UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JHONATHAN OLIVEIRA DE SENA

OS PARADOXAIS CONJUNTOS INFINITOS: EXISTEM INFINITOS MAIORES QUE OUTROS

REDENÇÃO - CE

2021

JHONATHAN OLIVEIRA DE SENA

OS PARADOXAIS CONJUNTOS INFINITOS: EXISTEM INFINITOS MAIORES QUE OUTROS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.
Área de concentração: Matemática.

Orientador(a): Prof. Dr. Marcelo Dario dos Santos Amaral

REDENÇÃO - CE

2021

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Sena, Jhonathan Oliveira.

S477p

Os paradoxais conjuntos infinitos: existem infinitos maiores que outros / Jhonathan Oliveira de Sena. - Redenção, 2021.
27f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Dario dos Santos Amaral.

1. Matemática. 2. Teoria dos conjuntos. I. Título

CE/UF/BSP CDD 510

JHONATHAN OLIVEIRA DE SENA

OS PARADOXAIS CONJUNTOS INFINITOS: EXISTEM INFINITOS MAIORES QUE OUTROS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 23/08/2021

BANCA EXAMINADORA

Marcelo Dário dos S. Amaral

Prof. Dr. Marcelo Dário dos Santos Amaral (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Amanda A. F. Nunes.

Profa. Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Weslley Marinho Lozório

Prof. Dr. Weslley Marinho Lozório
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dedico este trabalho a meu Deus, que sempre me abençoou com sua graça e misericórdia. E dedico este trabalho a todos os meus familiares, amigos, colegas e professores que contribuíram para esse feito.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço ao meu Deus por ter me dado forças e determinação para poder chegar até aqui, podendo finalizar mais uma etapa de minha vida, agradeço aos meus pais que sempre me incentivaram a continuar aqui, apesar das dificuldades e pensamentos de desistência.

Agradeço aos meus familiares e meus próximos que também incentivaram, me deram apoio emocional que contribuiu muito nessa minha carreira, quero deixar meus sinceros agradecimentos em específico ao professor Bernardo Torres, uma das pessoas que mais me ajudou nessa carreira acadêmica, sou muito grato.

Quero agradecer imensamente ao meu orientador Dr. Marcelo Dario dos Santos Amaral, uma pessoa que pra mim é mais que um orientador e professor, mas sim um amigo, que em momentos dificeis me incentivou a não desistir, sempre me falando que iria dar certo, imensamente grato.

Agradeço a todos os meus colegas que tiveram comigo, agradeço a UNILAB, a CAPES por nos dar oportunidades de bolsas que também foi motivo para me continuar firme nessa trajetória e a todos os professores que me ajudaram.

“O que é impossível para as pessoas é possível para Deus."(Lucas 18:27)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo mostrar que existe conjuntos infinitos maiores que outros conjuntos infinitos, ou seja, há conjuntos com maior cardinalidades que outros. Cardinalidade é a noção matemática que extende a noção de número de elementos em conjuntos finitos. Por ser algo contra-intuitivo e trazer possíveis pardoxos o tema traz bastante interesse das pessoas, inclusive não matemáticos. Mostraremos que “em um certo sentido"o conjunto dos números naturais é “menor dos conjuntos infinitos", e que através do argumento de diagonalização de Cantor os reais é um conjunto não-enumerável e, portanto, um infinito maior que o dos números naturais.

.

Palavras-chave: Conjuntos Enumeráveis. Conjuntos Não-Enumeráveis. Infinito.

ABSTRACT

This work aims to show that there are infinite sets greater than other infinite sets, that is, there are sets with greater cardinalities than others. Cardinality is the mathematical notion that extends the notion of number of elements in finite sets. Because it is something counter-intuitive and brings possible paradoxes, the theme brings a lot of interest from people, including non-mathematicians. We will show that “in a sense", the set of natural numbers is “smallest of infinite sets", and that through Cantor’s diagonalization argument the reals are a non-countable set and therefore an infinite greater than that of natural numbers.

.

Keywords: Enumerable Sets. Non-Enumerable Sets. Infinite.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Conjuntos infinitos desperta bastante interesse da comunidade matemática e não matemática. Muito pelo infinito ser algo de difícil compreesão, inclusive, sendo matéria de estudo da filosofia. Somos acostumados com o finito então se fatos que acontecem em conjuntos finitos não acontecem em conjuntos infinitos costumam causar bastante estranheza. Um dos mais comuns deles que pode exemplificar o afirmado é que não é possível encontrar uma bijeção de um conjunto finito com uma parte própria sua, enquanto que um conjunto é infinito justamente se é possível estabelecer uma bijeção deste conjunto com uma parte própria sua, ver corolário 4.1

Na origem do processo de contagem está subentendido o conceito de função bijetiva. Quando nossos antepassados contavam cada ovelha que saía e tinha que voltar separando uma pedra para aquela ovelha. De fato a cardinalidade coincide com o que chamamos de número de elementos quando tratamos de um conjunto finito. Esta mesma noção de bijeção foi usada por Joge Cantor no século XIX para definir um conjunto infinito e sua cardinalidade (extensão para número de elementos em conjuntos infinitos).

Enunciarei o chamado paradoxo de Galileu para exemplicar mais uma vez o caráter contraintuitivo que conjuntos infinitos tem em relação a conjuntos finitos.

