3 não interfere no centro de massa das partículas m_1 e m_2 . O

movimento é dado pelos dois corpos. Assim, usando a 3ª Lei de Kepler temos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \mu a^3}{K}$$

A velocidade angular é $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Logo,

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{\mu a^3}{K} \Rightarrow \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{m_1 \cdot m_2} a^3 = \frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}$$

Onde $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ e $K = Gm_1 \cdot m_2$. Reescrevendo ω com as alterações,

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3} \Rightarrow G = \frac{\omega^2 a^3}{m_1 + m_2} \quad (5.13)$$

Logo, usando a equação (5.13) nas equações (5.11) e (5.12), temos:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x - \frac{\omega^2 a^3}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1(x - x_1)}{r_{31}^3} + \frac{m_2(x - x_2)}{r_{32}^2} \right) \quad (5.14)$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - \frac{\omega^2 a^3}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_1(y - y_1)}{r_{31}^3} + \frac{m_2(y - y_2)}{r_{32}^2} \right) \quad (5.15)$$

A segunda tentativa de simplificação é assumir que dado o número extenso de expressões realizemos a seguinte simplificação, $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ e $1 - \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

Logo,

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x - \omega^2 a^3 \left(\frac{(1 - \mu)(x - x_1)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(x - x_2)}{r_{32}^2} \right) \quad (5.16)$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - \omega^2 a^3 \left(\frac{(1 - \mu)(y - y_1)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(y - y_2)}{r_{32}^2} \right) \quad (5.17)$$

A terceira simplificação, consistem em eliminar o ω das (5.16) e (5.17). Assim, tomando $t = \frac{T}{\omega}$. Ao realizamos essa mudança teremos,

$$\omega^2 \ddot{x} = 2\omega^2 \dot{y} + \omega^2 x - \omega^2 a^3 \left[\frac{(1 - \mu)(x - x_1)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(x - x_2)}{r_{32}^2} \right] \quad (5.18)$$

$$\omega^2 \ddot{y} = -2\omega^2 \dot{x} + \omega^2 y - \omega^2 a^3 \left[\frac{(1 - \mu)(y - y_1)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(y - y_2)}{r_{32}^2} \right] \quad (5.19)$$

Reescrevendo as equações (5.18) e (5.19) são rescritas como:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - a^3 \left[\frac{(1-\mu)(x-x_1)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(x-x_2)}{r_{32}^3} \right] \quad (5.20)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - a^3 \left[\frac{(1-\mu)(y-y_1)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(y-y_2)}{r_{32}^3} \right] \quad (5.21)$$

As equações (5.20) e (5.21) são equações do movimento do corpo 3 atuando a força gravitacional dos corpos 1 e 2. Considerando que o sistema de massas 1 e 2 estão fixos sobre o eixo x, é possível determinar o conjunto solução para esses dois corpos:

$$m_1 = (x_1, 0), m_2 = (x_2, 0) \quad (5.22)$$

Com isso, o resultado da equação (5.22), podemos escrever x_1 e x_2 podem ser escritas como:

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \Rightarrow MX_c = m_1x_1 + m_2x_2$$

Como $X_c = 0$, pois o centro de massa se localiza na origem. Temos,

$$\frac{m_1x_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2x_2}{m_1 + m_2} = 0$$

Graças a isso podemos fazer a seguinte substituição,

$$(1-\mu)x_1 + \mu x_2 = 0 \quad (5.23)$$

Para que (5.23) seja válido temos que modificá-los. Assim, a posição das massas é,

$$m_1 \Rightarrow (-\mu, 0), m_2 \Rightarrow (1-\mu, 0) \quad (5.24)$$

Assim, as equações do movimento se tornam (5.20) e (5.21) são determinadas pelo sistema:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - a^3 \left[\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_{31}^3} + \frac{\mu(x+\mu+1)}{r_{32}^3} \right] \quad (5.25)$$

$$\ddot{y} = 2\dot{x} + y - a^3 \left[\frac{(1-\mu)y}{r_{31}^3} + \frac{\mu y}{r_{32}^3} \right] \quad (5.26)$$

Por último, em uma última simplificação, consideremos que o eixo maior $a^3 = 1^3 = 1$ e que,

$$r_{31}^2 = (x - \mu)^2 + y^2 \quad (5.27)$$

$$r_{32}^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2 \quad (5.28)$$

5.2 Os Pontos de Lagrange

Os pontos de Lagrange são pontos especiais onde a força resultante é nula em um sistema onde atuam a força gravitacional e a força centrípeta. Iniciando das equações (5.25) e (5.26), temos que para $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$ e $(\ddot{x}, \ddot{y}) = (0, 0)$, existem alguns pontos onde a força resultante é nula, a partir da ação da força gravitacional e da força centrípeta.

