



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA  
AFRO-BRASILEIRA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAISSE BARBOSA MATOS

UM ESTUDO DAS CÔNICAS E DE SUAS EQUAÇÕES

REDENÇÃO

2024

RAISSE BARBOSA MATOS

UM ESTUDO DAS CÔNICAS E DE SUAS EQUAÇÕES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduada em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO

2024

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira  
Sistema de Bibliotecas da UNILAB  
Catalogação de Publicação na Fonte.

---

Matos, Raisse Barbosa.

M433e

Um estudo das cônicas e de suas equações / Raisse Barbosa Matos.  
- Redenção, 2024.  
56f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E  
Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia  
Afro-Brasileira, Redenção, 2024.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva.

1. Matemática - Cônicas. 2. Equações quadráticas. 3.  
Aplicações. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 510

---

RAISSE BARBOSA MATOS

UM ESTUDO DAS CÔNICAS E DE SUAS EQUAÇÕES

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 26 / 11 / 2024.

BANCA EXAMINADORA

*Josélan Perote da Silva*

**Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

*Amanda Angélica Feltrin Nunes*

**Prof.<sup>a</sup> Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

*Paulo Ricardo Gonçalves Pereira*

**Prof. Me. Paulo Ricardo Gonçalves Pereira.**

Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC)

Dedico este trabalho a toda família e amigo  
que me acompanharam e apoiaram durante  
toda essa trajetória.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me conceder a oportunidade e a determinação de chegar até o fim de mais um ciclo.

Agradeço também a minha família e amigos que me acompanharam e deram forças para seguir em frente.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, pela excelente orientação e paciência durante toda a realização desse trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof.<sup>ª</sup> Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes e Prof. Me. Paulo Ricardo Gonçalves Pereira pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores que compõem o curso de Licenciatura em Matemática da UNILAB, que foram peças fundamentais para a minha formação.

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens".(Descartes)

## RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo estudar as equações quadráticas de duas variáveis que descrevem as cônicas, com o intuito de mostrar que qualquer equação quadrática irá resultar em uma cônica, seja ela degenerada ou não. As cônicas são curvas obtidas por meio da interseção de um cone com um plano. Se o plano estiver paralelo ao eixo do cone, então a curva obtida será uma hipérbole ou uma par de retas concorrentes, agora se o plano for perpendicular a geratriz teremos uma circunferência ou um ponto, no caso em que o plano é paralelo a geratriz encontramos uma parábola ou então um par de retas paralelas e no caso em que o plano for obliquo não paralelo a geratriz encontramos uma elipse. Tal demonstração foi realizada utilizando esferas inscritas no cone circular reto e com isso podemos então chegar nas definições de cônicas e as suas equações reduzidas.

**Palavras-chave:** Cônicas. Equações quadráticas. Aplicações.

## ABSTRACT

The present work aimed to study the quadratic equations of two variables that describe conics, with the aim of showing that any quadratic adventure will result in a conic, whether degenerate or not. Conics are curves obtained through the intersection of a cone with a plane. If the plane is parallel to the axis of the cone, then the curve obtained will be a hyperbola or a pair of competing straight lines, now if the plane is perpendicular to the generatrix it will have a circumference or a point, in the case where the plane is parallel to the generatrix found a parabola or a pair of parallel lines and in the case where the oblique plane is not parallel the generatrix meets an ellipse. This demonstration was carried out using spheres inscribed in a right circular cone and with this we can then arrive at the definitions of conics and their reduced equations.

**Keywords:** Conics. Quadratic equations. Applications.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Apolônio . . . . .	12
Figura 2 – Menecmo . . . . .	13
Figura 3 – Distância entre dois pontos . . . . .	15
Figura 4 – Soma de vetores . . . . .	16
Figura 5 – Ângulo entre dois vetores . . . . .	17
Figura 6 – Reta . . . . .	17
Figura 7 – Plano . . . . .	19
Figura 8 – Elipse gerada pela interseção do plano com o cone . . . . .	33
Figura 9 – Hipérbole gerada pela interseção do plano com o cone . . . . .	35
Figura 10 – Parábola gerada pela interseção do plano com o cone . . . . .	37
Figura 11 – Elipse . . . . .	39
Figura 12 – Hipérbole . . . . .	40
Figura 13 – Parábola . . . . .	40
Figura 14 – Translação de eixos . . . . .	43
Figura 15 – Rotação de eixos . . . . .	44
Figura 16 – Coordenadas polares . . . . .	45
Figura 17 – Lançamento vertical . . . . .	50
Figura 18 – Ponte Hercílio Luz . . . . .	51
Figura 19 – Lei das Órbitas . . . . .	51
Figura 20 – Lei das Áreas . . . . .	52
Figura 21 – Coliseu de Roma . . . . .	52
Figura 22 – Telescópio de Rádio frequência . . . . .	52

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	11
<b>2</b>	<b>CONTEXTO HISTÓRICO</b>	12
<b>3</b>	<b>PRELIMINARES</b>	15
3.1	DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS	15
3.2	VETORES	16
3.3	RETA	17
3.4	PLANO	18
<b>3.4.1</b>	<b>Equações paramétricas e vetoriais do plano</b>	19
3.5	MATRIZES	20
<b>3.5.1</b>	<b>Tipos de matrizes</b>	20
<b>3.5.2</b>	<b>Operações com matrizes</b>	22
3.5.2.1	<i>Adição de matrizes</i>	22
3.5.2.2	<i>Multiplicação por escalar</i>	22
3.5.2.3	<i>Multiplicação de matrizes</i>	23
3.6	ESPAÇOS VETORIAIS	23
3.7	APLICAÇÕES LINEARES	25
3.8	AUTOVALORES E AUTOVATORES	26
3.9	<b>DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES</b>	27
<b>4</b>	<b>INTERSEÇÃO DO PLANO COM O CONE</b>	33
4.1	ELIPSE	33
4.2	HIPÉRBOLE	34
4.3	PARÁBOLA	36
<b>5</b>	<b>CÔNICAS</b>	39
5.1	EQUAÇÃO REDUZIDA	40
5.2	MUDANÇA DE COORDENADAS	42
5.3	CÔNICAS EM COORDENADAS POLARES	45
5.4	EQUAÇÃO GERAL	46
<b>5.4.1</b>	<b>Eliminando o termo misto</b>	46
<b>6</b>	<b>APLICAÇÕES</b>	50
6.1	PARÁBOLA	50
6.2	ELIPSE	51
6.3	HIPÉRBOLE	52
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	54
	<b>REFERÊNCIAS</b>	55

## 1 INTRODUÇÃO

A história das cônicas surgiu na Grécia com o propósito de solucionar um problema de duplicação de cubo, o intuito era determinar a aresta de um cubo de tal forma que este tivesse o dobro do volume de um outro cubo. A resolução de tal problema se deu por Menaecmo, que utilizou uma família de curvas através do corte de cones circulares retos por um plano perpendicular as suas geratrizes. Apolônio estudou tais curvas de modo mais aprofundado e também explorou suas aplicações em alguns problemas onde atualmente vem sendo fundamental não só para a geometria analítica, mas também para outras áreas como engenharia e astronomia.

A geometria das cônicas é um dos ramos fundamentais da geometria analítica e tem se mostrado essencial para o entendimento de diversas áreas da matemática, física, engenharia e até mesmo da astronomia. Essas figuras, além de possuírem características geométricas fascinantes, possuem aplicações práticas em muitos campos, como no estudo das órbitas planetárias, na construção de espelhos parabólicos e no *design* de arcos e cúpulas na arquitetura.

Este trabalho tem como objetivo explorar de forma aprofundada as cônicas, abordando suas definições, propriedades e equações, bem como de algumas aplicações na prática. Através de uma análise detalhada das equações que as representam, buscamos mostrar que, dependendo dos seus coeficientes podemos gerar um ponto, um par de retas paralelas, um feixe de retas concorrentes, uma elipse, uma hipérbole ou então uma parábola.

Quanto ao que foi produzido neste trabalho, o capítulo 2 retrata um pouco do contexto histórico das cônicas desde a resolução de Menaecmo até o estudo de Apolônio, sua disseminação no período medieval, na renascença e contribuições para o desenvolvimento da matemática nos séculos XVII, XVIII, XIX e XX.

O capítulo seguinte foi destinado a desenvolver a fundamentação teórica da geometria analítica iniciando com a definição de distância entre dois pontos, vetores, reta, plano e o cálculo das distâncias e discutimos também assuntos da álgebra linear como matrizes, espaços vetoriais, subespaços vetoriais, combinação linear, base de um espaço vetorial, autovalores e autovetores.

No capítulo 4 é apresentada a definição formal das cônicas bem como a demonstração de suas equações, equação reduzida, sua mudança de coordenadas, translação e rotação dos eixos, equação em coordenadas polares e a redução da sua equação geral por meio da álgebra linear.

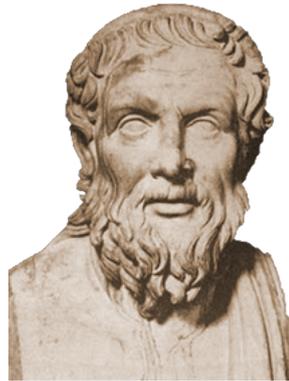
O capítulo 5 aborda as interseções dos planos com o cone circular reto, suas equações são demonstradas por meio da distância entre pontos. E no capítulo 6 é relatado algumas de suas aplicações.

## 2 CONTEXTO HISTÓRICO

As cônicas, curvas obtidas por meio da interseção de um plano com o cone, têm uma história rica que remonta à Antiguidade.

O estudo dessas curvas começou com os matemáticos da Grécia antiga, em especial com Apolônio de Pérgamo, que, no século III a.C., sistematizou o conhecimento sobre elipses, hipérboles e parábolas em sua obra "Cônicas", onde o autor apresenta um tratamento sistemático e rigoroso das três seções cônicas: elipse, hipérbole e parábola. Ele introduziu termos e conceitos que ainda são usados hoje, influenciando o desenvolvimento da matemática e da geometria. Apolônio também explorou aplicações das cônicas em problemas práticos, como a construção de sólidos. Seu trabalho teve um impacto duradouro, sendo fundamental para a geometria analítica e a astronomia.

**Figura 1** – Apolônio



Fonte: Universo da Física (2004).

A influência de Apolônio durou séculos e seus trabalhos foram objetos de estudos de grandes matemáticos, como Arquimedes e Euclides, que contribuíram ao fornecer fundamentos para a geometria que seria a base para os estudos das cônicas.

Durante o período medieval, os estudiosos islâmicos, como Al-Khwarizmi e Ibn al-Haytham, contribuíram para a disseminação do conhecimento das cônicas, traduzindo e comentando as obras de Apolônio, expandindo os textos gregos. Esses matemáticos também começaram a aplicar as cônicas em áreas como astronomia, desenvolvendo modelos mais precisos dos movimentos planetários.

Na Renascença, com o renascimento do interesse pela matemática clássica, figuras como René Descartes e Pierre de Fermat integraram as cônicas à geometria analítica. Descartes, por exemplo, associou as cônicas a equações algébricas, permitindo uma nova abordagem na análise dessas curvas.

No século XVII, a aplicação das cônicas se expandiu na física. Johannes Kepler, com suas leis do movimento planetário, utilizou a elipse para descrever as órbitas dos planetas, gerando, então, uma das suas mais célebres leis, fundamentando a astronomia moderna. Além disso, na ótica, as propriedades das parábolas e hipérboles foram

exploradas por cientistas como Isaac Newton e outros.