Conjuntos infinitos é um tema que se relaciona em uma área especifica da matemática, análise na reta, é de suma importância destacar o objetivo desse tema na área de análise na reta, por ser uma disciplina bastante temida no curso de matemática, tentaremos resumir o máximo possível para melhor ser a compreensão desse tema, por ser um tema bastante contraintuitivo, ou seja, trata-se de uma questão que muitos pensam que não faz sentido, porém, nesse tcc mostraremos justamente o contrário.

O objetivo desse trabalho, para aqueles estudantes mais curiosos, é mostrar que há conjuntos infinitos com mais cardinalidade que outros conjuntos infinitos, rigorosamente explicando, infinitos maiores que outros, alunos podem até se perguntar como isso é possivel, pois os conjuntos são infinitos, tendo em vista que cardinalidade é a medida do número de elementos nesse conjunto, ou seja, será que existe conjuntos infinitos maiores que outros conjuntos infinitos?

A resposta para esse questionamento é positiva, não podemos deixar de lembrar de um grande matemático que foi de fundamental importância nesse tema, Georg Cantor, o mesmo conseguiu mostrar que há conjuntos infinitos com mais cardinalidade que outros conjuntos infinitos que é o nosso objetivo mostrar que de fato existe. Começaremos mostrando alguns requisitos básicos para podermos ter a noção mínima do que está sendo mostrado, como; funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, são requisitos importantes nesse trabalho para podermos entender.

Após os pré-requisitos básicos começaremos com uma breve biografia de Georg Cantor, mostrando um pouco de sua trajetória e qual foi sua importância nessa área, uma história de vida dessa pessoa muito importante na matemática, falaremos também um pouco do parodoxo do hotel infinito de Hilbert, algo bastante curioso e que se relaciona muito com o tema de conjuntos infinitos maiores que outros infinitos.

Nos capítulos seguintes mostraremos algumas ferramentas necessárias para continuarmos a entender esse tema, como teoremas e corolários, mostrando suas demonstrações.

2 PRÉ-REQUISITOS BÁSICOS.

Aqui definiremos o que é uma função e alguns tipos de funções para podermos entender o real objetivo adiante.

Definição 2.1. *Dados dois conjuntos X e Y, uma função de X em Y é uma relação ou uma lei que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$. Neste caso X é dito domínio da função e Y é o contradomínio.*

2.1 FUNÇÃO INJETORA

Definição 2.2. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é injetora se leva elementos distintos em elementos distintos. Isto é, se nossa função f satisfazer*

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Equivalentemente,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

2.2 FUNÇÃO SOBREJETORA

Definição 2.3. *Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é dita sobrejetora se sua imagem coincide com o contradomínio, em outras palavras, "não sobram elementos no contradomínio". Isto é, se*

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \quad \textit{tal que} \quad f(x) = y.$$

2.3 FUNÇÃO BIJETORA

Definição 2.4. *Uma função é dita bijetora se é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.*

Lembre que composta de funções injetivas é injetiva. Se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ é injetiva então a composta $g \circ f : A \longrightarrow C$ também é injetiva.

Seguindo o mesmo raciocíno, composta de funções sobrejetivas é sobrejetiva. Logo, composta de funções bijetivas é bijetiva.

Aqui, enfatizaremos estes axiomas apenas porque eles serão bastante utilizados. Na verdade, eles são equivalentes. Em particular, quando se admite um é possível provar o outro.

Axioma 2.1 (Princípio da Boa ordenação)**.** *Todo subconjunto A não vazio dos naturais, possui um menor elemento.*

Axioma 2.2 (Princípio da Indução matemática)**.** *Seja $A \subset \mathbb{N}$ satisfazendo* *i.* $1 \in A$

ii. $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$

Então

$$A = \mathbb{N}.$$

2.4 UMA BREVE BIOGRAFIA DE GEORG CANTOR

Georg Ferninad Ludwing Phillip Cantor nasceu em 1845, na cidade de Saint - Petersburg, Rússia, mas viveu a maior parte de sua vida na Alemanha. Como desde muito cedo revelou talento e gosto pela matemática, o seu pai decidiu que havia de ser um grande engenheiro. Quando fez onze anos a família mudou-se para Frankfurt e Georg foi enviado para o Instituto Superior Politécnico Grand-Ducal para estudar engenharia. Em 1862, Georg viajou para Zurique para continuar os seus estudos, mas voltou para casa ainda naquele ano devido à morte do pai; ingressou em Setembro na Universidade de Berlim, para estudar Matemática, Física e Filosofia. Aí teve como professores matemáticos tão brilhantes como Kummer, Weierstrass e Kronecker. Cantor doutorou-se em 1867, tendo ficado a leccionar Matemática numa escola privada feminina devido à falta de lugares disponíveis na universidade.

Só dois anos depois ingressou na Faculdade da Universidade de Halle, uma instituição de ensino pouco prestigiada. Cinco anos depois, com 29 anos de idade, casou com Vally Guttmann, com quem teve 6 filhos, passou uma lua de mel em Interlaken, na Suíça, onde conheceu e se tornou amigo de um outro jovem matemático: Richard Dedekind, que dois anos antes tinha publicado a sua própria teoria sobre os irracionais. Georg Cantor tinha Leopold Kronecker como seu professor e inimigo na Universidade de Berlim, pois Kronecker vivia contrariando tudo que Cantor escrevia.

