UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL
DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FRANCISCO BENÍCIO TORRES BRITO

TEOREMA DE HAHN-BANACH:

FORMA ANALÍTICA E FORMAS GEOMÉTRICAS

REDENÇÃO - CE
2023

FRANCISCO BENÍCIO TORRES BRITO

TEOREMA DE HAHN-BANACH:

FORMA ANALÍTICA E FORMAS GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes

REDENÇÃO - CE

2023

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Brito, Francisco Benício Torres.

B862t

Teorema de Hahn-Banach: forma analítica e formas geométricas / Francisco Benicio Torres Brito. - Redenção - CE, 2023.
53f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2023.

Orientadora: Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes.

1. Análise Funcional. 2. Teorema de Hahn-Banach. 3. Forma Analítica. 4. Formas Geométricas. I. Nunes, Amanda Angélica Feltrin. II. Título.

CE/UF/BSCA CDD 515.7

FRANCISCO BENÍCIO TORRES BRITO

TEOREMA DE HAHN-BANACH: FORMA ANALÍTICA E FORMAS GEOMÉTRICAS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 11/12/2023.

BANCA EXAMINADORA

Amanda A. F. Nunes.

Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes (Orientadora)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Rafael Jorge Pontes Diógenes

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares e amigos, cujo apoio e compreensão foram fundamentais nos momentos desafiadores. Agradeço não apenas pelo incentivo, mas também pela paciência durante minha ausência enquanto me dedicava à concretização deste projeto. É através deles que cada esforço ganha significado e se torna verdadeiramente valioso.

Expresso minha profunda gratidão à professora Dra. Sílvia Helena Lima dos Santos, da Engenharia de Energias, pelo apoio inestimável e incentivo. Sua orientação foi uma das melhores e mais acertadas decisões que tomei neste percurso.

Aos professores do Curso de Licenciatura em Matemática, agradeço pelas valiosas contribuições em minha formação. Especialmente, agradeço aos professores Dr. Joserlan Perote da Silva e Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes por aceitarem o convite para compor esta banca. Destaco minha imensa gratidão à minha orientadora, professora Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes, por seu contínuo suporte, compreensão e encorajamento ao longo das orientações.

Expresso também meus sinceros agradecimentos ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e Programa de Bolsa de Monitoria (PBM), que foram essenciais para a minha formação acadêmica. A oportunidade de participar desses programas contribuiu significativamente para o meu desenvolvimento e compreensão mais aprofundada na área.

Por último, expresso meu agradecimento ao meu eu do passado por ter se disposto a trabalhar com um tema que inicialmente não dominava. E ao meu eu do presente, por ter concluído este trabalho e permanecido firme no processo. Cada passo foi um valioso aprendizado, e esta jornada acadêmica está sendo verdadeiramente enriquecedora!

"A matemática é a criação mais bela e poderosa do espírito humano." (Stefan Banach)

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo fazer um estudo abrangente sobre o Teorema de Hahn-Banach, tanto em sua Forma Analítica quanto em suas Formas Geométricas, que é um pilar fundamental da Análise Funcional, mas também permeia diversas áreas matemáticas, tais como Análise Complexa, Teoria da Medida, Teoria do Controle e Teoria dos Jogos. A relevância desta pesquisa se sustenta no fato de que, apesar de sua importância, o Teorema de Hahn-Banach não é comumente abordado nos cursos de licenciatura em matemática. A Forma Analítica fornece as condições necessárias para estender funcionais lineares definidos em subespaços de um espaço normado para o espaço todo. Esta formalização é crucial em situações em que o domínio inicial é apenas um subconjunto de um espaço vetorial maior. A capacidade de estender esses funcionais mantendo propriedades específicas é fundamental em diversas áreas da matemática, como Análise Funcional, Teoria da Medida e Equações Diferenciais Parciais. As Formas Geométricas garante que, em determinadas condições, é possível separar, no sentido lato ou no sentido estrito, subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios de um espaço normado por meio de um hiperplano, correspondendo à Primeira Forma e à Segunda Forma, respectivamente. Isso revela uma poderosa ferramenta geométrica para entender as relações espaciais em espaços vetoriais normados. Ao final do trabalho, a complexidade e abrangência do Teorema de Hahn-Banach se reafirmaram de maneira singular em cada uma de suas formas.

Palavras-chave: Análise Funcional. Teorema de Hahn-Banach. Forma Analítica. Formas Geométricas.

ABSTRACT

This work's main objective is to make a comprehensive study of the Hahn-Banach Theorem, both in its Analytical Form and in its Geometric Forms, which is a fundamental pillar of Functional Analysis, but also permeates several mathematical areas, such as Complex Analysis, Measure Theory, Control Theory and Game Theory. The relevance of this research is based on the fact that, despite its importance, the Hahn-Banach Theorem is not commonly covered in undergraduate mathematics courses. The Analytical Form provides the necessary conditions to extend linear functionals defined in subspaces of a normed space to the entire space. This formalization is crucial in situations where the initial domain is just a subset of a larger vector space. The ability to extend these functionals while maintaining specific properties is fundamental in several areas of mathematics, such as Functional Analysis, Measure Theory and Partial Differential Equations. Geometric Forms guarantees that, under certain conditions, it is possible to separate, in the broad or strict sense, convex, disjoint and non-empty subsets of a normed space by means of a hyperplane, corresponding to the First Form and the Second Form, respectively. This reveals a powerful geometric tool for understanding spatial relationships in normed vector spaces. At the end of the work, the complexity and scope of the Hahn-Banach Theorem were reaffirmed in a unique way in each of its forms.

Keywords: Functional Analysis. Hahn–Banach Theorem. Analytic Form. Geometric Forms.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Teorema de Hahn-Banach é um resultado significativo da Análise Funcional, um ramo da matemática que combina conceitos de Álgebra Linear, Análise e Topologia, focalizando espaços vetoriais de dimensão infinita, segundo Oliveira (2012). Este teorema, inicialmente provado por Hans Hahn em 1927 e posteriormente generalizado por Stefan Banach em 1929, é fundamental para o estudo desses espaços.

A Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach afirma que se um funcional linear está definido em um subespaço de um espaço vetorial, então ele pode ser prolongado para todo o espaço e, caso o espaço seja normado, a norma será preservada. Essa propriedade é essencial para a definição de funcionais contínuos em espaços de dimensão infinita, como o espaço das funções contínuas ou o espaço das funções integráveis. Além disso, o Teorema de Hahn-Banach possui duas Formas Geométricas sobre a separação de dois conjuntos convexos por um hiperplano: a Primeira Forma, para o caso em que um dos conjuntos é aberto, e Segunda Forma, para o caso em que um dos conjuntos é fechado e o outro compacto.

A magnitude do Teorema de Hahn-Banach é desafiadora de quantificar, pois sua relevância se estende por uma teia intrincada de corolários e aplicações. Este Teorema não apenas se destaca como um pilar fundamental na Análise Funcional, mas também permeia diversas áreas matemáticas, desde a Análise Complexa, Teoria da Medida, Teoria do Controle e até mesmo a Teoria dos Jogos, como ressaltado por Botelho (2011).

Este trabalho tem como principal objetivo fazer um estudo abrangente sobre o Teorema de Hahn-Banach, tanto na Forma Analítica quanto nas Formas Geométricas, destacando sua importância na teoria funcional dos espaços vetoriais topológicos. A relevância se sustenta no fato de que, apesar de representar um pilar fundamental na matemática, este não é um conteúdo comumente abordado nos cursos de licenciatura em matemática. Este primeiro capítulo corresponde à introdução e traz uma apresentação dos próximo capítulos.

No segundo capítulo, exploramos os conceitos essenciais para a demonstração do Teorema de Hahn-Banach, em sua Forma Analítica e suas Formas Geométricas. Inicia-se com a definição de espaço vetorial e de norma para, então, definir os espaços normados. Logo depois, tem-se a definição de funcionais lineares e a apresentação do dual algébrico. Em seguida, são definidas as relações de ordem e os diversos elementos que surgem a partir delas. Concluímos com a introdução do conceito de limitação aos funcionais lineares, peça-chave para a definição do dual topológico. A leitura deste capítulo é crucial para estabelecer os conhecimentos prévios necessários à compreensão plena do que será apresentado no capítulo seguinte.

O terceiro capítulo é dedicado especificamente ao Teorema de Hahn-Banach. Iniciamos com um breve histórico sobre a vida dos matemáticos que emprestam seus nomes a este Teorema, a saber, Hans Hahn e Stefan Banach. A motivação para incluir este tópico reside na valorização dos indivíduos que contribuíram significativamente para a Matemática, indo além de seus nomes para explorar as experiências pessoais que moldaram suas contribuições.

O tópico sobre a Forma Analítica inicia com a apresentação do Lema de Zorn, da definição do prolongamento de um funcional linear e do enunciado e demonstração de um outro lema, que será fundamental para o Teorema de Hahn-Banach em sua Forma Analítica; por fim, algumas das aplicações desta forma do Teorema são apresentadas em forma de corolários. No tópico dedicado às Formas Geométricas, definimos o funcional de Minkowski para um conjunto convexo e o hiperplano afim e enunciamos um lema que será utilizado na demonstração das Formas Geométricas do Teorema de Hahn Banach.

Por fim, concluímos com nossas considerações finais tanto sobre o Teorema de Hahn-Banach quanto sobre o trabalho que foi desenvolvido.

2 PRELIMINARES

O objetivo principal deste capítulo é apresentar conceitos básicos para demonstração do Teorema de Hahn-Banach. Para a escrita deste capítulo utilizamos como base Boldrini (1980), Cavalcanti (2010), Domingues (2003), Lima (2014) e Oliveira (2012).

2.1 ESPAÇOS VETORIAIS

Definição 2.1 (Espaço vetorial) *Um espaço vetorial é um conjunto não vazio E, definido sobre um corpo $\mathbb{K}$, com duas operações: adição, $+ : E \times E \to E$, e multiplicação por escalar, $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$, que satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer x, y, $z \in E$ e a, $b \in \mathbb{K}$:*

(A1) $(x+y)+z = x+(y+v)$ *(associatividade da adição),*

(A2) $x+y = y+x$ *(comutatividade da adição),*

(A3) Existe $0 \in E$ *tal que* $x+0 = x$ *(elemento/vetor nulo),*

(A4) Existe $-x \in E$ *tal que* $x+(-x) = 0$ *(elemento/vetor oposto),*

(M1) $a(x+y) = ax+ay$ *(distributiva de um escalar à soma de vetores),*

(M2) $(a+b)x = ax+bx$ *(distributiva da soma de escalares a um vetor),*

(M3) $(ab)x = a(bx)$ *(compatibilidade com a multiplicação de escalares),*

(M4) $1x = x$ *(elemento neutro da multiplicação por escalar).*

O espaço vetorial E será dito real se for definido sobre o corpo $\mathbb{R}$ dos reais e complexo se for definido sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos.

Neste trabalho, utilizaremos espaços vetoriais reais, isto é, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1 *O conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$, para $n = 1, 2, \ldots$, com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais, isto é, definidas por*

$$u+v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n), \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n,$$

$$\alpha u = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n), \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

é um espaço vetorial.

Exemplo 2.2 *O conjunto $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f$ é uma função$\}$, das funções reais, com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall\, f, g \in F(\mathbb{R}),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall\, f \in F(\mathbb{R}), \forall\, \alpha \in \mathbb{R},$$

é um espaço vetorial.

Definição 2.2 (Subespaço vetorial) *Seja E um espaço vetorial real. Um subconjunto não vazio G será um subespaço vetorial de E:*

(a) Se $x, y \in G$, então $x + y \in G$.

(b) Se $x \in G$ e $a \in \mathbb{R}$, então $ax \in G$.

Observação 2.1 *A partir das condições da Definição 2.2 acima, podemos afirmar que*

(1) Um subespaço vetorial real G é também um espaço vetorial real, pois se operarmos em G, não obteremos um vetor fora de G (fechamento).

(2) Qualquer subespaço contém o vetor nulo (basta tomar $a = 0$).

(3) Todo espaço vetorial real admite pelo menos dois subespaços triviais: o vetor nulo e o próprio espaço vetorial real.

Proposição 2.1 (Intersecção de subespaços) *Seja E um espaço vetorial real e sejam G_1 e G_2 subespaços vetoriais reais de E. A intersecção $G_1 \cap G_2$ é subespaço vetorial de E.*

Demonstração: A intersecção $G_1 \cap G_2$ é não vazia, pois ambos os subespaços contém o vetor nulo. Vamos verificar as duas condições da Definição 2.2.

(a) Se $x, y \in G_1 \cap G_2$, então temos que $x,\ y \in G_1$ e $x,\ y \in G_2$. Logo, $x + y \in G_1$ e $x + y \in G_2$. Portanto, $x + y \in G_1 \cap G_2$.

(b) Se $x \in G_1 \cap G_2$, então $x \in G_1$ e $x \in G_2$. Seja $a \in \mathbb{R}$, temos que $ax \in G_1$ e $ax \in G_2$. Portanto, $ax \in G_1 \cap G_2$.