No século XIX e XX, as cônicas se tornaram cruciais em várias disciplinas, como engenharia, arquitetura e até mesmo em áreas emergentes da física, como a relatividade. Hoje, são fundamentais em diversas aplicações, incluindo o *design* de telescópios, satélites e estruturas arquitetônicas. Assim, as cônicas não são apenas uma curiosidade matemática, mas um elemento essencial que interliga várias disciplinas ao longo da história.

A tradição atribui a Menaecmo – irmão de Dinostratus e tutor de Alexandre Magno – o descobrimento dessas curvas que segundo Boyer (1996) é a contribuição mais espetacular da época para o desenvolvimento da geometria analítica. O termo, seções cônicas, reflete a forma com que Menaecmo resolveu o problema deliano mediante uma família de curvas descortinadas através do corte de três cones circulares retos por um plano perpendicular as suas geratrizes. Conforme a natureza do ângulo do vértice desses três cones, Menaecmo determinou as três curvas distintas que são conhecidas hoje como tríades menaecmianas.

**Figura 2** – Menecmo



Fonte: Barquero (2015)

Daí como auxílio da teoria das proporções ele conseguiu deduzir que o ponto  $(x, y)$  que satisfaz o problema deliano – transformado pela análise hipocrática em problema das médias. Utilizamos uma interpretação anacrônica nos moldes da geometria analítica atual para ilustrar uma das duas possíveis soluções que Menaecmo forneceu para o problema, mas em todas elas, sabemos que ele tinha utilizado os conhecimentos geométricos disponíveis na academia platônica para definir as propriedades das suas curvas e por esse motivo “o caminho foi dificultado pela falta de ideias algébricas e simbolismo”, o que engrandece ainda mais a sua descoberta dado que “um extraordinário grau de originalidade seria necessário para Menaecmo conceber o equivalente de tudo isso em forma geométrica (...)” Boyer (1996). Os vestígios do seu trabalho agora perdidos mostram que realmente esse foi o seu modo de atuação, a prova disso é que Boyer (1996) nos informa que alguns historiadores como Zeithen e Colidge afirmavam que a descoberta da geometria analítica

se deve a Menaecmo já que a essência desse ramo da matemática é “o estudo de lugares por meio de equações, e que isto era conhecido pelos gregos e era à base de seus estudos das seções cônicas.

### 3 PRELIMINARES

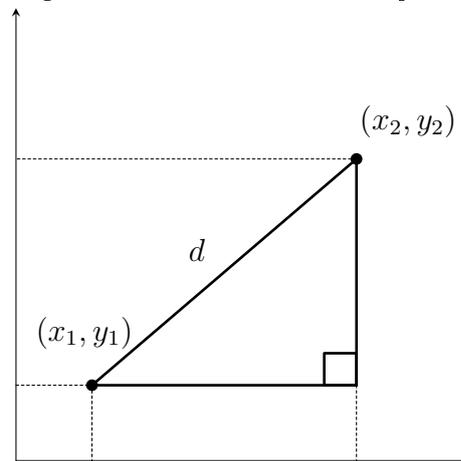
Nesse capítulo apresentaremos conceitos que serão utilizados nos capítulos seguintes, para as deduções das equações reduzidas e equação geral das cônicas. As definições e exemplos mais detalhados poderão ser encontrados em Boldrini (1980), Winterle(2000), Reis (1997) e Oliveira (1987).

#### 3.1 DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Dado dois pontos A e B de coordenadas  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , respectivamente, podemos determinar a distância entre esses dois pontos da seguinte forma:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

**Figura 3** – Distância entre dois pontos



Fonte: Própria Autora (2022).

Observando a figura acima, podemos perceber que a distância entre esses dois pontos é a hipotenusa do triângulo retângulo onde os catetos são as distâncias entre as coordenadas x e y.

**Exemplo 3.1.** Determinar a distância entre os pontos  $A = (-3, 2)$  e  $B = (1, -5)$ .

**Solução:** Observe que:

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 1, \quad y_1 = 2 \quad e \quad y_2 = -5$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (3 - (-5))^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(-4)^2 + (8)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{16 + 64}$$

$$d(A, B) = \sqrt{80}$$

$$d(A, B) = 4\sqrt{5}u.d$$

■

### 3.2 VETORES

Chamamos de vetor todo segmento de reta que possui sentido, direção e módulo, isto é, comprimento. O deslocamento, a velocidade, aceleração e força são alguns exemplos de grandezas vetoriais.

O vetor é representado por um segmento orientado de coordenadas  $(A, B)$ , onde  $A$  é dito origem e  $B$  extremidade do segmento. Podemos ainda definir o vetor da seguinte maneira

$$\vec{u} = (A, B)$$

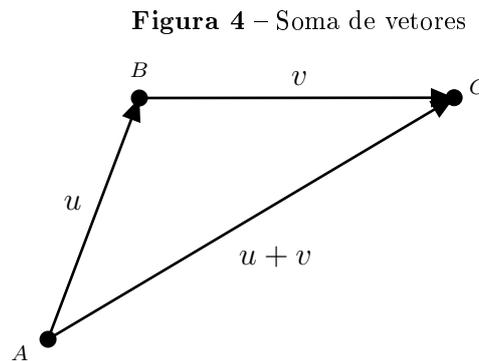
isto quer dizer que o vetor  $\vec{u}$  é determinado pelo segmento orientado  $(A, B)$ .

Chamaremos de norma de um vetor o comprimento de qualquer um de seus representantes, indicamos por  $\|\vec{u}\|$ . Se  $\|\vec{u}\| = 1$ , dizemos que  $\vec{u}$  é unitário.

Agora, apresentaremos operações e propriedades envolvendo vetores:

#### I - Adição de vetores

Sejam os vetores  $\vec{u} = (A, B)$  e  $\vec{v} = (B, C)$ . A soma  $\vec{u} + \vec{v}$  é definido pelo segmento que tem origem em  $A$  e extremidade em  $C$ .



Fonte: Própria Autora (2022).

#### II - Multiplicação de um vetor por escalar

Dado um vetor  $\vec{u}$  não nulo e um número real  $\beta$ , a multiplicação entre essas duas grandezas resultam no vetor  $\beta\vec{u}$ , de forma que  $|\beta\vec{u}| = |\vec{u}||\beta|$ , a direção de  $\beta\vec{u}$  é paralela a  $\vec{u}$  e  $\beta\vec{u}$  tem o mesmo sentido de  $\vec{u}$  se  $\beta > 0$  e sentido contrário de  $\vec{u}$  se  $\beta < 0$ .

A multiplicação de um número real por um vetor segue as seguintes propriedades: Para cada vetor  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e para  $\alpha$  e  $\beta$  escalares

1.  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
2.  $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
3.  $1\vec{v} = \vec{v}$
4.  $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v} = \beta(\alpha\vec{v})$ .

**Observação 3.1.** Dado um ponto  $P$  e um vetor  $\vec{v}$ , existe um único segmento orientado  $(P, Q)$  representado por  $\vec{v}$ . Para cada ponto  $P$  e cada reta associamos um único ponto

$Q = P + \vec{v}$ , chamado soma de  $P$  com  $\vec{v}$ .

### III - Produto escalar

Sejam os vetores  $\vec{u} = (A, B)$  e  $\vec{v} = (C, D)$ . O produto escalar de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é definido como sendo o número real  $\vec{u} \cdot \vec{v} = AC + BD$ .

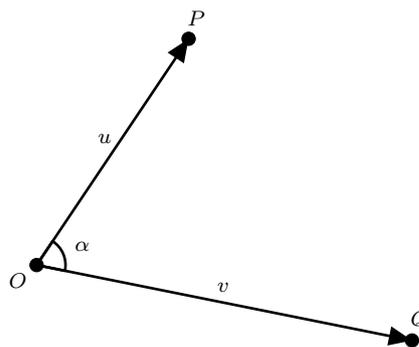
Podemos verificar facilmente as seguintes propriedades:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} \neq 0$  e  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$
- $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot \vec{w} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{w})$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

### IV - Ângulo entre dois vetores

Dado dois vetores  $\vec{u} = (O, P)$  e  $\vec{v} = (O, Q)$  não nulos,  $\alpha$  é o ângulo formado entre os dois vetores.

**Figura 5** – Ângulo entre dois vetores

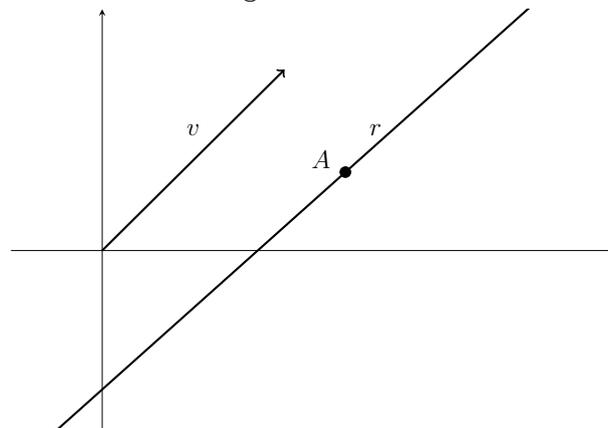


Fonte: Própria Autora (2022).

### 3.3 RETA

Seja  $\vec{v}$  um vetor não nulo com coordenadas  $(a, b)$  e seja  $A = (x_0, y_0)$  um ponto qualquer do plano. Então existe uma única reta que passa por  $A$  e possui a mesma direção de  $\vec{v}$ , neste caso,  $\vec{v}$  é chamado vetor diretor da reta.

**Figura 6** – Reta



Fonte: Própria Autora (2022).

Com isso, podemos dizer que um ponto  $P$  qualquer pertence a uma reta  $r$ , se  $\overrightarrow{AP}$  são colineares, isto é

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ou ainda, em termos de coordenadas

$$(x - x_0, y - y_0) = t(a, b)$$

de onde podemos montar o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb. \end{cases} \quad (1)$$

As equações acima são chamadas equações paramétricas da reta. Como de início definimos que o vetor diretor é diferente de zero podemos então isolar o parâmetro  $t$  da seguinte forma:

$$\frac{x - x_0}{a} = t, \quad a \neq 0. \quad (2)$$

Do mesmo modo,

$$\frac{y - y_0}{b} = t, \quad b \neq 0. \quad (3)$$

Igualando ambas as equações obtidas,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}. \quad (4)$$

São definidas como equações simétricas da reta. Ao isolarmos  $y$  na última equação obtida,

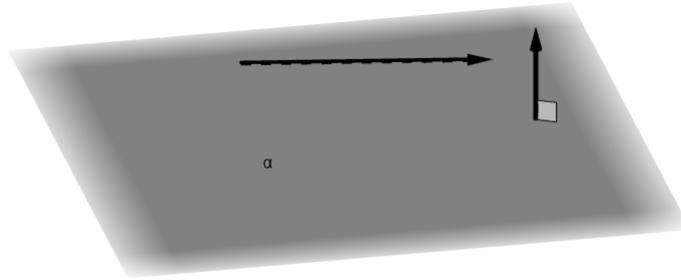
$$\begin{aligned} y - y_0 &= b \frac{x - x_0}{a} \\ y - y_0 &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 \\ y &= \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 + y_0 \\ y &= mx + k, \end{aligned}$$

em que  $m = \frac{b}{a}$  e  $k = -\frac{b}{a}x_0 + y_0$ .

### 3.4 PLANO

Seja  $A = (x, y, z)$  um ponto que pertence a um plano  $\alpha$  e  $\vec{n} = (a, b, c)$  um vetor normal não nulo. Como  $\vec{n}$  é perpendicular ao plano então  $\vec{n}$  é ortogonal a qualquer vetor pertencente ao plano  $\alpha$ .