Em 1884, grande parte das teorias de Cantor tinham sido publicadas e quase completamente ignoradas, uma das poucas pessoas que não as ignorou foi um jovem escandinavo chamado Mittag-Leffler. Foi a ele que Cantor confessou todos os seus problemas, escrevendo-lhe durante um ano, cerca de uma carta por semana, a queixar-se da perseguição por parte de Kronecker. Mas, por essa altura, era já demasiado tarde. Os ataques agressivos de Kronecker tinham-se tornado insuportáveis.

Cantor nunca tinha sido muito assertivo na sua relação com o pai, sempre se submeteu docilmente, e agora mais uma vez estava a ser submetido por outro ser humano. Tal como todos os dominados, perdeu completamente a sua auto-estima, ficou profundamente deprimido e perdeu toda a fé em si próprio e no seu trabalho. Na primavera de 1884, Cantor teve um esgotamento nervoso.

Foram feitas umas tréguas temporárias entre os dois homens e a saúde de

Cantor melhorou. Em 1885, era ele próprio outra vez, exceto numa coisa: nunca mais escreveu; a sua criatividade parecia ter-se esgotado e durante o resto da sua vida só publicou mais três ensaios.

Os ataques de Kronecker rapidamente recomeçaram, mais ferozes do que nunca: dedicou as suas conferências a devastar as teorias de Cantor, continuou as suas intrigas para o manter afastado em Halle, e eliminou todos os artigos de Cantor do Crelle's Journal, do qual era editor.

Em 1881 Kronecker morreu e a sua influência maléfica foi desaparecendo gradualmente. Lentamente Cantor começou a receber o reconhecimento que merecia - depois de ter esperado mais de 20 anos. Foi então nomeado membro honorário da London Mathematical Society, eleito membro correspondente da Sociedade de Ciênciasem Gottingen, e em 1904 foi homenageado com uma medalha pela Royal Society of London.

Recordando a sua experiência recente, Cantor estava sempre pronto com uma palavra de apreço ou encorajamento para aqueles homens que continuavam a lutar. Em complemento fundou um jornal, o Deutsche Mathematiker-Vereinigung, como veículo para os trabalhos de jovens investigadores que pudessem não conseguir impor-se nos jornais controlados pelos matemáticos estabelecidos.

Para ele, no entanto, o reconhecimento chegou tarde demais; a infelicidade e amargura de tantos anos não podiam ser apagadas por um súbito jorro de fama e glória. Respeitado por todo o mundo, sentiu-se como um estrangeiro no seu próprio país: Cantor nunca chegou a receber um posto melhor do que aquele que tinha em Halle, pois estava já velho e doente para ir a outro lugar. Os seus ataques nervosos tornaram-se mais freqüentes e mais prolongados, até ter sido obrigado a resignar-se. Com 72 anos de idade, Georg Cantor morreu em um hospital psiquiátrico, no dia 6 de Janeiro de 1918.

3 CONJUNTOS FINITOS

Aqui enfatizaremos o que seria um conjunto finito já baseando-se nos pré-requisitos básicos.

Definição 3.1. *Um conjunto X é dito finito se ele é vazio ou está em bijeção com algum*

$$I_n := \{1, 2, 3, \cdots, n\}.$$

Exemplo 1. *Todos os conjuntos I_n para algum $n \in \mathbb{N}$ são finitos.*

Teorema 3.1. *Seja $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \longrightarrow A$, então $A = I_n$*

Demonstração. Usaremos indução em n. O resultado é óbvio para $n = 1$. Suponhamos que seja válido para um certo n e consideremos uma bijeção $f : I_{n+1} \longrightarrow A$. Ponhamos $a = f(n+1)$. A restrição de f a I_n fornece uma bijeção $f^{'} : I_n \longrightarrow A - \{a\}$. Se tivermos $A - \{a\} \subset I_n$, então, pela hipótese de indução, concluiremos que $A - \{a\} = I_n$, donde $a = n+1$ e $A = I_{n+1}$. Se, porém, não for $A - \{a\} \subset I_n$, então deve-se ter $n+1 \in A - \{a\}$. Neste caso existe $p \in I_{n+1}$ tal que $f(p) = n+1$. Então definiremos uma nova bijeção $g : I_{n+1} \longrightarrow A$ pondo $g(x) = f(x)$ se $x \neq p$ e $x \neq n+1$, então quanto $g(p) = a$, $g(n+1) = n+1$. Agora a restrição de g a I_n nos dará uma bijeção $g^{'} : I_n \longrightarrow A - \{n+1\}$. Evidentemente, $A - \{n+1\} \subset I_n$. Logo, pela hipótese de indução , $A - \{n+1\} = I_n$, donde $A = I_{n+1}$. Isto conclui a demonstração.

□

3.1 A CARDINALIDADE ESTÁ BEM POSTA

Diremos que dois conjuntos X e Y tem o mesmo número de elementos ou mesma cardinalidade escrevendo

$$\#X = \#Y$$

até mesmo para indicar que existe uma bijeção entre eles.