Assim, $G_1 \cap G_2$ é um subespaço vetorial real de E. ■

Uma vez que a intersecção de dois subespaços ainda é um subespaço vetorial real, poderíamos esperar o mesmo da união, mas isso não acontece necessariamente. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3 *Seja E um espaço vetorial real e sejam $G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\}$ e $G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}$ subespaços vetoriais reais de E. A união entre G_1 e G_2 será o conjunto*

$$G_1 \cup G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0 \text{ ou } y = 0\}.$$

O elemento neutro $(0, 0)$ está em G_1 e em G_2 e, portanto, está também na união. Mas, dados elementos $g_1, g_2 \in G_1 \cup G_2$, não podemos garantir que a soma ainda estará na *união. Por exemplo, consideremos* $g_1 = (1,0)$ *e* $g_2 = (0,1)$*. Temos que* $g_1, g_2 \in G_1 \cup G_2$*, mas* $g_1 + g_2 = (1,0) + (0,1) = (1,1)$ *é um vetor que não satisfaz nenhuma das condições do conjunto da união. Logo,* $g_1 + g_2 \notin G_1 \cup G_2$*.*

Assim, vejamos as condições necessárias e suficientes para que a soma de subespaços seja um subespaço.

Proposição 2.2 (União de subespaços) *Seja* E *um espaço vetorial real e sejam* G_1 *e* G_2 *subespaços vetoriais reais de* E*. A união* $G_1 \cup G_2$ *é subespaço vetorial real de* E *se, e somente, se* $G_1 \subset G_2$ *ou* $G_2 \subset G_1$*.*

Demonstração: Suponhamos que $G_1 \cup G_2$ é subespaço vetorial de E, queremos mostrar que $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$. Suponhamos o contrário, isto é, que $G_1 \not\subset G_2$ e $G_2 \not\subset G_1$. Logo, existe $x \in G_1$ e $y \in G_2$ tal que $x \notin G_2$ e $y \notin G_1$. Como $x, y \in G_1 \cup G_2$, pela hipótese $x + y \in G_1 \cup G_2$, ou seja, $x + y \in G_1$ ou $x + y \in G_2$. Digamos, sem perda de generalidade, que $x + y \in G_1$ e tomemos $-x \in G_1$ (elemento oposto de x) de modo que a soma $(x + y) + (-x) = y \in G_1$, o que é um absurdo. Se tivéssemos dito que $x + y \in G_2$, tomaríamos $-y \in G_2$ e a soma resultaria que $x \in G_1$, absurdo. Portanto, $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$.

Reciprocamente, suponhamos que $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$, queremos mostrar que a união $G_1 \cup G_2$ é subespaço vetorial real de E. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $G_1 \subset G_2$. Temos que a união $G_1 \cup G_2$ é igual ao próprio G_2, que é subespaço vetorial real de E. Se tivéssemos suposto que $G_2 \subset G_1$, então $G_1 \cup G_2 = G_1$, que também é subespaço vetorial real de E. Portanto, $G_1 \cup G_2$ é subespaço vetorial real de E.

Assim, a união $G_1 \cup G_2$ é subespaço vetorial de E se, e somente, se $G_1 \subset G_2$ ou $G_2 \subset G_1$. ∎

Proposição 2.3 (Soma de subespaços) *Seja* E *um espaço vetorial real e sejam* G_1 *e* G_2 *subespaços vetoriais reais de* E*. A soma* $G_1 + G_2 = \{g_1 + g_2;\ g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2\}$ *é subespaço vetorial real de* E*.*

Demonstração: A soma $G_1 + G_2$ é não vazia, pois ambos os subespaços contém o vetor nulo. Vamos verificar as duas condições da Definição 2.2.

(a) Seja $x, y \in G_1 + G_2$, tais que $x = x_1 + x_2$ e $y = y_1 + y_2$, com $x_1, y_1 \in G_1$ e $x_2, y_2 \in G_2$. Como, $x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, sendo $x_1 + y_1 \in G_1$ e $x_2 + y_2 \in G_2$, temos que $x + y \in G_1 + G_2$.

(b) Seja $x \in G_1 + G_2$, tal que $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in G_1$ e $x_2 \in G_2$. Seja $a \in \mathbb{R}$, temos que $ax = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 \in G_1 + G_2$, pois $ax_1 \in G_1$ e $ax_2 \in G_2$.

Assim, $G_1 + G_2$ é um subespaço vetorial real de E. ∎

Em particular, se a interseção $G_1 \cap G_2 = \{0\}$ (vetor nulo), dizemos que é a soma direta de subespaços, denotada por $G_1 \oplus G_2$.

Proposição 2.4 *Seja E um espaço vetorial real e sejam G_1 e G_2 subespaços vetoriais reais de E. O espaço $E = G_1 \oplus G_2$ se, e somente se, cada elemento $x \in E$ pode ser escrito de forma única pela combinação $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in G_1$ e $x_2 \in G_2$.*

Demonstração: Suponhamos que $E = G_1 \oplus G_2$, queremos mostrar a unicidade na escrita de $x \in E$ pela combinação $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in G_1$ e $x_2 \in G_2$. Supondo que $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, com $x_1, y_1 \in G_1$ e $x_2, y_2 \in G_2$. Assim, temos $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$. Como $x_1 - y_1 \in G_1$ e $x_2 - y_2 = x_1 - y_1 \in G_2$, temos $x_1 - y_1 \in G_1 \cap G_2 = \{0\}$, posto que $G_1 \oplus G_2$ é soma direta, o que implica que $x_1 - y_1 = 0$, isto é, $x_1 = y_1$. O mesmo se verifica para $x_2 = y_2$, o que mostra a unicidade da decomposição.

Reciprocamente, suponhamos que cada elemento $x \in E$ pode ser escrito de forma única pela combinação $x = x_1 + x_2$, com $x_1 \in G_1$ e $x_2 \in G_2$, queremos mostrar que $E = G_1 \oplus G_2$. Supondo um elemento $y \in G_1 \cap G_2$, somando e subtraindo y em $x = x_1 + x_2$, temos $x = (x_1 + y) + (x_2 - y)$. Mas, pela unicidade da decomposição, temos que $x_1 = x_1 + y$ e $x_2 = x_2 - y$, o que implica que $y = 0$ (vetor nulo). Assim, $G_1 \cap G_2 = \{0\}$ e, portanto, $E = G_1 \oplus G_2$. ■

Exemplo 2.4 *O espaço vetorial $C(I)$, das funções reais contínuas definidas em um intervalo real I, é dado pela soma direta dos subespaços vetoriais G_1 e G_2 dados por:*

$$G_1 = \{f \in C(I) \mid f(t) = -f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\} \text{ e}$$
$$G_2 = \{f \in C(I) \mid f(t) = f(-t), \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Da fato, toda função real f definida em I pode ser assim decomposta: $f(t) = g(t) + h(t), \forall t \in I$, onde

$$g(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \qquad e \qquad h(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}.$$

Como

$$g(-t) = \frac{f(-t) - f(t)}{2} = -g(t) \qquad e \qquad h(-t) = \frac{f(-t) + f(t)}{2} = h(t),$$

então $g \in G_1$ e $h \in G_2$. Portanto, $C(I) = G_1 + G_2$.

Além disso, se $f \in G_1 \cap G_2$, então $f(t) = f(-t)$ e $f(t) = -f(-t)$, $\forall t \in I$. Logo, $2f(t) = 0, \forall t \in I$. Assim, a interseção $G_1 \cap G_2$ só contém a função nula $f(t) = 0, \forall t \in I$. Portanto, $C(I) = G_1 \oplus G_2$.

2.2 ESPAÇOS VETORIAIS NORMADOS

Definição 2.3 (Norma) *Seja E um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma função real $\|\cdot\|_E : E \to \mathbb{R}$ que associa cada elemento $x \in E$ a um número real $\|x\|_E$, de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas, para quaisquer $x, y \in E$ e $t \in \mathbb{R}$:*

(N1) $\|x\|_E \geq 0$ *e* $\|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N2) $\|tx\|_E = |t|\,\|x\|_E$ *(homogeneidade),*

(N3) $\|x+y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ *(subaditividade ou desigualdade triangular).*

Proposição 2.5 *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita, então todas as normas são equivalentes. Isto é, dadas duas normas $\|x\|$ e $\|x\|_0$ definidas em E, existem $c > 0$ e $C > 0$ satisfazendo $c\|x\|_0 \leq \|x\| \leq C\|x\|_0$, para todo $x \in E$.*

Demonstração: Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base canônica de E. Para cada $x \in E$, existem $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tal que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. Seja $\|\cdot\|_0$ uma norma em E definida por $\|x\|_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|$. Queremos mostrar que qualquer norma em E é equivalente a $\|x\|_0$.

Para isso, seja $\|\cdot\|$ uma outra norma em E. Então

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|\|e_i\| \leq \max_{1 \leq j \leq n}\{\|e_j\|\} \sum_{i=1}^{n} |a_i| = C\|x\|_0.$$

Além disso, existe $c > 0$ tal que $\|x\| \geq c(a_1 + \cdots + a_n)$. Logo,

$$c\|x\|_0 \leq \|x\| \leq C\|x\|_0.$$

■

Exemplo 2.5 *As seguintes normas são equivalentes em $\mathbb{R}^n$:*

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n| && \textit{(norma 1, da soma)},\\
\|x\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} && \textit{(norma 2, euclidiana)},\\
\|x\|_p &= \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p} && \textit{(norma p)},\\
\|x\|_\infty &= \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} && \textit{(norma do máximo)},
\end{aligned}$$

em que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base canônica para $\mathbb{R}^n$.

Observação 2.2 *A notação* $\|x\|_\infty$ *provém do fato que*

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Com efeito, notemos que

$$\left[\max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\}\right]^p \le |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p,$$

donde

$$\begin{aligned} \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\} &\le [|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p]^{1/p} \\ &\le \left[n \left(\max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\} \right)^p \right]^{1/p} \\ &= n^{1/p} \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\}. \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{p \to +\infty} n^{1/p} = 1$ *da desigualdade acima resulta que*

$$\lim_{p \to +\infty} [|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p]^{1/p} = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\}.$$

Exemplo 2.6 *A expressão* $\|f\|_{C(0,1)} = \int_0^1 |f(t)|\ dt$ *define uma norma sobre o espaço* $E = C(0,1)$ *das funções reais e contínuas em* $[0,1]$.

Para verificar a condição $(N1)$, *precisamos verificar a ida e a volta do se e somente se. Se* $f = 0$, *então* $\|f\|_{C(0,1)} = 0$. *E se* $\|f\|_{C(0,1)} = 0$, *isto é, se* $\int_0^1 |f(t)|\ dt = 0$, *consequentemente* $f(t) = 0$, *para todo* $t \in [0,1]$.

Para a homogeneidade $(N2)$, *seja* $\lambda \in \mathbb{R}$ *notemos que*

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{C(0,1)} &= \int_0^1 |(\lambda f)(t)|\ dt = \int_0^1 |\lambda f(t)|\ dt \\ &= \int_0^1 |\lambda||f(t)|\ dt = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|\ dt = |\lambda| \|f\|_{C(0,1)}. \end{aligned}$$

Para a subaditividade $(N3)$, *notemos que*

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{C(0,1)} &= \int_0^1 |(f+g)(t)|\ dt = \int_0^1 |f(t) + g(t)|\ dt \\ &\le \int_0^1 |f(t)| + |g(t)|\ dt = \int_0^1 |f(t)|\ dt + \int_0^1 |g(t)|\ dt \\ &= \|f\|_{C(0,1)} + \|g\|_{C(0,1)}. \end{aligned}$$

Satisfeitas as três condições, temos que a expressão, de fato, define uma norma.

Definição 2.4 (Espaço normado) *Um par $(E, | \,|)$, em que E é um espaço vetorial real e $| \,|$ é uma norma em E, é chamado espaço vetorial normado, ou simplesmente espaço normado. Frequentemente se designa o espaço normado apenas com E, deixando a norma subentendida.*

Exemplo 2.7 *O par $(C(0,1), \|\cdot\|)$, onde $\|\cdot\|$ é a norma definida no Exemplo 2.6 é um espaço normado.*

2.3 FUNCIONAIS LINEARES

Definição 2.5 (Funcional linear) *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que uma aplicação $f : E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear, ou forma linear, sobre o espaço E se*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in E,$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Observação 2.3 *Em algumas literaturas, como em Cavalcanti, Cavalcanti e Komornik (2010), utiliza-se o termo forma linear no lugar de funcional linear.*

Exemplo 2.8 *Consideremos $f : C(a,b) \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$. Temos que*

$$f(x+y) = \int_a^b (x+y)(t)\,dt = \int_a^b (x(t)+y(t))\,dt = f(x) + f(y),$$

$$f(\lambda x) = \int_a^b (\lambda x)(t)\,dt = \int_a^b \lambda x(t)\,dt = \lambda \int_a^b x(t)\,dt = \lambda f(x),$$

o que mostra que f é um funcional linear.

Exemplo 2.9 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideremos $\delta_{t_0} : C(a,b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \delta_{t_0}(x) = x(t_0)$, $t_0 \in [a,b]$. Temos que*

$$\delta_{t_0}(x+y) = (x+y)(t_0) = x(t_0) + y(t_0) = \delta_{t_0}(x) + \delta_{t_0}(y),$$

$$\delta_{t_0}(\lambda x) = (\lambda x)(t_0) = \lambda\, x(t_0) = \lambda\, \delta_{t_0}(x),$$

o que mostra que δ_{t_0} é um funcional linear.

