



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MIGUEL FREITAS DA SILVA

O TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA

REDENÇÃO

2024

MIGUEL FREITAS DA SILVA

O TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciada em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes

REDENÇÃO

2024

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Silva, Miguel Freitas da.

S586t

O Teorema da Aplicação Inversa / Miguel Freitas da Silva. -
Redenção, 2024.
68f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E
Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira, Redenção, 2024.

Orientadora: Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes.

1. Matemática - Teorema da Aplicação Inversa. 2. Aplicações
fortemente diferenciáveis. 3. Topologia no espaço euclidiano. 4.
Análise Matemática. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 510

MIGUEL FREITAS DA SILVA

O TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 26 / 11 / 2024.

BANCA EXAMINADORA

Amanda A. F. Nunes.

Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes (Orientadora)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Rafael Jorge Pontes Diógenes.

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Wesley Marinho Lozório

Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

AGRADECIMENTOS

A jornada para a conclusão deste trabalho não foi trilhada sozinho. Foi marcada por apoio, incentivo e orientação que me fortaleceram em cada etapa.

Em primeiro lugar, gostaria de expressar minha eterna gratidão à minha família, que sempre esteve ao meu lado, oferecendo carinho, suporte e paciência nos momentos mais difíceis. Vocês me proporcionaram o suporte emocional que me deu forças para continuar e perseguir este objetivo.

Aos amigos que tornaram esta jornada mais leve e significativa, com suas palavras de motivação, conversas inspiradoras e momentos de descontração que tanto me ajudaram a manter o equilíbrio. Agradeço por cada palavra de incentivo e cada gesto de amizade. Vocês foram essenciais nesse percurso.

Um agradecimento especial à minha orientadora, cuja orientação foi decisiva para que eu pudesse trilhar o melhor caminho na produção deste trabalho. Sua dedicação e compromisso foram fundamentais para o desenvolvimento deste projeto, e suas orientações me ajudaram a construir uma mente matemática sólida, orientada pela lógica e pelo rigor acadêmico. Sua paciência e sabedoria não apenas enriqueceram este trabalho, mas também contribuíram para meu crescimento pessoal e acadêmico.

Aos membros da banca avaliadora, agradeço pela presença, atenção e contribuições valiosas, que enriqueceram este trabalho e refletem o compromisso com a formação acadêmica.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho fosse possível, deixo aqui o meu mais sincero agradecimento.

“Veridis Quo”
(Daft Punk, 2001)

RESUMO

Esta monografia apresenta a demonstração do Teorema da Aplicação Inversa, um resultado central na Análise Matemática, que garante que uma aplicação fortemente diferenciável com uma Matriz Jacobiana invertível em um ponto admita uma inversa fortemente diferenciável em uma vizinhança desse ponto. Essa característica permite, localmente, inverter a aplicação e compreender seu comportamento de maneira mais controlada. Para alcançar a formulação rigorosa do teorema, o trabalho percorre uma série de pré-requisitos essenciais, que incluem noções de topologia no espaço euclidiano e uma análise aprofundada da teoria da diferenciabilidade para aplicações, crucial para a compreensão de seu comportamento local. A partir dessa base teórica, o teorema é enunciado e demonstrado, revelando sua importância tanto teórica quanto prática. Este trabalho busca não apenas fornecer sua demonstração formal, mas também destacar sua relevância para Análise Matemática e outras diversas áreas da Matemática.

Palavras-chave: Teorema da Aplicação Inversa. Aplicações fortemente diferenciáveis. Topologia no espaço euclidiano. Análise Matemática.

ABSTRACT

This monograph presents the proof of the Inverse Application Theorem, a central result in Mathematical Analysis, which ensures that a strongly differentiable application with an invertible Jacobian matrix at one point admits a strongly differentiable inverse in a neighborhood of that point. This characteristic allows, locally, to reverse the application and understand its behavior in a more controlled way. To achieve the rigorous formulation of the theorem, the work goes through a series of essential prerequisites, which include notions of topology in Euclidean space and an in-depth analysis of the theory of differentiability for applications, crucial for understanding its local behavior. From this theoretical basis, the theorem is enunciated and demonstrated, revealing its importance both theoretical and practical. This work seeks not only to provide its formal demonstration, but also to highlight its relevance to Mathematical Analysis and other diverse areas of Mathematics.

Keywords: Inverse Function Theorem. Strongly differentiating applications. Topology in Euclidean space. Mathematical Analysis.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	11
2.1	TOPOLOGIA NO ESPAÇO EUCLIDIANO	11
2.1.1	O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$	11
2.1.2	Norma	15
2.1.3	Conjuntos abertos e conjuntos limitados	16
2.1.4	Sequências no espaço euclidiano e conjuntos fechados	17
2.1.5	Aplicações contínuas	24
2.1.6	Limites de aplicações	32
2.2	APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS	33
2.2.1	Diferenciabilidade de uma aplicação	33
2.2.2	A Regra da Cadeia	44
2.2.3	Aplicações fortemente diferenciáveis	48
3	O TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA	54
4	CONCLUSÃO	65
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

O Teorema da Aplicação Inversa (TAI) é um dos resultados mais fundamentais da Análise em várias variáveis e desempenha um papel crucial tanto no desenvolvimento teórico quanto em aplicações práticas, particularmente em problemas que envolvem a análise de sistemas de equações não lineares. Este teorema fornece condições sob as quais uma aplicação diferenciável tem uma inversa localmente diferenciável e estabelece um vínculo profundo entre a estrutura local de uma aplicação e as propriedades de sua Matriz Jacobiana.

A história desse teorema começa no século XVII, com os avanços de Isaac Newton e Gottfried Leibniz no Cálculo Diferencial e Integral, onde a ideia de invertibilidade surgiu para funções de uma variável. No entanto, foi no século XIX, com matemáticos como Augustin-Louis Cauchy e Karl Weierstrass, que os conceitos de continuidade e diferenciabilidade foram mais formalizados. A formulação moderna do Teorema da Aplicação Inversa só apareceu no século XX, apresentada por René Thom em 1954.

O principal objetivo desta monografia é apresentar e demonstrar o teorema, seguindo a abordagem rigorosa desenvolvida por Lima (2015a). Para alcançar uma compreensão completa deste teorema, será necessário construir uma base sólida em duas áreas da Matemática, a começar pelas noções de topologia no espaço euclidiano, até culminar nas noções de diferenciabilidade e diferenciabilidade forte, que é essencial para a formulação precisa do TAI.

O primeiro passo para entender o Teorema da Aplicação Inversa é familiarizar-se com os conceitos topológicos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. A Topologia fornece as ferramentas necessárias para estudar a continuidade e as propriedades locais das aplicações, como a definição de conjuntos abertos e a noção de vizinhança, fundamentais para formular corretamente o conceito de inversa local.

Com a base topológica estabelecida, o próximo passo é introduzir a teoria de diferenciabilidade. Uma aplicação $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em um ponto $x \in \mathbb{R}^m$ se existir uma transformação linear que aproxima f em torno de x . Essa transformação linear é dada pela Matriz Jacobiana $Jf(x)$, que contém as derivadas parciais das funções-coordenadas de f em relação às variáveis independentes.

A Matriz Jacobiana é a chave para entender o comportamento local de uma aplicação diferenciável. Em particular, se a Matriz Jacobiana de f em um ponto x é invertível (ou seja, se o determinante desta matriz é diferente de zero), então f se comporta localmente como uma transformação linear invertível em torno de x . Essa é precisamente a condição central do TAI: a inversibilidade local de uma aplicação diferenciável depende da inversibilidade de sua Matriz Jacobiana.

Neste contexto, será importante apresentar a Regra da Cadeia, que está intimamente relacionada ao teorema. Em particular, os corolários da Regra da Cadeia são

essenciais para introduzirmos a noção de difeomorfismo e dar os primeiros passos para uma inversibilidade local.

O conceito de diferenciabilidade forte, que será o pré-requisito final para a formulação do teorema, deve ser devidamente apresentado. A diferenciabilidade forte significa que, além de a aplicação ser diferenciável em um ponto, a aproximação linear dada pela Matriz Jacobiana é válida não apenas pontualmente, mas de maneira uniforme em uma vizinhança do ponto.

É importante enfatizar que o Teorema da Aplicação Inversa é frequentemente usado como uma ferramenta para provar outros resultados fundamentais na Análise, como o Teorema da Função Implícita. Na verdade, esses dois teoremas estão intimamente relacionados e muitas vezes são demonstrados em conjunto, coisa que não faremos neste trabalho. A aplicação do TAI em problemas de cálculo variacional e equações diferenciais também é de grande relevância, pois permite o estudo de soluções locais dessas equações.

Por fim, reuniremos todos esses elementos em uma argumentação coerente para provar o teorema, consolidando os conceitos desenvolvidos ao longo da monografia e ilustrando sua importância para a Análise Matemática. Com base na formulação rigorosa e nas ferramentas matemáticas apresentadas, buscaremos expor não apenas a demonstração do TAI, mas também sua elegância teórica e relevância em uma variedade de contextos.

2 PRELIMINARES

2.1 TOPOLOGIA NO ESPAÇO EUCLIDIANO

A Topologia é a área da Matemática que estuda as propriedades dos espaços que se mantêm inalteradas sob deformações contínuas. Ela fornece uma estrutura abstrata que permite definir e analisar conceitos fundamentais como continuidade, limites e vizinhanças, sem depender de métricas específicas. No contexto do Teorema da Aplicação Inversa, a Topologia desempenha um papel crucial, pois a continuidade da aplicação e de sua inversa é essencial para garantir que certas propriedades de diferenciabilidade sejam preservadas localmente. Neste trabalho, introduziremos os conceitos iniciais de bola aberta e bola fechada, assim como conjuntos abertos e conjuntos fechados, fundamentais para descrever as vizinhanças em torno de pontos em espaços euclidianos n -dimensionais. Além disso, abordaremos a noção de continuidade e limites, que são a base para entender a diferenciabilidade de aplicações nesses espaços.

2.1.1 O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$

O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ será nosso “alicerce de trabalho”, porque fornece o cenário básico para estudarmos aplicações em várias dimensões de forma natural, além de nos permitir explorar mais profundamente as ideias centrais da Topologia.

Definição 2.1 *Seja n um número natural. O espaço euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$ é definido como o produto cartesiano de n cópias do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$:*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ podem ser chamados de pontos ou vetores, dependendo do contexto.

Em Álgebra Linear, o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo dos números reais. Como espaço vetorial, possui uma base canônica $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$, formada pelos vetores:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Esses vetores são linearmente independentes e qualquer vetor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma combinação linear deles:

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \cdots + x_n \cdot e_n.$$

Chamaremos os elementos $x_1, \dots, x_n$ de coordenadas de x em relação a base canônica e

denotaremos por

$$[x]_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Definição 2.2 *Uma aplicação é qualquer correspondência entre subconjuntos arbitrários de espaços euclidianos. Formalmente, uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$, atribui a cada $x \in X$ um único $y \in \mathbb{R}^n$. Em outros termos, se $y = f(x)$, sendo $x = (x_1, \dots, x_m)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, então*

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n) = y.$$

Também podemos escrever $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. As funções reais $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^m$, chamam-se funções-coordenadas de f . Escreve-se então $f = (f_1, \dots, f_n)$ para denotar o mesmo. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ tem-se:

$$f_i(x) = y_i, \forall i = 1, \dots, n.$$

Das aplicações definidas em espaços euclidianos, daremos destaque às transformações lineares (ou aplicações lineares), que desempenharão um papel fundamental neste trabalho, pois a noção de diferenciabilidade, que definiremos nas seções seguintes, está intrinsecamente associada à busca por uma transformação linear que satisfaça sua condição.

Definição 2.3 *Sejam $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ dois espaços euclidianos. Uma aplicação $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo*

$$a) \ T(x + y) = T(x) + T(y);$$

$$b) \ T(\lambda x) = \lambda T(x);$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é chamada transformação linear ou aplicação linear. Se $n = 1$ também chamamos T de funcional linear.

Vale destacar a relevância dos isomorfismos neste trabalho, uma vez que o Teorema da Aplicação Inversa está profundamente relacionado a esse conceito.

Definição 2.4 *Um isomorfismo é uma aplicação linear $T : U \rightarrow V$, onde $U, V \subset \mathbb{R}^m$, que é bijetiva.*

Observação 2.1 *Se $T : U \rightarrow V$ é um isomorfismo, então a aplicação inversa $T^{-1} : V \rightarrow U$ também é linear e bijetiva. Em outras palavras, T^{-1} é um isomorfismo.*

Denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ como o conjunto das aplicações lineares $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e por $M(n \times m)$ como o conjunto das matrizes reais (a_{ij}) com n linhas e m colunas. Além disso, indicaremos por $GL(\mathbb{R}^m)$ como o conjunto das transformações lineares invertíveis (ou conjunto dos isomorfismos lineares) de $\mathbb{R}^m$ em si e $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^m)^*$ como

o conjunto dos funcionais lineares.

A base canônica do espaço euclidiano permite estabelecer uma bijeção natural entre o conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ e o conjunto $M(n \times m)$. Sejam então $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear, $\beta = \{e_1, \dots, e_m\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e $\beta' = \{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então $T(e_1), \dots, T(e_m)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ e portanto

$$\begin{aligned} T(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ T(e_m) &= a_{1m}e_1 + a_{2m}e_2 + \dots + a_{nm}e_n. \end{aligned}$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema, denotada por $[T]_{\beta'}^{\beta}$, é chamada matriz de T em relação às bases canônicas β e β' :

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Portanto, sejam $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Podemos associar

$$[x]_{\beta} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ e } [y]_{\beta'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

com a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ e obter

$$[T]_{\beta'}^{\beta} \cdot [x]_{\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Isso é suficiente para definir o valor de T em qualquer vetor $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

Para darmos continuidade a este trabalho, será necessário considerar, a partir deste momento, que uma transformação linear pode ser vista de duas formas: tanto como uma aplicação entre espaços vetoriais quanto como uma matriz que representa essa transformação de maneira explícita. Além disso, em alguns contextos, também será útil visualizar a matriz $n \times m$ da transformação linear como um ponto no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{nm}$: basta escrever suas colunas, uma após a outra, numa linha. Por exemplo, seja

$A \in M(n \times m)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Então, para ver A como um ponto de $\mathbb{R}^{nm}$ basta escrever

$$(a_{11}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{nm}) \in \mathbb{R}^{nm}.$$

Essa flexibilidade na interpretação das transformações lineares nos permitirá alternar entre a linguagem funcional, matricial e geométrica, o que facilitará o tratamento das operações e propriedades dessas transformações posteriormente.

Observação 2.2 *Para otimizar a clareza e evitar a sobrecarga de notações, sempre que trabalharmos com transformações lineares, adotaremos expressões simplificadas, como $T = [T]_{\beta'}^{\beta}$ e $x = [x]_{\beta}$. Dessa forma, em vez de escrever $[T]_{\beta'}^{\beta} \cdot [x]_{\beta}$, utilizaremos $T \cdot x$ para indicar que a matriz da transformação linear T está sendo aplicada a matriz coluna das coordenadas de x . Além disso, quando T for visto como uma aplicação entre espaços vetoriais, abandonaremos a notação tradicional $T(x)$ em favor de $T \cdot x$. Por exemplo, sendo t um escalar real e $v \in \mathbb{R}^m$, usaremos a convenção $T \cdot tv = t \cdot T \cdot v$, ao invés de escrever $tT(v)$. Essa simplificação nos permitirá trabalhar de maneira mais eficiente, sem a necessidade de explicitar continuamente quando estamos representando transformações lineares por matrizes ou vice-versa, facilitando as manipulações algébricas. Sempre que necessário, faremos uma distinção clara entre quando as transformações serão tratadas como matrizes ou como pontos no espaço $\mathbb{R}^{mn}$, assegurando que a abordagem mais adequada seja utilizada em cada contexto.*

Definição 2.5 *Sejam $V_1, V_2, \dots, V_k \subset \mathbb{R}^m$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ espaços euclidianos. Uma aplicação*

$$T: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \rightarrow U$$

é chamada de k -linear se satisfaz a propriedade de linearidade em cada variável. Ou seja, para cada $i = 1, 2, \dots, k$, T é linear na i -ésima variável quando as demais variáveis são fixadas.