$$x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{(x + \mu)^3} - \mu \frac{(x + \mu - 1)}{(x + \mu - 1)^3} = 0 \quad (5.29)$$

$$y - \frac{(1 - \mu)y}{[(x + \mu)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu y}{[(x + \mu - 1)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad (5.30)$$

Resolvendo cada uma das equações anteriores,

$$x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{(r_{31})^3} - \mu \frac{(x + \mu - 1)}{(r_{32})^3} = 0 \quad (5.31)$$

$$y \left[1 - \frac{(1 - \mu)}{r_{31}^3} - \frac{\mu}{(r_{32})^3} \right] = 0 \quad (5.32)$$

Vamos tentar encontrar a solução da equação a partir da (5.32). Para isso, vamos tomar $y \neq 0$ e com isso a expressão de dentro igual a zero.

$$1 = \frac{(1 - \mu)}{r_{31}^3} - \frac{\mu}{(r_{32})^3}$$

$$\frac{(1 - \mu)}{r_{31}^3} = -\frac{\mu}{(r_{32})^3} + 1 \quad (5.33)$$

Usando a (5.33) em (5.31). Assim,

$$x - \left(-\frac{\mu}{r_{32}^3} + 1\right)(x + \mu) - \left(\frac{\mu}{r_{32}^3}\right)(x + \mu - 1) = 0$$

$$x\left(\frac{\mu}{r_{32}^3} - 1\right)(x + \mu) - \left(\frac{\mu}{r_{32}^3}(x + \mu - 1)\right) = 0$$

$$\mu\left[+\frac{1}{r_{31}^3} - 1\right] = 0$$

$$1 + \frac{1}{r_{31}^3} = 0 \Rightarrow r_{31}^3 = 1 \quad (5.34)$$

Lembremos da equação (5.4),

$$\begin{aligned} \vec{r}_{32} &= \vec{r}_{31} - \vec{r}_{21} \\ r_{32} &= r_{31}^2 + r_{21}^2 - 2 \cdot r_{31} \cdot r_{21} \cdot \cos(\theta) \end{aligned}$$

Logo, com a solução (5.34):

$$r_{32}^2 = 1 + r_{21}^2 - 2r_{21}\cos(\theta) \quad (5.35)$$

Pela equação (5.23) foi estabelecido que $x_1 + x_2 = 1$ quando $y = 0$. Logo, $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow |\vec{r}_{21}| = 1$. Portanto,

$$r_{32}^2 = 2(1 - \cos(\theta)) \Rightarrow r_{32} = \sqrt{2(1 - \cos(\theta))} \quad (5.36)$$

Usando (5.36) em (5.34) temos,

$$1 - \mu + \frac{\mu}{[2(1 + \cos(\theta))]^{\frac{3}{2}}} = 1$$

$$\mu\left(\frac{1}{[2(1 + \cos(\theta))]^{\frac{3}{2}}} - 1\right) = 0$$

Portanto,

$$2(1 - \cos(\theta)) = 1 \Rightarrow 1 - \cos(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

Logo, $\theta = 60^\circ$ para que a equação (5.33) seja válida.

$$r_{32} = 1 \quad (5.37)$$

Usando as equações (5.37) e (5.34), temos:

$$x - (1 - \mu)(x + \mu) - \mu(x + \mu - 1) = 0$$

Verificamos que as soluções são constantes. Observemos que $|\vec{r}_{31}| = 1$ e $|\vec{r}_{32}| = 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{31}^2 &= (x + \mu)^2 + y^2 = 1 \\ \vec{r}_{32}^2 &= (x + \mu - 1)^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Retornando o sistema (5.38), temos,

$$(x + \mu)^2 - (x + \mu - 1)^2 \Rightarrow \pm[x + \mu] = \pm[x + \mu - 1]$$

Para ambos positivos(+, +) e ambos negativos(-, -) temos,

$$x + \mu = x + \mu - 1 \Rightarrow 0 = 1$$

Para (+, -),

$$x + \mu = -x - \mu + 1 \Rightarrow 2x + 2\mu = 1 \quad (5.39)$$

Para (-, +),

$$-x - \mu = x + \mu + 1 \Rightarrow -2x - 2\mu = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \mu \quad (5.40)$$

Logo,

$$x = \frac{1}{2} \pm \mu \quad (5.41)$$

Usando (5.41) em (5.38) temos:

a) $x = \frac{1}{2} + \mu$

$$\left(\frac{1}{2} + 2\mu\right)^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 1 - \left(\frac{1}{2} + 2\mu\right)^2$$

$$y = \mp \sqrt{1 - \frac{1}{4}(1 + 4\mu)^2} \quad (5.42)$$

$$\text{b) } x = \frac{1}{2} - \mu$$

$$\left(\frac{1}{2} + \mu - \mu\right)^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{5.43}$$