Exemplo 2.10 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e consideremos $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f_\alpha(x) = \alpha x$. Temos que*

$$f_\alpha(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = f_\alpha(x) + f_\alpha(y),$$

$$f_\alpha(\lambda x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) = \lambda f_\alpha(x),$$

o que mostra que f_α é um funcional linear.

Um resultado interessante é mostrar que todo funcional linear não nulo sobre E assume todos os valores reais, isto é, $f(E) = \mathbb{R}$. Para isto, seja $f : E \to \mathbb{R}$ um funcional linear não nulo, com $x \in E$ tal que $f(x) \neq 0$, e definamos $\lambda = \frac{\beta}{f(x)}$, com $\beta \in \mathbb{R}$. Então,

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \frac{\beta}{f(x)} f(x) = \beta.$$

Como consequências, podemos escrever que:

1) Se f é um funcional linear sobre E e $f(x) > \alpha$, para todo $x \in E$, então

$a)$ $\alpha < 0$,
$b)$ $f(x) = 0$, para todo $x \in E$.

2) Se f é um funcional linear sobre E e $f(x) < \alpha$, para todo $x \in E$, então

$a)$ $\alpha > 0$,
$b)$ $f(x) = 0$, para todo $x \in E$.

Definição 2.6 (Dual algébrico) *Seja E um espaço vetorial. Denominamos dual algébrico de E, designado por E^*, o espaço vetorial dos funcionais lineares sobre E munido das operações*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in E,$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vejamos exemplos de duais algébricos de alguns espaços vetoriais.

Exemplo 2.11 (Dual algébrico de $\mathbb{R}$) *Sejam f_α tal como no Exemplo 2.10, ou seja, $f_\alpha \in \mathbb{R}^*$. Por outro lado, seja $f \in \mathbb{R}^*$ e definamos $f(1) = \alpha$. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1) = \alpha x = f_\alpha(x), \text{ ou seja, } f = f_\alpha.$$

Assim, $f \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow f(x) = \alpha x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definamos,

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$$
$$\alpha \mapsto f_\alpha.$$

Logo, φ é sobrejetiva pois dada $f \in \mathbb{R}^*$ existe $\alpha = f(1)$ tal que $f = f_\alpha = \varphi(\alpha)$. Além disso, se $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, segue que $f_\alpha = f_\beta$ e, portanto, $f_\alpha(x) = f_\beta(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $\alpha x = \beta x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ o que implica que $\alpha = \beta$. Logo, φ é injetiva. Sendo φ linear resulta que é um isomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^*$. Representaremos o isomorfismo entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^*$ (ou entre dois conjuntos quaisquer) através da notação $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^*$.

Exemplo 2.12 (Dual algébrico de $E \times F$) *Definamos o espaço vetorial do produto cartesiano $E \times F = \{(x, y);\ x \in E, y \in F\}$ munido das operações:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \forall x_1, x_2 \in E,\ \forall y_1, y_2 \in F,$$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1), \quad \forall x_1 \in E, y_1 \in F,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Utilizaremos o seguinte lema para determinar o dual algébrico de $E \times F$.

Lema 2.1 *Sejam E e F espaços vetoriais. O dual algébrico do produto cartesiano $E \times F$ é isomorfo (linear e bijetivo) ao produto cartesiano dos duais algébricos de E e F, isto é,*

$$(E \times F)^* \approx E^* \times F^*.$$

Demonstração: Seja $f \in (E \times F)^*$. Definamos

$$f_E(x) = f(x, 0),\ \forall x \in E,$$

$$f_F(y) = f(0, y),\ \forall y \in F.$$

Como $f : E \times F \to \mathbb{R}$ é linear, temos que $f_E \in E^*$ e $f_F \in F^*$ e, além disso,

$$f(x, y) = f((x, 0) + (0, y)) = f(x, 0) + f(0, y) = f_E(x) + f_F(y). \tag{1}$$

Do exposto acima, definamos

$$\psi : (E \times F)^* \to E^* \times F^*$$

$$f \mapsto \psi(f) = (f_E, f_F).$$

Notemos que ψ é uma aplicação injetiva. De fato, sejam $f, g \in (E \times F)^*$ tais que $\psi(f) = \psi(g)$. Então, da definição de ψ vem que $(f_E, f_F) = (g_E, g_F)$, ou seja, $f_E = g_E$ e $f_F = g_F$, e consequentemente de (1) resulta que

$$f(x, y) = f_E(x) + f_F(y) = g_E(x) + g_F(y) = g(x, y), \qquad \forall x \in E,\ \forall y \in F,$$

o que implica que $f = g$ e prova a injetividade.

Provaremos, a seguir, que ψ é sobrejetiva. Com efeito, seja $(e, h) \in E^* \times F^*$ e definamos $g(x, y) = e(x) + h(y)$. Então, $g \in (E \times F)^*$ posto que e, h são funcionais lineares sobre E e F, respectivamente. Além disso,

$$\psi(g) = (g_E, g_F) = (e, h),$$

posto que

$$g_E(x) = g(x, 0) = e(x) + h(0),$$

$$g_F(y) = g(0, y) = e(0) + h(y),$$

e como $h(0) = e(0) = 0$, uma vez que e e h são lineares, temos que

$$g_E(x) = e(x), \ \forall x \in E,$$

$$g_F(y) = h(y), \ \forall y \in F,$$

o que prova a sobrejetividade.

Finalmente, observemos que ψ é uma aplicação linear. Sejam $f, g \in (E \times F)^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}
\psi(f+g) &= ((f+g)_E, (f+g)_F) = (f_E + g_E, f_F + g_F) \\
&= (f_E, f_F) + (g_E, g_F) = \psi(f) + \psi(g). \\
\psi(\lambda f) &= ((\lambda f)_E, (\lambda f)_F) = (\lambda f_E, \lambda f_F) \\
&= \lambda(f_E, f_F) = \lambda \psi(f).
\end{aligned}$$

Logo, ψ é um isomorfismo de $(E \times F)^*$ sobre $E^* \times F^*$, o que nos permite identificar tais espaços através da notação $(E \times F)^* \approx E^* \times F^*$, o que encerra a demonstração. ∎

Em particular, se $E = F = \mathbb{R}$, então temos $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})^* \approx \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, isto é, $(\mathbb{R}^2)^* \approx \mathbb{R}^2$. Daí resulta que se f é um funcional linear sobre o $\mathbb{R}^2$, então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $f(x, y) = \alpha x + \beta y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

2.4 RELAÇÕES DE ORDEM

Definição 2.7 *Seja P um conjunto e $\mathcal{R}$ uma relação definida entre alguns elementos desse conjunto. P é dito parcialmente ordenado sob a relação $\mathcal{R}$ se as seguintes condições são satisfeitas entre os elementos de P que são comparáveis em relação à $\mathcal{R}$:*

(1) Se $a \in P$, então $a\mathcal{R}a$ (reflexividade);

(2) Se $a, b \in P$, $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a$, então $a = b$ (anti-simétrica);

(3) Se $a, b, c \in P$, $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$, então $a\mathcal{R}c$ (transitividade).

Além disso, se quaisquer dois elementos $a, b \in P$ forem comparáveis, isto é, se acontece uma das relações $a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a$, então P é dito ser <u>totalmente ordenado</u>.

Observação 2.4 *Usaremos a notação $a \leq b$ para representar "a precede b" e, caso $a \neq b$, $a < b$ para representar "a precede estritamente b". Mas isso pressupõe que o entendimento de que, nesse caso, os símbolos não tem necessariamente seu sentido numérico usual.*

Vejamos exemplos de conjuntos totalmente e parcialmente ordenados.

Exemplo 2.13 *Seja P o conjunto dos números reais e seja $\mathcal{R}$ uma relação dada por $\leq$. Dados quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, temos que*

(1) $a \leq a$;

(2) Se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$;

(3) Se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$.

Além disso, dados $a, b \in \mathbb{R}$, uma das relações $a \leq b$ ou $b \leq a$ acontece. Consequentemente, o conjunto dos números reais é totalmente ordenado.

Exemplo 2.14 *Seja P um conjunto arbitrário, Q qualquer coleção de subconjuntos de P e seja $\mathcal{R}$ como a inclusão de conjuntos. Dados quaisquer $A, B, C \in Q$, temos que*

(1) $A \subset A$;

(2) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$;

(3) Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$.

Porém, dados dois conjuntos disjuntos, por exemplo, eles não são comparáveis com respeito a $\mathcal{R}$. Logo, a inclusão de conjuntos constitui uma ordem parcial sobre Q.

Se P é um conjunto parcialmente ordenado sobre a relação $\mathcal{R}$, vejamos quais as condições para que exista um maior (ou menor) elemento em P.

Definição 2.8 (Limite superior e inferior) *Seja P um conjunto parcialmente ordenado sob a relação $\leq$ e seja Q um subconjunto não vazio de P.*

(a) O elemento $L \in P$ é um <u>limite superior</u> de Q se, para todo $x \in Q$, valer $x \leq L$, isto é, qualquer elemento de Q precede L.

(b) O elemento $l \in P$ é um <u>limite inferior</u> de Q se, para todo $x \in Q$, valer $l \leq x$, isto é, l precede qualquer elemento de Q.

Convém notar que por P ser um conjunto parcialmente ordenado, não existe obrigatoriamente uma relação entre quaisquer dois de seus elementos. Porém, para que o subconjunto Q possua limitação superior (ou inferior), é necessário que todos os elementos de Q se relacionem com um elemento L (ou l), que não necessariamente pertence a este subconjunto.

Definição 2.9 (Maximal e minimal) *Seja Q um subconjunto não vazio do conjunto parcialmente ordenado P.*

(a) *Um elemento $M_0 \in Q$ é um <u>elemento maximal</u> de Q se nenhum elemento de Q segue estritamente M_0, isto é, se $x \in Q$ e $M_0 \leq x$, então $M_0 = x$.*

(b) *Um elemento $m_0 \in Q$ é um <u>elemento minimal</u> de Q se nenhum elemento de Q precede estritamente m_0, isto é, se $x \in Q$ e $x \leq m_0$, então $m_0 = x$.*

De forma objetiva, o elemento maximal é uma limitação superior que pertence ao conjunto e que não é superada por nenhuma outra. No Exemplo 2.14, se estendermos a ordem parcial à coleção $\mathcal{P}(X)$ de todos os subconjuntos de X, temos que o conjunto formado pela união de todos os conjuntos em S é uma limitação superior para S. Temos ainda que qualquer outro subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ contendo S é também uma limitação superior para S ou qualquer subconjunto deste. Essa união pode não ser um elemento maximal de S uma vez que pode não ser um membro de S.

Definição 2.10 (Máximo e mínimo) *Seja Q um subconjunto não vazio do conjunto P parcialmente ordenado pela relação $\leq$.*

(a) *Um elemento $M \in Q$ é um <u>máximo</u> de Q se, para todo $x \in Q$, valer $x \leq M$, isto é, se M é um limite superior de Q e pertence a Q.*

(b) *Um elemento $m \in Q$ é um <u>mínimo</u> de Q se, para todo $x \in Q$, valer $m \leq x$, isto é, se M é um limite inferior de Q e pertence a Q.*

Proposição 2.6 *Se Q é um subconjunto do conjunto parcialmente ordenado P e existe um máximo (ou mínimo) de Q, então ele é único.*

Demonstração: Admitamos que $M_1, M_2 \in Q$ sejam máximos de Q. Como M_1 é máximo, então $M_2 \leq M_1$ e, como M_2 também é máximo, então $M_1 \leq M_2$. Logo, $M_1 = M_2$. Analogamente, admitamos que $m_1, m_2 \in Q$ sejam mínimos de Q. Como m_1 é mínimo, então $m_1 \leq m_2$ e como m_2 também é mínimo, então $m_2 \leq m_1$. Logo, $m_1 = m_2$. ■

Definição 2.11 (Supremo e ínfimo) *Seja Q um subconjunto não vazio do conjunto parcialmente ordenado P.*

(a) *O <u>supremo</u> de Q, denotado por $\sup Q$, é o mínimo, caso exista, do conjunto de limites superiores de Q.*

(b) *O <u>ínfimo</u> de Q, denotado por* $\inf Q$*, é o máximo, caso exista, do conjunto de limites inferiores de* Q.

O supremo (ínfimo), por ser um limite superior (inferior), não pertence necessariamente ao subconjunto Q. Caso pertença, dizemos que o supremo (ínfimo) pode ser atingido e, consequentemente, se transforma em máximo (mínimo). Ou seja, sejam $s = \sup Q$ e $i = \inf Q$ tais que $s, i \in Q$ então $s = \max Q$ e $i = \min Q$.

Observação 2.5 *Temos as seguintes propriedades de supremo e ínfimo:*

(1) *Sejam* $A, B \subset \mathbb{R}$ *não vazios, tais que* $x \in A, y \in B \Rightarrow x \leq y$.

$$\sup A \leq \inf B.$$

(2) *Sejam* $A, B \subset \mathbb{R}$ *não vazios e limitados e* $c \in \mathbb{R}$.