Exemplo 2.1 *A aplicação $\varphi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ chamada de bilinear é uma aplicação 2-linear. Isso significa que, para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^m$, $y, y' \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:*

$$\begin{aligned} \varphi(x + x', y) &= \varphi(x, y) + \varphi(x', y); \\ \varphi(x, y + y') &= \varphi(x, y) + \varphi(x, y'); \\ \varphi(\alpha x, y) &= \alpha \cdot \varphi(x, y); \\ \varphi(x, \alpha y) &= \alpha \cdot \varphi(x, y). \end{aligned}$$

2.1.2 Norma

Definição 2.6 Uma norma num espaço vetorial E é uma aplicação real $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada vetor $x \in E$ um número real $\|x\|$, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{N1. } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$

$$\text{N2. } \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$$

$$\text{N3. } x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0.$$

Aqui, $|\alpha|$ é o valor absoluto do número real α .

Existem diversas normas que podem ser definidas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Uma das mais relevantes é a norma euclidiana: para qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Além da norma euclidiana, há duas normas que são de manipulação formal mais simples, as quais iremos utilizar neste trabalho, quando houver conveniência. Elas são:

$$|x|_M := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \quad (\text{Norma do Máximo}),$$

$$|x|_S := |x_1| + \cdots + |x_n| \quad (\text{Norma da Soma}).$$

Em ambas as normas, $|x_i|$ denota o valor absoluto do número real x_i ($1 \leq i \leq n$). Quando não for especificada qual norma estamos utilizando em $\mathbb{R}^n$, assumiremos que se trata da norma euclidiana.

Definição 2.7 Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $A: X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. Definimos

$$|A|_T := \sup\{|A \cdot x|_Y; x \in X, |x|_X = 1\}.$$

Esta norma apresenta duas propriedades notáveis, que serão de grande utilidade em momentos subsequentes:

$$\text{NT1. } |A \cdot x|_Y \leq |A|_T |x|_X \text{ para todo } x \in X,$$

$$\text{NT2. } |A \cdot B|_T \leq |A|_T |B|_T \text{ onde } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n) \text{ e } B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^m).$$

Observação 2.3 As notações $|A \cdot x|_Y$ e $|x|_X$ indicam que as normas aplicadas estão associadas aos subconjuntos Y e X , respectivamente. Ou seja, $|A \cdot x|_Y$ representa a norma do vetor $A \cdot x$ em $Y \subset \mathbb{R}^n$, enquanto $|x|_X$ representa a norma do vetor x no subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Essas notações visam destacar a escolha de normas compatíveis com os conjuntos de origem e de imagem da aplicação linear A .

2.1.3 Conjuntos abertos e conjuntos limitados

Definição 2.8 Dados $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, dizemos que

a) A bola aberta de raio r e centro a é o conjunto dado por

$$B(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}.$$

Ou seja, é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor do que r ;

b) A bola fechada de raio r e centro a é o conjunto dado por

$$B[a; r] := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| \leq r\};$$

c) A esfera de raio r centrado em a é o conjunto dado por

$$S[a; r] := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| = r\}.$$

Segue-se que $B[a; r] = B(a; r) \cup S[a; r]$.

Definição 2.9 Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in X$, dizemos que a é um ponto interior de X quando é centro de alguma bola aberta contida em X . Em outras palavras, quando existe um $\delta > 0$ tal que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow x \in X.$$

O conjunto formado pelos pontos interiores de X é chamado de interior de X e será denotado por $\text{int } X$. Além disso, chamamos o conjunto V de vizinhança do ponto x quando $x \in \text{int } V$.

Definição 2.10 Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. O subconjunto X é dito aberto quando para cada $x \in X$ existe um $r > 0$ tal que $B(x; r) \subset X$.

Em outros termos, temos que $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se $\text{int } X = X$, ou seja, quando todos os pontos de X são pontos interiores.

O conjunto vazio $\emptyset$ e o próprio espaço $\mathbb{R}^n$ são exemplos fundamentais de conjuntos abertos. Essa propriedade alinha-se com a definição de conjunto aberto, pois, intuitivamente, em qualquer ponto de $\mathbb{R}^n$ é possível encontrar uma vizinhança ao seu redor. Por outro lado, o conjunto vazio $\emptyset$, por definição, não possui pontos que precisem atender à condição de vizinhança, tornando-o trivialmente aberto.

Exemplo 2.2 Qualquer bola aberta $B(a; r) \subset \mathbb{R}^n$ de centro arbitrário a e raio $r > 0$ é um exemplo de conjunto aberto. Com efeito, dado qualquer $x \in B(a; r)$, temos

$$|x - a| < r \Rightarrow \delta = r - |x - a| \text{ é positivo.}$$

Se $y \in B(x; \delta)$, então

$$\begin{aligned}
 |y - a| &= |y - x + x - a| \\
 &\leq |y - x| + |x - a| < \delta + |x - a| \\
 &= r - |x - a| + |x - a| \\
 &= r \Rightarrow y \in B(a; r).
 \end{aligned}$$

Ou seja, $B(x; \delta) \subset B(a; r)$. Logo todo ponto de $B(a; r)$ é ponto interior.

Definição 2.11 Um subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado quando existe um número real $c > 0$ tal que $|x| \leq c$ para todo $x \in X$.

Toda bola fechada de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado; consequentemente, uma bola aberta qualquer de $\mathbb{R}^n$ também é um conjunto limitado.

2.1.4 Sequências no espaço euclidiano e conjuntos fechados

O estudo de limites de sequências nos proporcionará ferramentas valiosas para o desenvolvimento deste trabalho. Além disso, conforme Lima (2022, p. 67), “todos os conceitos e resultados importantes da Análise Matemática se referem, quer explícita quer indiretamente, a limites. Daí o papel central que esta noção desempenha.”

Definição 2.12 Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais. O valor que essa aplicação assume no número k é indicado por x_k e chama-se o k -ésimo termo da sequência. Usaremos as notações (x_k) , $(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ ou $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ para indicar a sequência cujo k -ésimo termo é $x_k \in \mathbb{R}^n$.

Definição 2.13 Uma subsequência de (x_k) é uma restrição do domínio da aplicação $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a um subconjunto $N' = \{k_1 < k_2 < \dots < k_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$.

A subsequência será indicada pelas notações $(x_k)_{k \in N'}$ ou $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ou $(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_i}, \dots)$.

Definição 2.14 Dizemos que uma sequência (x_k) é limitada quando existe um número real $c > 0$ tal que $|x_k| \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ equivale a n sequências de números reais, ou seja, para cada $k \in \mathbb{N}$ temos $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$, onde $x_{ki} = i$ -ésima coordenada de x_k

$(i = 1, 2, \dots, n)$. Assim,

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{11}, \dots, x_{1n}) \\ x_2 &= (x_{21}, \dots, x_{2n}) \\ &\vdots \\ x_k &= (x_{k1}, \dots, x_{kn}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

As n seqüências $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ ($i = 1, \dots, n$) serão chamadas de seqüências das coordenadas de (x_k) . Assim, por exemplo, no plano $\mathbb{R}^2$, uma seqüência de pontos $z_k = (x_k, y_k)$ tem como seqüências de coordenadas o par de seqüências $(x_k), (y_k)$ de números reais.

Definição 2.15 Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da seqüência de pontos $x_k \in \mathbb{R}^n$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $N \in \mathbb{N}$ tal que $k > N \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$. Em linguagem simbólica, quando

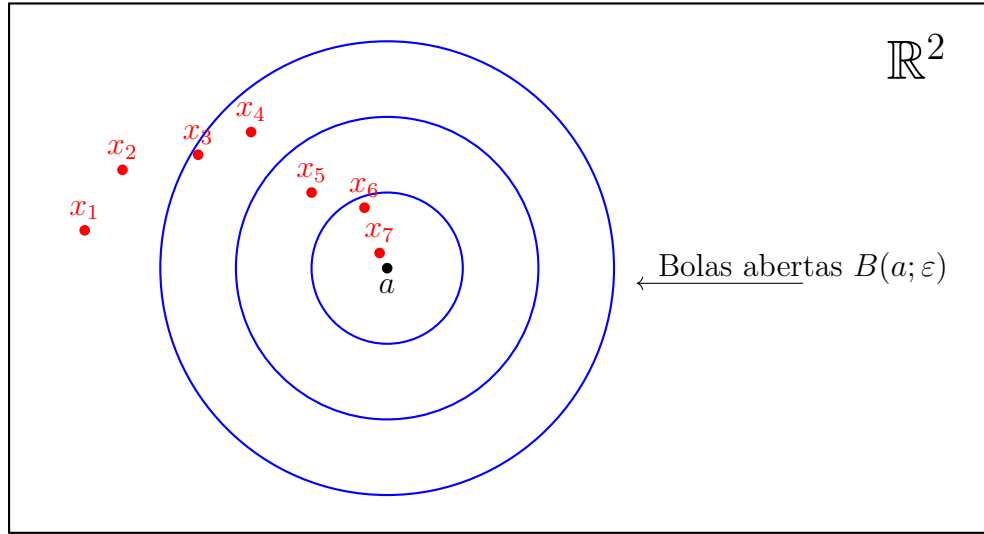
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; k > N \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon.$$

Vamos escrever $\lim x_k = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, $\lim_{k \in \mathbb{N}} x_k = a$, ou simplesmente $x_k \rightarrow a$ para denotar que (x_k) converge para a ou tende para a .

Uma seqüência (x_k) é dita convergente quando existe o limite $a = \lim x_k$. Caso contrário, diz-se que (x_k) é divergente. Além disso, o limite de uma seqüência convergente é único. Ou seja, se $\lim x_k = a$ e $\lim x_k = b$, então $a = b$.

Exemplo 2.3 Dada a seqüência constante $(a, a, \dots, a, \dots)$, não é difícil ver sua convergência, cujo limite é a . Por outro lado, $(a, b, a, b, \dots)$ é uma seqüência divergente.

Em termos de bolas, tem-se $\lim x_k = a$ se, e somente se, qualquer bola aberta de centro a contém todos os termos x_k , salvo, possivelmente, para um número finito de índices k , ou seja, se $\varepsilon > 0$ é o raio da bola e N é o número natural que corresponde a ε na definição de limite, fora da bola $B(a; \varepsilon)$ só poderão estar, no máximo, alguns dos termos $x_1, \dots, x_N$. A ilustração abaixo nos dá uma boa noção sobre como a convergência ocorre no $\mathbb{R}^2$. Na medida em que fizermos $\varepsilon \rightarrow 0$ (por valores positivos) de $B(a; \varepsilon)$, poderemos ver que fora da bola permanecerá apenas um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_7, \dots\}$ dos termos da seqüência, de tal forma que podemos tornar cada $x_i = x_N$ na medida em que $\varepsilon \rightarrow 0$.

Figura 1 – Distribuição dos termos de (x_k) nas bolas abertas

Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Resulta da observação acima que toda sequência convergente é limitada. A recíproca é falsa: a sequência $(a, b, a, b, \dots)$ é divergente e limitada.

Teorema 2.1 *Seja (x_k) uma sequência de pontos de $\mathbb{R}^n$ que converge para o ponto a . Então toda subsequência (x_{k_i}) de (x_k) também converge e possui o mesmo limite de (x_k) :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = a.$$

Demonstração: Seja $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação que representa os termos da sequência (x_k) . Se $x_k \rightarrow a$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe um N tal que $k \geq N \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$. Como a subsequência (x_{k_i}) é obtida restringindo o domínio da aplicação x à um subconjunto $N' = \{k_1 < k_2 < \dots < k_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$, eventualmente, existirá um termo k_i que também satisfaz $k_i \geq N$, para algum i suficientemente grande. Ou seja, existe um i_0 tal que para todo $i \geq i_0$, temos $k_i \geq N$, o que implica

$$|x_{k_i} - a| < \varepsilon \text{ para todo } i \geq i_0 \text{ e } \varepsilon > 0.$$

Concluimos assim que toda subsequência de uma sequência convergente também converge e tem o mesmo limite da sequência original. ■

Teorema 2.2 *Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ converge para o ponto $a = (a_1, \dots, a_n)$ se, e somente se, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$, ou seja, cada coordenada de x_k converge para a coordenada correspondente de a .*

Demonstração: Suponha que (x_k) converge para o ponto $a = (a_1, \dots, a_n)$. Então,

$$\lim x_k = a \Leftrightarrow \lim |x_k - a| = 0.$$

Agora, note que

$$|x_{ki} - a_i| \leq |x_k - a|, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Ao aplicarmos o limite nesta desigualdade, com $k \rightarrow \infty$, teremos:

$$\lim |x_{ki} - a_i| \leq \lim |x_k - a|.$$

Como por definição toda norma obedece a condição N3. da Definição 2.6, segue-se que

$$0 \leq \lim |x_{ki} - a_i| \leq \lim |x_k - a| = 0 \Rightarrow \lim |x_{ki} - a_i| = 0,$$

ou seja, $\lim x_{ki} = a_i$. Reciprocamente, se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, então, dado $\varepsilon > 0$, existem números naturais $k_1, \dots, k_n$ tais que $k > k_i \Rightarrow |x_{ki} - a_i| < \varepsilon$. Seja $k_0 = \max\{k_1, \dots, k_n\}$. Então $k > k_0 \Rightarrow |x_k - a| = \max_i |x_{ki} - a_i| < \varepsilon$. Logo, $\lim x_k = a$. ■

Uma propriedade decorrente do teorema mencionado acima, que será conveniente manter para este trabalho, é a seguinte: Dada uma sequência convergente cujo k -ésimo termo é $x_k \in \mathbb{R}^n$ e $\lim x_k = a$, então

$$\lim |x_k| = |a|.$$

Definição 2.16 *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ chama-se ponto de acumulação do conjunto X quando para todo $\varepsilon > 0$, deve existir $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$. O conjunto dos pontos de acumulação de X será chamado de conjunto derivado de X e será representado pela notação X' .*

Dizemos que a é um ponto isolado de X quando não é ponto de acumulação de X . Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que exista $\varepsilon > 0$ com $B(a; \varepsilon) \cap X = \{a\}$. Quando todo ponto $a \in X$ é isolado, dizemos que X é um conjunto discreto. A título de exemplo, $\mathbb{Z}$ é um conjunto discreto.

A definição de ponto de acumulação é essencial para a formalização do conceito de limite de uma aplicação em Análise Matemática. O fato de a ser um ponto de acumulação garante que existem infinitos pontos de X arbitrariamente próximos a a . Sem essa propriedade, poderíamos ter uma situação em que a não possui pontos de X próximos, o que inviabilizaria a análise do comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a .

Exemplo 2.4 *Seja $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. O número 1 é um ponto de acumulação de X , pois para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $0 < |x - 1| < \varepsilon$. Ou seja, um ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ pode não pertencer a X .*

Teorema 2.3 *Dados $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. a é ponto de acumulação de X ;

2. Existe uma sequência de pontos $x_k \in X$, com $\lim x_k = a$ e $x_k \neq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$;
3. Toda bola aberta de centro a contém uma infinidade de pontos de X .

Demonstração: A prova será omitida. Para mais detalhes, veja (LIMA, 2015a, p. 21). ■

Definição 2.17 Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ diz-se aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando é limite de uma sequência de pontos desse conjunto. O conjunto dos pontos aderentes a X chama-se o fecho de X e é indicado com a notação $\overline{X}$.

Por exemplo, todo ponto $a \in X$ é aderente a X pois podemos escrever $a = \lim x_k$, com $x_k = a$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Um outro exemplo: se $X = \mathbb{Q}$ é o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}$, então $\overline{X} = \mathbb{R}$.

Exemplo 2.5 Seja $X = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$ a bola aberta de raio 1 e centrada na origem em $\mathbb{R}^n$. O vetor $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ não faz parte de X , no entanto, definindo $x_k = (1 - 1/k, 0, \dots, 0)$, podemos observar que $x_k \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = e_1$. Assim, e_1 é um ponto de aderência de X . Dessa forma, concluímos que um ponto a pode ser aderente a X sem necessariamente estar em X . Conforme o Teorema 2.3, nesse contexto, a é um ponto de acumulação do conjunto X .