Figura 7 – Plano



Fonte: Própria Autora (2023).

Então, um ponto  $P = (x_1, y_1, z_1)$  qualquer pertence a  $\alpha$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AP}$  é ortogonal a  $\vec{n}$ , isto é

$$\vec{n} \cdot (P - A) = 0,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} (a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) &= 0 \\ a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) &= 0 \\ ax + by + cz &= -ax_1 - by_1 - cz_1. \end{aligned}$$

Resultando em,

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (5)$$

em que  $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$ .

A equação (5) é denominada equação geral do plano  $\alpha$ .

### 3.4.1 Equações paramétricas e vetoriais do plano

Seja  $A$  um ponto do plano  $\alpha$  e  $\vec{w} = (a_1, b_1, c_1)$  e  $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$  dois vetores paralelos a  $\alpha$  mas não paralelos entre si. Para qualquer ponto  $B$  do plano os vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{w}$  e  $\vec{v}$  são coplanares.

Um ponto  $B$  pertence a  $\alpha$  se, e somente se, existem números reais  $i$  e  $j$  tais que

$$B - A = i\vec{w} + j\vec{v}$$

ou ainda,

$$B = A + i\vec{w} + j\vec{v},$$

em termos de coordenadas:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + i(a_1, b_1, c_1) + j(a_2, b_2, c_2). \quad (6)$$

A equação (6) é definida equação vetorial do plano  $\alpha$  e os vetores  $\vec{w}$  e  $\vec{v}$  são vetores diretores de  $\alpha$ .

Ainda na equação (6) podemos chegar ao seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1i + a_2j \\ y = y_1 + b_1i + b_2j \\ z = z_1 + c_1i + c_2j \end{cases} . \quad (7)$$

No sistema cima, as equações são chamadas de equações paramétricas do plano  $\alpha$  onde  $i$  e  $j$ , números reais, são chamados de parâmetros.

### 3.5 MATRIZES

Uma matriz pode ser definida como uma tabela onde os valores são dispostos em linhas e colunas. A diferença fundamental entre uma matriz e uma tabela normal é que na matriz representamos apenas os dados numéricos da tabela. De maneira geral, representamos uma matriz da seguinte forma:  $A_{m \times n}$ , onde  $m$  representa a quantidade de linhas e  $n$  a quantidade de colunas da matriz. Já os elementos costumam ser representados com uma letra minúscula acompanhada de dois índices, por exemplo:  $a_{ij}$ , onde  $i$  indica a linha na qual o elemento se encontra e  $j$  indica a coluna.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

#### 3.5.1 Tipos de matrizes

As matrizes podem receber nomes especiais dependendo de seu formato ou da disposição de seus elementos.

*matriz linha* é toda matriz de ordem  $1 \times n$ , isto é, uma matriz que contém uma única linha;

$$\left( a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n} \right) .$$

*Matriz coluna* é toda matriz  $m \times 1$ , isto é uma matriz que contém uma única coluna;

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

*Matriz nula* é toda matriz em que seus elementos são nulo;

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

*Matriz quadrada* é toda matriz que possui o número de linhas iguais ao número de colunas ( $m = n$ );

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Matriz identidade:* matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são nulos;

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

*Matriz transposta ( $A^t$ ):* matriz que se obtém ao trocarmos as linhas de uma matriz pelas colunas e vice-versa.

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Observe que ao transpormos uma matriz, sua ordem fica alterada, exceto no caso de uma matriz quadrada. Se uma matriz for tal que  $A = A^t$ , ela é chamada *matriz simétrica*, e se  $A^t = -A$  (oposta de A), a matriz é chamada de *matriz anti-simétrica*.

*Matriz triangular:* matriz quadrada é dita triangular quando os elementos acima ou abaixo

da diagonal principal são nulos;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Matriz diagonal:* uma matriz quadrada é dita diagonal quando todos os elementos da matriz diagonal principal são não nulo e todos os demais elementos são nulos.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

### 3.5.2 Operações com matrizes

Ao utilizarmos matrizes, surge naturalmente a necessidade de realizar as operações.

#### 3.5.2.1 Adição de matrizes

A soma de duas matrizes  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  é uma matriz  $m \times n$  denotada por  $A+B$ , cujo o termo da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna é  $a_{ij}+b_{ij}$ , isto é,  $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m \times n}$ . E obedecem às seguintes propriedades:

1. **Comutatividade:**  $A + B = B + C$
2. **Associatividade:**  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. **existência de elemento neutro:**  $A + 0 = A$ , onde  $0$  é a matriz nula.

#### 3.5.2.2 Multiplicação por escalar

Seja  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  uma matriz e  $k$  um número real, definiremos o produto entre  $k$  e  $A$ , como

$$k \times A = [k \times a_{ij}]_{m \times n}.$$

**Propriedades:** Sejam  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{ij}]_{m \times n}$  matrizes de mesma ordem,  $k, k_1, k_2$  números reais. Então, vale as seguintes propriedades:

1.  $k(A + B) = kA + kB$
2.  $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
3.  $0 \times A = 0$ , onde  $0$  é a matriz nula.
4.  $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

### 3.5.2.3 Multiplicação de matrizes

Sejam  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  e  $B = [b_{jk}]_{n \times t}$ . Determinamos o produto de A por B como sendo  $AB = [c_{ik}]_{m \times t}$

onde,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{in}b_{nk}.$$

Para realizar a multiplicação de duas matrizes vale lembrar que:

1. Só podemos multiplicar duas matrizes se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.
2. A matriz resultado  $C = AB$  será de ordem  $m \times t$ .
3. Em geral  $AB \neq BA$ .

Desde que seja válida a multiplicação de matrizes, é válida as seguintes propriedades:

1.  $AI = IA = A$ .
2.  $A(B + C) = AB + AC$ .
3.  $(A + B)C = AC + BC$ .
4.  $(AB)C = A(BC)$ .
5.  $A0 = 0A = A$ , onde 0 é a matriz nula.
6.  $(AB)^t = B^t A^t$ .

## 3.6 ESPAÇOS VETORIAIS

**Definição 3.1.** *Um espaço vetorial  $V$  é um conjunto, cujo os elementos são chamados vetores, no qual estão definidas as operações da soma e multiplicação por escalar. Essas operações devem satisfazer as propriedades associativa, comutativa e existência de elemento neutro.*

Agora, trataremos alguns conceitos necessários para o desenvolvimento dessa seção.

### I - Subespaços Vetoriais

Seja  $V$  um espaço vetorial. Um subespaço vetorial de  $V$  é um subconjunto  $U \subset V$  com as seguintes propriedades:

1.  $0 \in U$
2. Se  $u, v \in U$ , então  $u + v \in U$
3. Se  $u \in U$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $\alpha u \in U$ .

### II - Combinação Linear

**Definição 3.2.** *Seja  $V$  um espaço vetorial,  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ . Então o vetor  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$  é um elemento de  $V$  que chamamos de combinação linear dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$ .*

Seja  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  um subconjunto do espaço vetorial  $V$ . O subespaço de  $V$  gerado por  $X$ , é por definição, o conjunto de todas as combinações lineares  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ .

### III - Dependência e Independência Linear

Seja  $V$  um subespaço vetorial e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ .

**Definição 3.3.** Dizemos que o conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  é linearmente independente, ou que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$  são LI se, e somente, se  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$  implica  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ . Caso algum dos  $\alpha_i \neq 0$ , dizemos que  $v_1, v_2, \dots, v_k$  são linearmente dependentes ou que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$  são LD.

**Teorema 3.1.** O conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  é LD se, e somente se, um dos vetores for uma combinação linear dos demais.

### IV - Base de um Espaço Vetorial

**Teorema 3.2.** Se os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  geram um espaço vetorial  $V$ , então qualquer conjunto com mais de um vetor em  $V$  é LD.

**Definição 3.4.** Uma base de um espaço vetorial  $V$  é um conjunto  $\omega = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  de vetores linearmente independentes e que geram  $V$ .

Todo vetor  $v \in V$  se escreve de modo que único como combinação linear dos elementos de  $\omega$ , isto é,  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ . Os números  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  chamam-se as coordenadas do vetor  $v$  na base  $\omega$  e denotamos por

$$[V]_{\omega} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}.$$

#### IV.1 - Mudança de base

Sejam  $\omega = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  e  $\omega' = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  duas bases de um espaço vetorial  $V$ . Queremos relacionar as coordenadas de um vetor  $v$  em relação à base  $\omega$  com as coordenadas do mesmo vetor  $v$  em relação à base  $\omega'$ . Dado um vetor  $v \in V$ , este será combinação linear dos vetores das bases  $\omega$  e  $\omega'$

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_k u_k \quad (8)$$

$$v = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_k w_k. \quad (9)$$

Podemos ainda escrever os vetores da base  $\omega'$  como combinação linear dos vetores de  $\omega$ ,

isto é:

$$w_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1k}u_k \quad (10)$$

$$w_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2k}u_k \quad (11)$$

$$\vdots \quad (12)$$

$$w_k = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \dots + a_{kk}u_k. \quad (13)$$

Substituindo as equações (10), (11), (12) e (13) na equação (9)

$$v = y_1(a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1k}u_k) + \dots + y_k(a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \dots + a_{kk}u_k).$$

Em forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}.$$

Ou, mais simplesmente, pela equação:

$$[v]_{\omega} = [v]_{\omega'}^{\omega'} [v]_{\omega'}.$$

A matriz  $[v]_{\omega'}^{\omega'}$  é chamada matriz mudança de base de  $\omega'$  para  $\omega$ . O papel dessa matriz é transformar os componentes de um vetor  $v$  na base  $\omega$  em componentes do mesmo vetor  $v$  na base  $\omega'$ .

### 3.7 APLICAÇÕES LINEARES

**Definição 3.5.** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de  $V$  em  $W$ ,  $F: V \rightarrow W$  que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Quaisquer que sejam  $u$  e  $v$  em  $V$ ,*

$$F(u + v) = F(u) + F(v).$$

2. *Quaisquer que sejam  $k \in \mathbb{R}$  e  $v \in V$ ,*

$$F(kv) = kF(v).$$

**Observação 3.2.** *Se  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais, então  $T: V \rightarrow W$  é dita uma aplicação linear se, e somente se,  $T(ku + \lambda v) = kT(u) + \lambda T(v)$ .*

**Observação 3.3.** *Se  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais e  $T: V \rightarrow W$  uma aplicação li-*

near, então  $T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$ .

**Exemplo 3.2.** Se  $V$  é um espaço vetorial, então  $I : V \rightarrow W$  tal que  $I(v) = v$ ,  $v \in V$ , é uma aplicação linear chamada de aplicação linear identidade.

**Exemplo 3.3.** A aplicação  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(x, y, z) = (x, y)$  é uma aplicação linear. De fato,

$$\begin{aligned} T((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

e

$$T(\lambda(x_1, y_1, z_1)) = T(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) = \lambda(x_1, y_1) = \lambda T(x_1, y_1, z_1)$$

### 3.8 AUTOVALORES E AUTOVETORES

**Definição 3.6.** Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais e  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Dizemos que o escalar  $\lambda$  é um autovalor de  $T$  se existir um vetor não nulo  $\vec{v} \in V$  tal que:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

Dizemos que  $\vec{v}$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$ .