Proposição 3.1. *Se A é um subconjunto próprio de I_n não pode existir uma bijeção $f : A \longrightarrow I_n$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que a proposição seja falsa e considere $n_0 \in \mathbb{N}$, o menor número natural para qual existem um subconjunto próprio $A \subset I_{n_0}$ e uma bijeção $f : A \longrightarrow I_{n_0}$. Se $n_0 \in A$ então pelo teorema 3.1, existe uma bijeção $g : A \longrightarrow I_{n_0}$ com $g(n_0) = n_0$. Neste caso a restrição de g a $A - n_0$ é uma bijeção do subconjunto próprio $A - n_0$ sobre $I_{n_0 - 1}$ na qual contraria a minimalidade de n_0.

□

Corolário 3.1. *Não pode existir uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ de um conjunto finito X sobre uma parte própria sua, ou seja, $Y \subset X$.*

Demonstração. Seja X finito e $Y \subset X$ uma parte própria. Existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $\varphi : I_n \longrightarrow X$. Então o conjunto $A = \varphi^{-1}(Y)$ é uma parte própria de I_n. Chamemos de $\varphi_A : A \longrightarrow Y$ a bijeção obtida por restrição de φ a A. Se existisse uma bijeção $f : Y \longrightarrow X$, a composta $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_A : A \longrightarrow I_n$ seria também uma bijeção, contrariando a proposição 3.1 assim concluimos a demonstração.

□

Teorema 3.2. *Se existe uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$ então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, então* *existe uma bijeção $g : X \longrightarrow Y$ tal que*

$$g(a) = b.$$

Demonstração. Seja $b^{'} = f(a)$. Como f é sobrejetiva, então vai existir um $a^{'} \in X$ onde $f(a^{'}) = b$. Então definimos $g : X \longrightarrow Y$ pondo $g(a) = b$, $g(a^{'}) = b^{'}$ e $g(x) = f(x)$ se $x \in X$ não será igual a a nem $a^{'}$. É facil ver que g é bijeção.

□

Corolário 3.2. *Se $f : I_n \longrightarrow X$ e $g : I_m \longrightarrow X$ são bijeções, então $m = n$.*

Demonstração. Observe que se fosse $m < n$ então I_m seria um subconjunto próprio de I_n o que violaria a proposição 3.1, pois $g^{-1} \circ f : I_m \longrightarrow I_n$ é uma bijeção.

□

4 CONJUNTOS INFINITOS.

Aqui falaremos sobre conjuntos infinitos, mostrando sua definição e exemplificando para melhor compreender.

Definição 4.1. *Um conjunto é dito infinito se ele não é finito.*

Exemplo 2. *O exemplo padrão é o conjunto dos números naturais. De fato, claramente ele não é vazio. Agora, suponha que exista uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow I_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Como os naturais são positivos e fechados com respeito a soma, note que $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots f(n)$ também é um número natural, Porém, claramente ele não está na imagem de f. Isto contradiz o fato de que f é bijeção pois f não é nem mesmo sobrejeção.*

Proposição 4.1. *Se B é infinito e $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetiva então A é infinito e $\#B \leq \#A$*

Demonstração. Dado $y \in B$ escolhemos $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e assim podemos definir a função $g : B \longrightarrow A$ tal que $g^{-1} \circ f = x$, g é injetiva então pelo resultado anterior segue que A é infinito e $\#B \leq \#A$.

□

O resultado acima respalda que o resultado abaixo "mostra que o conjuto dos números naturais é o menor dos conjuntos infinitos". Ou pelo menos sua "classe".

Teorema 4.1. *Se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.*

Demonstração. Para cada subconjunto não vazio $A \subset X$, pegamos um elemento $x_A \in A$

(note que podemos fazer isto pelo axioma da escolha). Em diante, definimos $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ indutivamente. Pomos $f(1) = x_X$ e, supondo ja definidos $f(1), \ldots, f(n)$, escrevemos $A_n = X - \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Como X é infinito, A_n não é vazio. Definimos então $f(n+1) = x_{A_n}$. Isto completa a definição de f. Para provar que f é injetiva, sejam $m, n \in \mathbb{N}$, digamos com $m < n$. Então $f(m) \in \{f(1), \ldots, f(n-1)\}$ enquanto $f(n) \in \{X - \{f(1), \ldots, f(n-1)\}\}$. Logo teremos $f(m) \neq f(n)$.

□

Historicamente, a caracterização de conjuntos infinitos abaixo foi tomada por George Cantor como a definição de conjuntos infinitos.

Corolário 4.1. *Um conjunto X é dito infinito se e somente se admite uma bijeção com uma parte própria sua.*

Demonstração. Considere X infinito e $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ uma aplicação injetiva. Então escrevemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = x_n$. Consideremos o subconjunto próprio $Y = X - \{x_1\}$. Definimos então a bijeção $\varphi : X \longrightarrow Y$ pondo $\varphi(x) = x$ se x não é um dos x_n e $\varphi(x_n) = x_{n+1}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, se existe uma bijeção de X sobre um seu subconjunto proprio então X é infinito.

Exemplo 3. *Os naturais admitem uma bijeção com sua parte própria $\mathbb{N} - \{0\}$ dada por $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{0\}$ com $f(n) = n + 1$. Logo, pelo corolário acima temos uma nova prova de que os naturais é infinito,*

□

Definição 4.2. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ diz-se limitado quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p$ para todo $x \in X$.*

Proposição 4.2. *Um subconjunto X contido em $\mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado*

Demonstração. Observe se $X = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{N}$ é finito, pondo $p = x_1 + \cdots + x_n$ vemos que para todo $x \in X$ então $x \leq p$ logo X é limitado. Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{N}$ é limitado então $X \subset I_p$ para algum $p \in \mathbb{N}$, logo segue que X é infinito.