O fecho de uma bola aberta $B(a; r) \in \mathbb{R}^n$ é a bola fechada $B[a; r] \in \mathbb{R}^n$. Logo, no contexto do exemplo acima, o fecho de X é o conjunto $B[0; 1]$.

Definição 2.18 Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado quando contém todos seus pontos aderentes, isto é, quando $X = \overline{X}$.

Por exemplo, uma bola fechada $B[a; r]$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$, pois se $|x_k - a| \leq r$ para todo k e $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = b$, então

$$|b - a| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - a| \leq r.$$

Teorema 2.4 Os conjuntos fechados do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ gozam das seguintes propriedades:

1. O conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço inteiro $\mathbb{R}^n$ são fechados;
2. A reunião $F = F_1 \cup \dots \cup F_k$ de um número finito de conjuntos fechados $F_1, \dots, F_k$ é um conjunto fechado;

Demonstração: A prova será omitida. Para mais detalhes, veja (LIMA, 2015a, p. 41). ■

Teorema 2.5 (Bolzano-Weierstrass). Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma sub-sequência convergente.

Demonstração: Por motivos de praticidade não mostraremos este teorema. Para mais detalhes, veja (LIMA, 2015a, p. 17). ■

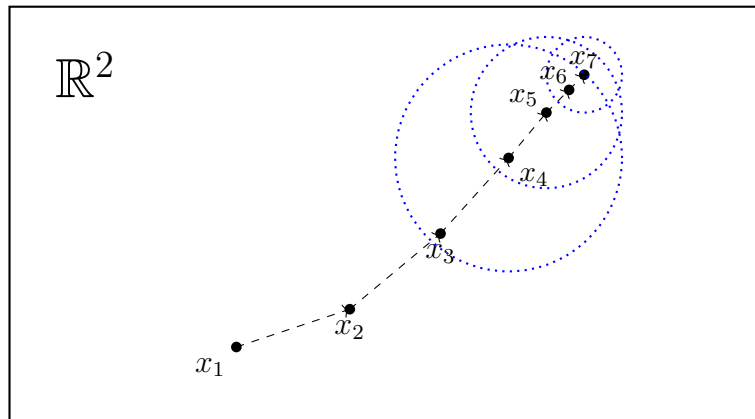
Definição 2.19 Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ diz-se uma sequência de Cauchy quando para

todo $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, r > k_0 \Rightarrow |x_k - x_r| < \varepsilon.$$

Observação 2.4 *Aqui, quando a norma da diferença $|x_k - x_r|$ tende a zero para $k, r \rightarrow \infty$, significa que os termos da sequência estão se aproximando uns dos outros à medida que k e r crescem. Essa proximidade é uma característica importante, pois garante que a sequência não se “afaste” de uma posição estável; ela converge para um valor, ainda que esse valor não seja conhecido explicitamente. Na prática, isso permite afirmar que a sequência tende para algum limite e que, além disso, que esse limite é único (embora o limite possa ou não estar dentro do espaço em questão, dependendo de sua completude). Veja (LIMA, 2015b, p. 178).*

Figura 2 – Sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^2$: os termos de (x_k) ficam progressivamente mais próximos na medida em que fazemos $k_0 \rightarrow \infty$



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Esse conceito é especialmente útil na Análise, onde se examina se uma sequência possui um limite mesmo sem uma fórmula explícita para os elementos da sequência. Além do mais, desempenhará um papel crucial na prova do Teorema do Ponto Fixo para Contrações, essencial para nosso trabalho.

Teorema 2.6 *Uma sequência é de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, é convergente.*

Demonstração: A prova será omitida. Para mais detalhes, veja (LIMA, 2015a, p. 18). ■

Definição 2.20 *Diremos que duas normas arbitrárias $|\cdot|_A$ e $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes quando existirem constantes $a > 0$ e $b > 0$ tais que*

$$|x|_A \leq a\|x\| \text{ e } \|x\| \leq b|x|_A \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstraremos agora o principal resultado a respeito de equivalência entre normas.

Teorema 2.7 *Duas normas quaisquer no espaço $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Demonstração: Para demonstrar a equivalência entre duas normas arbitrárias em $\mathbb{R}^n$, basta mostrar que uma norma qualquer $\|x\|$ é equivalente à norma da soma, que foi definida como $|x|_S = \sum_{i=1}^n |x_i|$, já que a transitividade garante a equivalência entre quaisquer outras normas. Seja então $b = \max\{\|e_1\|, \dots, \|e_n\|\}$, onde e_i são os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Assim, para qualquer vetor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\| \leq \|x_1 e_1\| + \dots + \|x_n e_n\|.$$

A condição N2. da Definição 2.6 nos garante, para qualquer $1 \leq i \leq n$, que $\|x_i e_i\| = |x_i| \|e_i\|$, onde $|x_i|$ é o valor absoluto do número real x_i . Logo:

$$\|x\| \leq |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \leq b \cdot |x_1| + \dots + b \cdot |x_n| \leq b \cdot |x|_S.$$

Portanto, existe a constante $b > 0$ tal que $\|x\| \leq b \cdot |x|_S$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Agora, resta demonstrar que também existe uma constante $a > 0$ tal que $|x|_S \leq a \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Suponha, por absurdo, que tal constante não exista. Isso implica que, para cada $k \in \mathbb{N}$, há um vetor $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$|x_k|_S > k \cdot \|x_k\| \Rightarrow \frac{\|x_k\|}{|x_k|_S} < \frac{1}{k}.$$

Definindo $u_k = \frac{x_k}{|x_k|_S}$, temos que

$$\|u_k\| = \left\| \frac{x_k}{|x_k|_S} \right\| = \frac{\|x_k\|}{|x_k|_S} < \frac{1}{k}.$$

Note também que

$$|u_k|_S = \left| \frac{x_k}{|x_k|_S} \right|_S = \frac{|x_k|_S}{|x_k|_S} = 1 \text{ para todo } k.$$

Assim, a sequência (u_k) é limitada em relação à norma da soma. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, a sequência (u_k) possui uma subsequência (u_{k_j}) que converge para algum ponto $u \in \mathbb{R}^n$:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_{k_j} = u \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} |u_{k_j}|_S = |u|_S = 1,$$

o que implica que $u \neq 0$. Por outro lado, como $u_{k_j} \rightarrow u$, temos que, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\|u\| = \|u + u_{k_j} - u_{k_j}\| \leq \|u_{k_j} - u\| + \|u_{k_j}\| \leq b |u_{k_j} - u|_S + \frac{1}{k_j}.$$

Quando $j \rightarrow \infty$, as duas últimas parcelas da desigualdade acima tendem a zero, de modo que $\|u\| = 0$ (pela condição N3. da Definição 2.6). Isso implica que $u = 0$, uma contradição, pois havíamos encontrado que $|u| = 1$. Concluimos, portanto, que existe uma constante $a > 0$ tal que $|x| \leq a\|x\|$, o que prova a equivalência entre $\|x\|$ e $|x|$. Assim, qualquer par de normas em $\mathbb{R}^n$ é equivalente, o que conclui a demonstração. ■

Com relação às três normas mais comuns no espaço $\mathbb{R}^n$, o teorema acima basicamente assegura que as seguintes desigualdades são verdadeiras:

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M$$

Além disso, um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado em uma dessas normas se, e somente se, for limitado nas outras duas.

A maior parte dos conceitos apresentados até o momento, bem como os resultados já estabelecidos ou que ainda serão demonstrados neste trabalho, continuam válidos e mantêm suas propriedades se trocarmos a norma utilizada por outra que seja equivalente. O teorema mencionado acima, portanto, assegura que, para esses casos, é possível utilizar qualquer norma em $\mathbb{R}^n$. Essa flexibilidade é valiosa, pois permite que abordemos problemas em que uma norma pode tornar as análises mais complexas. Ao optar por uma norma mais adequada, podemos simplificar a resolução de problemas, facilitando o entendimento e a aplicação dos resultados desejados.

As desigualdades vistas acima nos fornecem: $|x_k - a|_M \leq |x_k - a| \leq |x_k - a|_S \leq n \cdot |x_k - a|_M$. A partir disso, conclui-se que $\lim |x_k - a|_M = 0 \Leftrightarrow \lim |x_k - a| = 0 \Leftrightarrow \lim |x_k - a|_S = 0$. Dessa forma, a afirmação $\lim x_k = a$ não depende da norma utilizada, entre as três usuais.

2.1.5 Aplicações contínuas

Para Lima (2022, p. 153), “a ideia de função contínua é o tema central da Topologia.” É relevante mencionar também que a noção de continuidade desempenhará neste trabalho um papel crucial no estudo da diferenciabilidade, pois a continuidade é uma condição necessária para que uma aplicação seja diferenciável.

Definição 2.21 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que f é contínua no ponto $a \in U$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dado, é possível obter um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in U, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Equivalentemente, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in U$ quando, dada qualquer bola aberta $B' = B(f(a); \varepsilon)$ de centro $f(a)$, pode-se encontrar uma bola aberta $B = B(a; \delta)$, de centro a , tal que $f(B \cap U) \subset B'$.

Ao restringir a análise à interseção $B \cap U$, estamos garantindo que f seja aplicada somente em pontos onde ela está bem definida, já que é possível que B contenha pontos que estão fora de U . Isso é essencial, pois fora de U , a função f não tem um valor correspondente, e portanto, não faz sentido analisar a continuidade nesses pontos.

A noção de continuidade num ponto é fundamentalmente local porque depende exclusivamente do comportamento da aplicação f nas proximidades do ponto a , e não de todo o domínio U . Mais precisamente, se existe uma bola aberta $B = B(a; \delta) \subset U$ ao redor de a , tal que a restrição $f|_B$ é contínua nesse ponto, isso é suficiente para garantir que f é contínua em a com respeito ao domínio completo U . Isso implica que a continuidade em um ponto não requer que se conheça o comportamento de f em todo U , apenas em uma vizinhança local de a . Agora, se para todo subconjunto limitado $X \subset U$, a aplicação $f|_X$ for contínua, essa propriedade local se estende de maneira controlada para qualquer subconjunto X . Como $f|_X$ é contínua em cada parte limitada de U , isso implica que f preserva a continuidade em todo o domínio U , garantindo que $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma aplicação contínua globalmente. Esse raciocínio se baseia no fato de que a continuidade local se propaga para o todo, desde que cada subconjunto limitado respeite a condição de continuidade.

Definição 2.22 *Diremos que $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua no conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$ quando f é contínua em todos os pontos de U .*

Embora a definição de continuidade de uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$, faça uso de uma norma em $\mathbb{R}^m$ e outra em $\mathbb{R}^n$, para efeitos práticos, indicaremos ambas com a mesma notação, como feito acima. Segue-se da Definição 2.20 e do Teorema 2.7 que a continuidade (ou descontinuidade) de f num ponto persiste se alterarmos uma dessas normas ou ambas.

Exemplo 2.6 *Se a é um ponto isolado do conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, ou seja, existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \cap X = \{a\}$, então toda aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é necessariamente contínua no ponto a . Com efeito, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos tomar o mesmo valor de $\delta > 0$ que garante $B(a; \delta) \cap X = \{a\}$ e obter, via Definição 2.21, que:*

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow x = a \Rightarrow |f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon,$$

o que prova a continuidade de f no ponto a .

Definição 2.23 *Dado $X \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se Lipschitziana quando existe $k > 0$ (constante de Lipschitz de f) tal que, para quaisquer $x, y \in X$, tem-se:*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

A noção de uma aplicação Lipschitziana surge como uma forma de quantificar o quanto uma aplicação pode “distorcer” distâncias entre pontos no seu domínio e imagem. A condição de Lipschitz, essencialmente, garante que a variação da aplicação f entre dois

pontos x e y é limitada pela distância entre esses pontos no domínio, multiplicada por um fator k .

Teorema 2.8 *Toda aplicação Lipschitziana é contínua.*

Demonstração: Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação que satisfaz a condição de Lipschitz, ou seja, existe $k > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in U$, tem-se $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Suponha que f seja contínua num ponto $a \in U$. Pela definição de continuidade, para todo $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dado, é possível obter um $\delta > 0$ tal que

$$x \in U, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, teremos

$$x \in U, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq k|x - a| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

■

Teorema 2.9 *Toda transformação linear $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Lipschitziana.*

Demonstração: Com efeito, seja $c = \max\{|A \cdot e_1|, \dots, |A \cdot e_m|\}$. Então, para todo $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, temos:

$$|A \cdot x| = |A \cdot (x_1 \cdot e_1 + \dots + x_m \cdot e_m)| = |x_1 \cdot A \cdot e_1 + \dots + x_m \cdot A \cdot e_m|.$$

Aplicando a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} |x_1 \cdot A \cdot e_1 + \dots + x_m \cdot A \cdot e_m| &\leq |x_1 \cdot A \cdot e_1| + \dots + |x_m \cdot A \cdot e_m| \\ &= |x_1| \cdot |A \cdot e_1| + \dots + |x_m| \cdot |A \cdot e_m| \\ &\leq c \cdot \sum_{i=1}^m |x_i|. \end{aligned}$$

Note que $\sum_{i=1}^m |x_i|$ é a nossa definição de norma da soma. Logo, tomando em $\mathbb{R}^m$ a norma da soma, temos $|A \cdot x|_S \leq c|x|_S$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Então, para $x, y \in \mathbb{R}^m$ arbitrários, vale:

$$|A \cdot x - A \cdot y|_S = |A \cdot (x - y)|_S \leq c|x - y|_S,$$

e pelo Teorema 2.7, a desigualdade acima permanece válida se a substituirmos por outra equivalente. Assim, A cumpre a condição de Lipschitz, com uma constante igual à maior das normas dos vetores-coluna de sua matriz. Em particular, A é contínua. ■

Observação 2.5 *Sob certo ponto de vista, podemos enxergar a imagem de uma transformação linear $T: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ como um subconjunto limitado, desde que T seja restringido*

à um subconjunto limitado $U \subset \mathbb{R}^m$.

A partir deste ponto, serão expostos alguns resultados importantes que servirão de base para o desenvolvimento das próximas seções deste trabalho. Em particular, o próximo resultado, que estabelece que a composta de duas aplicações contínuas é contínua, terá um papel fundamental na seção sobre diferenciabilidade. Além disso, a continuidade das funções-coordenadas, conforme estabelecido no Teorema 2.11, será utilizada para decompor aplicações em componentes escalares, o que facilitará a análise de sua diferenciabilidade em termos de cada coordenada individualmente.

Teorema 2.10 *A composta de duas aplicações contínuas é contínua. Mais precisamente, dados $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua no ponto $a \in X$, com $f(X) \subset Y$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^p$ contínua no ponto $b = f(a)$, então $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ é contínua no ponto a .*

Demonstração: Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe, em virtude da continuidade de g , um número $\eta > 0$ tal que

$$y \in Y, |y - f(a)| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Note que $|y - f(a)| = |f(x) - f(a)|$ para algum $x \in U$, a partir disto, de η , a continuidade de f nos fornece $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta. \quad (1)$$

Segue-se que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon, \quad (2)$$

ou seja, de (1) e (2) temos que se

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Logo $g \circ f$ é contínua no ponto a . ■

Teorema 2.11 *Uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, é contínua num ponto $a \in X$ se, e somente se, cada uma das suas funções-coordenadas $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a .*

Demonstração: Primeiramente, vamos definir, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, o funcional linear $\pi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, chamado de i -ésima projeção, dado por $\pi_i(x) = x_i$ que é a i -ésima coordenada de x . Pelo Teorema 2.9 sabemos que toda aplicação linear é contínua. Agora, dar uma aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o mesmo que dar n funções reais $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, as quais podemos definir como

$$f_i = \pi_i \circ f,$$

que são as coordenadas da aplicação f . Em seguida, suponha que $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$. Pelo teorema anterior, a aplicação composta $f_i = \pi_i \circ f$ é contínua. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Isso implica que $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto, cada f_i é contínua em a . Reciprocamente, suponha que cada $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_i > 0$ (para $i = 1, 2, \dots, n$) tais que, para todo $x \in X$, $|x - a| < \delta_i$ implica que $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$. Agora, considere a norma do máximo em $\mathbb{R}^n$, dada por

$$|f(x) - f(a)|_M = \max\{|f_1(x) - f_1(a)|, |f_2(x) - f_2(a)|, \dots, |f_n(x) - f_n(a)|\}.$$

Se tomarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, então, para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$, temos $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto,

$$|f(x) - f(a)|_M = \max\{|f_i(x) - f_i(a)|; 1 \leq i \leq n\} < \varepsilon,$$

o que mostra que f é contínua no ponto a . Logo, f é contínua em a se, e somente se, cada função coordenada f_i é contínua em a . ■

Teorema 2.12 *Uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in X$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$. Vamos provar que, para toda sequência $(x_k) \subset X$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$. Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de f no ponto a , existe $\delta > 0$ tal que:

$$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Agora, seja $(x_k) \subset X$ uma sequência tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. Isso significa que, para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k > k_0 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon_1.$$

Como δ depende de ε , podemos escolher $\varepsilon_1 = \delta$. Portanto, para $k > k_0$, temos $|x_k - a| < \delta$, o que implica que:

$$|f(x_k) - f(a)| < \varepsilon \text{ para todo } k > k_0.$$

Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$, como desejado. Agora, para provar a recíproca, suponhamos que f não seja contínua no ponto a . Isso significa que existe algum $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo

$\delta > 0$, existe $x \in X$ com $|x - a| < \delta$, mas $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0$. Em particular, podemos construir uma sequência $(x_k) \subset X$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, mas $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, temos uma sequência (x_k) que converge para a , mas cuja imagem $(f(x_k))$ não converge para $f(a)$. Logo, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \neq f(a)$, contradizendo a hipótese. Portanto, f é contínua no ponto a se, e somente se, para toda sequência $(x_k) \subset X$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$. ■

Observação 2.6 No contexto do teorema acima, é importante destacar o papel dos pontos aderentes na análise de continuidade, pois basicamente, se $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$, então $f(a)$ é ponto aderente do conjunto $f(X)$, basta enxergar $f(x_k)$ como uma sequência de pontos em $f(X)$.