**Definição 3.7.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  sobre  $F$  ( $F = \mathbb{R}$  ou  $F = \mathbb{C}$ ). Diz-se que  $X \in F^n$ ,  $X \neq 0$  é um autovetor de  $A$ , se  $AX = cX$  para algum  $c \in F$ . O escalar  $c$  é chamado o autovalor associado ao autovetor  $X$ .

**Exemplo 3.4.** Se  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  e  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  é um autovetor de  $A$ . Como proceder para encontrar  $X$ ?

Com efeito,  $AX = cX$  para algum  $c \in \mathbb{R}$ . Portanto, 
$$\begin{cases} 2x + y = cx \\ 2x + 4y = cy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2 - c)x + y = 0 \\ 2x + (4 - c)y = 0 \end{cases}.$$

Agora, sendo  $X \neq 0$ , segue-se que  $\det \begin{pmatrix} 2 - c & 1 \\ 2 & 4 - c \end{pmatrix} = 0$ , ou seja,  $(2 - c)(4 - c) - 2 = 0 \Rightarrow c^2 - 6c + 6 = 0 \Rightarrow c = 3 + \sqrt{3}$  ou  $c = 3 - \sqrt{3}$ .

Determinados os autovalores, podemos encontrar os autovetores.

i) Autovetores associados a  $3 + \sqrt{3}$ . Basta resolver  $AX = (3 + \sqrt{3})X$ , isto é,

$$\begin{cases} 2x + y = (3 + \sqrt{3})x \\ 2x + 4y = (3 + \sqrt{3})y \end{cases}.$$

Portanto,  $y = (1 + \sqrt{3})x$ , com  $x \in \mathbb{R}$  e então temos uma infinidade de autovetores associados a  $3 + \sqrt{3}$ :  $X = \begin{pmatrix} x \\ (1 + \sqrt{3})x \end{pmatrix}$ , com  $x \in \mathbb{R}$ .

ii) Autovetores associados a  $3 - \sqrt{3}$ . Resolvendo  $AX = (3 - \sqrt{3})X$ , obtemos:  $X = \begin{pmatrix} x \\ (1 + \sqrt{3})x \end{pmatrix}$ , com  $x \in \mathbb{R}$ .

**Observação 3.4.** Nunca existe apenas um autovetor associado a um autovalor. Na verdade, se  $c$  é autovalor de  $A$ , então  $V_c = \{X \in F^n / AX = cX\}$  é um subespaço vetorial de  $F^n$ , o qual é chamado autoespaço associado a  $c$ .

A procura de autovetores associados ao autovalor  $c$  está subordinada à existência de solução  $X \in F^n$ ,  $X \neq 0$  do sistema homogêneo  $(A - cI)X = 0$ . E como sabemos, tal sistema tem solução  $X \neq 0$  se, e somente se,  $\det(A - cI) = 0$ . A equação  $\det(A - cI) = 0$  é denominada a equação característica de  $A$  e as suas raízes são os autovalores ou valores característicos de  $A$ . Observe que se  $F = \mathbb{R}$ , não necessariamente existe autovalor para  $A$ , conforme mostra o próximo exemplo.

**Exemplo 3.5.** Seja  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Então  $\det(A - cI) = c^2 + 1 \neq 0, \forall c \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $A$  não possui autovalor real. É claro que  $i$  e  $-i$  são autovalores complexos de  $A$ . Enquanto,  $\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}$  são os autovetores associados a  $i$  e a  $-i$  respectivamente

### 3.9 DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Seja  $A_{n \times n}$  uma matriz com entradas em  $F$ . Diz-se que  $A$  é diagonalizável sobre  $F$ , se existe uma matriz  $P_{n \times n}$  invertível com entradas em  $F$  tal que  $P^{-1}AP = D$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal em  $F$ . Matrizes diagonais são de fácil manipulação.

**Exemplo 3.6.** Se  $D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$  e  $k \in \mathbb{N}$ , então  $D^k = \begin{pmatrix} c_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n^k \end{pmatrix}$ ,

onde  $D^k = \underbrace{D \cdot D \cdot \cdots \cdot D}_{k\text{-fatores}}$ .

Por outro lado, se  $A$  é diagonalizável e  $P^{-1}AP = D$  para alguma matriz  $P$  em  $F$ , então  $D = PAP^{-1}$  e  $D^2 = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = (PA^2P^{-1}), \dots, D^k = (PA^kP^{-1})$  e portanto  $A^k = (P^{-1}D^kP)$ .

Por isso, as matrizes diagonalizáveis são desejáveis.

Vamos agora determinar condições necessárias e suficientes para que uma matriz  $A_{n \times n}$  sobre  $F$  seja diagonalizável sobre  $F$ . Começaremos com um exemplo bastante sugestivo.

**Exemplo 3.7.** Seja  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Observe que  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ou seja  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e  $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  são autovetores associados a 2 e a 3 respectivamente. Veja que  $X_1$  e  $X_2$  são LI. Se  $P = (X_1 \ X_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , então  $AP = A(X_1 \ X_2) = (AX_1 \ AX_2) = (2X_1 \ 3X_2) = (X_1 \ X_2) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = PD$  onde  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Portanto  $P^{-1}AP = D$ .

É claro que como  $X_1$  e  $X_2$  são LI,  $P$  é invertível. De fato, se  $P$  fosse não-invertível, então  $PX = 0$  teria uma solução  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  e assim  $aX_1 + bX_2 = 0$ , isto é,  $X_1$  e  $X_2$  não seriam LI. Isto não é por acaso, conforme nos mostra o próximo teorema.

**Teorema 3.3.** *Seja  $A_{n \times n}$  uma matriz sobre  $F$ , então:*

- Se  $c_1, \dots, c_n$  são autovalores distintos com autovetores  $X_1, \dots, X_n$  associados, então  $X_1, \dots, X_n$  é um conjunto LI de  $F^n$ .*
- $A$  é diagonalizável sobre  $F$  se, e somente se,  $A$  tem  $n$  autovetores LI em  $F^n$ .*

Agora, apresentaremos um exemplo muito importante para o desenvolver do trabalho.

**Exemplo 3.8.** *Seja  $M = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$ , com  $B \neq 0$ .*

*Inicialmente, vamos encontrar os autovalores de  $M$ , ou seja, encontrar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que,  $MX = \lambda X$ , para  $X \neq 0$ . Portanto,*

$$\begin{cases} Ax + (B/2)y = \lambda x \\ (B/2)x + Cy = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda)x + (B/2)y = 0 \\ (B/2)x + (C - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

*Agora, sendo  $X \neq 0$ , segue-se que  $\det \begin{pmatrix} A - \lambda & B/2 \\ B/2 & C - \lambda \end{pmatrix} = 0$ , ou seja,*

$$(A - \lambda)(C - \lambda) - B^2/4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2/4 = 0 \Rightarrow \lambda = (A + C)/2 + (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2 \text{ ou } \lambda = (A + C)/2 - (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2.$$

*Determinados os autovalores, podemos encontrar os autovetores.*

- Autovetores associados a  $\lambda_1 = (A + C)/2 + (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2$ . Basta resolver  $MX = ((A + C)/2 + (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2)X$ , isto é,*

$$\begin{cases} Ax + (B/2)y = ((A + C)/2 + (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2)x \\ (B/2)x + Cy = ((A + C)/2 + (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2)y \end{cases}$$

*Portanto,  $(B/2)y = (\lambda_1 - A)x$ , com  $x \in \mathbb{R}$  e então temos uma infinidades de autovetores associados a  $\lambda_1 = (A + C)/2 + (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2$ :  $X = \begin{pmatrix} Bx \\ 2(\lambda_1 - A)x \end{pmatrix}$ , com  $x \in \mathbb{R}$ .*

- Autovetores associados a  $\lambda_2 = (A + C)/2 - (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2$ . Resolvendo  $MX =$*

$((A + C)/2 - (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2)X$ , obtemos:  $X = \begin{pmatrix} Bx \\ 2(\lambda_2 - A)x \end{pmatrix}$ , com  $x \in \mathbb{R}$ .

Tomando

$$P = \begin{pmatrix} \frac{B}{\|X_1\|} & \frac{B}{\|X_2\|} \\ \frac{2(\lambda_1 - A)}{\|X_1\|} & \frac{2(\lambda_2 - A)}{\|X_2\|} \end{pmatrix},$$

onde

$$\|X_1\| = \sqrt{B^2 + 4(\lambda_1 - A)^2} \text{ e } \|X_2\| = \sqrt{B^2 + 4(\lambda_2 - A)^2}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \frac{\|X_1\| \cdot \|X_2\|}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \frac{2(\lambda_2 - A)}{\|X_2\|} & \frac{-B}{\|X_2\|} \\ \frac{-2(\lambda_1 - A)}{\|X_1\|} & \frac{B}{\|X_1\|} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} 2(\lambda_2 - A) \cdot \|X_1\| & -B \cdot \|X_1\| \\ -2(\lambda_1 - A) \cdot \|X_2\| & B \cdot \|X_2\| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot M &= \frac{1}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} 2(\lambda_2 - A) \cdot \|X_1\| & -B \cdot \|X_1\| \\ -2(\lambda_1 - A) \cdot \|X_2\| & B \cdot \|X_2\| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} (2A(\lambda_2 - A) - (B^2)/2) \cdot \|X_1\| & (B(\lambda_2 - A) - BC) \cdot \|X_1\| \\ (-2A(\lambda_1 - A) + (B^2)/2) \cdot \|X_2\| & (-B(\lambda_1 - A) + BC) \cdot \|X_2\| \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Veja que ,