□

4.1 CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

Aqui dissertaremos sobre a classe dos "menores conjuntos infinitos", ou seja, aqueles que estão em bijeção com os naturais.

Definição 4.3. *Um conjunto X diz se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Neste caso, f chama-se uma enumeração dos elementos de X. Escrevendo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \ldots, f(n) = x_n, \ldots$ temos então $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.*

Exemplo 4. *Peguemos um subconjunto dos* $\mathbb{N}$ *é ele o conjunto* $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots, \}$ *dos números pares e definamos a bijeção* $f : \mathbb{N} \longrightarrow P$, *onde* $f(n) = 2n$. *e como* P *é um subconjunto próprio de* $\mathbb{N}$ *e está em bijeção com* $\mathbb{N}$. *Logo, temos que o conjunto dos números pares é enumerável.*

Exemplo 5. *Pegaremos o subconjunto de* $\mathbb{N}$ *é ele o conjunto* $I = \{1, 3, 5, 7 \cdots\}$ *o conjunto dos numeros ímpares e definamos a bijeção* $f : \mathbb{N} \longrightarrow I$ *onde* $f(n) = 2n + 1$ *e como* I *é uma subconjunto próprio de* $\mathbb{N}$ *e está em bijeção com* $\mathbb{N}$, *logo concluimos que o conjunto dos nÚmeros ímpares é enumerável.*

Exemplo 6. *O conjunto* $\mathbb{Z}$ *dos numeros inteiros é enumerável. Uma bijeção com os naturais pode ser definida como* $f(n) = \frac{n-1}{2}$ *para* n *ímpar e* $f(n) = \frac{-n}{2}$ *para* n *par.*

Os dois primeiros exemplos acima são facilmente enumeráveis pelo resultado abaixo

Teorema 4.2. *Todo subconjunto* $X \subset \mathbb{N}$ *é enumerável.*

Demonstração. Se X é finito, de fato, será enumerável por definição. Caso não seja, enumeramos os elementos de X pondo x_1 sendo o menor elemento de X, e supondo $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, escrevemos $A_n = X - \{x_1, \ldots, x_n\}$. Observando que $A_n \neq \emptyset$, pois X é infinito, então definimos x_{n+1} como sendo o menor elemento de A_n. Então $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Se exiStisse algum elemento $x \in X$ diferente de todos os x_n, teríamos então $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $x \in \mathbb{N}$ maior que todos os nÚmeros do conjunto infinito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ contrariando a proposição 4.2

□

Corolário 4.2. *Seja* $f : X \longrightarrow Y$ *injetiva. Se* Y *é enumerável então* X *também é.*

Demonstração. Consideremos o caso em que há uma bijeção $\phi : Y \longrightarrow \mathbb{N}$. Então $\phi \circ f : X \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma bijeção de X sobre um subconjunto de $\mathbb{N}$, o qual é enumerável, como foi mostrado no teorema acima. □

Corolário 4.3. *Seja* $f : X \longrightarrow Y$ *sobrejetiva. Se* X *é enumerável então* Y *também é.*

Demonstração. Para todo $y \in Y$ podemos escolher um $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$. Isso nos proporciona uma aplicação da inversa, ou seja, $g : Y \longrightarrow X$ onde $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Então com isso, g é injetiva, e pelo corolário anterior Y é enumerável.

□

O resultado acima é empregado nos dois corolários abaixo.

Corolário 4.4. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Observe que se X e Y são enumeráveis então $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ e $g : \mathbb{N} \longrightarrow Y$ são sobrejeções, então $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow X\times Y$, dada por $\varphi(m,n) = (f(m), g(n))$ é sobrejetiva. Com isso, basta provar que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável. Então consideremos $\psi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $\psi(m,n) = 2^m \cdot 3^n$. Pela unicidade da decomposição de um número em fatores primos, ou seja, todo número composto pode ser decomposto em produto de primos, segue então que ψ é injetiva. Então $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável.

□

Pelo resultado acima mostraremos que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável e utilizaremos este fato para mostrar que O corolário seguinte. Emfim, para mostrar que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável considere $\psi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $\psi(m,n) = 2^m \cdot 3^n$ a qual é injetiva pelo Teorema Fundamental da Aritimética.

Corolário 4.5. *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração. Considere X_1, X_2, X_3,...,X_n,... enumeráveis, então haverá sobrejeções em $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow X_1$, $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow X_2$,...,$f_n : \mathbb{N} \longrightarrow X_n$,... . Tomando $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, então definimos a sobrejeção $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow X$ pondo $f(m,n) = f_n(m)$. Pelos dois últimos corolários, demonstramos o resultado.