Para que a equação (5.42) seja válida é necessário,

$$1 - \frac{1}{4}(1 + 4\mu)^2 > 0 \Rightarrow (1 + 4\mu)^2 < 1 \Rightarrow 1 + 4\mu < 1 \Rightarrow \mu < 0$$

Portanto, o par de solução $x = \frac{1}{2} + \mu$ é,

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}(1 + 4\mu)^2}$$

Os pontos equilaterais de lagrange,

$$L3 = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{5.44}$$

$$L4 = \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{5.45}$$

Os pontos colineares de Lagrange são obtidos quando $y = 0$ na equação de movimento (5.29). Logo,

$$x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{(x + \mu)^3} - \mu \frac{(x + \mu - 1)}{(x + \mu - 1)^3} = 0 \tag{5.46}$$

A equação acima quando manipulada corretamente se torna uma função polinomial de ordem 5 que pode ser resolvido numericamente ou por métodos aproximativos.

Agora, vamos calcular as valores dos pontos de Lagrange L_1, L_2 e L_3 para o sistema Terra-Lua gerados pelo python mostrados na Tabela 1 e em seguida o plot completo de todos os pontos de Lagrange apresentados na Figura 9.

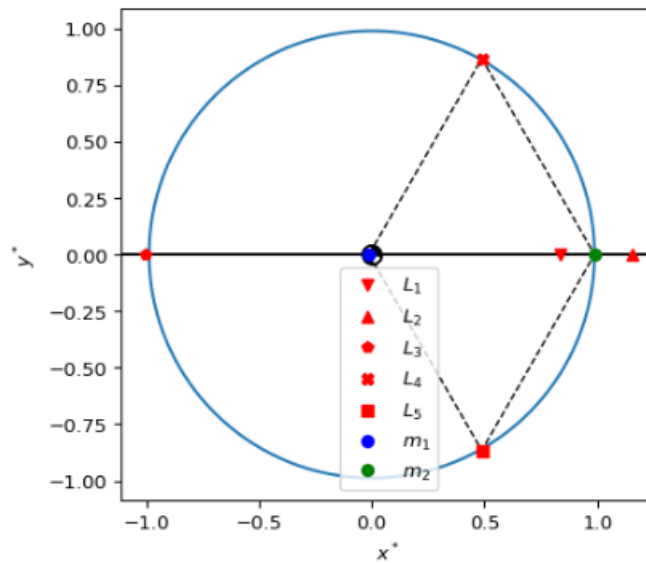
Tabela 1: Cálculo dos Pontos de Lagrange Colineares do Sistema Terra-Lua

Posições	Valores
L_1	0.8369154703225321
L_2	1.1556848961296604
L_3	1.0050626466357435

Fonte: o próprio autor

Figura 9: Pontos de Lagrange do Sistema Terra-Lua

$L_1=0.8369154703225321$, $L_2=1.1556818961296604$, $L_3=-1.0050626166357435$



Fonte: O próprio autor

De maneira análoga, serão calculadas os pontos de Lagrange L_1 , L_2 e L_3 para o sistema Sol e Júpiter gerados pelo python mostrados na Tabela 2. Além disso, também visualizamos a os pontos de Lagrange do sistema Júpiter-Sol na Figura 10.

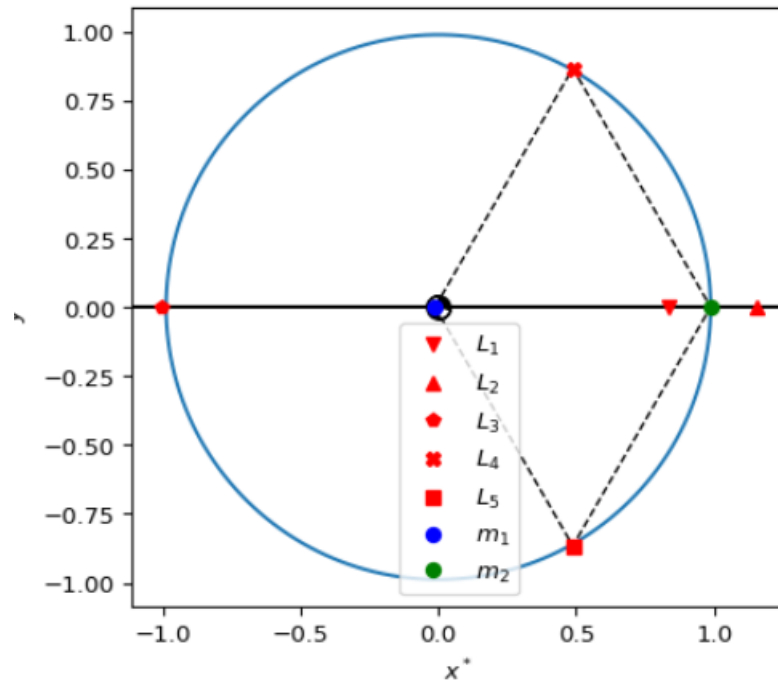
Tabela 2: Cálculo dos Pontos de Lagrange Colineares do Sistema Sol-Júpiter