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2A(\lambda_2 - A) - \frac{B^2}{2}) \cdot \|X_1\| & (B(\lambda_2 - A) - BC) \cdot \|X_1\| \\ (-2A(\lambda_1 - A) + \frac{B^2}{2}) \cdot \|X_2\| & (-B(\lambda_1 - A) + BC) \cdot \|X_2\| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{B}{\|X_1\|} & \frac{B}{\|X_2\|} \\ \frac{2(\lambda_1 - A)}{\|X_1\|} & \frac{2(\lambda_2 - A)}{\|X_2\|} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
R_{11} &= 2AB(\lambda_2 - A) - (B^3)/2 + 2B(\lambda_2 - A)(\lambda_1 - A) - 2BC(\lambda_1 - A) \\
&= 2B(\lambda_2 - A)[A + \lambda_1 - A] - (B^3)/2 - 2BC\lambda_1 + 2BCA \\
&= 2B(\lambda_2 - A)(\lambda_1) + 2B(CA - (B^2)/4) - 2BC\lambda_1 \\
&= 2B(\lambda_2)(\lambda_1) - 2BA(\lambda_1) + 2B((\lambda_2)(\lambda_1)) - 2BC\lambda_1 \\
&= 4B(\lambda_2)(\lambda_1) - 2B(\lambda_1)(A + C) \\
&= 4B(\lambda_2)(\lambda_1) - 2B(\lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2) \\
&= 2B(\lambda_1)[(\lambda_2) - (\lambda_1)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{12} &= (2AB(\lambda_2 - A) - (B^3)/2 + 2B(\lambda_2 - A)^2 - 2BC(\lambda_2 - A)) \frac{\|X_1\|}{\|X_2\|} \\
&= (2B(\lambda_2 - A)[A + \lambda_2 - A] - (B^3)/2 - 2BC\lambda_2 + 2BCA) \frac{\|X_1\|}{\|X_2\|} \\
&= (2B(\lambda_2 - A)[\lambda_2] + 2B(CA - (B^2)/4) - 2BC\lambda_2) \frac{\|X_1\|}{\|X_2\|} \\
&= (2B(\lambda_2)(\lambda_2) - 2BA(\lambda_2) + 2B((\lambda_2)(\lambda_1)) - 2BC\lambda_2) \frac{\|X_1\|}{\|X_2\|} \\
&= (2B(\lambda_2)[(\lambda_2) + (\lambda_1)] - 2B(\lambda_2)[A + C]) \frac{\|X_1\|}{\|X_2\|} \\
&= (2B(\lambda_2)[(\lambda_2) + (\lambda_1)] - 2B(\lambda_2)[(\lambda_2) + (\lambda_1)]) \frac{\|X_1\|}{\|X_2\|} \\
&= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{21} &= (-2AB(\lambda_1 - A) + (B^3)/2 - 2B(\lambda_1 - A)^2 + 2BC(\lambda_1 - A)) \frac{\|X_2\|}{\|X_1\|} \\
&= (-2B(\lambda_1 - A)[A + \lambda_1 - A] + (B^3)/2 + 2BC\lambda_1 - 2BCA) \frac{\|X_2\|}{\|X_1\|} \\
&= (-2B(\lambda_1 - A)(\lambda_1) - 2B(CA - (B^2)/4) + 2BC\lambda_1) \frac{\|X_2\|}{\|X_1\|} \\
&= (-2B(\lambda_1)(\lambda_1) + 2BA(\lambda_1) - 2B((\lambda_2)(\lambda_1)) + 2BC\lambda_1) \frac{\|X_2\|}{\|X_1\|} \\
&= (-2B(\lambda_1)[(\lambda_1) + (\lambda_2)] + 2B(\lambda_1)[A + C]) \frac{\|X_2\|}{\|X_1\|} \\
&= (-2B(\lambda_1)[(\lambda_1) + (\lambda_2)] + 2B(\lambda_1)[(\lambda_1) + (\lambda_2)]) \frac{\|X_2\|}{\|X_1\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}
R_{22} &= -2AB(\lambda_1 - A) + (B^3)/2 - 2B(\lambda_1 - A)(\lambda_2 - A) + 2BC(\lambda_2 - A) \\
&= -2B(\lambda_1 - A)[A + \lambda_2 - A] + (B^3)/2 + 2BC\lambda_2 - 2BCA \\
&= -2B(\lambda_1 - A)(\lambda_2) - 2B(CA - (B^2)/4) + 2BC\lambda_2 \\
&= -2B(\lambda_1)(\lambda_2) + 2BA(\lambda_2) - 2B((\lambda_2)(\lambda_1)) + 2BC\lambda_2 \\
&= -4B(\lambda_1)(\lambda_2) + 2B(\lambda_2)[A + C] \\
&= -4B(\lambda_1)(\lambda_2) + 2B(\lambda_2)[(\lambda_1) + (\lambda_2)] \\
&= -2B(\lambda_1)(\lambda_2) + 2B(\lambda_2)^2 \\
&= 2B(\lambda_2)[(\lambda_2) - (\lambda_1)].
\end{aligned}$$

*Assim,*

$$\begin{aligned}
P^{-1} \cdot M \cdot P &= \frac{1}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} R = \frac{1}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} 2B(\lambda_1)[(\lambda_2) - (\lambda_1)] & 0 \\ 0 & 2B(\lambda_2)[(\lambda_2) - (\lambda_1)] \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2B(\lambda_1)[(\lambda_2) - (\lambda_1)]}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} & 0 \\ 0 & \frac{2B(\lambda_2)[(\lambda_2) - (\lambda_1)]}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(A+C)+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(A+C)-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**Observação 3.5.** *Do exemplo 3.8, temos:*

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 - A) \cdot (\lambda_2 - A) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 - \lambda_1 \cdot A - \lambda_2 \cdot A + A^2 = AC - (B^2)/4 - A(\lambda_1 + \lambda_2) + A^2 \\
&= AC - (B^2)/4 - A(A + C) + A^2 = AC - (B^2)/4 - A^2 - AC + A^2 \\
&= -(B^2)/4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\| X_1 \| &= \sqrt{B^2 + 4(\lambda_1 - A)^2} = \sqrt{-4(\lambda_1 - A) \cdot (\lambda_2 - A) + 4(\lambda_1 - A)^2} \\
&= \sqrt{4(\lambda_1 - A) \cdot [-(\lambda_2 - A) + (\lambda_1 - A)]} = \sqrt{4(\lambda_1 - A) \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)}
\end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned}
\| X_2 \| &= \sqrt{B^2 + 4(\lambda_2 - A)^2} = \sqrt{-4(\lambda_1 - A) \cdot (\lambda_2 - A) + 4(\lambda_2 - A)^2} \\
&= \sqrt{4(\lambda_2 - A) \cdot [-(\lambda_1 - A) + (\lambda_2 - A)]} = \sqrt{4(\lambda_2 - A) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P^{-1} &= \frac{1}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} 2(\lambda_2 - A) \cdot \|X_1\| & -B \cdot \|X_1\| \\ -2(\lambda_1 - A) \cdot \|X_2\| & B \cdot \|X_2\| \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \frac{2(\lambda_2 - A) \cdot \|X_1\|^2}{\|X_1\|} & \frac{-B \cdot \|X_1\|^2}{\|X_1\|} \\ \frac{-2(\lambda_1 - A) \cdot \|X_2\|^2}{\|X_2\|} & \frac{B \cdot \|X_2\|^2}{\|X_2\|} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2B(\lambda_2 - \lambda_1)} \begin{pmatrix} \frac{2(\lambda_2 - A) \cdot 4(\lambda_1 - A) \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)}{\|X_1\|} & \frac{-B \cdot 4(\lambda_1 - A) \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)}{\|X_1\|} \\ \frac{-2(\lambda_1 - A) \cdot 4(\lambda_2 - A) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)}{\|X_2\|} & \frac{B \cdot 4(\lambda_2 - A) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)}{\|X_2\|} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{-4(\lambda_2 - A) \cdot (\lambda_1 - A)}{B \cdot \|X_1\|} & \frac{2(\lambda_1 - A)}{\|X_1\|} \\ \frac{-4(\lambda_1 - A) \cdot (\lambda_2 - A)}{B \cdot \|X_2\|} & \frac{2 \cdot (\lambda_2 - A)}{\|X_2\|} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{B^2}{B \cdot \|X_1\|} & \frac{2(\lambda_1 - A)}{\|X_1\|} \\ \frac{B^2}{B \cdot \|X_2\|} & \frac{2 \cdot (\lambda_2 - A)}{\|X_2\|} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{B}{\|X_1\|} & \frac{2(\lambda_1 - A)}{\|X_1\|} \\ \frac{B}{\|X_2\|} & \frac{2 \cdot (\lambda_2 - A)}{\|X_2\|} \end{pmatrix} \\
&= P^t,
\end{aligned}$$

onde  $P^t$  é a matriz transposta de  $P$ .

Assim,

$$P^t \cdot M \cdot P = P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(A+C) + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(A+C) - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{2} \end{pmatrix}.$$

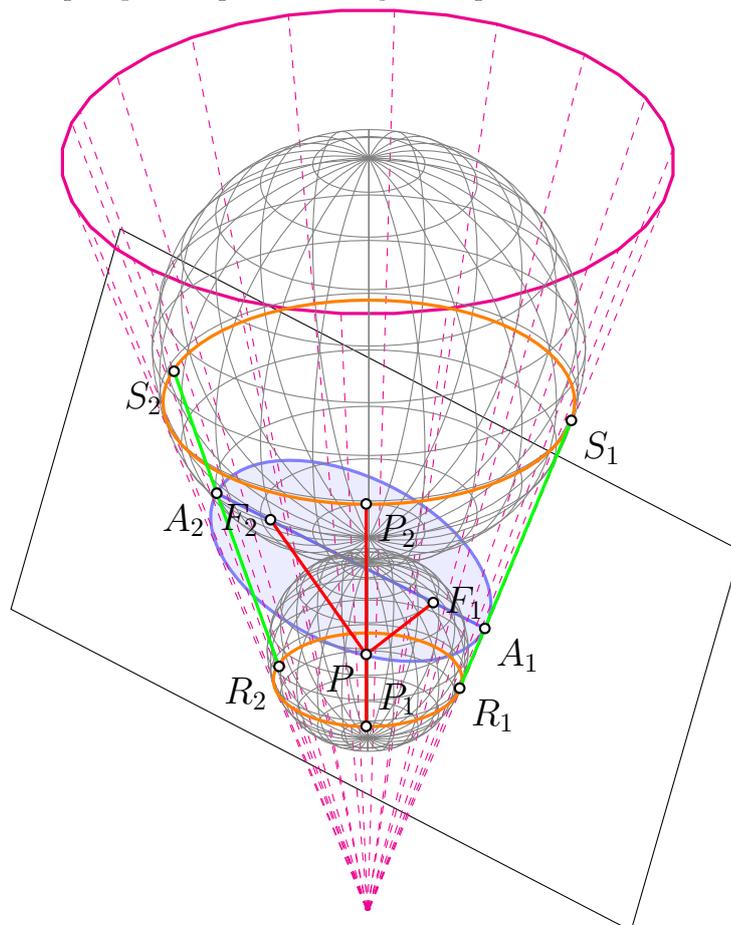
## 4 INTERSEÇÃO DO PLANO COM O CONE

Nessa capítulo apresentaremos as definições das cônicas utilizando uma esfera que está inserida dentro de um cone e fazendo a interseção de um plano com o respectivo cone.

### 4.1 ELIPSE

Sejam  $S$  e  $G$  duas esferas que possuem pontos de tangência com o plano  $\alpha$  e com um cone circular reto. Os pontos  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $S_1$  e  $S_2$  são pontos de interseção entre as esferas  $S$  e  $G$ , respectivamente, com o cone. As circunferências  $c_1$  e  $C_2$  são as interseções das esferas  $S$  e  $G$  com o cone respectivamente. O ponto  $A_1$  é ponto pertencente a interseção do plano  $\alpha$  com a geratriz do cone que passa pelos pontos  $R_1$  e  $S_1$  e o ponto  $A_2$  é ponto pertencente a interseção do plano  $\alpha$  com a geratriz do cone que passa pelos pontos  $R_2$  e  $S_2$ . Já as esferas tangenciam o plano em  $F_1$  e  $F_2$ . As esferas tangenciam o cone

**Figura 8** – Elipse gerada pela interseção do plano com o cone



Fonte: Próprio Autor (2023).

Dado  $P$  um ponto qualquer da interseção do plano  $\alpha$  com o cone. A soma das

distância do ponto  $P$  aos pontos  $F_1$  e  $F_2$  é dada por:

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= d(P, P_1) + d(P, P_2) = d(P_1, P_2) \\ &= d(R_1, S_1), \end{aligned}$$

onde  $P_1$  é um ponto pertencente a geratriz que passa por  $P$  e pela circunferência  $c_1$  e  $P_2$  é um ponto pertencente a geratriz que passa por  $P$  e pela circunferência  $c_2$ .