  (a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

  (b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

  (c) *Se* $c \geq 0$*, então* $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup A$ *e* $\inf(c \cdot A) = c \cdot \inf A$.

  (d) *Se* $c < 0$*, então* $\sup(c \cdot A) = c \cdot \inf A$ *e* $\inf(c \cdot A) = c \cdot \sup A$.

(3) *Sejam* $A \subseteq B \subset \mathbb{R}$ *não vazios e limitados, então*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

2.5 FUNCIONAIS LINEARES LIMITADOS

Definição 2.12 (Funcional linear limitado) *Seja E um espaço normado. Dizemos que um funcional linear $f \in E^*$ é limitado se*

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)| < +\infty.$$

Definamos no espaço dos funcionais lineares limitados sobre E, designado por E', a norma

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)|.$$

Observação 2.6 *A escolha pelo uso de E' para representar o espaço dos funcionais lineares limitados será melhor discutida posteriormente. Antes, verifiquemos que expressão acima realmente define uma norma sobre este espaço.*

Para a condição (N1) $\|f\|_{E'} \geq 0$ e $\|f\|_{E'} = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Não é difícil ver que $\|f\|_{E'} \geq 0$. Se $f = 0$, tem-se $\|f\|_{E'} = 0$. E se $\|f\|_{E'} = 0$, isto é, se $\sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)| = 0$, consequentemente $f(x) = 0$ para todo $x \in E$, tal que $\|x\|_E \leq 1$. Se $y \in E$ é tal que $y \neq 0$ então,

$$f(y) = \|y\|_E \frac{f(y)}{\|y\|_E} = \|y\|_E f\left(\frac{y}{\|y\|_E}\right) = 0$$

e como, pela linearidade, $f(0) = 0$, resulta que $f(y) = 0$, para todo $y \in E$.

Para a subaditividade, $\|f + g\|_{E'} \leq \|f\|_{E'} + \|g\|_{E'}$, notemos que

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{E'} + \|g\|_{E'}, \text{ para todo } x \in E$$

com $\|x\|_E \leq 1$, o que prova que $\|f\|_{E'} + \|g\|_{E'}$ é uma cota superior para o conjunto $\{|f(x) + g(x)|; x \in E \text{ tal que } \|x\|_E \leq 1\}$ e, portanto,

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} |(f + g)(x)| = \|f + g\|_{E'} \leq \|f\|_{E'} + \|g\|_{E'}.$$

E para a homogeneidade, $\|\lambda f\|_{E'} = |\lambda| \, \|f\|_{E'}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, notemos que

$$|\lambda f(x)| = |\lambda| \, |f(x)| \leq |\lambda| \, \|f\|_{E'}, \text{ para todo } x \in E \text{ com } \|x\|_E \leq 1,$$

e, portanto

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} |\lambda f(x)| = \|\lambda f\|_{E'} \leq |\lambda| \, \|f\|_{E'}. \tag{2}$$

Por outro lado,

$$|\lambda| \, |f(x)| = |\lambda \, f(x)| \leq \|\lambda f\|_{E'} \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_{E'} \text{ (se } \lambda \neq 0),$$

donde

$$\|f\|_{E'} \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda f\|_{E'} \Rightarrow |\lambda| \, \|f\|_{E'} \leq \|\lambda f\|_{E'} \text{ (se } \lambda \neq 0). \tag{3}$$

Combinando as desigualdades (2) e (3) e notando-se que para $\lambda = 0$ a identidade se verifica, tem-se o desejado.

Lema 2.2 *Temos as seguintes igualdades:*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \, \|x\|_E = 1} |f(x)| = \sup_{x \in E, \, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}.$$

Demonstração: Provemos a primeira das igualdades acima. Como

$$\{x \in E; \|x\|_E = 1\} \subset \{x \in E; \|x\|_E \leq 1\},$$

temos que

$$\sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} |f(x)| \leq \sup_{x \in E,\ \|x\|_E \leq 1} |f(x)|,$$

ou seja,

$$\sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} |f(x)| \leq \|f\|_{E'}. \tag{4}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in E$ tal que $\|y\|_E \leq 1$, $y \neq 0$ e $|f(y)| > \|f\|_{E'} - \varepsilon$. Tomando $x = \frac{y}{\|y\|_E}$ então

$$\|x\|_E = \left\| \frac{y}{\|y\|_E} \right\|_E = \frac{\|y\|_E}{\|y\|_E} = 1$$

e, além disso,

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{y}{\|y\|_E} \right) \right| = \frac{|f(y)|}{\|y\|_E} \geq |f(y)| \text{ (já que } \|y\|_E \leq 1).$$

Assim,

$$|f(x)| \geq |f(y)| > \|f\|_{E'} - \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} |f(x)| > \|f\|_{E'} - \varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de ε vem que

$$\sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} |f(x)| \geq \|f\|_{E'}. \tag{5}$$

Combinando (4) e (5) tem-se a primeira das identidades,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} |f(x)|,$$

que podemos reescrever como

$$\sup_{x \in E,\ \|x\|_E \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} |f(x)|.$$

Agora, provaremos a segunda das identidades. Seja $x \neq 0$. Temos que $\|\frac{x}{\|x\|_E}\|_E = 1$

e portanto

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|_E} = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right| \leq \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} |f(x)|,$$

donde

$$\sup_{x \in E,\ x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} \leq \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} |f(x)|. \tag{6}$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in E$ tal que $\|y\|_E = 1$ e $|f(y)| > \|f\|_{E'} - \varepsilon$. Definindo-se $x = \lambda y$, onde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, resulta que

$$\|x\|_E = \|\lambda y\|_E = |\lambda|\, \|y\|_E = |\lambda| \quad \text{(já que } \|y\|_E = 1\text{)}.$$

Logo,

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|_E} = \frac{|\lambda|\, |f(y)|}{|\lambda|} = |f(y)| > \|f\|_{E'} - \varepsilon,$$

donde se conclui

$$\sup_{x \in E,\ x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} \geq \|f\|_{E'} - \varepsilon,$$

e pela arbitrariedade do ε resulta que

$$\sup_{x \in E,\ x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} \geq \|f\|_{E'}. \tag{7}$$

De (6), (7) e da primeira identidade, tem-se a segunda identidade. ∎

Do Lema 2.2 decorre que se $f : E \to \mathbb{R}$ é um funcional linear limitado, então

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E, \text{ para todo } x \in E. \tag{8}$$

Definição 2.13 (Funcional linear contínuo) *Seja E um espaço normado. Dizemos que um funcional linear $f \in E^*$ é <u>contínuo</u> se para todo $x_0 \in E*$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $x \in E$; e $\|x - x_0\| < \delta$.*

Conforme mencionado anteriormente, a notação E', empregada para as funcionais lineares e limitados, é usualmente utilizada para as funcionais lineares e contínuos. Entretanto, a seguinte proposição mostrará que a limitação implica na continuidade, o que justifica o uso desta notação.

Proposição 2.7 *Seja $f \in E^*$. As seguintes expressões são equivalentes:*

(1) f é limitado,

(2) f é contínuo no ponto $x = 0$,

(3) f é contínuo em E.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Se f é limitado, então queremos mostrar que é contínuo no ponto $x = 0$. De acordo com (8) resulta que $|f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E$, para todo $x \in E$. Como $f(0) = 0$ então dado $\varepsilon > 0$ decorre que existe $\delta = \frac{\varepsilon}{\|f\|_{E'}} > 0$ tal que se $\|x - 0\|_E = \|x\|_E < \delta$ então $|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \varepsilon$, o que mostra que f é contínuo em $x = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Se f é contínuo em $x = 0$, então queremos mostrar que é contínuo em todo o espaço E. Para isto, consideremos $x_0 \in E$. Pela continuidade no ponto 0, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x - 0\|_E = \|x\|_E < \delta$ então $|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \varepsilon$. Resulta daí que se $x \in E$ é tal que $\|x - x_0\|_E < \delta$, com $(x - x_0) \in E$, então, $|f(x - x_0)| < \varepsilon$. Mas em virtude da linearidade de f tem-se $|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| < \varepsilon$, o que mostra que f é contínuo em E.

(3) $\Rightarrow$ (1) Se f é contínuo em E, então queremos mostrar que é limitado. Em particular, f é contínuo em $x = 0$ e portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|x\|_E < \delta$ então $|f(x)| < \varepsilon$. Consideremos, então, $0 < \mu < \delta$ e $x \in E$ tal que $\|x\|_E = 1$. Então, $\|\mu x\|_E = \mu < \delta$ e assim $|f(\mu x)| < \varepsilon$, o que implica que

$$\sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} |f(\mu x)| \leq \varepsilon,$$

e consequentemente,

$$\sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} |f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{\mu},$$

o que mostra que f é limitado, e encerra a demonstração. ■

Definição 2.14 (Dual topológico) *Seja E um espaço normado. Denominamos dual topológico de E, designado por E', o espaço vetorial das funcionais lineares e limitados (contínuos) sobre E munido das operações de soma e multiplicação por escalar e dotado da norma dual,*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} |f(x)|.$$

Observação 2.7 *Quando não houver ambiguidade na interpretação, designaremos $\|f\|_{E'}$ simplesmente por $\|f\|$ bem como $\|x\|_E$ simplesmente por $\|x\|$.*

Não é difícil notar que $E' \subset E^*$. Entretanto, se E tem dimensão infinita, $E' \subsetneq E^*$, ou seja, existem funcionais lineares que não são limitados. Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.15 *Seja $E = C(0,1)$, isto é, o espaço das funções reais e continuas em $[0,1]$ com norma $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ (Exemplo 2.6). Consideremos $\delta_0 : C(0,1) \to \mathbb{R}$ definida por $\delta_0 = f(0)$.*

Observe que $\delta_0 \in (C(0,1))^*$, porém $\delta_0 \notin (C(0,1))'$. Para mostrar isto, seja $\{f_n\}$

uma sequência de funções contínuas dada por

$$f_n(t) = \begin{cases} -2n^2t + 2n, \ se \ 0 \leq t < 1/n, \\ 0, \ se \ 1/n \leq t \leq 1, (n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

Temos

$$\begin{aligned} \|f_n\| = \int_0^1 |f_n(t)| \, dt &= \int_0^{1/n} |-2n^2t + 2n| \, dt \\ &= \int_0^{1/n} (-2n^2t + 2n) \, dt = [-n^2t^2 + 2nt]_0^{1/n} = 1, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Assim,

$$\begin{aligned} \|\delta_0\|_{(C(0,1))'} &= \sup_{\|x\|_{C(0,1)}=1} |\delta_0(x)| \\ &\geq \sup_n |\delta_0(f_n)| = \sup_n f_n(0) = \sup_n 2n = +\infty, \end{aligned}$$

o que prova que δ_0 não é limitada.

Para os casos em que E tem dimensão finita, temos que $E^* = E'$. Vejamos.

Seja E um espaço vetorial de dimensão n e consideremos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base canônica para E, tal que, se $x \in E$, então $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Consideremos a norma do máximo em E, dada por

$$|x|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Como em um espaço vetorial de dimensão finita todas as normas são equivalentes temos

$$C_1|x|_\infty \leq \|x\| \leq C_2|x|_\infty, \quad \forall x \in E,$$

onde C_1, C_2 são constantes positivas.

Seja $g \in E^*$. Temos

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \\ &= g(x_1e_1) + \cdots + g(x_ne_n) \\ &= x_1g(e_1) + \cdots + x_ng(e_n), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |x_1||g(e_1)| + \cdots + |x_n||g(e_n)| \\ &\leq |x|_\infty(|g(e_1)| + \cdots + |g(e_n)|) \leq \frac{M}{C_1}\|x\|, \end{aligned}$$

então g é limitada e, consequentemente, contínua (Proposição 2.7), ou seja, $g \in E'$. Logo, $E^* = E'$ quando E tem dimensão finita.

2.6 NOÇÕES TOPOLÓGICAS

Definição 2.15 (Conjunto convexo) *Um conjunto C é dito convexo se contém qualquer segmento de reta cujos extremos pertencem a C, ou seja, dados $x, y \in C$ temos*

$$[x, y] = \{tx + (1 - t)y;\ 0 \leq t \leq 1\} \subset C.$$

Definição 2.16 (Bolas e esferas) *Seja E um espaço normado e $a \in E$. Dado um número real $r > 0$, definimos:*

(a) A <u>bola aberta</u> de centro a e raio r é o conjunto dos pontos $x \in E$ tais que

$$B_r(a) = \{x \in E; \|x - a\| < r\}.$$

(b) A <u>bola fechada</u> de centro a e raio r é o conjunto dos pontos $x \in E$ tais que

$$B_r[a] = \{x \in E; \|x - a\| \leq r\}.$$

(c) A <u>esfera</u> de centro a e raio r é o conjunto dos pontos $x \in E$ tais que

$$S_r(a) = \{x \in E; \|x - a\| = r\}.$$

Segue-se que $B_r[a] = B_r(a) \cup S_r(a)$ e $S_r(a) = B_r[a] - B_r(a)$.