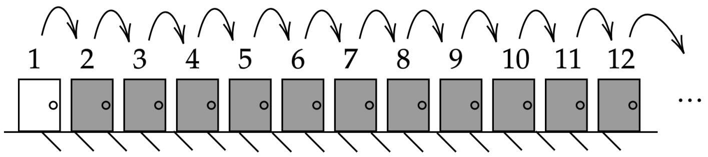
□

5 O PARADOXO DO HOTEL INFINITO DE HILBERT

Esse paradoxo é um experimento mental que envolve conjuntos infinitos apresentado pelo matemático alemão David Hilbert, na qual ficou muito famoso por trazer a grande curiosidade de mostrar que há infinitos com mesma cardinalidade, mostrando isso atráves de seu paradoxo, então, considere hipoteticamente um hotel com infinitos quartos, onde esses infinitos quartos estão todos ocupados pelos hÓspedes, agora suponha que chegue um novo hÓspede querendo um quarto, veja que se o hotel tivesse um número finito de quartos não seria possível acomodar esse hÓspede, mas como o hotel possui infinitos quartos então podemos fazer da seguinte forma, o hÓspede que está no quarto 1 vai para o quarto 2, e o hospede que está no quarto 2 vai para o quarto 3, e assim segue simultaneamente, movendo o hÓspede do quarto n para o quarto $n+1$, com isso o quarto 1 fica vazio e o hÓspede pode se acomodar no quarto 1, ou seja, mesmo com os infinitos quartos ocupados, tivemos um quarto livre para o hÓspede. (O que está por detrás aqui é a função do exemplo 3).

Considere um ônibus com infinitos (enumerável) passageiros querendo se hospedar, nesse caso, faremos da seguinte forma, cada hÓspede que está em seu quarto vai

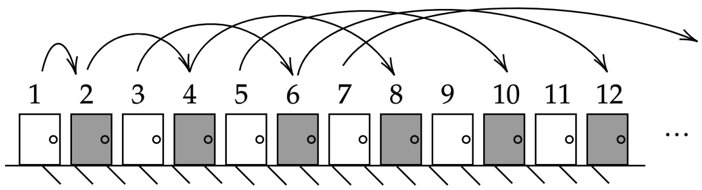
Figura 1.1 - Hotel de Hilbert



Fonte:https://jpmacmanus.me/2020/07/26/hilbertshotel.html

para o quarto cujo número é o dobro do número de seu quarto, ou seja, o hÓspede do quarto 1 vai para o quarto 2, o hÓspede do quarto 2 vai para o quarto 4 e assim segue simultaneamente, ou seja, o hÓspede n vai para o quarto $2n$, nisso todos os quartos de números impares ficarão vagos, sendo assim podendo hospedar os infinitos passageiros do onibus. Repare que usamos a função do exemplo 4.

Figura 1.2 - Hotel de Hilbert



Fonte:https://jpmacmanus.me/2020/07/26/hilbertshotel.html

Agora suponha que chegue infinitos ônibus com infinitos (enumerável) passageiros em cada ônibus, para acomodar os infinitos passageiros dos infinitos ônibus, será feita da seguinte forma, suponha que os assentos dos ônibus estejam todos numerados, no primeiro ônibus coloque os passageiros nos quartos 3^n onde n representa o número do assento do passageiro, por exemplo, o passageiro do assento 1 vai para o quarto 3^1, ou seja, o quarto 3, o passageiro do assento 2 vai para o quarto 3^2, ou seja, vai para o quarto 9 e assim segue simultaneamente, e para o ônibus 2 coloque os passageiros nos quartos 5^n, por exemplo, o primeiro passageiro vai para o quarto 5^1, ou seja, vai para o quarto 5, e assim segue para os próximos ônibus, uma sequência de números primos. Este fato está estritamente relacionado com o fato de que uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, corolário 4.5.

Isso pode ser bastante contra intuitivo para alguns, se tivéssemos trabalhando com um hotel finito o número de quartos com numeração impar seria claramente menor que o número total de quartos do hotel. No entanto, no hotel de Hilbert o número de quartos com numeração impar é igual ao número total de quartos do hotel, em termos matemáticos, a cardinalidade do subconjunto contendo apenas os quartos com numeração ímpar é a mesma do conjunto contendo todos os quartos.

6 ARGUMENTO DA DIAGONALIZAÇÃO DE CANTOR

O argumento da diagonalização de cantor foi publicado em 1891 pelo próprio Georg Cantor como uma demonstração matemática de que existem conjuntos infinitos não enumeráveis, como ja vimos o que são conjuntos enumeráveis então prosseguimos, nisso, tais conjuntos são agora conhecidos como conjuntos incontáveis, e o tamanho dos conjuntos infinitos agora é tratada pela teoria dos números cardinais que Cantor iniciou. Sendo que o argumento da diagonalização de Cantor não foi a primeira prova que mostra que tais conjuntos são não enumeráveis, ele realmente foi publicado bem posteriormente do que a sua primeira prova, que apareceu em 1874. No entanto, essa é uma técnica muito forte e geral para podermos demonstrar a enumerabilidade de tais conjuntos, um exemplo que podemos citar como prova de que o conjunto é não enumerável é o conjunto $\mathbb{R}$, podendo ser demonstrada facilmente com essa técnica de Cantor, veremos a seguir.

6.1 CONJUNTOS NÃO-ENUMERÁVEIS

Aqui, de fato, mostraremos que a resposta para a pergunta se existem infinitos maiores que outros é afirmativa.

Nesse teorema, usaremos a técnica da diagonalização de Georg Cantor para mostrarmos que o conjunto dos números reais é não enumerável, para facilitar, se conseguirmos mostrar que um subconjunto próprio de $\mathbb{R}$ é não enumerável, automaticamente mostramos que toda a reta é não enumerável, então iremos mostrar que o intervalo (0,1) é não enumerável.