Definição 2.24 Uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em $X \subset \mathbb{R}^m$, diz-se uniformemente contínua quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in X, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Observação 2.7 Em particular, para $y = a$, na definição anterior, temos que

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Isso é exatamente a definição de continuidade de f no ponto a . Logo, toda aplicação uniformemente contínua é contínua em qualquer ponto $a \in X$.

A continuidade uniforme transcende a noção de simples continuidade ao impor um controle global sobre a variação da aplicação, independentemente da localização no domínio. Diferentemente da continuidade comum, onde δ depende do ponto a , na continuidade uniforme a escolha de δ é universal para todo $x \in X$.

Teorema 2.13 Toda aplicação Lipschitziana $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.

Demonstração: Com efeito, como f é Lipschitziana, então existe $k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ para $x, y \in X$ arbitrários. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \varepsilon/k$, então

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < k(\varepsilon/k) = \varepsilon.$$

■

Assim, no contexto do Teorema 2.9, toda aplicação linear $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua. Além do mais, podemos deduzir do Teorema 2.10 que a composta de duas aplicações uniformemente contínuas é ainda uniformemente contínua.

Pelo Teorema 2.11, uma aplicação $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua se, e somente se, suas funções coordenadas $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ o são.

Seguindo a linha de raciocínio de Lima:

Ao contrário do que ocorre em Álgebra Linear, onde a inversa de uma transformação linear bijetiva também é linear, ou na Teoria dos Grupos, onde o

inverso de um homomorfismo bijetivo é ainda um homomorfismo, em Topologia ocorre o fenômeno de existirem funções contínuas bijetivas $f: M \rightarrow N$ tais que $f^{-1}: N \rightarrow M$ é descontínua. (LIMA, 2015b, p. 41).

No contexto do Teorema da Aplicação Inversa, a continuidade da inversa não é automaticamente garantida pela bijetividade e continuidade da aplicação original, sendo crucial garantir que a inversa também seja contínua para preservar as propriedades de diferenciabilidade. Em nosso contexto, os homeomorfismos são, portanto, fundamentais para estabelecer condições de continuidade que asseguram a diferenciabilidade da inversa.

Definição 2.25 *Dados os conjuntos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, um homeomorfismo entre X e Y é uma bijeção contínua $f: X \rightarrow Y$, cuja inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ também é contínua. Diz-se então que X e Y são conjuntos homeomorfos.*

Exemplo 2.7 *Um exemplo simples de homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre si mesmo é dado por uma aplicação linear invertível $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Com efeito, sua inversa $A^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é linear e, portanto, contínua.*

Teorema 2.14 *Seja $f: X \rightarrow Y$ um homeomorfismo entre os conjuntos $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Então, a inversa $f^{-1}: Y \rightarrow X$ também é um homeomorfismo.*

Demonstração: Por questões de praticidade, omitiremos a demonstração deste teorema, cujos detalhes serão abordados na próxima observação. ■

Teorema 2.15 *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, e $Z \subset \mathbb{R}^p$. Se $f: X \rightarrow Y$ e $g: Y \rightarrow Z$ são homeomorfismos, então a composição $g \circ f: X \rightarrow Z$ é também um homeomorfismo.*

Demonstração: A prova será omitida. Mais detalhes serão apresentados na observação seguinte. ■

Observação 2.8 *Os dois resultados acima decorrem diretamente da continuidade das aplicações e da bijetividade de f e g , uma vez que a composição de aplicações contínuas é contínua, conforme o Teorema 2.10, e a composição de bijeções é ainda uma bijeção.*

Teorema 2.16 *Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. A fim de que f seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ seja um conjunto aberto em X .*

Demonstração: (Necessário.) Suponha que f seja contínua e seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Para mostrar que $f^{-1}(A)$ é aberto em X , tomemos $a \in f^{-1}(A)$. Assim, $f(a) \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que a bola aberta $B(f(a); \varepsilon) \subset A$. Como f é contínua em a , existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Logo, $f(B(a; \delta) \cap X) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset A$, o que implica $B(a; \delta) \cap X \subset f^{-1}(A)$. Assim, $f^{-1}(A)$ é aberto em X .

(Suficiente.) Suponha agora que a imagem inversa de todo aberto de $\mathbb{R}^n$ por f é aberto em X . Para mostrar que f é contínua, considere $a \in X$ e $\varepsilon > 0$. A bola $B(f(a); \varepsilon)$ é

aberta em $\mathbb{R}^n$, logo $f^{-1}(B(f(a); \varepsilon))$ é aberto em X . Seja

$$A = \{x \in X; |f(x) - f(a)| < \varepsilon\}.$$

Temos que $A = f^{-1}(B(f(a); \varepsilon))$, e portanto A é aberto em X . Como $a \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a; \delta) \cap X \subset A$. Isso implica que, para todo $x \in X$,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em a . Como $a \in X$ é arbitrário, f é contínua em todo X . ■

Definição 2.26 *Seja $A \in M(m \times m)$ uma matriz $m \times m$. Definimos a função determinante $\det: M(m \times m) \rightarrow \mathbb{R}$ como*

$$\begin{aligned} \det: M(m \times m) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det A. \end{aligned}$$

Observação 2.9 *A definição formal e rigorosa da função determinante, no contexto da Álgebra Linear, é baseada em propriedades fundamentais como multilinearidade, alternância e normalização, envolvendo conceitos avançados e detalhados que fogem ao escopo deste trabalho (Veja (BUENO, 2006, p. 57)). Apesar de sua formulação exata ser uma parte crucial para fundamentar propriedades teóricas, sua apresentação completa não será abordada aqui, pois ela exige uma incursão detalhada na estrutura do grupo simétrico S_n e no conceito de sinal de permutação, o que extrapola os objetivos do presente estudo. Para evitar ambiguidades e manter a clareza, adotaremos o determinante usual amplamente utilizado na teoria básica de matrizes, conforme apresentado acima. Essa definição, com base em suas propriedades operacionais, será suficiente para os objetivos e discussões a serem desenvolvidos ao longo deste trabalho.*

Uma consequência direta da observação acima é que a função determinante $\det: M(m \times m) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua. Em acréscimo, o próximo resultado, que será apresentado como um corolário, pode ser interpretado como uma consequência imediata do Teorema 2.16 em conjunto com a observação apresentada.

Corolário 2.1 *O conjunto $GL(\mathbb{R}^m)$ dos isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^m$ é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$.*

Demonstração: O conjunto $GL(\mathbb{R}^m)$ pode ser descrito como:

$$GL(\mathbb{R}^m) = \{A \in M(m \times m); \det(A) \neq 0\},$$

onde $M(m \times m)$ é o conjunto das matrizes reais $m \times m$, que coincide com o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$. Com base na observação precedente, concluímos que a função determinante $\det: M(m \times m) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua. Considere agora o conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que

é aberto em $\mathbb{R}$. Note que $GL(\mathbb{R}^m)$ pode ser descrito como o conjunto de todas as matrizes $m \times m$ cujos determinantes pertencem a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, isto é:

$$GL(\mathbb{R}^m) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Pela continuidade da função $\det$ e pelo Teorema 2.16, podemos concluir que o conjunto $GL(\mathbb{R}^m)$ dos isomorfismos lineares é aberto em $M(m \times m)$, que equivale ao espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$. ■

2.1.6 Limites de aplicações

Definição 2.27 *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação de X . Diz-se que o ponto $b \in \mathbb{R}^n$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para a , se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

Neste caso, escreve-se $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Essa definição depende essencialmente de a ser um ponto de acumulação de X , pois mesmo que $a \in X$, é irrelevante para a definição do limite. O que realmente importa são os valores de $f(x)$ quando x está arbitrariamente próximo de a , mas $x \neq a$. Ou seja, a definição do limite considera o comportamento da aplicação ao redor de a , mas não o valor da aplicação exatamente em a .

A definição de limite e a definição de continuidade estão intimamente relacionadas, mas possuem diferenças fundamentais. O limite de uma aplicação em um ponto a descreve o seu comportamento nas proximidades de a , sem exigir que a aplicação esteja definida ou tenha um valor específico no próprio ponto a . Por outro lado, a continuidade em a requer, além da existência do limite, que a aplicação esteja definida no ponto a e que seu valor em a seja exatamente igual ao seu limite quando $x \rightarrow a$. Em resumo, a continuidade é uma condição mais forte, pois implica que a aplicação não apenas se comporta de forma estável nas vizinhanças de a , mas também que seu valor em a coincide com o seu comportamento ao redor desse ponto. Em outras palavras, f é contínua no ponto a se, e somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Então, para todo $a \in X'$, existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Além do mais, dada a aplicação $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, cujas

funções-coordenadas são $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = (b_1, \dots, b_n) \text{ se, e somente se, } \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = b_i$$

para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

A relação entre o limite e a composição de aplicações é a seguinte: sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in X'$, $b \in Y'$ e $f(X) \subset Y$.

- I) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e g é contínua no ponto b , então $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(b)$.
- II) Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ e $x \neq a \Rightarrow f(x) \neq b$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Observação 2.10 Usando a afirmação II), concluímos que se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, então, para qualquer vetor $u \neq 0$, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(a + tu) = b.$$

Isto expressa o que havíamos dito sobre uma análise local ao redor do ponto a .

2.2 APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

A teoria da diferenciabilidade constitui uma das bases mais fundamentais da Análise Matemática, com grande importância tanto em aspectos teóricos quanto em suas aplicações práticas.

A teoria trata do estudo de aplicações que são localmente aproximáveis por transformações lineares, ou seja, aplicações cuja variação pode ser bem descrita por uma derivada. A ideia central é a generalização do conceito de derivada de funções de uma variável real para aplicações de múltiplas variáveis ou em espaços mais gerais.

2.2.1 Diferenciabilidade de uma aplicação

Para entender este tópico, será necessário lembrar que uma transformação linear pode ser vista tanto como uma aplicação entre espaços vetoriais quanto como uma matriz que representa essa transformação. Em decorrência, as considerações feitas na Observação 2.2 são cruciais para a análise desta parte.

Definição 2.28 Uma aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando, para pequenos valores de v , o acréscimo $f(a+v) - f(a)$ é, aproximadamente, uma aplicação linear de v . Mais precisamente, quando existe uma aplicação linear $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(a+v) - f(a) = T \cdot v + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

A diferenciabilidade de uma aplicação exige estritamente que f seja definida

em um conjunto aberto, que é uma condição crucial para garantir a existência de uma vizinhança em torno de qualquer ponto $a \in U$ onde a aplicação possa ser analisada de maneira local. Por isso precisamos supor que $a + v \in U$, para que $f(a + v)$ tenha sentido. Como U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $|v| < \delta \Rightarrow a + v \in U$. A igualdade acima é a definição do “resto” $r(v)$.

Se U não for um conjunto aberto, pode não haver uma vizinhança de a completamente contida em U , o que impossibilita a definição adequada de diferenciabilidade da aplicação, pois não se pode garantir que f esteja definida para pequenos incrementos v , de modo que $a + v \in U$. Para a definição de diferenciabilidade, é fundamental que a aplicação f possa ser avaliada em pontos arbitrariamente próximos de a , e isso é garantido apenas quando U é aberto. Em particular, essa condição permite que se trabalhe com acréscimos v suficientemente pequenos, de forma que $a + v$ permaneça no domínio da aplicação, possibilitando a construção de uma aproximação linear. Além disso, a noção de limite envolvida na definição da diferenciabilidade depende da existência de uma vizinhança ao redor de a para que possamos analisar o comportamento da aplicação conforme o ponto $a + v$ se aproxima de a . Logo, ao restringir a análise à conjuntos abertos, garantimos que essa vizinhança sempre existirá.

Exemplo 2.8 Considere a aplicação $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \sqrt{x}$. Vamos analisar a diferenciabilidade de f no ponto $x = 1$. Utilizando algumas ferramentas do Cálculo Diferencial Integral, podemos chegar a conclusão que f é diferenciável em qualquer $x \in (0, 1)$, com derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Para que f seja diferenciável no ponto $x = 1$, deve existir uma transformação linear $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Para $v > 0$, o ponto $1 + v \notin [0, 1]$, então $f(1 + v)$ não está definido. Logo, f não é diferenciável nesse ponto.

Portanto, uma vez dada a aplicação linear T , a diferenciabilidade de f no ponto a está diretamente relacionada à condição de que o termo $r(v)$ seja infinitesimal em relação ao incremento v . Isso é formalizado pela expressão $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$, que garante que o comportamento de f em torno de a pode ser aproximado cada vez melhor por $T \cdot v$ conforme v se aproxima de zero. Em outras palavras, a parte não linear da função, representada por $r(v)$, se torna desprezível à medida que v diminui, ou seja, $r(v)$ decresce mais rapidamente do que v para v próximo de zero. A expressão explícita dessa ideia é a seguinte: para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, se $0 < |v| < \delta$, então $|r(v)| < \epsilon|v|$. Isso significa que o termo $r(v)$ pode ser controlado proporcionalmente por $|v|$, com uma margem arbitrariamente pequena de erro, ϵ , garantindo assim que a aplicação seja cada vez mais bem aproximada pela aplicação linear T conforme nos aproximamos do ponto a . Dessa forma, a essência da

diferenciabilidade está na observação de que o comportamento não linear de f , capturado por $r(v)$, se torna insignificante em comparação ao comportamento linear $T \cdot v$ para pequenos valores de v .

Em certos casos, para evitar problemas decorrentes de uma possível indeterminação pelo denominador nulo, é útil expressar o termo de resto sob a forma $r(v) = \rho(v) \cdot |v|$, onde a aplicação ρ é dada, para todo v tal que $a + v \in U$, por $\rho(v) = \frac{r(v)}{|v|}$ se $v \neq 0$, e $\rho(0) = 0$. Com essa reformulação, a diferenciabilidade da aplicação f no ponto a pode ser escrita como

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + \rho(v) \cdot |v|,$$

onde $\lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0$, o que significa que ρ é contínua no ponto $v = 0$. Dessa forma, a aplicação ρ serve como um intermediário que regulariza o comportamento de $r(v)$, assegurando que a expressão faça sentido e facilitando a análise da diferenciabilidade ao evitar a indeterminação causada pela divisão por $|v|$.

A validade da condição $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ (ou $\lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0$) é independente das normas escolhidas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, conforme afirmado no Teorema 2.7, que demonstra que quaisquer duas normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes. Assim, concluímos que a diferenciabilidade de uma aplicação em um determinado ponto também não depende das normas utilizadas.