Definição 2.17 (Conjunto limitado) *Um conjunto C é dito limitado quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in C$. Isto equivale a dizer que C está contido na bola fechada de centro na origem e raio c.*

Definição 2.18 (Ponto interior) *Seja E um espaço normado e $A \subset E$. Um ponto $a \in A$ é dito ponto interior a A quando é centro de alguma bola aberta contida em A, ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset A$. O interior de A é o conjunto* $\operatorname{int} A$, *formado pelos pontos interiores a A.*

Definição 2.19 (Conjunto aberto) *Um conjunto $A \subset E$ é dito aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in A$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset A$.*

Proposição 2.8 *Os conjuntos abertos de um espaço normado E gozam das seguintes propriedades:*

(1) O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço normado E são abertos;

(2) A intersecção $A = A_1 \cap \cdots \cap A_k$ de um número finito de conjuntos abertos $A_1, \ldots, A_k$ é um conjunto aberto;

(3) A união $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos abertos A_λ é um conjunto aberto.

Demonstração: (1) Um conjunto só pode deixar de ser aberto se contiver algum ponto que não seja interior. Como $\emptyset$ não contém ponto algum e o espaço completo E contém todos, são conjuntos abertos.

(2) Seja $a \in A$. Então, para cada $i = 1, \ldots, k$, temos $a \in A_i$. Como A_i é aberto, existe $\delta_i > 0$ tal que $B_{\delta_i}(a) \subset A_i$. Seja $\delta = min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$. Então $B_\delta(a) \subset A_i$ para cada i, donde $B_\delta(a) \subset A$.

(3) Dado $a \in A$, existe $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto, existe $\delta > 0$ com $B_\delta(a) \subset A_\lambda \subset A$. Logo A é aberto.

■

Teorema 2.1 *Seja $f : G \to E$ uma aplicação definida no subconjunto $G \subset E$, um espaço normado. A fim de que f seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo aberto $A \subset E$ seja um conjunto aberto em G.*

Demonstração: Suponha que f é contínua e $A \subset E$ é aberto, então tomemos um ponto $a \in f^{-1}(A)$. Logo, $f(a) \in A$. Pela definição de aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subset A$. Sendo f contínua, existe $\delta > 0$ tal que $x \in G, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$. Isto significa que $f(B_\delta(a) \cap G) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset A$, donde $B_\delta(a) \cap G \subset f^{-1}(A)$. Logo $f^{-1}(A)$ é aberto em G.

Reciprocamente, suponha que a imagem inversa por f de todo aberto de E é aberta em G, então, dados $a \in G$ e $\varepsilon > 0$, como $B_\varepsilon(f(a))$ é aberto, concluímos que $A = \{x \in G;\ \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon\}$ é aberto em G. Assim, $a \in A$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \cap G \subset A$. Isto significa porém que $x \in G, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$, ou seja, que f é contínua no ponto a. Como $a \in G$ é qualquer, f é contínua. ■

Observação 2.8 *O mesmo resultado continuaria válido se substituíssemos, no enunciado acima, a expressão "todo aberto $A \subset E$" por "todo conjunto $A \subset f(G)$, aberto em $f(G)'$.*

Com efeito, um aberto em $f(G)$ tem a forma $\widetilde{A} \cap f(G)$ onde $\widetilde{A}$ é aberto em E e $f^{-1}(\widetilde{A} \cap f(G)) = f^{-1}(\widetilde{A})$. Logo, este novo enunciado, embora aparentemente mais geral, reduz-se ao que foi demonstrado.

Definição 2.20 (Conjunto fechado) *Um conjunto de um espaço normado E é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.*

Proposição 2.9 *Os conjuntos fechados de um espaço normado E gozam das seguintes propriedades:*

(1) O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço normado E são fechados;

(2) A união $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ de um número finito de conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_k$ é um conjunto fechado;

(3) A intersecção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos fechados F_λ é um conjunto fechado.

Demonstração: (1) Como o espaço E e o vazio são complementares entre si, esta verificação é imediata.

(2) Se $F_1, \ldots, F_k$ são fechados então $A_1 = \complement F_1, \ldots, A_k = \complement F_k$ são abertos, portanto $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ é aberto. Logo $F_1 \cup \cdots \cup F_k = \complement A_1 \cup \cdots \cup \complement A_k = \complement(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$ é fechado.

(3) Se cada F_λ, $\lambda \in L$, é fechado então cada $A_\lambda = \complement F_\lambda$ é aberto, logo $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ também é aberto. Sendo assim, o conjunto $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} \complement A_\lambda = \complement \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) = \complement A$ é fechado.

■

Teorema 2.2 *Seja $f : G \to E$ uma aplicação definida no subconjunto $G \subset E$. A fim de que f seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de todo fechado $F \subset E$ seja um conjunto fechado em G.*

Demonstração: Isto decorre do teorema análogo para abertos (Teorema 2.1) juntamente com o fato de que os conjuntos abertos (em G) são exatamente aqueles cujos complementares são fechados (em G). Com efeito, seja f contínua. Então, para cada $F \subset E$ fechado, temos $F = \complement A$, onde $A \subset E$ é aberto. Logo $f^{-1}(A)$ é aberto em G. Mas $f^{-1}(F) = f^{-1}(\complement A) = G - f^{-1}(A)$, portanto $f^{-1}(F)$ é fechado em G. Reciprocamente, se a imagem inversa por f de todo fechado em E é um fechado em G, então a relação $f^{-1}(A) = G - f^{-1}(F)$, com $A = \complement F$, mostra que a imagem inversa por f de todo aberto $A \subset E$ é um aberto em G, portanto f é contínua. ■

A definição a seguir têm como principal referência Lima (2020) sobre espaços métricos. Iremos considerar como espaço métrico um espaço normado, tomando a norma como sendo a distância.

Definição 2.21 (Conjunto compacto) *Seja E um espaço normado e $C \subset E$. Dizemos que C é compacto se toda sequência em C possui uma subsequência convergente em C.*

Em algumas literaturas é possível provar este resultado considerando a definição de compacto via coberturas.

3 TEOREMA DE HAHN-BANACH

Iniciaremos o capítulo trazendo um breve histórico sobre a vida dos matemáticos que nomeiam o Teorema, Hans Hahn e Stefan Banach. Em seguida, apresentaremos a Forma Analítica e as Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach.

3.1 BREVE HISTÓRICO DE HANS HAHN E STEFAN BANACH

Hans Hahn e Stefan Banach foram dois notáveis matemáticos do século XX, e suas vidas envolvem histórias intrigantes que ilustram as diferentes trajetórias que os matemáticos podem percorrer. As informações apresentadas a seguir estão de acordo com O'Connor e Robertson (2000, 2006).

Figura 1 – Hans Hahn e Stefan Banach

Fonte: O'Connor e Robertson (2000, 2006)

Hans Hahn (1879 - 1934) foi um matemático austríaco proeminente que fez contribuições significativas em diversas áreas da matemática, incluindo teoria dos conjuntos, análise funcional e filosofia da matemática. Filho de Emma Blümel e Ludwig Benedikt Hahn, prosseguiu sua educação em universidades de Estrasburgo, Munique e Göttingen. Hahn obteve seu doutorado em 1902, na Universidade de Viena, sob a orientação de Gustav Ritter von Escherich.

Durante sua carreira acadêmica, Hahn desenvolveu uma amizade próxima com outros três matemáticos, Paul Ehrenfest, Heinrich Tietze e Herglotz, conhecidos coletivamente como os "quatro inseparáveis". Ele começou a lecionar como *privatdozent* (professor reconhecido em uma universidade alemã que não fazia parte do quadro de funcionários assalariados) em Viena em 1905, e sua carreira o levou a várias instituições acadêmicas na Áustria-Hungria. Ele serviu no exército austro-húngaro durante a Primeira Guerra Mundial e posteriormente ocupou posições em Bonn e Viena.

Além de suas realizações matemáticas, Hahn desempenhou um papel crucial no Círculo de Viena dos Positivistas Lógicos durante a década de 1920, um grupo de discussão de cientistas e filósofos focado na filosofia da ciência. Ele era um defensor da visão de que lógica e matemática eram tautológicas e não necessariamente refletiam verdades sobre o mundo externo, embora essa perspectiva tenha sido criticada por outros.

Hans Hahn recebeu várias honrarias por seu trabalho, incluindo o Prêmio Lieban em 1921, e foi eleito para a Academia de Ciências da Áustria. Apesar de seu falecimento em 1934, o legado de Hans Hahn na matemática e na filosofia da ciência permanece influente e significativo. Seu livro "Funções de Conjunto", co-escrito por Arthur Rosenthal, foi publicado postumamente em 1948, continuando a desenvolver material relacionado à teoria da integração.

Stefan Banach (1892 - 1945), por outro lado, enfrentou uma infância desafiadora marcada pela ausência de sua mãe biológica, cuja identidade permaneceu em segredo. Seu pai, Stefan Greczek, era um funcionário tributário. Depois do seu nascimento, Banach foi acolhido por sua avó paterna na vila de Ostrowsko. No entanto, devido à doença de sua avó, Banach foi cuidado por Franciszka Plowa e sua filha Maria em Cracóvia.

O interesse de Banach pela matemática surgiu durante seus anos escolares em Cracóvia, onde demonstrou uma notável aptidão na disciplina. Apesar de seu desempenho inicial de destaque, sua performance acadêmica declinou à medida que se aproximava de seu exame final. Após concluir sua educação secundária em 1910, Banach e seu amigo Witold Wilkosz inicialmente optaram por seguir caminhos distintos da matemática, acreditando que não havia mais descobertas a serem feitas na disciplina. Banach escolheu estudar engenharia.

Sem apoio financeiro de seu pai, Banach se matriculou na Universidade Técnica de Lemberg, posteriormente dando aulas particulares para se sustentar. A falta de apoio contínuo de seu pai o levou a retornar frequentemente a Cracóvia. Em 1916, um encontro casual com o matemático Hugo Steinhaus, em Cracóvia, levou a uma colaboração produtiva, desencadeando a pesquisa de Banach em matemática. O surto da Primeira Guerra Mundial o fez retornar a Cracóvia, onde ensinou em escolas locais e frequentou palestras de matemática na Universidade Jagiellonian.

Em 1920, Banach se casou com Lucja Braus e, em 1922, recebeu seu doutorado da Universidade Técnica de Lwów. Sua tese marcou o início da análise funcional, um campo no qual ele contribuiu de maneira significativa. O estabelecimento da Sociedade Matemática de Cracóvia em 1919, sob a iniciativa de Steinhaus, impulsionou ainda mais o trabalho matemático de Banach.

Em 1924, Banach se tornou professor titular e passou o ano acadêmico de 1924-25 em Paris. Ele escreveu livros didáticos e, com Steinhaus, fundou a revista "Studia Mathematica". O estilo de trabalho não convencional de Banach envolvia resolver problemas matemáticos nos cafés de Cracóvia.

Em 1939, Banach foi eleito presidente da Sociedade Matemática Polonesa, pouco antes do início da Segunda Guerra Mundial. Após a guerra, ele se encontrou com o colega matemático Sobolev, mas estava gravemente doente. Banach planejava retornar a Cracóvia, mas faleceu de câncer de pulmão em Lwów em 1945.

Tanto Hans Hahn quanto Stefan Banach deixaram marcas indeléveis no mundo da matemática. O trabalho fundamental de Banach em análise funcional e espaços de Banach, e as contribuições de Hahn para a teoria dos conjuntos e análise funcional, são testemunhos de suas realizações inovadoras. Suas experiências de vida diversas e abordagens únicas à matemática refletem a natureza multifacetada da exploração e inovação matemáticas. Um exemplo notável dessa contribuição é o Teorema de Hahn-Banach, um marco da matemática que lida com a extensão de funcionais lineares e é uma ferramenta essencial em diversos campos da matemática, incluindo análise funcional, teoria de espaços vetoriais topológicos, teoria da medida e teoria da integração.

3.2 FORMA ANALÍTICA DO TEOREMA DE HAHN-BANACH

Nesta seção, traremos a definição de prolongamento de um funcional linear e faremos menção ao Lema de Zorn e um outro Lema auxiliar para, enfim, enunciar a Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach.

A partir das noções de conjunto ordenado (Definição 2.7), de limitação superior (Definição 2.8) e de elemento maximal (Definição 2.9), podemos enunciar o Lema de Zorn.

Lema 3.1 (Lema de Zorn) *Todo conjunto não vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui uma limitação superior, possui um elemento maximal.*

Para este trabalho, será suficiente considerar o Lema de Zorn como um axioma.

Definição 3.1 (Prolongamento de um funcional linear) *Seja E um espaço vetorial, G um subespaço vetorial e g um funcional linear em G, isto é, $g \in G^*$. Dizemos que um funcional linear h em E é um prolongamento de g se $h(x) = g(x)$, para todo $x \in G$, e escrevemos $g \leq h$.*

Desta definição, temos que g é um prologamento de g, isto é, todo funcional linear é um prolongamento de si mesmo. Se h é um prolongamento de g e $D(h) \neq G$, então h é dito um prolongamento próprio de g.