Assim,

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= d(R_1, S_1) \\ &= d(R_1, A_1) + d(A_1, S_1) \\ &= d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) \\ &= 2d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) \end{aligned}$$

Veja que,

$$\begin{aligned} d(R_1, S_1) &= d(R_2, S_2) \\ d(R_1, A_1) + d(A_1, S_1) &= d(R_2, A_2) + d(A_2, S_2) \\ d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) &= d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) \\ d(A_1, F_1) + d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) &= d(A_2, F_2) + d(F_2, F_1) + d(A_2, F_2) \\ 2d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) &= 2d(A_2, F_2) + d(F_2, F_1) \\ 2d(A_1, F_1) &= 2d(A_2, F_2) \\ 2d(A_1, F_1) &= 2d(A_2, F_2). \end{aligned}$$

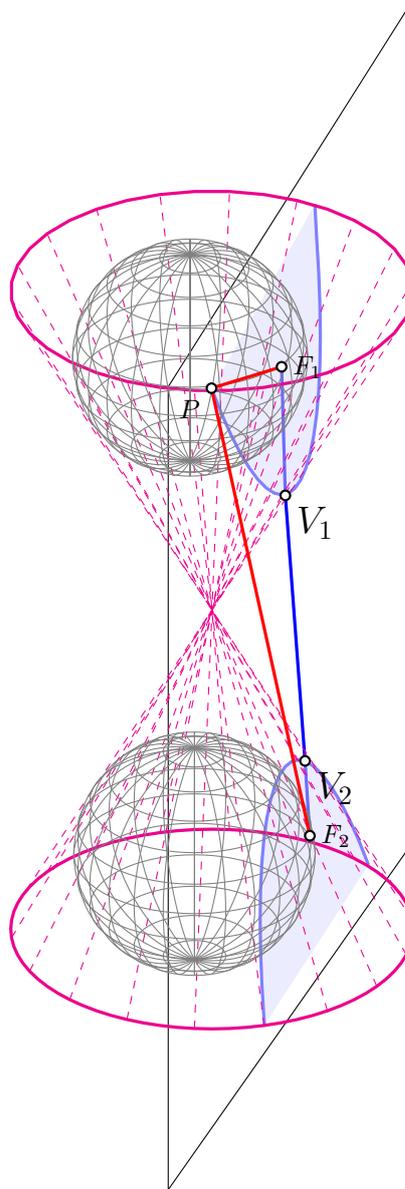
Logo,

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) \\ &= d(A_1, F_1) + d(F_1, F_2) + d(F_2, A_2) \\ &= d(A_1, A_2) \\ &= 2a. \end{aligned}$$

## 4.2 HIPÉRBOLE

Sejam  $S_1$  e  $S_2$  duas esferas que possuem pontos de tangência com o plano  $\pi$  e com um cone circular reto. Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são pontos de interseção entre as esferas e o plano. As circunferências  $c_1$  e  $c_2$  são as interseções esferas  $S_1$  e  $S_2$  com o cone.

**Figura 9** – Hipérbole gerada pela interseção do plano com o cone



Fonte: Própria Autora (2023).

Considere o plano vertical  $\alpha$  que intersecta o cone e tangencia as esferas  $S_1$  e  $S_2$  nos pontos  $F_1$  e  $F_2$  respectivamente. Considere também  $V_1$  e  $V_2$  os pontos de interseção do segmento  $\overline{F_1F_2}$  com o cone. Seja  $P$  um ponto qualquer da interseção do cone com o plano  $\alpha$  e  $G_1$  e  $G_2$  os pontos de interseção das circunferências  $c_1$  e  $c_2$  com a geratriz que passa pelo ponto  $P$ .

Considere também os pontos  $R_1, S_2$  como sendo as interseções das circunferências  $c_1$  e  $c_2$  com a geratriz que passa por  $V_1$  e os pontos  $R_2, S_1$  como sendo as interseções das circunferências  $c_1$  e  $c_2$  com a geratriz que passa por  $V_2$ . Assim sendo, temos

$$d(R_1, S_2) = d(R_2, S_1).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 d(V_1, F_1) + d(V_1, F_2) &= d(F_1, F_2) = d(V_2, F_2) + d(V_2, F_1) \\
 d(V_1, F_1) + d(V_1, S_2) &= d(V_2, F_2) + d(V_2, S_1) \\
 d(V_1, F_1) + d(V_1, R_1) + d(R_1, S_2) &= d(V_2, F_2) + d(V_2, R_2) + d(R_2, S_1) \\
 2d(V_1, F_1) &= 2d(V_2, F_2) \\
 d(V_1, F_1) &= d(V_2, F_2).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 d(P, F_2) &= d(P, G_2) \\
 &= d(P, G_1) + d(G_1, G_2) \\
 &= d(P, F_1) + d(G_1, G_2) \\
 &= d(P, F_1) + d(S_1, R_2) \\
 &= d(P, F_1) + d(S_1, V_2) - d(R_2, V_2) \\
 &= d(P, F_1) + d(F_1, V_2) - d(R_2, V_2) \\
 &= d(P, F_1) + d(F_1, V_2) - d(V_1, F_1) \\
 &= d(P, F_1) + d(V_1, V_2).
 \end{aligned}$$

Se pegarmos  $P$  na outra parte da interseção do plano  $\alpha$  com o cone, teremos:

$$d(P, F_1) = d(P, F_2) + d(V_2, V_1).$$

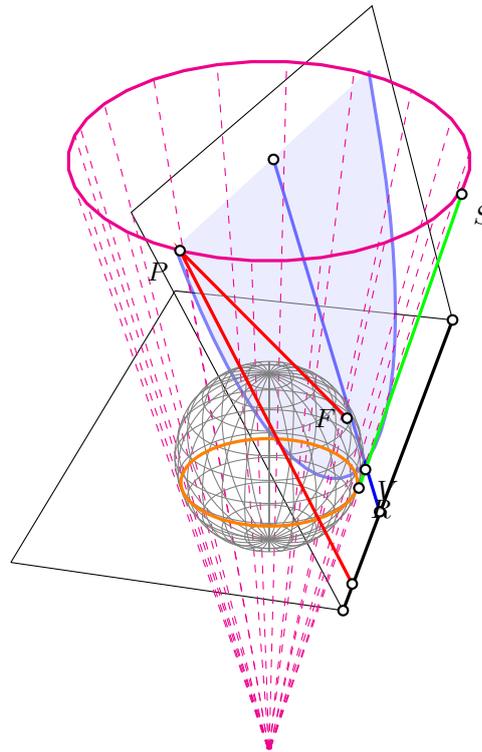
Dessa forma, teremos

$$\begin{aligned}
 |d(P, F_1) - d(P, F_2)| &= d(V_1, V_2) \\
 &= 2a..
 \end{aligned}$$

### 4.3 PARÁBOLA

Considere  $s_1$  uma esfera inscrita em um cone e a circunferência  $c_1$  que é a interseção da esfera com o cone. A esfera intersecta o plano  $\alpha$ , que é paralelo a geratriz do cone, no ponto  $F$ , e  $A$  o ponto de interseção de  $c_1$  com a geratriz que passa pelo ponto  $S$ . A circunferência  $c_1$  está contida no plano  $\beta$ . Os planos  $\alpha$  e  $\beta$  se encontram formando a reta  $d$ . Seja  $R$  o ponto de interseção da perpendicular a  $d$  passando por  $F$  e  $V$  a interseção dessa perpendicular com a geratriz passando por  $S$ .

**Figura 10** – Parábola gerada pela interseção do plano com o cone



Fonte: Próprio Autor (2023).

Considere agora  $P$  um ponto qualquer da interseção do plano  $\alpha$  com o cone e  $G$  um ponto pertencente a geratriz que passa por  $P$ . Assim,

$$d(P, F) = d(P, G) = d(S, A)$$

$$d(P, F) = d(S, V) + d(V, A)$$

$$d(P, F) = d(S, A)$$

Veja que

$$d(P, d) = d(R, M),$$

onde  $M$  é o ponto de interseção da reta paralela a reta  $d$  passando por  $P$  com a reta perpendicular a reta  $d$  passando por  $F$ .

Assim,

$$d(P, d) = d(M, R)$$

$$d(P, d) = d(M, V) + d(V, R)$$

$$d(P, d) = d(M, V) + d(V, A)$$

$$d(P, d) = d(S, V) + d(V, A)$$

$$d(P, d) = d(S, A).$$

Logo,

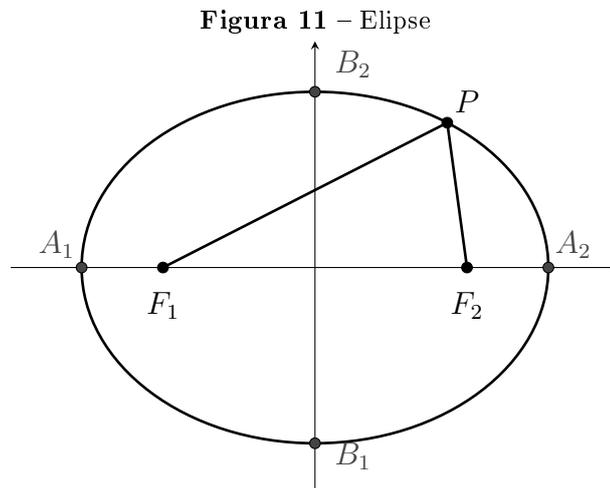
$$d(P, d) = d(P, F).$$

## 5 CÔNICAS

As seções cônicas ou simplesmente cônicas são curvas obtidas através da interseção de um plano  $\alpha$  com um cone. Existem três curvas que podem ser obtidas a partir dessa interseção: a **Elipse**, onde o plano é perpendicular a geratriz do cone. Já para obter a **hipérbole**, o plano é paralelo ao eixo do cone e na **parábola** o plano é paralelo a geratriz do respectivo cone.

Desta forma, trataremos nesse capítulo das deduções de suas equações na forma geral e reduzida, em relação aos eixos coordenados, seus elementos, como calcular as coordenadas do seu foco, vértice e reta diretriz, quando for o caso. As referências utilizadas na construção desse capítulo foram Boldrini (1980) e Winterle(2000).

**Definição 5.1.** *Elipse é um conjunto de pontos de um plano onde a soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.*

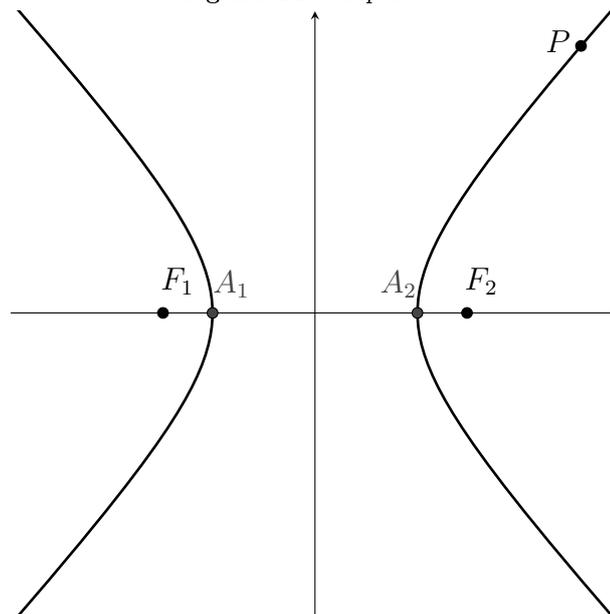


Fonte: Própria Autora (2022).

Chamamos  $F_1$  e  $F_2$  de focos e a distância entre os respectivos pontos de distância focal. O segmento  $\overline{A_1A_2}$  é chamado eixo maior e possui comprimento  $2a$ , já o segmento  $\overline{B_1B_2}$  é chamado eixo menor e possui comprimento  $2b$ .