Teorema 2.17 *Toda aplicação diferenciável num ponto é, evidentemente, contínua nesse ponto.*

Demonstração: De fato, considere uma aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que é diferenciável em um ponto $a \in U$. De acordo com a Observação 2.10, basta mostrar que:

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(a + v) = f(a).$$

Como f é diferenciável, por definição, temos:

$$f(a + v) = f(a) + T \cdot v + r(v), \text{ onde } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Assim, podemos reescrever o limite de f , aplicado em $a + v$, como

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(a + v) = \lim_{v \rightarrow 0} (f(a) + T \cdot v + r(v)).$$

O limite se desagrega em:

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(a + v) = f(a) + \lim_{v \rightarrow 0} T \cdot v + \lim_{v \rightarrow 0} r(v).$$

Como T é uma aplicação linear, temos $\lim_{v \rightarrow 0} T \cdot v = T \cdot 0 = 0$. Por fim, dado que $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$, podemos afirmar que:

$$\lim_{v \rightarrow 0} r(v) = 0.$$

Portanto, reunindo tudo, obtemos:

$$\lim_{v \rightarrow 0} f(a + v) = f(a) + 0 + 0 = f(a).$$

Assim, concluímos que $\lim_{v \rightarrow 0} f(a + v) = f(a)$, o que implica que f é contínua em a . Portanto, toda aplicação diferenciável em um ponto é, evidentemente, contínua nesse ponto. ■

Definição 2.29 Diremos que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ quando é diferenciável em todos os pontos de U .

Observação 2.11 Da definição acima, podemos concluir, pelo Teorema 2.17, que f será contínua em todo aberto $U \subset \mathbb{R}^m$.

A definição a seguir será uma extensão natural da noção de diferenciabilidade, especialmente no contexto de entender como uma aplicação varia ao longo de direções específicas no espaço. A partir dela, será possível entender e interpretar a transformação linear T da Definição 2.28.

Definição 2.30 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. A derivada direcional de f num ponto $a \in U$, relativamente a um vetor $v \in \mathbb{R}^m$, é

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^n,$$

quando tal limite existe.

A partir disto, podemos escrever $f = (f_1, \dots, f_n)$, onde cada $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) é uma função-coordenada de f , e notar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f_1(a + tv), \dots, f_n(a + tv)) - (f_1(a), \dots, f_n(a))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f_1(a + tv) - f_1(a), \dots, f_n(a + tv) - f_n(a))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f_1(a + tv) - f_1(a)}{t}, \dots, \frac{f_n(a + tv) - f_n(a)}{t} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right),$$

onde cada $\frac{\partial f_i}{\partial v}(a)$ é a derivada direcional da função-coordenada f_i , segundo o vetor v .

Quando $v = e_j$ é o j -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^m$, escreve-se $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ em vez de $\frac{\partial f}{\partial e_j}(a)$ e é chamada de j -ésima derivada parcial de f no ponto a . Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right).$$

Analogamente, chamaremos cada $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ de j -ésima derivada parcial da função-coordenada f_i .

Vamos ver agora como interpretar a transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ que ocorre na Definição 2.28.

Supondo f diferenciável no ponto a , para todo $v \in \mathbb{R}^m$ e qualquer $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, tem-se

$$f(a + tv) - f(a) = T \cdot tv + \rho(tv) \cdot |tv|, \text{ com } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(tv) = 0.$$

Como $T \cdot tv = t \cdot T \cdot v$ e $|tv| = |t| \cdot |v|$, segue-se, para $t \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(a + tv) - f(a) &= t \cdot T \cdot v + \rho(tv) \cdot |t| \cdot |v|, \\ \Rightarrow \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} &= \frac{t \cdot T \cdot v + \rho(tv) \cdot |t| \cdot |v|}{t}, \\ \Rightarrow \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} &= T \cdot v \pm \rho(tv) \cdot |v|, \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} [T \cdot v \pm \rho(tv) \cdot |v|] = T \cdot v.$$

Portanto,

$$T \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(a).$$

Em particular, podemos afirmar que T é a única transformação linear que proporciona uma aproximação eficaz para a diferença $f(a + v) - f(a)$ nas proximidades do ponto a . Essa propriedade torna T fundamental para a análise local de f em torno de a , pois captura a taxa de variação da aplicação em relação a pequenas mudanças em v .

Assim, nomeamos T como a derivada de f no ponto a , sendo expressa como

$$f'(a) = T.$$

Portanto, se $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, é diferenciável no ponto $a \in U$, sua derivada é a aplicação linear $f'(a): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, caracterizada por

$$f(a+v) - f(a) = f'(a) \cdot v + r(v), \text{ com } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0,$$

ou

$$f(a+v) - f(a) = f'(a) \cdot v + \rho(v)|v|, \text{ com } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0.$$

Como $f = (f_1, \dots, f_n)$, a igualdade vetorial $f(a+v) - f(a) = f'(a) \cdot v + r(v)$ equivale às n igualdades numéricas

$$f_i(a+v) - f_i(a) = df_i(a) \cdot v + r_i(v),$$

onde $r(v) = (r_1(v), \dots, r_n(v))$, enquanto que o limite vetorial $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$ corresponde aos n limites numéricos $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_i(v)}{|v|} = 0$. Ou seja, estamos afirmando que a aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in U \subset \mathbb{R}^m$ se, e somente se, cada uma das suas funções-coordenadas $f_1, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável nesse ponto. Note que $df_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear, que chamaremos de diferencial da i -ésima função-coordenada f_i no ponto a .

Agora, de forma análoga ao que foi feito acima, vamos interpretar o diferencial de f_i . Suponha que cada f_i seja diferenciável no ponto a . Então, para todo $v \in \mathbb{R}^m$ e qualquer $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno tem-se

$$\begin{aligned} f_i(a+tv) - f_i(a) &= df_i(a) \cdot tv + \rho_i(tv)|tv| \\ \Rightarrow f_i(a+tv) - f_i(a) &= t \cdot df_i(a) \cdot v + \rho_i(tv)|t||v| \\ \Rightarrow \frac{f_i(a+tv) - f_i(a)}{t} &= \frac{t \cdot df_i(a) \cdot v + \rho_i(tv)|t||v|}{t} \\ \Rightarrow \frac{f_i(a+tv) - f_i(a)}{t} &= df_i(a) \cdot v \pm \rho_i(tv)|v|, \end{aligned}$$

onde, aplicando o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a + tv) - f_i(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} [df_i(a) \cdot v \pm \rho_i(tv)|v|] = df_i(a) \cdot v.$$

Portanto,

$$df_i(a) \cdot v = \frac{\partial f_i}{\partial v}(a),$$

ou seja, o diferencial de f_i no ponto a coincide com a derivada direcional de f_i na direção de v .

Como toda transformação linear, o funcional linear $df_i(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ possui uma matriz $1 \times m$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^m$. Se identificarmos o funcional com sua matriz, teremos:

$$df_i(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(a) \right).$$

Logo, para todo $v \in \mathbb{R}^m$

$$f'(a) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right) = (df_1(a) \cdot v, \dots, df_n(a) \cdot v).$$

Podemos também escrever da seguinte forma: para todo $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, temos:

$$f'(a) \cdot v = (\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ onde } \beta_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \cdot \alpha_j = \frac{\partial f_i}{\partial v}(a).$$

A transformação linear $f'(a): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ também possui, em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, uma matriz $n \times m$ chamada a Matriz Jacobiana de f no ponto a , indicada com a notação $Jf(a)$. Suas m colunas são os vetores

$$f'(a) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f'(a) \cdot e_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \cdot e_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) \cdot e_n; \\ &\vdots \\ f'(a) \cdot e_m &= \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \cdot e_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \cdot e_n. \end{aligned}$$

Portanto

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Assim, $Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$, onde $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções-coordenadas de f .

Cada uma das n linhas $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(a) \right)$ é, como vimos acima, a matriz $1 \times m$ do funcional linear $df_i(a) =$ diferencial da i -ésima função-coordenada f_i .

Exemplo 2.9 *Seja a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = e^x(\cos y, \sin y)$. Vamos procurar sua Matriz Jacobiana no ponto $z \in U$. Veja que a derivada parcial de f num ponto $z = (x, y) \in U$ em relação ao vetor $x = (1, 0)$ da base canônica de $\mathbb{R}^2$ é, por definição:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + tx) - f(z)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{x+t}(\cos y, \sin y) - e^x(\cos y, \sin y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\cos y, \sin y)[e^{x+t} - e^x]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^x(\cos y, \sin y)[e^t - 1]}{t}. \end{aligned}$$

Note que a função e^t pode ser expandida em série de Taylor como:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Subtraindo 1 de ambos os lados, temos:

$$e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Quando t é próximo de zero, os termos $\frac{t^2}{2!}$, $\frac{t^3}{3!}$, etc., se tornam muito pequenos e podem

ser desprezados em uma aproximação. Assim, a expressão se reduz a:

$$e^t - 1 \approx t$$

para valores pequenos de t . Dessa forma, podemos usar essa aproximação para simplificar limites envolvendo $e^t - 1$ quando $t \rightarrow 0$. Assim

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^x(\cos y, \sin y)[e^t - 1]}{t} = e^x(\cos y, \sin y).$$

Agora, a derivada parcial de f num ponto $z = (x, y) \in U$ em relação ao vetor $y = (0, 1)$ da base canônica é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + tx) - f(z)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^x(\cos(y + t), \sin(y + t)) - e^x(\cos y, \sin y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^x[(\cos(y + t), \sin(y + t)) - (\cos y, \sin y)]}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} e^x \left(\frac{\cos(y + t) - \cos y}{t}, \frac{\sin(y + t) - \sin y}{t} \right) \\ &= e^x(-\sin y, \cos y). \end{aligned}$$

Portanto, a Matriz Jacobiana de f no ponto $z = (x, y)$ tem a forma:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Podemos definir a aplicação derivada $f': U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, que associa a cada ponto $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ a transformação linear $f'(x): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, correspondente à derivada de f no ponto x . Além disso, para cada vetor $v \in \mathbb{R}^m$, define-se a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, cujo valor em um ponto $x \in U$ é a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v} = f'(x) \cdot v$.

Exemplo 2.10 Considere o exemplo dado acima. Sua aplicação derivada é $f': U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ que associa a cada ponto $z \in U$ a transformação linear $f'(z): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, correspondente a Matriz Jacobiana de f no ponto z . Assim, para cada vetor $v = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, cujo valor em um ponto $z \in U$ é a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v} = f'(z) \cdot v$, é dado por:

$$f'(z) \cdot v = Jf(z) \cdot v = (\beta_1, \beta_2) \text{ onde } \beta_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) \cdot \alpha_j = \frac{\partial f_i}{\partial v}(z).$$

Teorema 2.18 *Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) *f é diferenciável e a aplicação derivada $f': U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é contínua;*
- (2) *As funções-coordenadas $f_1, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$ da aplicação f possuem derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}$;*
- (3) *Para cada $v \in \mathbb{R}^m$, existe a derivada direcional $\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x)$ em qualquer ponto $x \in U$ e a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.*

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) porque as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são as funções-coordenadas da aplicação f' , ou seja, cada elemento da Matriz Jacobiana é uma função-coordenada de f' . Além disso, como vimos mais acima, uma aplicação f é diferenciável em algum ponto do domínio se, e somente se, cada uma das suas funções-coordenadas é diferenciável nesse ponto. Logo (2) implica que cada função f_i é diferenciável, e portanto f é diferenciável e a aplicação derivada f' é contínua pois suas funções-coordenadas o são (diferenciabilidade implica em continuidade). Isto mostra que (2) $\Rightarrow$ (1). Em seguida, supondo (2) temos f diferenciável, logo

$$\frac{\partial f}{\partial v} = f'(x) \cdot v = (\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ onde } \beta_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \cdot \alpha_j = \frac{\partial f_i}{\partial v}(a),$$

onde $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Ora, cada aplicação $\frac{\partial f}{\partial x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua porque, pelo Teorema 2.11, suas funções-coordenadas o são. Logo, $\frac{\partial f}{\partial v}$ é contínua, isto é, (2) $\Rightarrow$ (3). Finalmente, supondo (3), então, em particular, tomando $v = e_j$ vemos que para $j = 1, \dots, m$, as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ são contínuas, logo é contínua cada uma das suas funções-coordenadas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, (3) $\Rightarrow$ (2), o que completa a demonstração. ■

Definição 2.31 *Diz-se que a aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, e escreve-se $f \in C^1$, para significar que f cumpre uma das (e portanto todas as) condições do teorema acima. Mais precisamente, f é de classe C^1 se, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, a derivada parcial*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

existe e é contínua para todo $x \in U$.

Em particular, $f \in C^1$ se, e somente se, cada uma das suas funções-coordenadas é de classe C^1 .

Definição 2.32 *Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida e diferenciável no aberto $U \subset$*

$\mathbb{R}^m$. Diremos que f é duas vezes diferenciável no ponto $a \in U$ quando a aplicação derivada $f': U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ também for diferenciável neste ponto.

Dizer que f é duas vezes diferenciável significa que, de forma equivalente, cada derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no ponto a e, além disso, para cada vetor $v \in \mathbb{R}^m$, a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ também é uma aplicação diferenciável no ponto a . Como no Teorema 2.18, vê-se facilmente que essas condições são equivalentes, de modo que f cumpre uma delas se, e somente se, cumpre todas.

Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas vezes diferenciável no ponto $a \in U \subset \mathbb{R}^m$. Chamaremos a aplicação bilinear $T: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de derivada segunda no ponto a e a representaremos como

$$T = f''(a): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

cujo valor no ponto $(v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ é o vetor

$$f''(a) \cdot v \cdot w = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) (a) \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja, $T \cdot v \cdot w = f''(a) \cdot v \cdot w$.

Quando $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é k vezes diferenciável no ponto a , define-se a k -ésima derivada (ou derivada de ordem k) de f no ponto a como a aplicação k -linear

$$f^{(k)}(a): \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

cujo valor no ponto $(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m$ é o vetor

$$f^{(k)}(a) \cdot v_1 \cdots v_k = \frac{\partial^k f}{\partial v_k \partial v_{k-1} \cdots \partial v_1} (a) \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 2.12 Existe um corolário do Teorema de Schwarz que garante que a k -ésima derivada $f^{(k)}(a)$ é uma aplicação k -linear simétrica. Veja (LIMA, 2015a, p. 249)

Definição 2.33 Uma aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, é dita de classe C^k se for diferenciável e sua derivada $f': U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ pertencer à classe C^{k-1} , o que implica que, para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^m$, a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^{k-1} . De forma equivalente, isso significa que todas as derivadas parciais de ordem até k das funções-coordenadas de f existem e são contínuas em U , escrevendo-se $f \in C^k$. A aplicação f é chamada de classe C^0 se for contínua e de classe C^∞ se $f \in C^k$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$, observando-se que $f \in C^k \Rightarrow f \in C^{k-1}$.

Exemplo 2.11 A aplicação $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = e^x(\cos y, \sin y)$ é de classe C^∞ .

Exemplo 2.12 Toda aplicação linear $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável, e sua derivada em

qualquer ponto $x \in \mathbb{R}^m$ é dada por $T'(x) = T$. De fato, para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^m$, tome

$$T(x + v) - T(x) = T \cdot v + r(v).$$

Note que:

$$\begin{aligned} T(x + v) - T(x) &= T(x) + T(v) - T(x) = T(v) \\ \Rightarrow T(v) &= T \cdot v + r(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r(v) &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} &= 0, \end{aligned}$$

satisfazendo a condição de diferenciabilidade. A aplicação derivada $T': \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é constante. Consequentemente, $T \in C^\infty$.

2.2.2 A Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia desempenha um papel crucial neste trabalho. Mais precisamente, seus corolários são essenciais para o Teorema da Aplicação Inversa e indispensáveis para a demonstração de muitas proposições de natureza teórica. Na opinião de Lima (2015a, p. 260), um dos desafios na aplicação deste teorema, entretanto, é superar a visão limitada das derivadas como números, herança do caso unidimensional. Em vez disso, no cenário multidimensional, é fundamental entender as derivadas como transformações lineares, o que possibilita o uso correto e eficaz do teorema.