Definição 3.2 (Funcional sublinear) *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que uma aplicação $p : E \to \mathbb{R}$ é um funcional sublinear em E se é positivamente homogênea e* *subaditiva, isto é,*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x_0), \quad \forall x \in E, \ \lambda > 0,$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E.$$

Exemplo 3.1 *O funcional* $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|$, $x \in E$ *é positivamente homogêneo e subaditivo. De fato,*

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \|g\|_{G'}\|x+y\| \leq \|g\|_{G'}(\|x\| + \|y\|) \\ &= \|g\|_{G'}\|x\| + \|g\|_{G'}\|y\| = p(x) + p(y) \\ p(\lambda x) &= \|g\|_{G'}\|\lambda x\| = \|g\|_{G'}(|\lambda|\|x\|) \\ &= |\lambda|\|g\|_{G'}\|x\| = \lambda p(x) \ \textit{(para } \lambda > 0\textit{)}. \end{aligned}$$

Logo, é um funcional sublinear.

Para auxiliar na demonstração do Teorema de Hahn-Banach em sua versão Analítica, usaremos o seguinte lema.

Lema 3.2 *Sejam* E *um espaço vetorial e* p *um funcional sublinear em* E. *Sejam também* G *um subespaço próprio de* E *e* $g \in G^*$ *tal que* $g(x) \leq p(x)$, *para todo* $x \in G$. *Então existe um prolongamento próprio de* h *de* g, *verificando* $h(x) \leq p(x)$ *para todo* $x \in D(h)$.

Demonstração: Seja $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin G$ e seja H o subespaço de E definido por

$$H = G + \mathbb{R}x_0 = \{x + tx_0; x \in G \text{ e } t \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam $x_1, x_2 \in G$. Então, da linearidade de g, da hipótese $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in G$ e da subaditividade de p, segue que

$$\begin{aligned} g(x_1) + g(x_2) = g(x_1 + x_2) &\leq p(x_1 + x_2) \\ &= p(x_1 - x_0 + x_0 + x_2) \\ &\leq p(x_1 - x_0) + p(x_0 + x_2), \end{aligned}$$

o que implica que

$$g(x_1) - p(x_1 - x_0) \leq p(x_0 + x_2) - g(x_2), \text{ para todo } x_1, x_2 \in G.$$

Logo,

$$\sup_{x_1 \in G}\{g(x_1) - p(x_1 - x_0)\} \leq \inf_{x_2 \in G}\{p(x_0 + x_2) - g(x_2)\}.$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{x_1 \in G}\{g(x_1) - p(x_1 - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x_2 \in G}\{p(x_0 + x_2) - g(x_2)\}. \tag{9}$$

Seja $y \in H$ tal que $y = x + tx_0$ e definamos

$$h(y) = g(x) + t\alpha, \text{ para todo } x \in G \text{ e } t \in \mathbb{R}.$$

Note que h está bem definida, pois dado $y \in H$ suponhamos que existam $x_1, x_2 \in G$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais que $y = x_1 + t_1x_0$ e $y = x_2 + t_2x_0$. Então,

$$0 = (x_1 + t_1x_0) - (x_2 + t_2x_0) = (x_1 - x_2) + (t_1 - t_2)x_0.$$

Se $t_1 - t_2 \neq 0$ temos que $x_0 = \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_2} \in G$, o que é um absurdo, pois G é subespaço de E, com $x_0 \in E$ e $x_0 \notin G$. Logo, $t_1 - t_2 = 0$, isto é, $t_1 = t_2$ e, portanto, $x_1 - x_2 = 0$, o que implica $x_1 = x_2$, provando que h está bem definida.

Além disso, h é linear. De fato, sejam $y_1, y_2 \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos:

$$\begin{aligned} h(y_1 + y_2) &= h[(x_1 + t_1x_0) + (x_2 + t_2x_0)] = h[(x_1 + x_2) + (t_1 + t_2)x_0] \\ &= g(x_1 + x_2) + (t_1 + t_2)\alpha = g(x_1) + g(x_2) + t_1\alpha + t_2\alpha \\ &= g(x_1) + t_1\alpha + g(x_2) + t_2\alpha = h(y_1) + h(y_2), \\ h(\lambda y_1) &= h[\lambda(x_1 + t_1x_0)] = h[\lambda x_1 + (\lambda t_1)x_0] = g(\lambda x_1) + (\lambda t_1)\alpha \\ &= \lambda g(x_1) + \lambda(t_1\alpha) = \lambda[g(x_1) + t_1\alpha] = \lambda h(y_1), \end{aligned}$$

o que prova a linearidade de h.

Do que vimos, acima, $h \in H^*$, $G \subsetneq H$ e $g(x) = h(x)$ para todo $x \in G$ (basta tomar $t = 0$); ou seja, h é um prolongamento próprio de g. Resta-nos demonstrar que $h(y) \leq p(y)$ para todo $y \in H$, ou seja,

$$h(x + tx_0) \leq p(x + tx_0),$$

ou ainda

$$g(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0), \text{ para todo } x \in G \text{ e } t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Se $t > 0$ então, da segunda desigualdade de (9), temos

$$\begin{aligned}
g(x) + t\alpha &= t\left[g\left(\frac{x}{t}\right) + \alpha\right] \\
&\leq t\left[g\left(\frac{x}{t}\right) + \inf_{x_2 \in G}\{p(x_2 + x_0) - g(x_2)\}\right] \\
&\leq t\left[g\left(\frac{x}{t}\right) + p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) - g\left(\frac{x}{t}\right)\right] \text{ (para } x_2 = x/t) \\
&= t\, p\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0).
\end{aligned}$$

Se $t < 0$, tomemos $\tau = -t > 0$ e, da primeira desigualdade de (9), temos

$$\begin{aligned}
g(x) + t\alpha &= \tau\left[g\left(\frac{x}{\tau}\right) - \alpha\right] \\
&\leq \tau\left[g\left(\frac{x}{\tau}\right) - \sup_{x_1 \in G}\{g(x_1) - p(x_1 - x_0)\}\right] \\
&\leq \tau\left[g\left(\frac{x}{\tau}\right) - g\left(\frac{x}{\tau}\right) + p\left(\frac{x}{\tau} - x_0\right)\right] \text{ (para } x_1 = x/\tau) \\
&= \tau\, p\left(\frac{x}{\tau} - x_0\right) = p(x - \tau x_0) = p(x + tx_0),
\end{aligned}$$

o que prova o desejado em (10).

Se $t = 0$, então, por hipótese,

$$g(x) + t\alpha = g(x) \leq p(x) = p(x + tx_0),$$

o que finaliza a demonstração do lema. ■

Teorema 3.1 (Forma Analítica do Teorema Hahn-Banach) *Sejam E um espaço vetorial e p um funcional sublinear, definido em E. Se G é um subespaço próprio de E, $g \in G^*$ e $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in G$, então existe um prolongamento h de g a E tal que $h(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$.*

Demonstração: Seja $\mathcal{P}$ a família de todos os prolongamentos h de g, tais que h é linear e $h(x) \leq p(x)$, para todo $x \in D(h)$, onde $D(h)$ é um subespaço vetorial. Ordenemos $\mathcal{P}$ pondo $h_1 \leq h_2$ se, e somente se, h_2 é um prolongamento próprio de h_1. Temos que $\mathcal{P}$ é não vazio pois $g \in \mathcal{P}$, isto é, g é prolongamento de si mesma.

Seja $\mathcal{Q}$ um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$, onde $\mathcal{Q} = \{h_i\}_{i \in I}$, I um conjunto de índices, podemos definir h pondo $D(h) = \cup_{i \in I} D(h_i)$ e $h(x) = h_i(x)$ se $x \in D(h)$ tal que $x \in D(h_i)$. Note que h está bem definida uma vez que $\mathcal{Q}$ é totalmente ordenado e portanto se $i_1, i_2 \in I$ uma das duas possibilidades ocorre: $D(h_{i_1}) \subset D(h_{i_2})$ ou $D(h_{i_2}) \subset D(h_{i_1})$. No primeiro caso h_{i_2} é um prolongamento de h_{i_1} e no segundo caso h_{i_1} é um prolongamento de h_{i_2}, de modo que se $x \in D(h_{i_1}) \cap D(h_{i_2})$ resulta que $h_{i_1}(x) = h_{i_2}(x)$.

Além disso, pela Proposição 2.2, $D(h) = \cup_{i\in I} D(h_i)$ é um espaço vetorial sendo h linear, uma vez que, cada h_i o é. Como $h_i \leq p$ para todo $i \in I$, resulta que $h(x) \leq p(x)$, e, portanto, $h \in \mathcal{P}$.

Como o conjunto $\mathcal{P}$ é parcialmente ordenado, os subconjuntos $\mathcal{Q}$ são totalmente ordenados e h é um limite superior de $\mathcal{Q}$ em $\mathcal{P}$), pelo Lema de Zorn (Lema 3.1) temos que $\mathcal{P}$ possui um elemento maximal f. Como $f \in \mathcal{P}$, temos que $f \leq p$. Resta-nos verificar que $D(f) = E$. Para isto, suponhamos por absurdo, que $D(f)$ é um subespaço próprio de E. Pelo Lema 3.2 concluímos que existe um prolongamento próprio h de f verificando $h(x) \leq p(x)$, o que contradiz o fato de f ser elemento maximal de $\mathcal{P}$. Logo, $D(f) = E$, o que finaliza a prova. ■

3.2.1 Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

Agora, vejamos algumas aplicações, na forma de corolários, decorrentes do Teorema de Hahn-Banach quando E é um espaço normado. Algumas vezes, estes resultados são enunciados como sendo o próprio "Teorema de Hahn-Banach".

Corolário 3.1 *Sejam E um espaço normado, G um subespaço de E e $g \in G'$. Então, existe um prolongamento f de g tal que $f \in E'$ e $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.*

Demonstração: Definamos o funcional sublinear tal como no Exemplo 3.1, ou seja, $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|$, $x \in E$. Para $g \in G'$, temos que

$$g(x) \leq |g(x)| \leq \|g\|_{G'}\|x\| = p(x), \quad \forall x \in G.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um prolongamento f de g a todo E, isto é, $g(x) \leq f(x), \forall x \in E$, tal que

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E. \tag{11}$$

Pela linearidade de f e de (11), temos

$$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = \|g\|_{G'}\|-x\| = p(x), \quad \forall x \in E.$$

Consequentemente,

$$|f(x)| \leq p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|, \quad \forall x \in E,$$

o que implica,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E,\ \|x\|\leq 1} |f(x)| \leq \|g\|_{G'}. \tag{12}$$

Por outro lado, como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$, temos que

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E,\ \|x\|\le 1} |f(x)| \geq \sup_{x\in G,\ \|x\|\le 1} |g(x)| = \|g\|_{G'}. \tag{13}$$

De (12) e (13) segue que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$, conforme queríamos. ■

Sejam E é um espaço normado e E' o seu dual topológico. Quando $f \in E'$ e $x \in E$ escrevemos $\langle f, x\rangle$ ao invés de $f(x)$. Dizemos ainda que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é o produto escalar na dualidade E', E.

Corolário 3.2 *Seja E um espaço normado. Então, para cada $x_0 \in E$, existe um funcional $f_0 \in E'$ tal que $\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E$ e $\langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|_E^2$.*

Demonstração: Se $x_0 = 0$, temos que $f_0 \equiv 0$ (identicamente nula) satisfaz o desejado. Se $x_0 \neq 0$, definamos $G = \mathbb{R}x_0 = \{tx_0;\ t \in \mathbb{R}\}$ e $g(tx_0) = t\|x_0\|_E^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos que g é linear, pois

$$\begin{aligned} g(t_1x_0 + t_2x_0) &= g[(t_1+t_2)x_0] = (t_1+t_2)\|x_0\|_E^2 \\ &= t_1\|x_0\|_E^2 + t_2\|x_0\|_E^2 = g(t_1x_0) + g(t_2x_0), \\ g[\lambda(tx_0)] &= g[(\lambda t)x_0] = (\lambda t)\|x_0\|_E^2 = \lambda(t\|x_0\|_E^2) = \lambda g(tx_0) \end{aligned}$$

e também é limitada, pois

$$\begin{aligned} g(tx_0) &= t\|x_0\|^2 = t\|x_0\|\|x_0\| \\ &\le |t|\|x_0\|\|x_0\| = k\cdot\|tx_0\| \ (\text{k} = \|x_0\|). \end{aligned}$$

Assim, resulta que $g \in G'$ e

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x\in G,\ \|x\|_E = 1} |g(x)| = \sup_{t\in\mathbb{R},\ |t| = \frac{1}{\|x_0\|}} |t|\|x_0\|_E^2 = \|x_0\|_E, \tag{14}$$

isto é, $\|g\|_{G'} = \|x_0\|_E$. Pelo Corolário 3.1, existe um prolongamento f_0 de g a E tal que $f_0 \in E'$ e, portanto, temos $\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E$.