Posições	Valores
L_1	0.9900276708626612
L_2	1.010033026933167
L_3	-1.0050626166357435

Fonte: o próprio autor

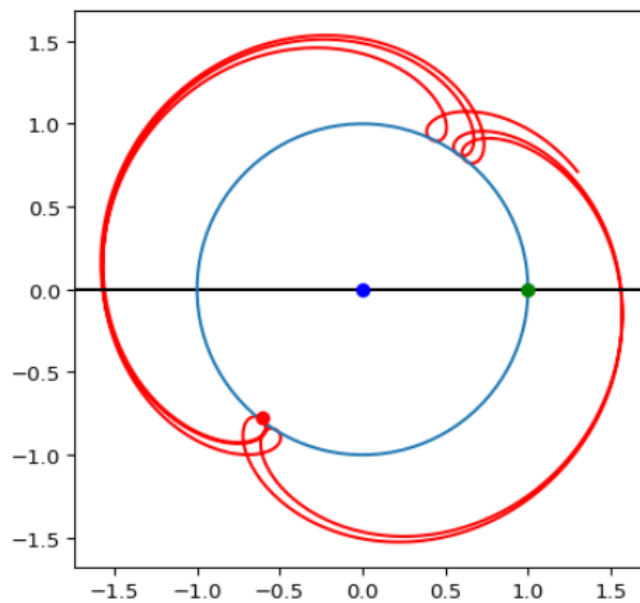
Ademais, também apresentamos a órbita percorrida por plutão sobre a influência do Sol e Júpiter. A mesma se assemelha bastante ao sistema de três corpos, onde Plutão faz o papel de um corpo muito menor em relação aos outros dois, veja a Figura 11

Figura 10: Pontos de Lagrange do Sistema Júpiter-Sol



Fonte: O próprio autor

Figura 11: Órbita de Plutão em Função do Sistema Sol-Júpiter



Fonte: O próprio autor

Para a produção das Figuras 10 e 11 e da Tabela 2, a base necessária para construir o mesmo foi feito de acordo com os dados fornecidos por artigo visto em[3]. Para a elaboração da figura 11 foi realizada a solução das equações (5.25) e (5.26). Mais detalhes sobre cada figura podem ser observadas nos apêndices deste mesmo trabalho.

6 CONCLUSÃO

Através das Leis de Newton, ou através da dinâmica de Lagrange, conseguimos escrever a equação que descreve o movimento do sistema dos três corpos. Além disso, mostramos o resultado disposto na literatura que mostra que o mesmo não possui uma solução analítica.

Devido a impossibilidade de solução analítica do problema, partimos para métodos aproximativos para entendê-lo. Nesse sentido, estudamos as soluções colineares de Euler e as soluções equiláteras de Lagrange. Mesmo que estas não sejam realmente soluções da equação principal, elas apresentam um caráter peculiar, já que se mostram como boas aproximações para eventos observados no cotidiano.

Ao final, compreendendo o problema e alguns de seus métodos aproximativos, partimos para aplicar os conceitos desenvolvidos na tentativa de resolver o problema dos três corpos, no caso restrito. Encontramos uma maneira de expressar sua posição e identificamos pontos de equilíbrio nesse sistema, denominados pontos de Lagrange, onde a força resultante devido ao sistema é nula. Todas essas soluções foram implementadas através da linguagem de programação Python, que se mostrou como uma boa ferramenta na solução do problema e na visualização dos dados.

Como trabalho futuro além de usar o Python como uma ferramenta para a construção de gráficos e um método de resolver numericamente uma equação e partirmos como uma maneira de implementar inteligência artificial no projeto. Pontos em que a IA podem ser úteis: ajuste na órbita de asteróides devido a distorções de massas ocultas. O mundo real não é apenas dois corpos massivos, há outros corpos que podem contribuir com a trajetória.