Teorema 2.19 (Regra da Cadeia). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável em a com $f(U) \subset V$, e $g: V \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciável em $b = f(a)$. Então a composição $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a , com*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Demonstração: Pela definição de diferenciabilidade, temos:

$$f(a + v) = f(a) + f'(a) \cdot v + \rho(v) \cdot |v|$$

e

$$g(b + w) = g(b) + g'(b) \cdot w + \sigma(w) \cdot |w|,$$

onde $\lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0$ e $\lim_{w \rightarrow 0} \sigma(w) = 0$. Logo,

$$(g \circ f)(a + v) = g(f(a + v)) = g(f(a) + f'(a) \cdot v + \rho(v) \cdot |v|).$$

Definindo $w = f'(a) \cdot v + \rho(v) \cdot |v|$, obtemos:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + v) &= g(b + w) \\ &= g(b) + g'(b) \cdot (f'(a) \cdot v + \rho(v) \cdot |v|) + \sigma(w) \cdot |w|. \end{aligned}$$

Como $g'(b)$ é linear, temos

$$\begin{aligned} g(b + w) &= g(b) + g'(b) \cdot f'(a) \cdot v + g'(b) \cdot (\rho(v) \cdot |v|) + \sigma(w) \cdot |w| \\ &= (g \circ f)(a) + [g'(b) \cdot f'(a)] \cdot v + C(v) \cdot |v|, \end{aligned}$$

onde

$$C(v) = g'(b) \cdot \rho(v) + \sigma(w) \cdot \left| f'(a) \cdot \frac{v}{|v|} + \rho(v) \right|.$$

Como $v \rightarrow 0$ implica $w \rightarrow 0$ e $f'(a) \cdot \frac{v}{|v|}$ é limitada, pela Observação 2.5, concluímos que $\lim_{v \rightarrow 0} C(v) = 0$, o que demonstra o teorema. ■

O corolário a seguir reformula a Regra da Cadeia em termos de matrizes, ao invés de transformações lineares.

Corolário 2.2 *Sejam $Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$, $Jg(f(a)) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(f(a)) \right)$ e $J(g \circ f)(a) = \left(\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) \right)$ as jacobianas de f , g e $g \circ f$ nos pontos indicados. Supondo f diferenciável em a e g diferenciável em $f(a)$, então*

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \cdot Jf(a).$$

Aqui, Jf é $n \times m$, Jg é $p \times n$ e $J(g \circ f)$ é $p \times m$.

Exemplo 2.13 *Considere as aplicações $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x, y) = (x^2, xy)$ e $g(u, v) = u + v^2$. Desejamos calcular o Jacobiano da composição $h = g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto (x, y) . Sejam $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ as funções-coordenadas de f , definidas como $f_1(x, y) = x^2$ e $f_2(x, y) = xy$, então as derivadas parciais da aplicação $f(x, y)$ são dadas por:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x,$$

portanto, a Matriz Jacobiana de f é

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

As derivadas parciais da função $g(u, v)$ são dadas por:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = 2v,$$

logo, a Matriz Jacobiana de g é

$$Jg(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 2v \end{pmatrix}.$$

Pelo corolário acima, temos que

$$Jh(x, y) = Jg(f(x, y)) \cdot Jf(x, y).$$

Aplicando $Jg(u, v)$ em $f(x, y)$, obtemos:

$$Jg(f(x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & 2(xy) \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$Jh(x, y) = Jg(f(x, y)) \cdot Jf(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2(xy) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix},$$

onde

$$Jh(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2x + 2(xy) \cdot y & 1 \cdot 0 + 2(xy) \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}.$$

Portanto, a jacobiana de $h(x, y)$ é

$$Jh(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}.$$

Observação 2.13 A Regra da Cadeia também assegura que a composição de duas aplicações de classe C^k , $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ (U e V abertos de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente), onde $f(U) \subset V$, é de classe C^k . Veja (LIMA, 2015a, p. 258).

Definição 2.34 Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Dizemos que $f: U \rightarrow V$ é um difeomorfismo entre U e V quando é uma bijeção diferenciável, cuja inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ também é diferenciável.

Como a diferenciabilidade implica em continuidade, então todo difeomorfismo é também um homeomorfismo. A definição de difeomorfismo é ainda mais rígida, pois

exige que a inversa seja diferenciável.

Corolário 2.3 *Se $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em $U \subset \mathbb{R}^m$ e diferenciável em $a \in U$, admite uma inversa $g = f^{-1}: V \rightarrow \mathbb{R}^m$, diferenciável em $b = f(a) \in V$, então $f'(a): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo com inverso $g'(b): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Em particular, $m = n$.*

Como consequência, se $f: U \rightarrow V$ é um difeomorfismo entre os abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, então, para todo $x \in U$, a derivada $f'(x): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, reforçando que $m = n$ e $U, V \subset \mathbb{R}^m$ são abertos no mesmo espaço euclidiano.

Observação 2.14 *Lima (2015a, p. 259) enfatiza um teorema de Topologia, devido a L.E.J. Brouwer (“teorema da invariância da dimensão”), segundo o qual, se $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos homeomorfos, então $m = n$. Veja (DUGUNDJI, 1965, p. 359).*

Corolário 2.4 *Seja $f: U \rightarrow V$ uma bijeção de classe C^k ($k \geq 1$) entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$. Se sua inversa $f^{-1}: V \rightarrow U$ é diferenciável, então $f^{-1} \in C^k$. Dizemos, então, que f é um difeomorfismo de classe C^k .*

Quando o difeomorfismo f é de classe C^k , seu inverso também o é, pelo corolário acima. Evidentemente, a aplicação composta de dois difeomorfismos é ainda um difeomorfismo.

Observação 2.15 *Quando $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, faz sentido considerar, para cada ponto $x \in U$, o determinante $\det Jf(x)$ da Matriz Jacobiana $Jf(x)$, chamado determinante jacobiano de f em x . Para que f seja um difeomorfismo, é necessário que $\det Jf(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Esta afirmação entra em contraste com os teoremas da Álgebra Linear que buscam garantir a existência de matrizes inversas por meio de determinantes (veja (BOLDRINI et al., 1980, p. 76)). O Teorema da Aplicação Inversa, a ser provado posteriormente, fornecerá uma recíproca local a esse fato.*

Observação 2.16 *Para mais detalhes sobre as provas de todos os três corolários apresentados acima, veja (LIMA, 2015a, p. 257).*

Exemplo 2.14 *Considere o Exemplo 2.9. A derivada $f'(z): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ da aplicação $f(x, y) = e^x(\cos y, \sin y)$ é um isomorfismo em $U \subset \mathbb{R}^2$, já que o determinante da Matriz Jacobiana de f no ponto $z = (x, y) \in U$, dado por:*

$$\det Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Portanto, $Jf(x, y)$ é invertível para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e, conseqüentemente, a derivada $f'(z): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo em cada ponto $z \in U \subset \mathbb{R}^2$. Vemos, porém, que f não é injetiva: $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ e $y_2 = y_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo f não é um difeomorfismo.

2.2.3 Aplicações fortemente diferenciáveis

A diferenciabilidade forte é um conceito que se refere a uma aplicação sendo diferenciável em um sentido mais rigoroso do que a diferenciabilidade usual. Definindo informalmente, uma aplicação é considerada fortemente diferenciável em um ponto se possui derivadas direcionais em todas as direções e essas derivadas variam de maneira contínua. Isso implica que a aplicação não só é diferenciável, mas também que sua derivada é uma aplicação contínua no entorno desse ponto. Iniciaremos esse tópico considerando previamente alguns teoremas antes de definir formalmente a diferenciabilidade forte.

Lema 2.1 *Seja $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear invertível (ou seja, H é um isomorfismo). Existe $c > 0$ tal que $|H \cdot x| \geq c|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Seja $c = \frac{1}{|H^{-1}|}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} |x| &= |H^{-1}(Hx)| \leq |H^{-1}| |Hx| = \frac{1}{c} |Hx| \\ \Rightarrow |x| &\leq \frac{1}{c} |Hx|, \end{aligned}$$

donde $|Hx| \geq c|x|$. ■

Teorema 2.20 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e diferenciável no ponto $a \in U$. Se a transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva, então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que*

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \geq c|x - a|.$$

Demonstração: Primeiramente, observe que $f'(a)$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^m$ sobre sua imagem $E = f'(a) \cdot \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$. Então, existe $f'(a)^{-1} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ inverso de $f'(a)$. Pondo $2c = 1/|f'(a)^{-1}|$, teremos conforme o lema acima que $|f'(a) \cdot v| \geq 2c \cdot |v|$ para todo $v \in \mathbb{R}^m$. Posto isto, existe, pela diferenciabilidade de f no ponto a , um número $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x \in U, |x - a| < \delta &\Rightarrow f(x) - f(a) = f(a + (x - a)) - f(a) \\ &= f'(a) \cdot (x - a) + r(x - a), \end{aligned}$$

donde por definição, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} x \in U, \quad 0 < |x - a| < \delta &\Rightarrow \left| \frac{r(x - a)}{|x - a|} \right| < \varepsilon \\ \Rightarrow |r(x - a)| &< \varepsilon |x - a|. \end{aligned}$$

Como podemos tomar qualquer $\varepsilon > 0$, faremos $\varepsilon = c = \frac{1}{2|f'(a)^{-1}|}$, logo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f'(a) \cdot (x - a) + r(x - a)| \\ &= |f'(a) \cdot (x - a) - (-r(x - a))| \\ &\geq |f'(a) \cdot (x - a)| - |r(x - a)| \\ &\geq 2c \cdot |x - a| - c \cdot |x - a| = c \cdot |x - a|. \end{aligned}$$

Por fim, lembremos que diferenciabilidade implica em continuidade, e por conta disto, podemos tomar o mesmo δ definido acima tal que

$$x \in B(a; \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \geq c \cdot |x - a|.$$

■

Definição 2.35 Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, chama-se fortemente diferenciável no ponto $a \in U$ quando existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para $x, y \in U$ vale

$$f(x) - f(y) = T \cdot (x - y) + \rho_a(x, y)|x - y|, \text{ onde } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \rho_a(x, y) = 0.$$

Observação 2.17 Observe que, se tomarmos $y = a$, teremos que toda aplicação fortemente diferenciável no ponto a é diferenciável nesse ponto, com $T = f'(a)$. Assim a condição acima se torna

$$f(x) - f(y) = f'(a) \cdot (x - y) + \rho_a(x, y)|x - y|$$

onde, pela definição de limite, $\rho_a(x, y)$ cumpre a seguinte condição:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x, y \in U, 0 < |(x, y) - (a, a)| < \delta \Rightarrow |\rho_a(x, y)| < \varepsilon.$$

Em particular, se f é fortemente diferenciável em um ponto a , então f é contínua em todos os pontos de uma vizinhança em torno de a . Outra consequência da definição é o:

Teorema 2.21 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se f é fortemente diferenciável no ponto a então, para todo $\varepsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que, para $x, y \in B(a; \delta)$, f satisfaz à condição de Lipschitz.

Demonstração: Pela observação acima, tomando $y = a$ teremos

$$f(x) - f(y) = f'(a) \cdot (x - y) + \rho_a(x, y)|x - y|,$$

onde dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x, y \in B(a; \delta) \Rightarrow |\rho_a(x, y)| < \varepsilon$.

Logo,

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &= |f'(a) \cdot (x - y) + \rho_a(x, y)|x - y|| \\
 &\leq |f'(a) \cdot (x - y)| + |\rho_a(x, y)|x - y|| \\
 &\leq |f'(a)| \cdot |x - y| + \varepsilon|x - y| \\
 &= (|f'(a)| + \varepsilon)|x - y|,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$|f(x) - f(y)| \leq (|f'(a)| + \varepsilon)|x - y|.$$

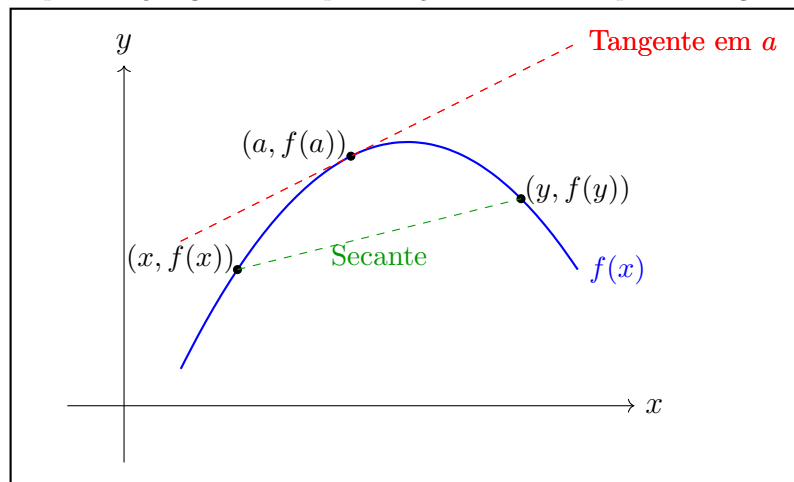
Como por definição $|f'(a)| > 0$, então $(|f'(a)| + \varepsilon) > 0$. Portanto, f satisfaz a condição de Lipschitz. ■

Exemplo 2.15 Para dar mais sentido à definição de diferenciabilidade forte, seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Se f é fortemente diferenciável no ponto $a \in I$, então, dados $x \neq y$ em I , a secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ tende para a tangente no ponto $(a, f(a))$ quando $x \rightarrow a$ e $y \rightarrow a$. Isso representa bem a ideia em que

$$f(x) - f(y) = f'(a) \cdot (x - y) + \rho_a(x, y)|x - y|, \text{ onde } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \rho_a(x, y) = 0.$$

Em comparação com a definição usual de derivada, o ponto a é mantido fixo: toma-se a secante ao gráfico passando pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ e faz-se $x \rightarrow a$.

Figura 3 – Representação gráfica da aproximação das secantes para a tangente em $(a, f(a))$



Fonte: Elaborada pelo autor (2024).

Teorema 2.22 Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é fortemente diferenciável no ponto a e $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

é injetiva então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que

$$x, y \in B(a; \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq c \cdot |x - y|.$$

Segue-se que f é um homeomorfismo da bola $B(a; \delta)$ sobre sua imagem em $\mathbb{R}^n$ e, em particular, que f é injetiva nessa bola.