Além disso, como $x_0 \in G$, temos

$$\langle f_0, x_0\rangle = \langle g, x_0\rangle = g(x_0) = g(1\cdot x_0) = 1\cdot\|x_0\|_E^2 = \|x_0\|_E^2$$

ou seja, $\langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|_E^2$, o que encerra a demonstração. ■

Seja E um espaço normado. De um modo geral, se designa para cada $x_0 \in E$ o conjunto

$$F(x_0) = \{f_0 \in E'; \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|_E^2 = \|f_0\|_{E'}^2\},$$

Corolário 3.3 *Seja E um espaço normado. Então, para todo $x \in E$ se tem*

$$\|x\| = \sup_{f \in E',\, \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \max_{f \in E',\, \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Demonstração: Se $x = 0$, então $\langle f, x \rangle = 0$, para todo $f \in E'$, o que verifica o resultado. Se $x \neq 0$, consideremos $f \in E'$ tal que $\|f\| \leq 1$. Então,

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{E'} \|x\| \leq \|x\|,$$

o que implica que

$$\sup_{f \in E',\, \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \leq \|x\|. \tag{15}$$

Por outro lado, pelo Corolário 3.2, existe um funcional $f_0 \in E'$ tal que $\|f_0\|_{E'} = \|x\|_E$ e $\langle f_0, x \rangle = \|x\|_E^2$, ou seja, $f_0 \in F(x)$. Definamos $f_1 = \frac{f_0}{\|x\|_E}$. Então, $\|f_1\|_{E'} = 1$ e $\langle f_1, x \rangle = \|x\|_E$. Então,

$$\sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \geq |\langle f_1, x \rangle|,$$

e portanto,

$$\sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| \geq \|x\|. \tag{16}$$

Combinando (15) e (16) temos a primeira igualdade.

Além disso, note que neste corolário o supremo realmente é atingido e, consequentemente, o "supremo" se transforma em "máximo". Com efeito,

$$\sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle f, x \rangle| = \|x\| = |\langle f_1, x \rangle|, \text{ onde } f_1 \in E\text{' e } \|f_1\| = 1.$$

∎

O teorema de Hahn-Banach possui outras importantes aplicações, como, por exemplo, em operadores adjuntos e resoluções de equações lineares. Para mais informações, consulte Oliveira (2012).

3.3 FORMAS GEOMÉTRICAS DO TEOREMA DE HAHN-BANACH

Nesta seção, veremos que as Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach garantem que, em determinadas condições, é possível separar, no sentido lato ou no sentido estrito, subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios de um espaço normado por meio de um hiperplano.

3.3.1 Hiperplano afim

Definição 3.3 (Hiperplano afim) *Seja E um espaço vetorial real. Um hiperplano afim de E é um conjunto da forma*

$$H = \{x \in E; f(x) = \alpha\},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in E^*$ tal que $f \neq 0$ (não identicamente nula).

Dizemos que H é um hiperplano de equação $[f = \alpha]$. Em outras palavras, dizemos que a imagem $f(H) = \alpha$, isto é, $H = f^{-1}(\{\alpha\})$.

Exemplo 3.2 *Seja $E = \mathbb{R}^2$, então $f(x, y) = ax + by$ onde $a, b \in \mathbb{R} \setminus 0$. Temos,*

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by = \alpha\}.$$

Exemplo 3.3 *Seja $E = \mathbb{R}^3$, então $f(x, y, z) = ax + by + cz$ onde $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus 0$. Temos,*

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = \alpha\}.$$

Proposição 3.1 *Seja H o hiperplano de E de equação $[f = \alpha]$ e $a \in H$. Então*

(1) $H - a$ é um subespaço de E.

(2) $E = (H - a) \oplus \mathbb{R}x_0$, para algum $x_0 \in E$.

Demonstração: (1) Com efeito, seja $x \in H - a$, então, $x = y - a$ com $y \in H$. Pela linearidade $f(x) = f(y-a) = f(y)-f(a) = \alpha-\alpha = 0$, posto que $a, y \in H$ e $H = f^{-1}(\{\alpha\})$. Reciprocamente, seja $x \in E$ tal que $f(x) = 0$. Então, $f(x+a) = f(x)+f(a) = 0+\alpha = \alpha$, isto é, $x + a \in H$ e portanto $x \in H - a$. Logo,

$$H - a = \{x \in E; f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) = \ker(f),$$

em que $\ker(f)$ é o núcleo de f e, portanto, um subespaço de E.

(2) De fato, observemos que $H - a \neq E$ posto que $f \neq 0$ (f não identicamente nula). Seja $x_0 \in E \setminus (H - a)$ tal que $f(x_0) = 1$. Tal x_0 é obtido da seguinte forma: seja $x_1 \in E \setminus (H - a)$ tal que $f(x_1) \neq 0$ (lembre que todo funcional linear não nulo assume todos os valores de $\mathbb{R}$), isto é, $f(x_1) = \alpha_1 \neq 0$. Assim, $f(x_1/\alpha_1) = 1$ e basta tomarmos $x_0 = x_1/\alpha_1$. Então, sempre podemos escolher $x_0 \in E \setminus (H - a)$ tal que $f(x_0) = 1$. Isto posto, $H - a$ e $\mathbb{R}x_0$ são subespaços de E com $(H - a) \cap \mathbb{R}x_0 = 0$. Como a soma de subespaços é ainda um subespaço, temos que $(H - a) \oplus \mathbb{R}x_0 \subset E$. Resta-nos mostrar que

$E \subset (H-a) \oplus \mathbb{R}x_0$. Com efeito, seja $x \in E$ e definamos $y = x - f(x)x_0$. Temos

$$f(y) = f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0,$$

e, portanto, pelo item anterior, $y \in \ker(f) = H-a$. Logo, $x = y + f(x)x_0 \in (H-a) \oplus \mathbb{R}x_0$, o que prova o desejado. ■

Proposição 3.2 *O hiperplano H de equação $[f = \alpha]$ é fechado se, e somente se, f é contínua.*

Demonstração: Se f é contínua, pelo fato de $[f = \alpha] = f^{-1}(\{\alpha\})$ e, pelo Teorema 2.2, a imagem inversa de um conjunto fechado ser fechada, temos que $H = [f = \alpha]$ é fechado.

Reciprocamente, seja H fechado. Como $E \setminus H$ é não vazio, posto que $f(E) = \mathbb{R}$ e $f(H) = \{\alpha\}$, resulta que existe $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin H$. Como $E \setminus H$ é aberto, então existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset E \setminus H$. Como $x_0 \notin H$ segue que $f(x_0) \neq \alpha$. Consequentemente podemos supor, sem perda da generalidade, que $f(x_0) < \alpha$. Mostraremos que para todo $x \in B_r(x_0)$ temos que $f(x) < \alpha$. Com efeito, suponhamos o contrário, que exista $x_1 \in B_r(x_0)$ tal que $f(x_1) \geq \alpha$. Como $B_r(x_0)$ é um conjunto convexo temos que

$$tx_1 + (1-t)x_0 \in B_r(x_0), \text{ para todo } t \in [0,1],$$

e pelo fato de $B_r(x_0) \subset E \setminus H$ decorre que

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \neq \alpha, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Por outro lado, $f(x_1) \geq \alpha$ implica que

$$f(x_1) - f(x_0) \geq \alpha - f(x_0) \Rightarrow 0 < \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \leq 1.$$

Definamos, em particular, $t = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$. Pela linearidade de f, temos

$$\begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)x_0) = f(t(x_1 - x_0) + x_0) &= tf(x_1 - x_0) + f(x_0) \\ &= t[f(x_1) - f(x_0)] + f(x_0) \\ &= \alpha - f(x_0) + f(x_0) = \alpha, \end{aligned}$$

o que é um absurdo! Logo, para todo $x \in B_r(x_0)$ temos que $f(x) < \alpha$. Seja $r_1 > 0$ tal que $\overline{B_{r_1}(x_0)} \subset B_r(x_0)$. Note que se $x \in \overline{B_{r_1}(x_0)}$ temos que $x = x_0 + r_1 z$, onde $z \in B_1(0)$. Assim,

$$f(x) = f(x_0 + r_1 z) < \alpha \Rightarrow f(x_0) + r_1 f(z) < \alpha,$$

ou ainda,

$$f(z) < \frac{\alpha - f(x_0)}{r_1} < +\infty, \text{ para todo } z \in \overline{B_1(0)}.$$

Logo, $\sup\limits_{x \in E,\ \|x\| \leq 1} |f(z)| < +\infty$, o que prova que f é limitada e, portanto, contínua. ■

Observação 3.1 *Se tivéssemos suposto na proposição anterior que $f(x_0) > \alpha$, mostraríamos que para todo $x \in B_r(x_0)$ teríamos $f(x) > \alpha$. Usaríamos, neste caso, $t = \frac{f(x_0)-\alpha}{f(x_0)-f(x_1)}$ para gerar o absurdo. Da mesma forma, então, $f(x) = f(x_0 + r_1 z) > \alpha$, isto é, $f(x_0) + r_1 f(z) > \alpha$ ou ainda,*

$$f(-z) = -f(z) < \frac{f(x_0) - \alpha}{r_1}, \text{ para todo } z \in \overline{B_1(0)} \Rightarrow \sup_{z \in E; \|z\| \leq 1} |f(z)| < +\infty.$$

3.3.2 Funcional de Minkowski

Definição 3.4 (Funcional de Minkowski) *Seja E um espaço normado e $C \subset E$ um conjunto aberto e convexo tal que $0 \in C$. O funcional $p : E \to \mathbb{R}$, denominado funcional de Minkowski para o convexo C é definido por*

$$p(x) = \inf \left\{ \alpha > 0; \frac{x}{\alpha} \in C \right\}, \quad \forall x \in E.$$

Notemos que o funcional de Minkowski p está bem definido. Com efeito, seja $x \in E$. Se $x = 0$ então $x \in C$ (por hipótese) e, portanto, o conjunto $\{\alpha > 0; \frac{x}{\alpha} \in C\} \neq \emptyset$. Se $x \neq 0$ então $\|x\| \neq 0$ e, como $0 \in C$ e C é aberto, temos que existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset C$. Assim, se $y = \frac{\mu x}{\|x\|}$ com $0 < \mu < r$ resulta que

$$\|y\| = \left\| \frac{\mu x}{\|x\|} \right\| = \frac{|\mu|\ \|x\|}{\|x\|} = \mu < r,$$

o que implica que

$$y \in B_r(0) \subset C.$$

Desta forma, $\alpha = \frac{\|x\|}{\mu} \in \{\alpha > 0; \frac{x}{\alpha} \in C\}$.

Logo, em ambos os casos, temos que $\{\alpha > 0; \frac{x}{\alpha} \in C\} \neq \emptyset$, qualquer que seja $x \in E$ tendo sentido tomarmos o ínfimo deste conjunto.

Proposição 3.3 *O funcional de Minkowski tem as seguintes propriedades:*

(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, para todo $\lambda \geq 0$ e para todo $x \in E$.

(2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, para todo $x, y \in E$.

(3) Existe $M > 0$ tal que $p(x) \leq M\|x\|$, para todo $x \in E$.

(4) $C = \{x \in E;\ p(x) < 1\}$.

Demonstração: (1) Temos que $p(\lambda x) = \inf\{\alpha > 0; \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\}$. Se $\lambda = 0$, $p(0) = 0$, o que verifica o resultado. Se $\lambda \neq 0$, tomando $\beta = \frac{\alpha}{\lambda}$ temos que $\alpha = \lambda\beta$ e, consequentemente,

$$p(\lambda x) = \inf\left\{\lambda\beta > 0; \frac{x}{\beta} \in C\right\} = \lambda \inf\left\{\beta > 0; \frac{x}{\beta} \in C\right\} = \lambda p(x).$$

(2) Seja $\varepsilon > 0$ e consideremos $x, y \in E$. Então, em virtude da definição do funcional de Minkowski, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\frac{x}{\alpha} \in C$, $\frac{y}{\beta} \in C$, $\alpha < p(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ e $\beta < p(y) + \frac{\varepsilon}{2}$. Como

$$0 < \frac{\alpha}{\alpha+\beta} < 1,\ 0 < \frac{\beta}{\alpha+\beta} < 1 \text{ e } \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1,$$

pela convexidade de C, tomando $t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ temos $1 - t = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, temos que

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{y}{\beta} \in C, \text{ ou seja },\ \frac{x+y}{\alpha+\beta} \in C.$$

Logo, $p(x+y) \leq \alpha+\beta < p(x)+p(y)+\varepsilon$. Pela arbitrariedade de ε, segue o desejado.

(3) Como C é aberto e $0 \in C$ temos que existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset C$. Consideremos $0 < \rho < r$. Então, qualquer que seja $x \in E$, $x \neq 0$ satisfaz $\frac{\rho x}{\|x\|} \in B_r(0)$, uma vez que $\left\|\frac{\rho x}{\|x\|} - 0\right\| = \left\|\frac{\rho x}{\|x\|}\right\| = \frac{|\rho|\|x\|}{\|x\|} = \rho < r$. Assim, $\frac{\rho x}{\|x\|} = \frac{x}{\frac{\|x\|}{\rho}} \in C$ e, portanto, $p(x) \leq \frac{\|x\|}{\rho}$, isto é,

$$p(x) \leq M\ \|x\|, \text{ onde } M = \frac{1}{\rho}.$$

(4) Seja $x \in C$. Se $x = 0$, temos que $p(x) = 0 < 1$. Se $x \neq 0$ e consideremos $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset C$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \frac{r}{\|x\|}$, logo $\|x + \varepsilon x - x\| = \varepsilon\|x\| < r$. Assim, $x + \varepsilon x \in B_r(x) \subset C$, ou seja, $(1+\varepsilon)x \in C$, ou ainda, $\frac{x}{\frac{1}{1+\varepsilon}} \in C$. Donde, $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Consequentemente,

$$C \subset \{x \in E;\ p(x) < 1\}. \tag{17}$$

Reciprocamente, seja $x \in E$ tal que $p(x) < 1$. Então, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que existe $\alpha > 0$ tal que $x/\alpha \in C$ e $p(x) \leq \alpha < p(x)+\varepsilon < 1$. Assim, $\alpha\frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)0 \in C$, ou seja, $x \in C$, o que prova que

$$\{x \in E;\ p(x) < 1\} \subset C. \tag{18}$$

Combinando (17) e (18), temos que $C = \{x \in E;\ p(x) < 1\}$.