7 Referências Bibliográficas

- [1]EISBERG, R.; RESNICK, R.; **ATOMOS, Física Quântica. Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas.** CAMPUS, 2a Edição, 1985
- [2]MUSIELAK, Z. E. QUARLES, B. **The three-body problem. Reports on Progress in Physics.** IOP Publishing. Cornell University, Rep. Prog. Phys. 77, p.1-30, 2014
- [3]MACEDO, G S., JUNIOR, A. J. R. **Aplicação do Problema Restrito de Três Corpos no estudo do movimento de astros do sistema solar.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 40, n. 4, p. 1-8, 2018
- [4]Nussenzveig, H. M. **Curso de Física Básica 1: Mecânica.**5. ed. [S. l.: s. n.], 2013.
- [5]THORTON S. T. MARIO, J. B. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas.** [S.l.]: Cengage Learning, 2011
- [6] **PYTHON. Python Software Foundation.** Disponível em: <https://www.python.org>. Acesso em: 10 junho de 2023.
- [7] Downey, A. B. **Pense em Python: Pense como um cientista da computação,** São Paulo(SP), Novatec, 2016.
- [8]**Pandas Development Team. Pandas: powerful data structures for data analysis.** Versão 1.2.1. Disponível em: <https://pandas.pydata.org>. Acesso em: 15 de Maio de 2024
- [9]HUNTER, John D.; DALE, David; FONS, Eric; DROETTKER, Ryan; LEE, Tony; SEAMANS, Jouni; McDOUGAL, Ross. **Matplotlib: Python plotting — matplotlib 3.4.3 documentation.** 2003. Disponível em: <https://matplotlib.org/stable/users/index.html>. Acesso em: 27 jun. 2024.
- [10]Goldsteins, H. C. Poole, and J. Safko. **Classical Mechanics**, 3rd, Reading, MA: Addison-Wesley, 2002
- [11] OLIVEIRA, Vânia e CRUZ, Inês. **O Problema dos Três Corpos.** Disponível em: <https://cmup.fc.up.pt/cmup/relatividade/3Corpos/3corpos.html#foot16>. Acesso em: 03 de julho de 2023.
- [12]Grutzelius, J. H. **The Three Body Problem.** 2004. Karlsad University, Suécia, Analytical Mechanics.
- [13]SZEBEHELY, Victor and PETERS, F. P. **Complete Solution of a General Problem of Three Bodies.** The Astronomical Journal, Yale University Observatory, New Haven, Connecticut, v.72, n.7, p. 876-883, 1967

- [14]WONG, Brian. PATIL, Rakesh. MISRA, Arun. **Attitude Dynamics of Rigid Bodies in the Vicinity of Lagrangian Points**. Journal of Guidance, Control and Dynamics, McGill University, Montreal, Quebec H3A 2K6, Canadá, v.31, n. 1, p. 252-256, 2008
- [15]RAHOMA,W. A. MASOUD, A. EL-SALAM, F. A. A.KHATTAB, E. H. **Perturbed locations and linear stability of collinear Lagrangian points in the elliptic restricted three body problem with triaxial primaries**. OPEN ASTRONOMIC - DE GRUYTER. v. 28, p. 145-153. 2019
- [16]BROUCKE, R. A. **Periodic Orbits in the Restricted Three-Body Problem With Earth-Moon Masses**. National Aeronautics and Space Administration.Jet Propulsion Laboratory. California Institute of Technology Pasadena, California. p.0-100, 1968
- [17]FRNKA, R. **The Circular Restricted Three-Body Problem**. Semantic Scholar, p.1-27, 2010
- [18]OpenAI. GPT-3. Versão 4.0.0. Disponível em: <https://openai.com/gpt-3>. Acesso em: 28 de junho de 2024

A APÊNDICE A - Comandos para a Exibição da Posição.

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Definição das Coordenadas das Partículas, feitas de maneira aleatória
x = [-1.5, 0.0, 3.0, 0.0]
y = [-2.0, 3.0, 1.5, 0.0]

# Cores das partículas
cores = ['red', 'green', 'blue', 'black']

# Cria um gráfico para as partículas com cores distintas
for xi, yi, cor in zip(x, y, cores):
    plt.scatter(xi, yi, s=100, c=cor, marker='o')

# Define os limites do gráfico
plt.xlim(-4, 4)
plt.ylim(-4, 4)

# Linhas que ligam todas as partículas entre si
for i in range(len(x)):
    for j in range(i + 1, len(x)):
        plt.plot([x[i], x[j]], [y[i], y[j]], linestyle='-', color='black')

# Rótulos para as partículas (massas)
massas = ["M1", "M2", "M3", "CM"]
for xi, yi, massa in zip(x, y, massas):
    plt.annotate(f'{massa}', (xi, yi), textcoords="offset points", xytext=(0,10), ha='center')

# Remove os eixos e as linhas de marcação(grades)
plt.gca().xaxis.set_major_locator(plt.NullLocator())
plt.gca().yaxis.set_major_locator(plt.NullLocator())

plt.savefig('', bbox_inches='tight')
```

B APÊNDICE B - Comandos do Plot dos Pontos de Lagrange