Teorema 6.1. *O conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável*

Demonstração. Suponha que (0,1) é enumerável, então temos uma bijeção:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$$

Se $x \in (0,1)$, então $x = 0,\alpha_{i1}\alpha_{i2}\alpha_{i3}...\alpha_{ij}...$ e definimos um $\alpha_{ij} \in \{0,1,2,3,...,9\}$. observe agora que vamos definir nossas imagens, logo teremos:

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\cdots\alpha_{1n}\cdots \\ f(2) & = & 0,\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\cdots\alpha_{2n}\cdots \\ f(3) & = & 0,\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\cdots\alpha_{3n}\cdots \\ \vdots & = & \vdots \\ f(n) & = & 0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\cdots\alpha_{nn}\cdots \\ \vdots & = & \vdots \end{array}$$

Por construção, considere $Y = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n\cdots$, onde $Y \in (0,1)$ tal que

$\alpha_i \neq \alpha_{ii}$. Observe que pela diagonalização de Cantor, o nosso Y considerado não estar em nenhum dos $f(n)$ pois $\alpha_i \neq \alpha_{ii}$, ou seja, $\alpha_1 \neq \alpha_{11}$, $\alpha_2 \neq \alpha_{22} \cdots$, mas observe que chegamos em uma contradição, pois assumimos que há uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$, logo concluimos que $(0,1)$ é não enumerável, e como $(0,1)$ é subconjunto próprio de $\mathbb{R}$, concluimos que $\mathbb{R}$ é não enumerável.

□

Proposição 6.1. *Se A é infinito e $f : A \longrightarrow B$ é injetiva então B é infinito e $\#A \leq \#B$*

Demonstração. $f : A \longrightarrow f(A)$ é bijeção e $f(A) \subset B$ é infinito, logo B é infinito, observe que B não pode ser finito, pois todo subconjunto de um conjunto finito é finito. $f(A)$ não pode ser finito, caso contrário, A estaria em bijeção com um conjunto finito, o que implicaria que A é finito, e portanto, $\#A \leq \#B$ por A ter a mesma quantidade de elementos de $f(A)$ pois é bijeção.

□

Proposição 6.2. *Quaisquer dois intervalos da reta, tem mesma cardinalidade.*

Demonstração. Vamos mostrar uma bijeção do intervalo $(-1,1)$ com um intervalo qualquer, ou seja, $f : (-1,1) \longrightarrow (a,b)$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ é bijeção em $f(x) = \frac{1}{2}[(b-a)x + a + b]$ nisso temos uma bijeção, vamos mostrar a injetividade. Sejam $x, x^{'} \in (-1,1)$ tal que $f(x) = f(x^{'})$, assim teremos

$$\frac{1}{2}[(b-a)x + a + b] = \frac{1}{2}[(b-a)x^{'} + a + b]$$

cancelando membro a membro, teremos:

$$\begin{aligned} (b-a)x + a + b &= (b-a)x^{'} + a + a \\ (b-a)x &= (b-a)x^{'} \\ x &= x^{'} \end{aligned}$$

o que nos dar a injetividade. Agora mostraremos a sobrejetividade, seja $y \in (a,b)$, observe que devemos encontrar $x \in (-1,1)$ tal que $f(x) = y$, então supondo que existe $x \in (-1,1)$ para satisfazer a condição de sobrejetividade, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(b-a)x + a + b] &= y \\ (b-a)x + a + b &= 2y \\ x &= \frac{2y - (b+a)}{(b-a)} \end{aligned}$$

entao, dado um $y \in (a,b)$ o nosso x encontrado vai estar no intervalo $(-1,1)$ e vai satisfazer $f(x) = y$, o que mostra a sobrejetividade, implicando na bijeção. Agora veja que no teorema 6.1 mostramos que o intervalo (0,1) é não-enumerável, então em particular, o intervalo $(-1,1)$ também será não-enumeravél, pois $(0,1) \subset (-1,1)$ e como $(-1,1)$ está em bijeção com (a,b), logo, (a,b) é não-enumerável.

$\square$

Na proposição seguinte, mostraremos que um simples intervalo aberto, não vazio, qualquer da reta pode ser toda a reta real, ou seja, ambos são não-enumeráveis e tem mesma cardinalidade.

Proposição 6.3. *A cardinalidade da reta é mesma de um intervalo aberto não vazio.*

Demonstração. Pelo resultado anterior basta mostrar que $\mathbb{R}$ está em bijeção com (-1,1). Para isso defina a função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$, dada por $\phi(x) = \frac{x}{(1+|x|)}$, é uma bijeção, provaremos que de fato é bijeção, cuja inversa é $\psi : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\psi(y) = \frac{y}{(1-|y|)}$, pois teremos que $\phi(\psi(y)) = y$ e $\psi(\phi(x)) = x$, mostrando que ambas as compostas dão identidade:

$$\begin{aligned}
\phi(\psi(y)) &= \phi(\frac{y}{1-|y|}) \\
&= \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1+\frac{y}{1-|y|}} \\
&= \frac{\frac{y}{1-|y|}}{\frac{1-|y|+|y|}{1-|y|}}
\end{aligned}$$

veja que podemos cancelar $1-|y|$ com $1-|y|$, assim teremos:

$$\phi(\psi(y)) = \frac{y}{1-|y|+|y|}$$

cancelando $|y|$ com $|y|$ teremos:

$$\phi(\psi(y)) = y$$

Agora vemos que $\psi(\phi(x)) = x$, de fato;

$$
\begin{aligned}
\psi(\phi(x)) &= \psi(\frac{x}{1+|x|}) \\
&= \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1-\frac{|x|}{1+|x|}} \\
&= \frac{\frac{x}{1+|x|}}{\frac{1+|x|-|x|}{1+|x|}}
\end{aligned}
$$