Demonstração: Sendo $f'(a)$ injetiva, sabemos, pelo Teorema 2.20, que existe $c > 0$ tal que $|f'(a) \cdot v| \geq 2c|v|$ para todo $v \in \mathbb{R}^m$. Tomando $\varepsilon = c$, obtemos, pela Observação 2.17, um $\delta > 0$ tal que $x, y \in B(a; \delta) \Rightarrow f(x) - f(y) = f'(a) \cdot (x - y) + r_a(x, y)$, com $|r_a(x, y)| < c|x - y|$. Então

$$\begin{aligned} x, y \in B(a; \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| &\geq |f'(a) \cdot (x - y)| - |r_a(x, y)| \\ &\geq 2c \cdot |x - y| - c \cdot |x - y| = c|x - y|. \end{aligned}$$

Consequentemente, f aplica a bola $B(a; \delta)$ bijetivamente sobre sua imagem $Y = f(B(a; \delta))$, e portanto, existe a inversa $f^{-1} : Y \rightarrow B(a; \delta)$, que é uma bijeção. Agora, considere $w = f(x)$ e $z = f(y)$ pertencentes a Y . A aplicação inversa f^{-1} satisfaz:

$$|f^{-1}(w) - f^{-1}(z)| = |x - y|.$$

Pela desigualdade anterior, temos:

$$|w - z| = |f(x) - f(y)| \geq c|x - y|.$$

Logo,

$$|x - y| \leq \frac{1}{c}|w - z|,$$

ou seja,

$$|f^{-1}(w) - f^{-1}(z)| \leq \frac{1}{c}|w - z|.$$

Portanto, f^{-1} cumpre a condição de Lipschitz, e consequentemente, é contínua. Logo $f : B(a; \delta) \rightarrow Y$ é um homeomorfismo. ■

Observação 2.18 *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in U \subset \mathbb{R}^m$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ e $x, y \in U$. Podemos escrever as seguintes expressões para f :*

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= T \cdot (x - y) + r_a(x, y), \\ f(x) - f(a) &= T \cdot (x - a) + r_a(x), \\ f(y) - f(a) &= T \cdot (y - a) + r_a(y). \end{aligned}$$

Fazendo uma subtração das duas últimas igualdades, obtemos:

$$\begin{aligned}
 & f(x) - f(a) - (f(y) - f(a)) \\
 = & (T \cdot (x - a) + r_a(x)) - (T \cdot (y - a) + r_a(y)) \\
 = & T \cdot [(x - a) - (y - a)] + r_a(x) - r_a(y) \\
 = & T \cdot (x - y) + r_a(x) - r_a(y).
 \end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever:

$$f(x) - f(y) = T \cdot (x - y) + r_a(x) - r_a(y).$$

Comparando com a expressão inicial para $f(x) - f(y)$, concluímos que:

$$r_a(x, y) = r_a(x) - r_a(y).$$

Finalmente, observamos que, para $\varepsilon > 0$, vale a equivalência:

$$|r_a(x, y)| \leq \varepsilon |x - y| \Leftrightarrow |r_a(x) - r_a(y)| \leq \varepsilon |x - y|.$$

Dada a observação acima, podemos então enunciar o:

Teorema 2.23 *A aplicação $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é fortemente diferenciável no ponto $a \in U$ se, e somente se, é diferenciável nesse ponto e, para todo $\varepsilon > 0$, se pode achar $\delta > 0$ tal que o resto $r_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)$ satisfaz a condição de Lipschitz:*

$$|r_a(x) - r_a(y)| \leq \varepsilon |x - y| \text{ para } x, y \in B(a; \delta).$$

Demonstração: ($\Leftarrow$) Suponha que f seja diferenciável no ponto $a \in U$ e que, para todo $\varepsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que o resto $r_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)$ satisfaça a condição de Lipschitz

$$|r_a(x) - r_a(y)| \leq \varepsilon |x - y|,$$

para todo $x, y \in B(a; \delta)$. Pela observação acima, temos, para $x, y \in B(a; \delta)$, que:

$$f(x) - f(y) = T \cdot (x - y) + r_a(x, y) = T \cdot (x - a) + r_a(x) - r_a(y).$$

Da condição de Lipschitz sobre r_a , temos que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|r_a(x, y)| < \varepsilon |x - y|$ para $x, y \in B(a; \delta)$. Logo, tomando $\rho_a(x, y) = \frac{r_a(x) - r_a(y)}{|x - y|}$, obtemos $\rho_a(x, y) \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (a, a)$, satisfazendo a condição de diferenciabilidade forte de f no ponto a . Portanto, f é fortemente diferenciável em a .

($\Rightarrow$) Suponha agora que f seja fortemente diferenciável no ponto $a \in U$. Pela Observação 2.17, existe uma transformação linear $T = f'(a)$ tal que

$$f(x) - f(y) = f'(a) \cdot (x - y) + \rho_a(x, y)|x - y|,$$

onde, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $x, y \in U, B(a; \delta) \Rightarrow |\rho_a(x, y)| < \varepsilon$. Portanto, $|r_a(x) - r_a(y)| \leq \varepsilon|x - y|$ para todo $x, y \in B(a; \delta)$, o que mostra que o resto $r_a(x)$ satisfaz a condição de Lipschitz. ■

3 O TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA

Basearemos a demonstração do Teorema da Aplicação Inversa em três teoremas principais: o Teorema da Perturbação da Identidade (TPI) e seu corolário, versões não-diferenciáveis do TAI, conforme Lima (2015a, p. 279); o Lema da Diferenciabilidade do Homeomorfismo Inverso; e, como ferramenta auxiliar para o TPI, o Teorema do Ponto Fixo para Contrações, que será demonstrado por meio do método das aproximações sucessivas.

Definição 3.1 *Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é um difeomorfismo local quando, para cada $x \in U$, existe um subconjunto aberto V_x , com $x \in V_x \subset U$, tal que a restrição $f|_{V_x}$ é um difeomorfismo sobre um aberto $W_x \subset \mathbb{R}^m$.*

Neste caso, pelo Corolário 2.4, se $f \in C^k$, então $f|_{V_x} \in C^k$ e a aplicação $(f|_{V_x})^{-1}: W_x \rightarrow V_x$ também é de classe C^k .

Definição 3.2 *Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação definida em $X \subset \mathbb{R}^m$. Chamaremos f de λ -contração (ou simplesmente contração) quando existirem um $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < 1$, e uma norma em $\mathbb{R}^m$ tais que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y| \text{ para quaisquer } x, y \in X.$$

Não é difícil ver que toda contração satisfaz a condição de Lipschitz. Consequentemente, toda contração é uniformemente contínua.

Definição 3.3 *Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação definida em $X \subset \mathbb{R}^m$. Chamaremos de ponto fixo da aplicação f um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Teorema do Ponto Fixo para Contrações (Método das aproximações sucessivas.) *Sejam $F \subset \mathbb{R}^m$ um subconjunto fechado e $f: F \rightarrow F$ uma contração. Dado qualquer ponto $x_0 \in F$, a sequência $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{k+1} = f(x_k), \dots$ converge para um ponto $a \in F$, que é o único ponto fixo de f .*

Demonstração: Primeiramente, vamos construir o seguinte raciocínio: dado $x_0 \in F$ qualquer, tomemos os quatro primeiros elementos da sequência (x_k) : $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$ e $x_4 = f(x_3)$. Como f é contração, não é difícil ver que

$$|x_2 - x_1| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq \lambda |x_1 - x_0|, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Seguindo com o raciocínio, note que

$$|x_3 - x_2| = |f(x_2) - f(x_1)| \leq \lambda |x_2 - x_1| \leq \lambda^2 |x_1 - x_0|,$$

e conseqüentemente,

$$|x_4 - x_3| = |f(x_3) - f(x_2)| \leq \lambda|x_3 - x_2| \leq \lambda^2|x_2 - x_1| \leq \lambda^3|x_1 - x_0|.$$

Dando seguimento ao raciocínio para os próximos elementos da sequência, provaremos por indução que:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \lambda^k|x_1 - x_0|, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para $k = 1$ temos $|x_2 - x_1| = |f(x_1) - f(x_0)| \leq \lambda|x_1 - x_0|$. Vamos assumir que a proposição é verdadeira para $k = n$:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda^n|x_1 - x_0|.$$

Com base nessa suposição, mostraremos que a proposição também é verdadeira para $k = n + 1$, isto é:

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda^{n+1}|x_1 - x_0|.$$

Ora, se

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \lambda|x_{n+1} - x_n|,$$

e pela hipótese de indução $\lambda|x_{n+1} - x_n| \leq \lambda \cdot \lambda^n|x_1 - x_0|$, então a desigualdade é verdadeira para $k = n + 1$. Logo, por indução, a proposição é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, daremos início a outro raciocínio para mostrar a existência do ponto fixo: tomemos um $p \in \mathbb{N}$ arbitrário e $|x_{k+p} - x_k|$. É possível verificar pela desigualdade triangular que:

$$\begin{aligned} |x_{k+p} - x_k| &= |x_{k+p} - x_k + x_{k+1} - x_{k+1} + \dots + x_{k+p-1} - x_{k+p-1}| \\ &\leq |x_{k+1} - x_k| + |x_{k+p} - x_{k+1} + \dots + x_{k+p-1} - x_{k+p-1}| \\ &\leq |x_{k+1} - x_k| + |x_{k+2} - x_{k+1}| + |x_{k+p} - x_{k+2} + \dots + x_{k+p-1} - x_{k+p-1}| \\ &\leq \dots \leq |x_{k+1} - x_k| + |x_{k+2} - x_{k+1}| + \dots + |x_{k+p} - x_{k+p-1}| \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} |x_{k+i+1} - x_{k+i}|. \end{aligned}$$

Como cada $|x_{k+i+1} - x_{k+i}| \leq \lambda^{k+i}|x_1 - x_0|$, onde $0 \leq i \leq p - 1$, temos que:

$$\sum_{i=0}^{p-1} |x_{k+i+1} - x_{k+i}| \leq \left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{k+i} \right) |x_1 - x_0|.$$

À vista disso, reforçando que $0 \leq \lambda < 1$, podemos transformar o lado direito da desigual-

dade acima em uma série geométrica e concluir que:

$$\left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{k+i}\right) |x_1 - x_0| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^k \lambda^i\right) |x_1 - x_0| = \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|.$$

Portanto,

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |x_{k+i+1} - x_{k+i}| \leq \left(\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{k+i}\right) |x_1 - x_0| \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} |x_1 - x_0|.$$

E como a função norma é, por definição, maior ou igual a 0 e $0 \leq \lambda < 1$, segue-se que:

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{k+p} - x_k| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} |x_1 - x_0| = 0,$$

implicando em $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{k+p} - x_k| = 0$ seja qual for $p \in \mathbb{N}$. Logo, conforme a Observação 2.4, (x_k) é uma sequência de Cauchy em F . Como toda sequência de Cauchy em F é convergente, existe portanto $a = \lim x_k$ e $a \in F$ porque F é fechado. Como f é contínua, então, pelo Teorema 2.12

$$f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = a,$$

ou seja, a é um ponto fixo de f . Vamos agora mostrar que o ponto fixo é único. Se tivermos ainda $f(b) = b$, com $b \in F$, então:

$$|b - a| = |f(b) - f(a)| \leq \lambda |b - a|,$$

logo $(1 - \lambda)|b - a| \leq 0$. Como $1 - \lambda > 0$, isto dá $b = a$. Portanto, o ponto fixo de f é único. ■

Para o teorema acima, a importância de f estar definido em um conjunto fechado é crucial, pois é essa característica que garante que o limite da sequência construída a partir de x_0 pertença ao conjunto F . Como o conjunto F é fechado, ele contém todos os seus pontos aderentes, o que assegura que a sequência de aproximações sucessivas (x_k) converge para um ponto dentro de F , onde o ponto fixo deve existir e ser único. Sem essa condição de fechamento, o limite da sequência de Cauchy gerada pela contração poderia estar fora de F , impossibilitando a garantia da existência de um ponto fixo em F .

Lema 3.1 *Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma λ -contração. Se X contém a bola fechada $B[a; r]$, tal que $|f(a) - a| \leq (1 - \lambda)r$, então f admite um ponto fixo em $B[a; r]$.*

Demonstração: Para provar o lema, precisamos mostrar que $f(B[a; r]) \subset B[a; r]$. Consideremos um ponto arbitrário $x \in B[a; r]$. Por definição, temos que $|x - a| \leq r$. Aplicando

a desigualdade triangular, obtemos:

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - a|.$$

Como f é uma λ -contração, temos $|f(x) - f(a)| \leq \lambda|x - a|$. Logo:

$$|f(x) - a| \leq \lambda|x - a| + |f(a) - a|.$$

Substituindo a estimativa dada na hipótese, obtemos:

$$|f(x) - a| \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r.$$

Portanto, $x \in B[a; r] \Rightarrow f(x) \in B[a; r]$, o que prova que $f(B[a; r]) \subset B[a; r]$. Assim, conforme o teorema acima, pela aplicação sucessiva de f dentro da bola fechada $B[a; r]$, temos que f admite um ponto fixo em $B[a; r]$, o que conclui a demonstração. ■

Teorema da Perturbação da Identidade. *Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma contração definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um homeomorfismo de U sobre o conjunto aberto $f(U) \subset \mathbb{R}^m$. Além disso, se $U = \mathbb{R}^m$, tem-se $f(U) = \mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Primeiramente, como φ é contração, então

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \lambda|x - y|, 0 \leq \lambda < 1, \forall x, y \in U, \quad (3)$$

e portanto φ é contínua, logo, f também é contínua, por ser uma soma de aplicações contínuas. De (3), segue-se que:

$$-|\varphi(x) - \varphi(y)| \geq -\lambda|x - y|, 0 \leq \lambda < 1, \forall x, y \in U.$$

Então, para $x, y \in U$ quaisquer, temos:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x - y + \varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y - (-\varphi(x) + \varphi(y))| \\ &\geq |x - y| - |\varphi(x) - \varphi(y)| \\ &\geq |x - y| - \lambda|x - y| = (1 - \lambda)|x - y|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|f(x) - f(y)| \geq (1 - \lambda)|x - y|.$$

Como $1 - \lambda > 0$ e, por definição, $|x - y| \geq 0$, a desigualdade acima é uma forma de

garantir que se $f(x) = f(y)$ para $x, y \in U$, isso levaria à conclusão de que:

$$|f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow (1 - \lambda)|x - y| = 0 \Rightarrow |x - y| = 0 \Rightarrow x = y.$$

Portanto, resulta que f é uma aplicação injetiva e consequentemente uma bijeção de U sobre sua imagem $f(U)$. Logo, existe a inversa $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$. Agora, sejam $w = f(x)$ e $z = f(y)$. A aplicação inversa f^{-1} satisfaz:

$$|f^{-1}(w) - f^{-1}(z)| = |x - y|.$$

Pela desigualdade anterior, temos:

$$|w - z| = |f(x) - f(y)| \geq (1 - \lambda)|x - y|.$$

Logo,

$$|x - y| \leq \frac{1}{1 - \lambda}|w - z|,$$

ou seja,

$$|f^{-1}(w) - f^{-1}(z)| \leq \frac{1}{1 - \lambda}|w - z|.$$

Isso implica que f^{-1} satisfaz a condição de Lipschitz, com constante $c = \frac{1}{1 - \lambda} > 0$, ou seja, f^{-1} é uniformemente contínua em $f(U)$. Em particular, f é um homeomorfismo de U sobre $f(U)$. Para provar que $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ é aberto, seja $b \in f(U)$. Temos $b = f(a) = a + \varphi(a)$ para um certo $a \in U$. Devemos mostrar que b é um ponto interior do conjunto $f(U)$, ou seja, que b é centro de uma bola aberta contida em $f(U)$:

$$\exists \delta > 0; |y - b| < \delta \Rightarrow y \in f(U).$$

Em outras palavras, que para todo ponto y suficientemente próximo de b , a equação $y = f(x)$ ou, o que é o mesmo, $y = x + \varphi(x)$ deve possuir uma solução $x \in U$. No contexto da resolução de equações por meio de pontos fixos, tomemos um $y \in f(U)$ qualquer como constante. Seja $r > 0$ tal que $B[a; r] \subset U$, considere a aplicação $\xi = \xi_y: B[a; r] \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada por

$$\xi(x) = y - \varphi(x).$$

Então $\xi(x) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Como y é constante, teremos:

$$|\xi(x) - \xi(z)| = |y - \varphi(x) - y + \varphi(z)| = |\varphi(z) - \varphi(x)| \leq \lambda|z - x|, \forall x, z \in B[a; r],$$

ou seja, ξ é uma contração. Lembre-se que, pelo lema acima, existe um ponto fixo $x \in B[a; r]$ para ξ desde que $|\xi(a) - a| \leq (1 - \lambda)r$. Como

$$|\xi(a) - a| = |y - \varphi(a) - a| = |y - b|,$$

vemos que $\xi = \xi_y$ tem um ponto fixo em $B[a; r]$, (ou seja, existe $x \in B[a; r]$ tal que $f(x) = y$) contanto que tomemos $|y - b| \leq (1 - \lambda)r$, ou seja, contanto que tomemos $y \in B[b; (1 - \lambda)r]$. Isto significa que, fazendo $\delta = s = (1 - \lambda)r$, temos $B(b; s) \subset f(B[a; r]) \subset f(U)$, logo $b \in \text{int} f(U)$ e, como $b \in f(U)$ é arbitrário, o conjunto $f(U)$ é aberto. Finalmente, se $U = \mathbb{R}^m$ então, para todo $r > 0$ temos $B[a; r] \subset U$. Para concluir que $f(a)$ é ponto interior de $f(U)$, ou seja, que para todo y suficientemente próximo de $f(a)$, a equação $y = f(x)$ possui uma solução $x \in U$, basta seguir o mesmo raciocínio feito acima e tomar $B[f(a); (1 - \lambda)r] \subset f(U)$. Como para todo $r > 0$ temos $B[a; r] \subset U$, se tomarmos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $r_k = \frac{k}{1 - \lambda}$, veremos então que $B[f(a); k] \subset f(U)$, donde $\mathbb{R}^m = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B[f(a); k] \subset f(U)$, ou seja, $f(U) = \mathbb{R}^m$. ■

Corolário 3.1 (Perturbação de um isomorfismo). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação da forma $f(x) = T \cdot x + \varphi(x)$, onde $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear invertível e $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaz $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \lambda|x - y|$, com $\lambda \cdot |T^{-1}| < 1$. Então f é um homeomorfismo de U sobre o conjunto aberto $f(U) \subset \mathbb{R}^m$. Se $U = \mathbb{R}^m$, tem-se $f(U) = \mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Inicialmente iremos definir a aplicação $\psi = T^{-1} \circ \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, que cumpre a seguinte condição:

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(y)| &= |T^{-1}[\varphi(x)] - T^{-1}[\varphi(y)]| \\ &= |T^{-1}[\varphi(x) - \varphi(y)]| \\ &\leq |T^{-1}| \cdot |\varphi(x) - \varphi(y)| \\ &\leq |T^{-1}| \cdot \lambda|x - y|. \end{aligned}$$

Como $|T^{-1}| \cdot \lambda < 1$, vemos que $\psi = T^{-1} \circ \varphi$ é uma contração. Sendo $(T^{-1} \circ f)(x) = x + \psi(x)$, segue-se do teorema acima que $T^{-1} \circ f$ é um homeomorfismo de U sobre o aberto $T^{-1} \cdot f(U)$. Como a composta de dois homeomorfismos é um homeomorfismo, podemos concluir que f também é um homeomorfismo de U sobre o aberto $f(U)$. Se $U = \mathbb{R}^m$ então, pelo teorema, $(T^{-1} \circ f)(U) = \mathbb{R}^m$, donde $f(U) = T \cdot \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$. ■

Sobre o teorema acima e seu corolário: a parte mais importante do que eles afirmam é que a imagem $f(U)$ é um conjunto aberto. O lema abaixo oferece a diferenciabilidade da inversa em um ponto, o Teorema da Aplicação Inversa irá ofertar garantias de uma imagem aberta para as aplicações cuja estrutura está dentro das hipóteses do corolário acima.