```

#Bibliotecas Necessárias
from scipy.optimize import newton
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.path as mpath

circle = mpath.Path.unit_circle()
wedge_1 = mpath.Path.wedge(90, 180)
wedge_2 = mpath.Path.wedge(270, 0)

verts = np.concatenate([circle.vertices, wedge_1.vertices[::-1, ...], wedge_2.vertices[::-1, ...]])
codes = np.concatenate([circle.codes, wedge_1.codes, wedge_2.codes])
center_of_mass = mpath.Path(verts, codes)

m_1 = 5.974E24 # kg
m_2 = 7.348E22 # kg
pi_2 = m_2/(m_1 + m_2)

#Coordenadas das Orbitas m1 e m2
x_2 = (1 - pi_2) * np.cos(np.linspace(0, np.pi, 100))
y_2 = (1 - pi_2) * np.sin(np.linspace(0, np.pi, 100))
x_1 = (-pi_2) * np.cos(np.linspace(0, np.pi, 100))
y_1 = (-pi_2) * np.sin(np.linspace(0, np.pi, 100))

def collinear_lagrange(xstar, pi_2):

    first_term = xstar
    second_term = (1 - pi_2) / np.abs(xstar + pi_2)**3 * (xstar + pi_2)
    third_term = pi_2 / np.abs(xstar - 1 + pi_2)**3 * (xstar - 1 + pi_2)
    return first_term - second_term - third_term

L_1 = newton(func=collinear_lagrange, x0=0, args=(pi_2,))
L_2 = newton(func=collinear_lagrange, x0=1, args=(pi_2,))
L_3 = newton(func=collinear_lagrange, x0=-1, args=(pi_2,))
print(f"{L_1=}, {L_2=}, {L_3=}")

fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,5), dpi=96)
ax.set_xlabel("$x^*$")
ax.set_ylabel("$y^*$")

# Plot das Orbitas
ax.axhline(0, color='k')
ax.plot(np.hstack((x_2, x_2[::-1])), np.hstack((y_2, -y_2[::-1])))
ax.plot(np.hstack((x_1, x_1[::-1])), np.hstack((y_1, -y_1[::-1])))
ax.plot([-pi_2, 0.5 - pi_2, 1 - pi_2, 0.5 - pi_2, -pi_2], [0, np.sqrt(3)/2, 0, -np.sqrt(3)/2, 0], 'k', ls="--", lw=1)

# Plot das Massas e Pontos de Lagrange
ax.plot(L_1, 0, 'rv', label="$L_1$")
ax.plot(L_2, 0, 'r^', label="$L_2$")
ax.plot(L_3, 0, 'rp', label="$L_3$")
ax.plot(0.5 - pi_2, np.sqrt(3)/2, 'rX', label="$L_4$")
ax.plot(0.5 - pi_2, -np.sqrt(3)/2, 'rs', label="$L_5$")
ax.plot(0, 0, 'k', marker=center_of_mass, markersize=10)
ax.plot(-pi_2, 0, 'bo', label="$m_1$")
ax.plot(1 - pi_2, 0, 'go', label="$m_2$")
ax.legend()
ax.set_aspect("equal")

```

C APÊNDICE C - Comando do Plot Raízes do polinômio $p(\lambda)$

```

import numpy as np
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt

# Define os símbolos
lambda_symbol = sp.symbols('lambda')

# Define as massas dos corpos
m1 = 1
m2 = 2
m3 = 3

# Define o polinômio p(lambda)
p_lambda = (m2 + m3) * lambda_symbol**5 + (3*m2 + 2*m3) * lambda_symbol**4 + (3*m2 + m3) * lambda_symbol**3 \
    - (3*m1 + m3) * lambda_symbol**2 - (3*m1 + 2*m3) * lambda_symbol - (m1 + m3)

# Encontra as raízes do polinômio
roots = sp.solve(p_lambda, lambda_symbol)

# Imprime as raízes
print("Raízes do polinômio p(lambda):", roots)

# Gera valores para lambda
lambda_values = np.linspace(-10, 10, 1000)

# Avalia p(lambda) para os valores de lambda
p_values = [p_lambda.subs(lambda_symbol, val) for val in lambda_values]

# Plota o polinômio p(lambda)
plt.plot(lambda_values, p_values, label='p(lambda)')
plt.xlabel('lambda')
plt.ylabel('p(lambda)')
plt.grid(True)
plt.axhline(y=0, color='k', linestyle='--')