Veja que posso cancelar $1+|x|$ com $1+|x|$, sendo assim, teremos:

$$
\begin{aligned}
\psi(\phi(x)) &= \frac{x}{1+|x|-|x|} \\
&= x
\end{aligned}
$$

$\square$

Note que a cardinalidade da reta não é maior que a de um subconjunto próprio como um intervalo não degenerado. Isso leva a importante e famosa questão da hipótese do continuum que falaremos um pouco. Com isso, demostramos a proposição.

6.2 HIPÓTESE DO CONTINUUM

A hipótese do continuum é uma conjectura proposta por Georg Cantor, que consiste no seguinte; "Não existe nenhum conjunto que sua cardinalidade esteja entre a dos naturais e a dos reais", ou seja:

$$\#\mathbb{N} < \#A < \#\mathbb{R}$$

Cantor não estava satisfeito com as notações desses números transfinitos então começou a denota-los usando a primeira letra do alfabeto hebraico $\aleph$(aleph), assim Cantor representou da seguinte forma:

$$\aleph_0 = \#\mathbb{N}$$

.

$$2^{\aleph_0} = \#\mathbb{R}$$

. Mas por que Cantor escolheu essa letra $\aleph$?

Cantor conhecia a tradição judaica e principalmente seu alfabeto, que por vez sabia significados de tais letras que para ele seria interessante serem representadas na matemática, a letra hebraica **aleph** representa a natureza infinita e a unicidade de Deus, um novo início para matemática, o início do infinito real, essa era a representativade que Cantor usou.

A cardinalidade do conjunto dos números reais, na qual Cantor denotou por $2^{\aleph_0}$, chamado de continuum, é estritamente maior que a cardinalidade dos naturais, denotado por $\aleph_0$. Essa hipótese nos diz que entre esses dois tamanhos de infinitos não há nenhum outro, como ja foi citado acima, mas representando na forma que Cantor escolheu, teremos: Não existe nenhum conjunto U tal que:

$$\aleph_0 < U < 2^{\aleph_0}$$

Cantor acabou morrendo com transtornos mentais em uma clínica de repouso no ano de 1918, deixando esse problema em aberto sem conseguir prova-lo.

No ano de 1938, o matemático austríaco Kurt Godel, ele mostra que em qualquer sistema pode haver proposições que não há como demonstrar(teorema da incompletude de Godel). Mostrou também que nos axiomas da teoria dos conjuntos a hipótese do continuum era consistente, ou seja, ela não mostrava nenhuma contradição. Godel também desenvolveu transtornos mentais e infelizmente não conseguiu mostrar se a negação dessa hipótese era consistente em relação a teoria dos conjuntos.

Já em 1963, Paul Cohen avançou um pouco mais sobre a hipótese, ele mostrou que essa hopótese era independente de todos os axiomas da teoria dos conjuntos, ou seja, ela poderia ser tomada tanto verdadeira como falsa. Fato muito interessante, pois com isso, a hipóteses não poderia ser provada e nem refutada no sistema atual, Paul Cohen ganhou a medalha fields por esse trabalho feito em 1966. Esses dois resultados, diz que quem aceita as teorias dos conjuntos pode adotar tanto a hipótese do continuum como sua negação.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De modo geral, neste trabalho estudamos de forma breve os conceitos que estão relacionados com conjuntos infinitos, comparando suas magnitudes usando de uma técnica que o matemático Georg Cantor utilizou para mostrar que há infinitos maiores que outros, tendo em vista que tomamos como base os ensinamentos na disciplina de análise na reta, na qual é apresentada no curso de licenciatura em matamática na UNILAB. Tentamos o maxímo possível levar todos o conceitos como ferramenta para entendar o nosso principal objetivo nesse trabalho, enunciando os principais teoremas baseado em pesquisa nos livros de análise real. É de suma importância destacar temas que chamem bastante atenção para os estudantes na área de matemática, pois trata-se de um tema que aparentemente não faz sentido, e nesse trabalho mostra que é possível sim, existir infinitos maiores que outros.

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise** *- Volume 1, 14ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.*

LIMA, Elon Lages. **Análise Real** *- Funções de uma variável. volume 1. 12ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.*

HOTEL DE HILBERT. Laura Leticia Ramos Rifo. Patrícia Roman. Alison Marcelo Van Der Laan Melo. **Youtube**. *19 mar. 2012. 10min. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=BsS0Kt1f8QY>. Acesso em 07 jul. de 2021.*

AGUILAR, IVAN; DIAS, MARINA SEQUEIROS. A Construção dos Números Reais e suas Extensões. Rio de Janeiro: UFF, 2015.

ANDRADE, M. G. C. Um Breve Passeio Ao Infinito Real De Cantor. V Bienal da SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. UFPB – Universidade Federal da Paraíba. 18 a 22 de outubro de 2010.

SANTOS, JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA. Introdução á teoria dos números. -3ª ed. - Rio de Janeiro: IMPA, 2018.