**Definição 5.2.** *Hipérbole é o conjunto de pontos de um plano onde a diferença das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.*

**Figura 12** – Hipérbole

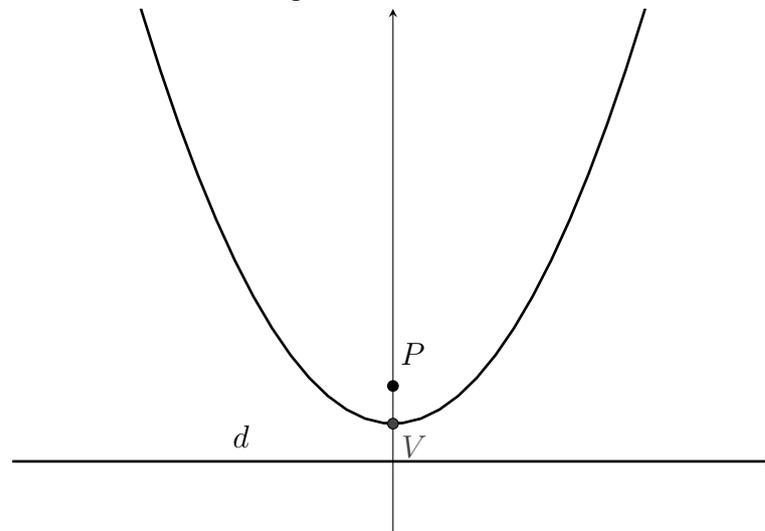


Fonte: Própria Autora (2022).

Chamamos  $F_1$  e  $F_2$  de focos e a distância entre os respectivos pontos de distância focal. O segmento  $\overline{A_1A_2}$  é chamado eixo real ou transverso e possui comprimento  $2a$ .

**Definição 5.3.** *Parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.*

**Figura 13** – Parábola



Fonte: Própria Autora (2022).

O ponto F é dita foco da parábola, a reta d é chamada diretriz, a distância  $2p$  entre o foco e a diretriz é chamada parâmetro da parábola.

### 5.1 EQUAÇÃO REDUZIDA

Se a cônica possui vértice na origem consideraremos dois casos em cada curva.

1. *O eixo da cônica é o eixo  $x$ :*

Seja  $P = (x, y)$  um ponto pertencente a elipse, então  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  possuem coordenadas  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ , respectivamente. Ou seja,  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , ou em termos de coordenadas:

$$\begin{aligned}
 d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\
 (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
 \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 &= (a^2 - cx)^2 \\
 a^2(x-c)^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
 a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
 x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
 \frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)} &= \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1,
 \end{aligned}$$

onde  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

Seja  $P = (x, y)$  um ponto pertencente a hipérbole, então  $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  possuem coordenadas  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$ , respectivamente. Ou seja,  $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ , ou em termos de coordenadas:

$$\begin{aligned}
 d(P, F_1) - d(P, F_2) &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
 \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\
 (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
 (cx - a^2)^2 &= \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\
 c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 &= a^2x^2 - 2cxa^2 + c^2a^2 + a^2y^2 \\
 x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{a^2y^2}{a^2(c^2 - a^2)} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seja  $P = (x, y)$  um ponto pertencente a parábola de foco  $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$  e diretriz  $d = -\frac{p}{2}$ , então  $d(P, F) = d(P, d)$ . Em termos de coordenadas:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px.$$

2. *O eixo da cônica é o eixo y:*

Para esse caso as demonstrações ocorrem de forma semelhante, resultando em:

Seja  $P = (x, y)$  um ponto pertencente a elipse, então  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  possuem coordenadas  $(0, -c)$  e  $(0, c)$ , respectivamente. Ou seja,  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , ou em termos de coordenadas:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Seja  $P = (x, y)$  um ponto pertencente a hipérbole, então  $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  possuem coordenadas  $(0, -c)$  e  $(0, c)$ , respectivamente. Ou seja,  $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ , ou em termos de coordenadas:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Seja  $P = (x, y)$  é um ponto pertencente a parábola de foco  $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$  e diretriz  $d = -\frac{p}{2}$ , então  $d(P, F) = d(P, d)$ . Em termos de coordenadas:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$x^2 = 2py.$$

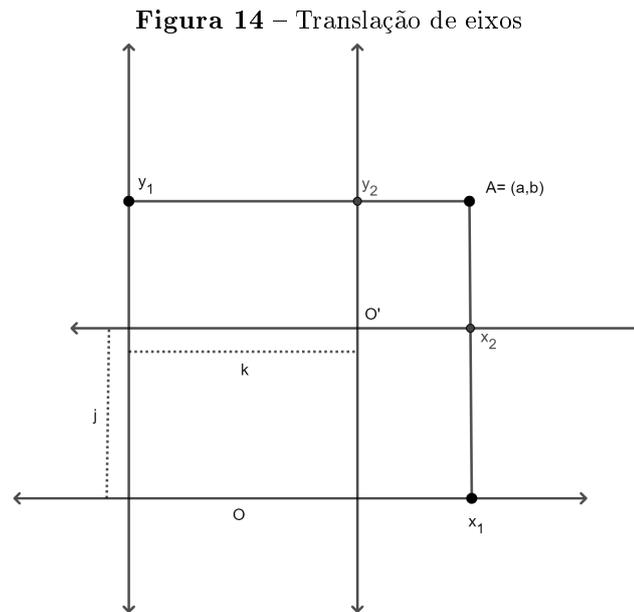
## 5.2 MUDANÇA DE COORDENADAS

Nesta seção trabalharemos alguns tipos de mudança de coordenadas no sistema

de coordenadas cartesianas:

### I - Translação de eixos

A translação de eixos consiste em criar um novo sistema de coordenadas cartesianas mudando a posição inicial do plano que possui coordenadas  $(x_1, y_1)$  passando a ser  $(x_2, y_2)$ . Denotaremos o sistema original das coordenadas por  $xOy$  e o novo por  $x'Oy'$ .



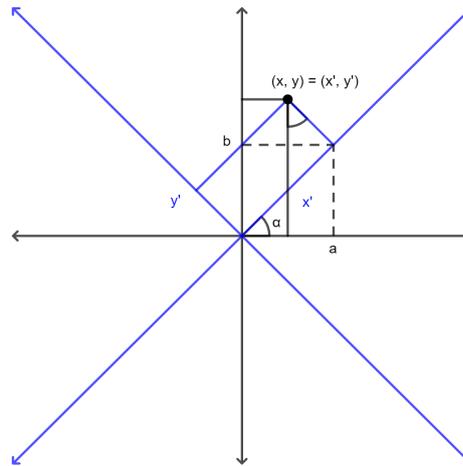
Fonte: Própria Autora (2022).

Note que:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + k \\ y_1 = y_2 + j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 - k \\ y_2 = y_1 - j \end{cases} .$$

### II - Rotação de eixos

Considere o sistema de eixos ortogonais  $xOy$ . Através de uma rotação com ângulo  $\alpha$  com  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , no sentido positivo, obtemos um novo sistema de coordenadas. Sejam  $(x, y)$  e  $(x', y')$  as coordenadas de um ponto arbitrário em ambos sistemas de eixos, como ilustrado na figura abaixo.

**Figura 15** – Rotação de eixos

Fonte: Própria Autora (2022).

Observe que:

$$\cos\alpha = \frac{a}{x'} \Rightarrow a = x'\cos\alpha \quad (14)$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{y'} \Rightarrow b = y'\sin\alpha. \quad (15)$$

Podemos observar também que:

$$\cos\alpha = \frac{y-b}{y'} \Rightarrow y-b = y'\cos\alpha \quad (16)$$

$$\sin\alpha = \frac{a-x}{y'} \Rightarrow a-x = y'\sin\alpha. \quad (17)$$

Substituindo as equações (14) e (15) em (16) e 17, respectivamente,

$$\begin{cases} a-x = y'\sin\alpha \Rightarrow x'\cos\alpha - x = y'\sin\alpha \\ y-b = y'\cos\alpha \Rightarrow y - x'\sin\alpha = y'\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \quad (18)$$

Podendo ainda escrever o sistema encontrado forma matricial  $X = MX'$

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aplicando a regra de Cramer:

$$\det M = \cos\alpha(\cos\alpha) - (-\sin\alpha)\sin\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Como  $\det M \neq 0$  o sistema é invertível, podemos afirmar que a solução do sistema será

$$x' = \frac{\det M_1}{M}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} x & -\operatorname{sen}\alpha \\ y & \operatorname{cos}\alpha \end{pmatrix}$$

$$y' = \frac{\det M_2}{M}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \operatorname{cos}\alpha & x \\ \operatorname{sen}\alpha & y \end{pmatrix}.$$

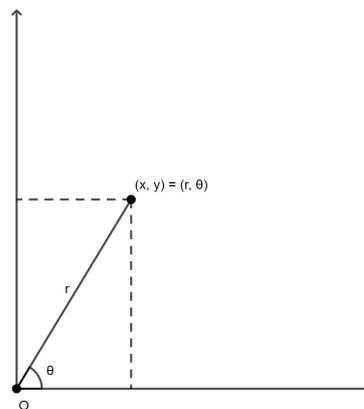
Assim,

$$\begin{cases} x' = x\operatorname{cos}\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = y\operatorname{cos}\alpha - x\operatorname{sen}\alpha \end{cases}. \quad (19)$$

### 5.3 CÔNICAS EM COORDENADAS POLARES

Chamamos de coordenadas polares o sistema de coordenadas do  $\mathbb{R}^2$  em que cada ponto no plano determina uma distância  $r$  e um ângulo  $\theta$  em relação ao ponto fixo. Consideremos um semi eixo horizontal  $Ox$  a partir de um ponto  $O$ , chamado polo, que recebe o nome de eixo polar.

**Figura 16** – Coordenadas polares



Fonte: Própria Autora (2022).

Em coordenadas cartesianas podemos escrever a seguinte relação:

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} \operatorname{cos}\theta = \frac{x}{r} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\operatorname{cos}\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}.$$

## 5.4 EQUAÇÃO GERAL

Uma cônica em  $\mathbb{R}^2$  é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação a base canônica satisfazem a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (20)$$

onde  $A$  ou  $B$  ou  $C \neq 0$ . Podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0,$$

em relação a base  $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ .

### 5.4.1 Eliminando o termo misto

Para eliminarmos o termo misto na equação (20) faremos da seguinte maneira: Do Exemplo 3.8 e da Observação 3.5 temos que, dada

$$\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix},$$

existe uma matriz

$$P = \begin{pmatrix} \frac{B}{\|X_1\|} & \frac{B}{\|X_2\|} \\ \frac{2(\lambda_1 - A)}{\|X_1\|} & \frac{2(\lambda_2 - A)}{\|X_2\|} \end{pmatrix},$$

com

$$\|X_1\| = \sqrt{B^2 + 4(\lambda_1 - A)^2} \text{ e } \|X_2\| = \sqrt{B^2 + 4(\lambda_2 - A)^2}$$

tal que  $P^t A P = \mathcal{D}$ . onde

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} (A + C)/2 + (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2 & 0 \\ 0 & (A + C)/2 - (\sqrt{(A - C)^2 + B^2})/2 \end{pmatrix}.$$

Fazendo

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{B}{\|X_1\|} & \frac{B}{\|X_2\|} \\ \frac{2(\lambda_1 - A)}{\|X_1\|} & \frac{2(\lambda_2 - A)}{\|X_2\|} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ou

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{B}{\|X_1\|} & \frac{B}{\|X_2\|} \\ \frac{2(\lambda_1 - A)}{\|X_1\|} & \frac{2(\lambda_2 - A)}{\|X_2\|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

a cônica toma a forma

$$(PX')^t APX' + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} PX' + F = 0 \text{ ou } X'^t \mathcal{D}X' + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} PX' + F = 0.$$

De modo que se

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

e

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \frac{(A+C)+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{2} \end{pmatrix},$$

então

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

é a equação da cônica, que tem a vantagem de não ter termo misto (isto é, termos em  $x'y'$ ), onde  $A' = \frac{(A+C)+\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{2}$ ,  $C' = \frac{(A+C)-\sqrt{(A-C)^2+B^2}}{2}$ ,  $D' = DB + 2E(\lambda_1 - A)$ ,  $E' = DB + 2E(\lambda_2 - A)$  e  $F' = F$ .