# Plota as raízes
for root in roots:
    plt.plot(root, 0, 'ro') # Plota um ponto vermelho nas raízes

plt.title('Gráfico do polinômio p(lambda) com raízes')
plt.legend()
plt.show()

```


D APÊNDICE D - Comando do Plot da Solução de Lagrange

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# Função para as equações diferenciais do problema dos três corpos (configuração equilátera)
def three_body_equilateral(y, t, m1, m2, m3):
    x1, y1, vx1, vy1, x2, y2, vx2, vy2, x3, y3, vx3, vy3 = y

    # Constante gravitacional
    G = 1

    # Distâncias entre os corpos
    r12 = np.sqrt((x2 - x1)**2 + (y2 - y1)**2)
    r13 = np.sqrt((x3 - x1)**2 + (y3 - y1)**2)
    r23 = np.sqrt((x3 - x2)**2 + (y3 - y2)**2)

    # Ângulo entre a linha que une o corpo 1 e o corpo 2 e a horizontal
    theta = np.arctan2(y2 - y1, x2 - x1)

    # Forças gravitacionais em cada corpo
    Fx1 = G * m2 / r12**2 * np.cos(theta + np.pi / 3) + G * m3 / r13**2 * np.cos(theta - np.pi / 3)
    Fy1 = G * m2 / r12**2 * np.sin(theta + np.pi / 3) + G * m3 / r13**2 * np.sin(theta - np.pi / 3)

    Fx2 = G * m1 / r12**2 * np.cos(theta - np.pi / 3) + G * m3 / r23**2 * np.cos(theta + np.pi / 3)
    Fy2 = G * m1 / r12**2 * np.sin(theta - np.pi / 3) + G * m3 / r23**2 * np.sin(theta + np.pi / 3)

    Fx3 = G * m1 / r13**2 * np.cos(theta - np.pi / 3) + G * m2 / r23**2 * np.cos(theta + np.pi / 3)
    Fy3 = G * m1 / r13**2 * np.sin(theta - np.pi / 3) + G * m2 / r23**2 * np.sin(theta + np.pi / 3)

    # Acelerações em cada corpo
    ax1 = Fx1 / m1
    ay1 = Fy1 / m1

    ax2 = Fx2 / m2
    ay2 = Fy2 / m2

    ax3 = Fx3 / m3
    ay3 = Fy3 / m3

    return [vx1, vy1, ax1, ay1,
            vx2, vy2, ax2, ay2,
            vx3, vy3, ax3, ay3]

# Parâmetros
m1 = 1
m2 = 2
m3 = 3

# Condições iniciais (configuração equilátera) Fake
x1_0, y1_0 = -1, 0.5 * np.sqrt(3)
vx1_0, vy1_0 = 0, 0
x2_0, y2_0 = 0.5, 0.5 * np.sqrt(3)
vx2_0, vy2_0 = -0.5, -np.sqrt(3) / 2
x3_0, y3_0 = 1, -np.sqrt(3)
vx3_0, vy3_0 = 0, -np.sqrt(3) / 2
y0 = [x1_0, y1_0, vx1_0, vy1_0,
      x2_0, y2_0, vx2_0, vy2_0,
      x3_0, y3_0, vx3_0, vy3_0]

# Tempo
t = np.linspace(0, 10, 1000)

# Resolvendo as equações diferenciais
sol = odeint(three_body_equilateral, y0, t, args=(m1, m2, m3))

# Plotando as trajetórias
plt.plot(sol[:, 0], sol[:, 1], label='Corpo 1')
plt.plot(sol[:, 4], sol[:, 5], label='Corpo 2')
plt.plot(sol[:, 8], sol[:, 9], label='Corpo 3')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.title('Trajetórias dos Corpos no Problema dos Três Corpos (Método de Lagrange)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

E APÊNDICE E - Comando do Plot da Solução de Euler

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

# Função para as equações diferenciais do problema dos três corpos
def three_body_colinear(y, t, m1, m2, m3):
    x1, v1, x3, v3 = y

    # Constante gravitacional
    G = 1

    # Distâncias entre os corpos
    r13 = np.abs(x3 - x1)

    # Derivadas das posições e velocidades
    dx1dt = v1
    dv1dt = G * m3 / r13**2

    dx3dt = v3
    dv3dt = -G * m1 / r13**2

    return [dx1dt, dv1dt, dx3dt, dv3dt]

# Parâmetros
m1 = 1
m2 = 2
m3 = 3

# Condições iniciais
x1_0 = -1
v1_0 = 0
x3_0 = 1
v3_0 = 0

y0 = [x1_0, v1_0, x3_0, v3_0]

# Tempo
t = np.linspace(0, 10, 10000) # Aumentando o número de pontos na simulação

# Resolvendo as equações diferenciais
sol = odeint(three_body_colinear, y0, t, args=(m1, m2, m3))

# Plotando as trajetórias
plt.plot(t, sol[:, 0], label='Corpo 1')
plt.plot(t, sol[:, 2], label='Corpo 3')
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('Posição')
plt.title('Trajetórias dos Corpos no Problema dos Três Corpos (Método de Euler)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

F APÊNDICE F - Comando do Plot da Sistema Júpiter-Sol