Lema 3.2 (Diferenciabilidade do homeomorfismo inverso). *Seja $f : U \rightarrow V$ um homeomorfismo entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$. Se f é diferenciável no ponto $a \in U$ e a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo então o homeomorfismo inverso $f^{-1} : V \rightarrow U$ é diferenciável no ponto $b = f(a)$. Se f é fortemente diferenciável no ponto a então f^{-1} é fortemente diferenciável no ponto b .*

Demonstração: Tome $g = f^{-1}$. Como o único candidato possível para derivada de g no ponto b é $f'(a)^{-1}$, escrevamos

$$g(b+w) - g(b) = f'(a)^{-1} \cdot w + s(w) \quad (4)$$

e procuremos mostrar que

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{s(w)}{|w|} = 0.$$

Ponhamos $v = g(b+w) - g(b)$. Então $f(a+v) - f(a) = f[g(b) + g(b+w) - g(b)] - b = f(g(b+w)) - b = b + w - b = w$. Como f e g são contínuas, $w \rightarrow 0$ se, e somente se, $v \rightarrow 0$. A diferenciabilidade de f no ponto a fornece

$$f(a+v) - f(a) = f'(a) \cdot v + r(v), \quad (5)$$

onde

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Na igualdade (4), substituímos o primeiro membro por v e, no segundo, substituímos $w = f(a+v) - f(a)$ pelo segundo membro de (5). Resulta:

$$v = v + f'(a)^{-1} \cdot r(v) + s(w),$$

donde

$$s(w) = -f'(a)^{-1} \cdot r(v) \quad \text{e} \quad \frac{s(w)}{|w|} = -f'(a)^{-1} \cdot \frac{r(v)}{|v|} \cdot \frac{|v|}{|w|}.$$

Quando $w \rightarrow 0$, tem-se também $v \rightarrow 0$, como vimos, logo

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Além disso, pelo Teorema 2.20, o quociente $\frac{|v|}{|w|} = \frac{|v|}{|f(a+v) - f(a)|}$ é limitado nas proximidades de $v = 0$. Com efeito, como $f'(a)$ é um isomorfismo e consequentemente injetivo, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $|(a+v)-a| = |v| < \delta \Rightarrow |f(a+v)-f(a)| \geq c|(a+v)-a| = c|v|$

e

$$0 \leq \frac{|v|}{|f(a+v) - f(a)|} \leq \frac{|v|}{c|v|} = \frac{1}{c}.$$

Como a transformação linear $f'(a)^{-1}$ é contínua e se anula na origem, porque toda transformação linear leva vetor nulo no vetor nulo, segue-se da expressão

$$\frac{s(w)}{|w|} = -f'(a)^{-1} \cdot \frac{r(v)}{|v|} \cdot \frac{|v|}{|w|}$$

que

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{s(w)}{|w|} = 0,$$

donde $g = f^{-1}$ é diferenciável no ponto $b = f(a)$. Quanto à diferenciabilidade forte, se pusermos $v = g(b+w) - g(b)$ e $u = g(b+z) - g(b)$ resultará, como acima, que

$$s(w) - s(z) = f'(a)^{-1} \cdot [r(u) - r(v)].$$

Como toda transformação linear é Lipschitziana, a diferenciabilidade forte de g no ponto b resulta imediatamente da diferenciabilidade forte de f no ponto a , pelos Teoremas 2.22 e 2.23. ■

Teorema da Aplicação Inversa. *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, fortemente diferenciável no ponto $a \in U$ e $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um isomorfismo. (Equivalentemente: o determinante jacobiano $\det Jf(a) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$ é diferente de zero.) Então f é um homeomorfismo de um aberto V contendo a sobre um aberto W contendo $f(a)$. O homeomorfismo inverso $f^{-1} : W \rightarrow V$ é fortemente diferenciável no ponto $f(a)$ e sua derivada nesse ponto é $[f'(a)]^{-1}$. Se $f \in C^k$ ($k \geq 1$) então V pode ser tomado de modo que f seja um difeomorfismo de V sobre W . [Pelo Corolário 2.4 da Regra da Cadeia, tem-se ainda $f^{-1} \in C^k$.]*

Demonstração: O trabalho está essencialmente feito. Resta apenas juntar as peças. Sabemos que se f é fortemente diferenciável, então, pela Observação 2.17, f também é diferenciável no ponto a , ou seja, para $x, y \in U$ vale

$$f(x) - f(y) = f'(a) \cdot (x - y) + \rho_a(x, y)|x - y|,$$

onde dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se achar $\delta > 0$ tal que $x, y \in B(a; \delta) \Rightarrow |\rho_a(x, y)| < \varepsilon$. Segue-se também do Teorema 2.21 que f satisfaz a condição de Lipschitz: dado $\varepsilon > 0$, e

tomando o mesmo $\delta > 0$ acima, temos que

$$x, y \in B(a; \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq (|f'(a)| + \varepsilon)|x - y|.$$

Seguindo a Observação 2.18, e escrevendo

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + r_a(x),$$

a diferenciabilidade forte também assegura, via Teorema 2.23, que para todo $\varepsilon > 0$, e também tomando o mesmo $\delta > 0$, o resto $r_a(x) = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)$ satisfaz a condição de Lipschitz $|r_a(x) - r_a(y)| \leq \varepsilon|x - y|$ para $x, y \in B(a; \delta)$. Com isto, podemos tornar $r_a(x)$ em uma contração tomando $0 < \varepsilon < 1$. Vamos simplificar a notação: suporemos $a = f(a) = 0$ (o que não restringe a generalidade). A partir disso, observe que

$$\begin{aligned} r_a(x) &= f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a) \\ &\Rightarrow r_a(x) = f(x) - f'(a) \cdot x, \end{aligned}$$

Ou seja, podemos tomar $f(x) = f'(a) \cdot x + r_a(x)$, que é uma perturbação do isomorfismo. E para garantir que para todo $x, y \in B(a; \delta)$ tenhamos $|r_a(x) - r_a(y)| \leq \varepsilon \cdot |x - y|$, com $\varepsilon \cdot |f'(a)^{-1}| < 1$, basta fazer $\varepsilon \rightarrow 0$ (por valores à direita) e lembrar que toda transformação linear satisfaz a condição de Lipschitz (veja a Observação 2.5), que é o caso de $f'(a)^{-1}$. Portanto, f é, em $B(a; \delta)$, uma perturbação do isomorfismo $f'(a)$. Segue-se que f é um homeomorfismo de V sobre o aberto $W = f(V)$ e, pelo Lema acima, a inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$ é fortemente diferenciável no ponto $f(a)$. No caso particular de $f \in C^k$ ($k \geq 1$), a aplicação derivada $f' : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ é contínua. Como o conjunto $GL(\mathbb{R}^m)$ dos isomorfismos lineares de $\mathbb{R}^m$ é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$, conforme o Corolário 2.1, e $f'(a) \in GL(\mathbb{R}^m)$, a bola V de centro a pode ser tomada, se necessário, tão pequena que $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja ainda isomorfismo, para todo $x \in V$. Pelo lema da diferenciabilidade do homeomorfismo inverso, $f^{-1} : W \rightarrow V$ é diferenciável em todos os pontos de W , logo f é um difeomorfismo. ■

Corolário 3.2 *Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, (onde $1 \leq k \leq \infty$) é um difeomorfismo local se, e somente se, para todo $x \in U$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo (isto é, $\det Jf(x) \neq 0$).*

Na Observação 2.15, havíamos dito que daríamos a recíproca do fato mencionado: eis aqui a continuação da recíproca com o Corolário 3.2 acima. Ali, indicávamos que, para que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja um difeomorfismo, é necessário que o determinante da matriz jacobiana $Jf(x)$ seja diferente de zero em cada ponto $x \in U$, uma condição que reflete a garantia, por meio do Teorema da Aplicação Inversa, de que o inverso local existe e é diferenciável, sempre que f for diferenciável e seu jacobiano for

invertível no ponto considerado. Dessa forma, o TAI e seu corolário articulam uma caracterização completa para que uma aplicação seja um difeomorfismo local, preenchendo, assim, a recíproca da afirmação dada na observação.

Exemplo 3.1 Considere a aplicação $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$F(x, y) = (x^2 + y, x - y^2).$$

Queremos verificar a aplicabilidade do Teorema da Aplicação Inversa em torno do ponto $(1, 1)$. A aplicação F é composta por polinômios, que são diferenciáveis em todo $\mathbb{R}^2$. Logo, F é diferenciável. A Matriz Jacobiana de F é dada por

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x - y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x - y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}.$$

No ponto $(1, 1)$, o Jacobiano é

$$JF(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

e seu determinante fica

$$\det(JF(1, 1)) = -4 - 1 = -5 \neq 0.$$

Como o determinante Jacobiano é diferente de zero em $(1, 1)$, a Matriz Jacobiana é invertível nesse ponto. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ de $(1, 1)$ e uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^2$ de $F(1, 1) = (2, 0)$, tal que:

$$F: V \rightarrow W$$

é um difeomorfismo. Logo, F é localmente invertível em $(1, 1)$, e sua inversa F^{-1} é diferenciável em W .

Exemplo 3.2 Considere a aplicação $f(x, y) = e^x(\cos y, \sin y)$ dada no Exemplo 2.9. Vamos mostrar que esta aplicação é um difeomorfismo local de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Inicialmente, observe que f é de classe C^∞ , uma vez que as funções componentes e^x , $\cos y$ e $\sin y$ possuem derivadas contínuas de todas as ordens. Note também que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, já que $e^0 = 1$ e $\cos 0 = 1$. O passo seguinte consiste em verificar que a derivada de f , representada pela Matriz Jacobiana $Jf(x, y)$, é invertível em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Explicitamente, temos:

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Calculamos, pelo Exemplo 2.14, o determinante de $Jf(x, y)$, dado por $\det Jf(x, y) = e^{2x}$. Como $e^{2x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que $\det Jf(x, y) \neq 0$ para todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, a matriz $Jf(x, y)$ é invertível em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, a invertibilidade de $Jf(x, y)$ implica que, para cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, contendo (x, y) , tal que $f|_V$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Além disso, a inversa local $(f|_V)^{-1}$ é diferenciável e, portanto, de classe C^∞ , uma vez que f é de classe C^∞ . Concluimos, portanto, que $f(x, y) = e^x(\cos y, \sin y)$ satisfaz as condições do Teorema da Aplicação Inversa, sendo um difeomorfismo local de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

4 CONCLUSÃO

Nesta monografia, realizamos uma exploração detalhada do Teorema da Aplicação Inversa, um resultado fundamental em Análise Matemática que ocupa um lugar central nos estudos sobre o comportamento local de inversas de aplicações diferenciáveis. A construção deste trabalho foi conduzido por um caminho que começou desde as noções básicas de topologia até culminar em uma prova rigorosa do teorema, revelando não apenas sua validade, mas também a complexidade de sua estrutura e as condições necessárias para sua aplicação, as quais exigiram previamente três importantes teoremas da Análise.

O primeiro passo do nosso trabalho foi a introdução dos conceitos fundamentais de topologia no espaço euclidiano. Nesta etapa, analisamos os conjuntos abertos e fechados, continuidade e outras propriedades topológicas essenciais para a compreensão das aplicações em $\mathbb{R}^n$. Introduzimos também o conceito de homeomorfismo, que desempenhou um papel fundamental na formulação do Teorema da Aplicação Inversa. Esta etapa inicial foi vital para situar as propriedades das aplicações diferenciáveis em um arcabouço teórico coerente, possibilitando uma compreensão mais profunda dos conceitos envolvidos.

A partir dessa base, nos aprofundamos na análise das aplicações diferenciáveis, onde a Matriz Jacobiana se destacou como uma ferramenta central para caracterizar o comportamento local das aplicações. Analisamos também a importância de aplicações definidas em conjuntos abertos como condição necessária para a diferenciabilidade. Além disso, os corolários da Regra da Cadeia ofereceram passos essenciais para a discussão do conceito de difeomorfismo, relacionando-o à inversibilidade das aplicações diferenciáveis e ao comportamento local da Matriz Jacobiana. Este estudo revelou que a diferenciabilidade não é apenas uma questão de Álgebra Linear, mas uma área rica, que exige uma compreensão integrada de Topologia, Geometria e Análise.

A introdução do conceito de diferenciabilidade forte foi um marco crucial. Este conceito permitiu criar condições em que as aplicações apresentem um comportamento local bem controlado em regiões abertas do domínio, condição necessária para formular o TAI. Compreender a diferenciabilidade forte foi essencial para construir uma conexão sólida entre as condições requeridas pelo teorema e as propriedades analíticas das aplicações.

Por fim, ao apresentar e demonstrar o TAI, reunimos todos esses elementos em uma argumentação coerente e robusta. A prova consolidou os conceitos desenvolvidos ao longo da monografia, demonstrando a interdependência entre Topologia, Análise e Geometria no estudo das aplicações diferenciáveis.

Como conclusão, esta monografia não apenas estabelece uma prova completa do TAI, mas também ilumina a inter-relação entre conceitos fundamentais da Análise Matemática.

Esperamos que este trabalho inspire um maior interesse e investigação em

torno do Teorema da Aplicação Inversa e seus desdobramentos, fortalecendo a conexão entre Análise, Topologia e suas diversas aplicações na Matemática contemporânea.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

BUENO, Hamilton Prado. **Álgebra Linear Um Segundo Curso**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

CASTRO, Adriano da Silva; SANTOS, Gelson Conceição G. dos. **O Teorema da Aplicação Inversa**. XI Bienal de Matemática. Pará: SBM, 2024. Disponível em: https://sbm.org.br/xi-bienal/wp-content/uploads/sites/31/2024/07/XI_BM_POSTER_Adriano_Castro.pdf#:~:text=Em%20suma%2C%20o%20teorema%20afirma%20que%20dada%20uma,ponto%2C%20%E2%99%A2%20invert%C3%ADvel%20e%20sua%20in%20%C3%A9%20diferen-ci%C3%A1vel. Acesso em: 14 nov. 2024.

DUGUNDJI, James. **Topology**. Boston: Allyn and Bacon, 1965.

GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. **Elementos de álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

LIMA, Elon Lages. **Elementos de topologia geral**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 2. Funções de n variáveis**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol. 2**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015a.

LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015b.

LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1. Funções de uma variável**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016a.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016b.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol. 1**. 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022.