Assim,

$$\begin{aligned} A' \left( x'^2 + 2x' \frac{D'}{2A'} + \frac{D'^2}{4A'^2} \right) + C' \left( y'^2 + 2y' \frac{E'}{2C'} + \frac{E'^2}{4C'^2} \right) &= \frac{D'^2}{4A'} + \frac{E'^2}{4C'} - F' \\ A' \left( x' + \frac{D'}{2A'} \right)^2 + C' \left( y' + \frac{E'}{2C'} \right)^2 &= \frac{C'D'^2 + A'E'^2 - 4A'C'F'}{4A'C'} \end{aligned}$$

Fazendo  $x_0 = -\frac{D'}{2A'}$ ,  $y_0 = -\frac{E'}{2C'}$  e  $G = C'D'^2 + A'E'^2 - 4A'C'F'$ , teremos

$$A'(x' - x_0)^2 + C'(y' - y_0)^2 = \frac{G}{4A'C'}. \quad (21)$$

Da equação 21, podemos obter três casos:

1.  $A'C' > 0$

$$A'(x' - x_0)^2 + C''(y' - y_0)^2 = \frac{G}{4A'C'}$$

Se  $G = 0$ , e escrevendo  $A' = \pm \frac{1}{a^2}$  e  $C' = \pm \frac{1}{b^2}$  teremos:

$$\left(\frac{x' - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y' - y_0}{b}\right)^2 = 0$$

Logo, a equação representa o ponto  $(x_0, y_0)$ .

Se  $G \neq 0$ , e escrevendo  $\frac{4(A')^2 C'}{G} = \pm \frac{1}{a^2}$  e  $\frac{4A'(C')^2}{G} = \pm \frac{1}{b^2}$  e dividindo ambos os membros da equação 21 por  $\frac{G}{4A'C'}$  teremos:

$$\left(\frac{x' - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y' - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Logo, a equação representa uma elipse.

2.  $A'C' < 0$

Se  $G = 0$ , e escrevendo  $A' = \pm \frac{1}{a^2}$  e  $C' = \pm \frac{1}{b^2}$  teremos:

$$\left(\frac{x' - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y' - y_0}{b}\right)^2 = 0$$

Logo, a equação representa duas retas concorrentes.

Se  $G \neq 0$ , e escrevendo  $\frac{4(A')^2 C'}{G} = \pm \frac{1}{a^2}$  e  $\frac{4A'(C')^2}{G} = \pm \frac{1}{b^2}$  e dividindo ambos os membros da equação 21 por  $\frac{G}{4A'C'}$  teremos:

$$\left(\frac{x' - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y' - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Logo, a equação representa uma hipérbole.

3.  $A'C' = 0$  teremos que  $A' = 0$  e  $C' \neq 0$  ou  $A' \neq 0$  e  $C' = 0$

Suponhamos  $A' = 0$  e  $C' \neq 0$ . Então a equação 21 fica da seguinte maneira:

$$C'(y' - y_0)^2 + D'x' + F' = 0$$

Se  $D' \neq 0$ , então

$$(y' - y_0)^2 = -\frac{D}{C} \left( x + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4CD} \right)$$

Logo, a equação representa uma parábola.

Se  $D' = 0$ , então

$$C''(y' - y_0)^2 + F' = 0$$

Se  $F' > 0$ , então a equação representa o conjunto vazio.

Se  $F' < 0$ , então a equação representa duas retas paralelas.

Se  $F' = 0$ , então a equação representa uma reta.

## 6 APLICAÇÕES

Neste capítulo, veremos algumas das aplicações das cônicas, que vai desde a física até a engenharia.

### 6.1 PARÁBOLA

As parábolas são encontradas em diversos momentos no nosso cotidiano, como por exemplo as antenas parabólicas que captam ondas eletromagnéticas de satélites que estão em o órbita ao redor da terra. Outro exemplo bastante comum, são as pontes suspensas. Nela, a passarela contínua é sustentada por vários cabos metálicos ligados a dois cabos maiores, estes estão ligados às torres de sustentação. Os tirantes são espaçados, uniformemente, com isso a carga da ponte é distribuída de forma uniforme nos cabos, que formam uma parábola. A parábolas possuem propriedade refletora, ou seja, um raio que incide paralelo ao eixo de simetria reflete-se passando pelo foco, onde encontra-se um receptor de ondas que enviará o sinal para um conversor. Essa propriedade contribui para a construção de telescópios, antenas, radares, faróis e entre outras coisas. Arquimedes, ao explorar essa propriedade, ajudou a lançar as bases para o entendimento moderno das seções cônicas e suas aplicações práticas. Já na física a parábola descreve a trajetória de um objeto em queda livre, sob efeito da gravidade. Essa trajetória é fundamental para podermos compreender o trajeto do objeto.

**Figura 17** – Lançamento vertical



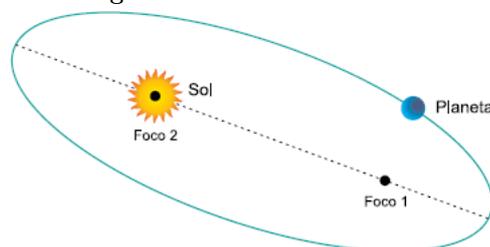
Fonte: Proenem (2015).

**Figura 18** – Ponte Hercílio Luz

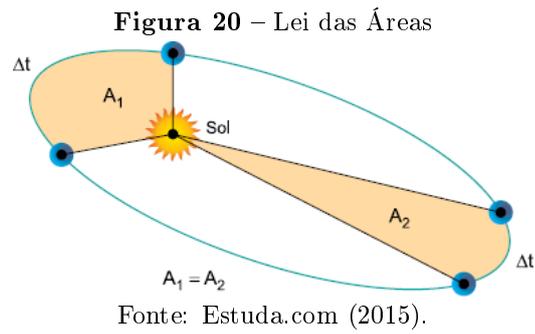
Fonte: Brito (2015).

## 6.2 ELIPSE

A elipse é bastante comum na arquitetura quando se fala em *desing*. Um grande exemplo é o Coliseu de Roma, considerado uma maravilha da arquitetura antiga. Sua forma elíptica possibilitava que um grande número de espectadores assistissem aos eventos, como lutas e jogos, além de ajudar na visibilidade, estabilidade da estrutura e na acústica, permitindo a propagação do som de forma eficiente. Essas combinações de funcionalidades e estética são algumas das razões pelas quais o Coliseu continua a ser um ícone da engenharia romana. A Lei das órbitas de Keples afirma que os planetas se movimentam ao redor do sol em forma de elipse, onde o sol é um dos focos, isso significa que a distância entre um planeta e o sol varia ao longo da trajetória. Já a Lei das Áreas, afirma que uma linha imaginária que liga o sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais. O que significa que os planetas se movem mais rapidamente quando estão mais próximos do sol e mais lentamente quando estão mais afastados.

**Figura 19** – Lei das Órbitas

Fonte: Estuda.com (2015).



**Figura 21 – Coliseu de Roma**



Fonte: Temática IF (2016).

### 6.3 HIPÉRBOLE

Assim como as elipses, as hipérbolas também possuem propriedades reflexivas, pois podem espalhar ou redirecionar a luz de maneira específica. O que auxilia no funcionamento de telescópios que precisam lidar com vários ângulos de incidência. Já nos telescópios de radio frequência, que utilizam superfícies hiperbólicas, são projetados para direcionar as ondas para um ponto focal, onde os detectores estão localizados.

**Figura 22 – Telescópio de Rádio frequência**



Fonte: AUN (2017).

Essas aplicações demonstram a versatilidade e a relevância das cônicas em várias disciplinas, mostrando como um conceito matemático pode ter um impacto significativo no mundo real.

## 7 CONCLUSÃO

Finalizamos esse trabalho ressaltando o quanto a geometria é importante na nossa sociedade, principalmente as cônicas que estão presentes em diversos contextos que facilitam nossa vida, pois como vimos, as encontramos desde a construção civil, até a física.

O estudo das cônicas é um testemunho da evolução do pensamento matemático e científico ao longo da história. Desde a antiguidade até os dias atuais, as cônicas não apenas enriqueceram a matemática, mas também moldaram nossa compreensão do mundo físico. A sua história reflete a interconexão entre diferentes áreas do conhecimento e a contínua busca humana por entender e descrever a realidade.

As equações quadráticas apresentadas têm grande importância na descrição geométrica de várias cônicas, e sua análise é fundamental para a compreensão de suas propriedades e aplicações. Dependendo dos coeficientes da equação, podemos identificar o tipo de cônica representada, o que permite o estudo de fenômenos físicos, como as órbitas dos planetas (elipses), ou de sistemas ópticos, como espelhos parabólicos e lentes. A compreensão da equação quadrática de duas variáveis é, portanto, um passo essencial para o aprofundamento na geometria analítica e nas suas aplicações.

Por fim, esperamos que este trabalho auxilie a graduandos a compreender um pouco mais sobre as cônicas e que possa servir como base para a pesquisas que possam surgir.

## REFERÊNCIAS

- AUN - Agência Universitária de Notícias. **USP** conduz instalação do único radiotelescópio capaz de enxergar o Sol. [S.I], 2017. Disponível em: <https://aun.webhostusp.sti.usp.br/index.php/2017/06/20/usp-conduz-instalacao-do-unico-radiotelescopio-capaz-de-enxergar-sol/>. Acesso em: 12 nov. 2024.
- BARQUERO, Isaac et al. **Curvas cónicas**. [S.I], 2015. Disponível em: <https://flowvella.com/s/9x4/D7342B51-A8EB-4804-A00C-883D4E4E897A>. Acesso em: 12 nov. 2024.
- BOLDRINI, José Luiz; Costa, Sueli IR; Figueredo, VL; Wetzler, Henry G. **Álgebra linear**. Harper & Row, 1980.
- BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Editora Blucher, 1996.
- BRITO, Fernando. **Matemática com Google Earth**. [S.I], 2015. Disponível em: <http://matematicacomge.blogspot.com/2015/01/pontes-penseis.html>. Acesso em: 12 nov. 2024.
- ESTUDA.COM. **Questão**. [S.I], 2015. Disponível em: <https://app.estuda.com/questoes/?id=999273>. Acesso em: 12 nov. 2024.
- OLIVEIRA, Ivan de Camargo; Boulos, Paulo. **Geometria analítica: um tratamento vetorial**. 1987.
- PROENEM. **Lançamento vertical e queda livre**. [S.I], 2015. Disponível em: <https://proenem.com.br/enem/fisica/lancamento-vertical-e-queda-livre/>. Acesso em: 12 nov. 2024.
- REIS, G Lima; SILVA, V Vilmar. **Geometria Analítica**. Segunda edição. *Livros Técnicos e Científicos Editora*, 1997.
- TEMÁTICA IF. **Matemática por temas**. [S.I], 2016. Disponível em: <http://tematicaif.blogspot.com/2016/09/aplicacoes-ellipse.html>. Acesso em: 12 nov. 2024.
- UNIVERSO DA FÍSICA. **História da Ciência**. [S.I], 2004. Disponível em: <https://universodafisicaufes.wordpress.com/apolonio/>. Acesso em: 12 nov. 2024.
- WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**—São Paulo. 2000.