```
import numpy as np
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.path as mpath
from matplotlib import cm
from matplotlib.ticker import LinearLocator
import math as mh
import pandas as pd
from scipy import optimize
import seaborn as sns
from scipy.integrate import solve_ivp

# In []
# These masses represent the Earth-Moon system
m_1 = 5.974e24 # kg
m_2 = 7.348e22 # kg

pi_2 = m_2 / (m_1 + m_2)

pi_2 = 0.00005250000# m_2 / (m_1 + m_2)

x_0 = 1 - pi_2
y_0 = 0.0455
z_0 = 0
vx_0 = -0.5
vy_0 = 0.5
vz_0 = 0

x0 = -0.60739559520
y0 = -0.77749682650
u0 = 0.10833422340
v0 = -0.08463997159

x_0 = x0
y_0 = y0
z_0 = 0
vx_0 = u0
vy_0 = v0
vz_0 = 0

# Then stack everything together into the state vector
r_0 = np.array((x_0, y_0, z_0))
v_0 = np.array((vx_0, vy_0, vz_0))
```

```

Y_0 = np.hstack((r_0, v_0))

# In []
def rabs(xi, yi):
    return np.sqrt(xi**2+yi**2)

def eq27(x, y, mu):
    return x - (1-mu)*(x+mu)/rabs((x+mu), y)**3 -
mu*(x+mu-1)/rabs((x+mu-1), y)**3

def jacobiInt(mu, x, y, c):
    return 0.5*(x**2+y**2)+(1-mu)/rabs((x+mu), y) +
mu/rabs((x+mu-1), y)-c

def rootBisec(a, b, mu, nMax=1E3, tol=1E-5, delta=1):
    k=0
    while k<=nMax:
        c = (a + b)/2.
        fc = eq27(c, 0, mu)
        if(fc<0): a = c
        else: b = c
        if(np.abs(fc)<=tol): break
        k+=1
    return c

def nondim_cr3bp(t, Y):
    """Solve the CR3BP in nondimensional coordinates.

    The state vector is Y, with the first three components as the
    position of $m$, and the second three components its velocity.

    The solution is parameterized on $\pi_2$, the mass ratio.
    """
    # Get the position and velocity from the solution vector
    x, y, z = Y[:3]
    xdot, ydot, zdot = Y[3:]

    # Define the derivative vector
    Ydot = np.zeros_like(Y)
    Ydot[:3] = Y[3:]

    sigma = np.sqrt(np.sum(np.square([x + pi_2, y, z])))

```

```

psi = np.sqrt(np.sum(np.square([x - 1 + pi_2, y, z])))
Ydot[3] = (
    2 * ydot
    + x
    - (1 - pi_2) * (x + pi_2) / sigma**3
    - pi_2 * (x - 1 + pi_2) / psi**3
)
Ydot[4] = -2 * xdot + y - (1 - pi_2) * y / sigma**3 - pi_2 * y /
psi**3
Ydot[5] = -(1 - pi_2) / sigma**3 * z - pi_2 / psi**3 * z
return Ydot

# In[]
# L1 is between 0 and R-
L1N = optimize.newton(func=eq27, x0=0, args=(0, pi_2,))
r = 1 # Or any other value as per your requirement.
L1 = rootBisec(0, r, pi_2)
L1 = rootBisec(0, r, pi_2)
L1t = r*(1-(pi_2/3)**(1/3))
print("L1", L1, L1t, L1N)
# In []
L2N = optimize.newton(func=eq27, x0=1, args=(0, pi_2,))
L2 = rootBisec(r, 3*r, pi_2)
L2t = r*(1+(pi_2/3)**(1/3))
print("L2", L2, L2t, L2N)
# In []
L3N = optimize.newton(func=eq27, x0=-1, args=(0, pi_2,))
L3 = rootBisec(-r, 0, pi_2)
L3t = -r*(1+(5*pi_2/12))
print("L3", L3, L3t, L3N)
#In[]

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})

# Make data.
X = np.arange(-1, 1, 0.02)
Y = np.arange(-1, 1, 0.02)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = 0.5*(X**2+Y**2)+(1-pi_2)/rabs((X+pi_2),Y) + pi_2/rabs((X+pi_2-1),Y)
#R = np.sqrt(X**2 + Y**2)
#Z = np.sin(R)

# Plot the surface.

```

```
# Plot the orbits
ax.plot(r_hp[:, 0], r[:, 1], "r", label="Reduced Tolerances Trajectory")
ax.axhline(0, color="k")
ax.plot(np.hstack((x_2, x_2[::-1])), np.hstack((y_2, -y_2[::-1])))
ax.plot(-pi_2, 0, "bo")
ax.plot(1 - pi_2, 0, "go")
ax.plot(x_0, y_0, "ro")
ax.plot(r[:, 0], r[:, 1], "C2", label="Original Trajectory")
ax.set_aspect("equal")
|
```