■

3.3.3 Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach

Definição 3.5 *Seja E um espaço normado, com $A, B \subset E$ e H um hiperplano de equação $[f = \alpha]$. Dizemos que*

(a) o hiperplano H separa A e B no sentido lato (generalizado) se

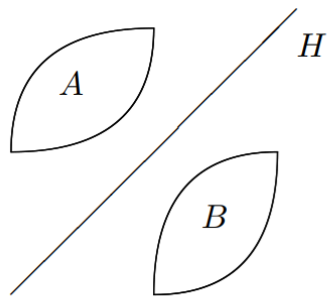
$$f(x) \leq \alpha \leq f(y), \text{ para todo } x \in A, y \in B.$$

(b) o hiperplano H separa A e B no sentido estrito se existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x) + \varepsilon \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon, \text{ para todo } x \in A, y \in B.$$

Geometricamente, significa que A e B se situam em lados opostos de H.

Figura 2 – H separa A e B



Fonte: Cavalcanti, Cavalcanti e Komornik (2010).

Lema 3.3 *Sejam E um espaço normado, $C \subset E$ um conjunto convexo, aberto e não vazio e $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin C$. Então existe $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$. Em particular, o hiperplano de equação $[f = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ de C no sentido lato.*

Demonstração: Suponhamos, sem perda da generalidade, que $0 \in C$, pois caso $0 \notin C$, consideramos o conjunto $\widetilde{C} = C - a$, onde $a \in C$. Temos que $\widetilde{C} \neq \emptyset$, convexo e aberto posto que C o é. Admitindo-se que o resultado seja verdadeiro para $\widetilde{C}$, isto é, que exista $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in \widetilde{C}$ com $x_0 \notin \widetilde{C}$, então o mesmo se verifica para C. De fato, seja $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin C$. Então, existe $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0 - a)$, para todo $x \in \widetilde{C}$. Logo, $f(y - a) < f(x_0 - a)$, para todo $y \in C$ e, portanto, $f(y) - f(a) < f(x_0) - f(a)$, para todo $y \in C$ donde $f(y) < f(x_0)$, para todo $y \in C$. Podemos, então, supor, sem perda da generalidade, que $0 \in C$ e mostrar o desejado.

Seja $0 \in C$ e consideremos p o funcional de Minkowski para o convexo C. Seja $x_0 \in E$ tal que $x_0 \notin C$. Então, $p(x_0) \geq 1$ posto que $C = \{x \in E;\ p(x) < 1\}$. Ponhamos $G = \mathbb{R}x_0$ e $g : G \to \mathbb{R}$ dada por $g(tx_0) = t$. Temos que $g \in G^*$. Além disso,

$$\begin{aligned}&\text{Se } t \geq 0, g(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)\\&\text{Se } t < 0, g(tx_0) = t < 0 \leq p(tx_0).\end{aligned}$$

Logo, $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}x_0$.

Como o funcional de Minkowski é sublinear vem pelo Teorema de Hahn-Banach (Forma Analítica) que existe um prolongamento f de g a todo E tal que $f(x) \leq p(x)$, para todo $x \in E$. Assim, $f(x) \leq p(x) \leq M\|x\|$, para todo $x \in E$ (Propriedade 3 do Funcional de Minkowski) e, portanto, $f \in E'$, e além disso, $f(x) \leq p(x) < 1$, para todo $x \in C$ com $f(x_0) = g(x_0) = 1$. Consequentemente, existe $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$, o que finaliza a demonstração. ■

Teorema 3.2 (Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach) *Sejam E um espaço normado e $A, B \subset E$ subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A é aberto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido lato.*

Demonstração: Sejam $a \in A$, $b \in B$ e $x_0 = b - a$ e definamos $C = A - B + x_0$. Para usarmos os resultados do Lema 3.3, precisamos que C seja convexo, aberto e que $x_0 \notin C$.

(1) C é convexo. De fato, sejam $w = a_1 - b_1 + x_0$ e $v = a_2 - b_2 + x_0$ pontos de C e $t \in [0, 1]$ com $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. Então,

$$\begin{aligned}tw + (1-t)v &= t[a_1 - b_1 + x_0] + (1-t)[a_2 - b_2 + x_0]\\&= [ta_1 + (1-t)a_2] - [tb_1 + (1-t)b_2] + x_0 \in A - B + x_0 = C.\end{aligned}$$

(2) C é aberto. Com efeito, podemos escrever $C = \bigcup_{y \in B}\{A - y + x_0\}$ e, portanto, C é a união de uma família de conjuntos abertos, uma vez que A é aberto e a translação de um conjunto aberto é um conjunto aberto.

(3) $x_0 \notin C$. De fato, suponhamos que $x_0 \in C$. Então, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x_0 = a - b + x_0$, isto é, $a = b$, e, portanto, $A \cap B \neq \emptyset$, o que é um absurdo.

Logo, pelo Lema 3.3 existe $f \in E'$ tal que $f(x) < f(x_0)$, para todo $x \in C$, ou seja, $f(a - b + x_0) < f(x_0)$ isto é, $f(a) - f(b) + f(x_0) < f(x_0)$ o que implica $f(a) < f(b)$, para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$. Assim,

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{x\in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y\in B} f(y).$$

Então, $f(x) \leq \alpha \leq f(y)$, para todo $x \in A$ e para todo $y \in B$. Como $f \in E'$ segue da Proposição 3.2 que o hiperplano de equação $[f = \alpha]$ é fechado e, em virtude da desigualdade anterior, a demonstração está completa. ∎

3.3.4 Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach

Teorema 3.3 (Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach) *Sejam E um espaço normado, $A, B \subset E$ subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A for fechado e B for um compacto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito.*

Demonstração: O objetivo será utilizar a Primeira Forma Geométrica na demonstração. Para isso, vamos verificar as hipóteses. Sejam $A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0)$ e $B_\varepsilon = B + B_\varepsilon(0)$, com $B_\varepsilon(0)$ uma bola de centro 0 e raio $\varepsilon > 0$. A_ε e B_ε são não vazios pois ambos contém, pelo menos, o ponto 0 centro da bola.

A_ε e B_ε são convexos. De fato, sejam $w, v \in A_\varepsilon$ e $t \in [0, 1]$. Então, $w = a_1 + \varepsilon z_1$ e $v = a_2 + \varepsilon z_2$ em que $a_1, a_2 \in A$ e $z_1, z_2 \in B_1(0)$. Temos:

$$\begin{aligned} tw + (1-t)v &= t[a_1 + \varepsilon z_1] + (1-t)[a_2 + \varepsilon z_2] \\ &= [ta_1 + (1-t)a_2] + \varepsilon[tz_1 + (1-t)z_2] \in A_\varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que A_ε é convexo. Analogamente, temos que B_ε é convexo.

A_ε e B_ε são disjuntos, isto é, $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ para algum $\varepsilon > 0$. Suponhamos o contrário, ou seja, que para todo $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$. Então, pondo $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, temos que para cada $n \in N^*$, existem $x_n \in A$, $y_n \in B$ e $z_{1n}, z_{2n} \in B_1(0)$ tais que

$$x_n + \varepsilon_n z_{1n} = y_n + \varepsilon_n z_{2n}.$$

Portanto,

$$\|x_n - y_n\| = \varepsilon_n \|z_{2n} - z_{1n}\| \leq \frac{1}{n}[\|z_{2n}\| + \|z_{1n}\|] \leq \frac{2}{n},$$

pois $\|z_{1n}\|, \|z_{2n}\| \in B_1(0)$, ou seja, $\|z_{2n}\|, \|z_{2n}\| \leq 1$.

Como B é compacto, existe uma subsequência $\{y_{n_k}\} \subset \{y_n\}$ tal que $y_{n_k} \to y$ em B quando $k \to +\infty$.

Assim,

$$\begin{aligned}\|x_{n_k} - y\| &= \|x_{n_k} - y_{n_k} + y_{n_k} - y\| \\ &\leq \|x_{n_k} - y_{n_k}\| + \|y_{n_k} - y\| \to 0, \text{ quando } k \to +\infty.\end{aligned}$$

o que implica que $x_{n_k} \to y$ e, como A é fechado, resulta que $y \in A$. Mas como $y \in B$, teríamos $A \cap B \neq \emptyset$, o que um absurdo, pois tais conjuntos são disjuntos. Logo, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $A_{\varepsilon_0} \cap B_{\varepsilon_0} = \emptyset$.

Por fim, notemos que A_ε é aberto pois $A_\varepsilon = \bigcup_{x\in A}(x + B_\varepsilon(0))$. Pela Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, existe um hiperplano fechado de equação $[f = \alpha]$ que separa A_{ε_0} e B_{ε_0} no sentido lato, isto é,

$$f(x + \varepsilon_0 z_1) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon_0 z_2) \quad \forall x \in A, y \in B,\ z_1, z_2 \in B_1(0).$$

Sendo f linear e, em particular, se $z_2 = -z_1 \in B_1(0)$, temos

$$f(x) + \varepsilon_0 f(z_1) \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon_0 f(z_1) \quad \forall x \in A, y \in B,\ z_1 \in B_1(0). \tag{19}$$

Sendo α um limite superior de $f(x)+\varepsilon_0 f(z_1)$, tomemos o supremo em z_1 na primeira desigualdade em (19) para obter

$$f(x) + \varepsilon_0\|f\| \leq \alpha, \text{ para todo } x \in A.$$

Sendo α um limite inferior de $f(y) - \varepsilon_0 f(z_1)$, tomemos o ínfimo em z_1 na segunda desigualdade em (19), para obter

$$\alpha \leq f(y) - \varepsilon_0\|f\|, \text{ para todo } y \in B.$$

Combinando as duas desigualdades acima e tomando $\varepsilon = \varepsilon_0\|f\|$, temos

$$f(x) + \varepsilon \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon, \text{ para todo } x \in A, y \in B,$$

isto é, existe um hiperplano $H = [f = \alpha]$ fechado que separa A e B no sentido estrito. ∎

4 CONCLUSÃO

Durante a trajetória de estudo e elaboração deste trabalho sobre o Teorema de Hahn-Banach, a importância dessa temática foi reafirmada de maneira contundente. Esta experiência representou uma oportunidade valiosa para ultrapassar os limites do conteúdo padrão do Curso de Licenciatura em Matemática e adentrar uma área extremamente instigante. O aprofundamento no entendimento do Teorema de Hahn-Banach não apenas fortalece a base teórica, mas também proporciona ferramentas conceituais valiosas para enfrentar desafios mais amplos na matemática.

A complexidade e abrangência deste teorema se manifestam de forma singular em cada uma de suas formas. A Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach estabelece condições cruciais para a extensão de funcionais lineares em espaços vetoriais normados, fornecendo, portanto, diretrizes rigorosas e fundamentais para enfrentar desafios relacionados à análise funcional e sua relevância se confirma por meio das aplicações e corolários.

Por outro lado, a interpretação geométrica do Teorema de Hahn-Banach, como um construtor de hiperplanos de suporte, destaca sua capacidade de explorar propriedades espaciais e topológicas dos espaços vetoriais normados. Essa perspectiva geométrica não apenas enriquece a compreensão do Teorema, mas também amplia suas aplicações em contextos nos quais a intuição geométrica é fundamental.

Assim, a importância da Forma Analítica do Teorema de Hahn-Banach reside na sua capacidade de fornecer diretrizes precisas para a extensão de funcionais, enquanto a perspectiva das Formas Geométricas ressalta sua aplicabilidade prática na resolução de problemas relacionados à separação espacial em espaços vetoriais. A conjugação dessas abordagens não apenas aprimora a compreensão do teorema, mas também demonstra sua relevância multifacetada em diversas disciplinas matemáticas.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra Linear**. 3ª Edição. São Paulo: HARBRA, 1980.

BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. **Fundamentos de Análise Funcional**. Uberlândia, João Pessoa, Fortaleza: [s. n.], 2011.

CAVALCANTI, Marcelo; CAVALCANTI, Valéria; KOMORNIK, Vilmos. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: UEM/DMA, 2010.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4ª Edição. São Paulo: Atual, 2003.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. Vol. 2. 1ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 6ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Stefan Banach**, 2000. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach>. Acesso em: 16 nov. 2023.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Hans Hahn**, 2006. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hahn>. Acesso em: 16 nov. 2023.

OLIVEIRA, César Rogério de. **Introdução à análise funcional**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.