UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

FERNANDO GOMES RAULINO FILHO

A MATEMÁTICA ATRAVÉS DOS JOGOS

REDENÇÃO
2024

FERNANDO GOMES RAULINO FILHO

A MATEMÁTICA ATRAVÉS DOS JOGOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO

2024

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Raulino Filho, Fernando Gomes.

R245m

A matemática através dos jogos / Fernando Gomes Raulino Filho. - Redenção, 2024.
69f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2024.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva.

1. Matemática - Jogos. 2. Problemas. 3. Resoluções. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 510

FERNANDO GOMES RAULINO FILHO

A MATEMÁTICA ATRAVÉS DOS JOGOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 26 / 11 / 2024.

BANCA EXAMINADORA

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Profª Dra. Tatiana Skoraia
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Rafael Jorge Pontes Diógenes.

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que me deram apoio durante o decorrer da faculdade, especialmente à Maria Zeneide de Lima Raulino, por sempre acreditar que isso seria possível e Ana Beatriz Martins dos Santos, que me deu forças para poder concluir essa jornada. Além disso, dedico a todos os matemáticos que, assim como eu, são apaixonados por jogos e os estudam para tirar proveito deles no ensino.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer aos professores Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes e Profª. Dra. Tatiana Skoraia por aceitarem participar da banca e dedicar o seu tempo para acrescentar as suas contribuições para este trabalho.

Ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva que, além da excelente orientação, também contribuiu ao longo do curso com o seu apoio para a continuação do mesmo.

A minha mãe Maria Zeneide de Lima Raulino que sempre acreditou na educação parao meu crescimento.

A minha companheira Ana Beatriz Martins dos Santos e a sua familia pelo imenso apoio e acolhimento em tempos difíceis.

A CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza – uma beleza fria e austera, como a da escultura.” Bertrand Russella.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar alguns jogos matemáticos que podem ser usados no ensino da matemática, trabalhando através de diversas áreas como a história dos jogos, como jogá-los, a resolução dos problemas e a explicação deles. Diante disso, neste trabalho serão apresentados três jogos matemáticos, sendo o primeiro deles o "Resta um", que é um jogo de tabuleiro jogado de forma individual e com o objetivo de eliminar todas as peças e deixar apenas uma sobrando, o "Euclidea", que trabalha a geometria através de vários problemas envolvendo as figuras planas e os "Soldados de Conway", que é um jogo que ocorre em um tabuleiro semi infinito e dito como sendo impossível de se resolver. No propósito dos jogos no ensino da matemática à serem apresentadas as demonstrações das resoluções de cada jogo, dando ênfase no conteúdo utilizado em cada um.

Palavras-chave: Jogos Matemáticos. Problemas. Resoluções.

ABSTRACT

The present work aims to present some mathematical games that can be used in the teaching of mathematics, working through several areas such as the history of games, how to play them, problem solving and their explanation. Therefore, in this work three mathematical games will be presented, the first of which is the "Solitaire", which is a board game played individually and with the objective of eliminating all the pieces and leaving only one left, the "Euclidea", which works geometry through various problems involving the plane figures and The "Conway's Soldiers", which is a game that takes place on a semi-infinite board and is said to be impossible to solve. In the purpose of games in the teaching of mathematics, the demonstrations of the resolutions of each game will be presented, emphasizing the content used in each one.
Keywords: Mathematical Games. Problems. Resolutions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tabuleiro clássico de “Resta um”. 19
Figura 2 – Exemplo de tabuleiro triangular. 19
Figura 3 – Exemplo de tabuleiro octogonal. 20
Figura 4 – Movimento possível das peças. 20
Figura 5 – Exemplo de solução: parte 1. 21
Figura 6 – Exemplo de solução: parte 2. 21
Figura 7 – Exemplo de solução: parte 3. 22
Figura 8 – “Resta um” preenchido com os elementos de K. 24
Figura 9 – Eixo de simetria no centro do tabuleiro. 24
Figura 10 – Finais possiveis pelo eixo de simetria. 25
Figura 11 – Exemplo de mínimo resultado. 25
Figura 12 – Ícone de movimento (Euclidea). 27
Figura 13 – Ícone de Ponto (Euclidea). 27
Figura 14 – Ícone de reta (Euclidea). 27
Figura 15 – Ícone de circunferência (Euclidea). 27
Figura 16 – Ícone de mediatriz (Euclidea). 28
Figura 17 – Ícone de reta perpendicular (Euclidea). 28
Figura 18 – Ícone de bissetriz (Euclidea). 28
Figura 19 – Ícone de interseção (Euclidea). 28
Figura 20 – Problema 4.4 - Ilustração da resposta. 29
Figura 21 – Problema 4.4 - Euclidea. 29
Figura 22 – Problema 4.4 - Passo 1L. 30
Figura 23 – Problema 4.4 - Passo 2L. 30
Figura 24 – Problema 4.4 - Passo 3 e 4L. 31
Figura 25 – Problema 4.4 - Passo 5L. 31
Figura 26 – Problema 4.4 - Justificativa para L. 32
Figura 27 – Problema 4.4 - Passo 1E. 33
Figura 28 – Problema 4.4 - Passo 2E. 34
Figura 29 – Problema 4.4 - Passo 3E. 34
Figura 30 – Problema 4.4 - Passo 4 e 5E. 35
Figura 31 – Problema 4.4 - Passo 6E. 35
Figura 32 – Problema 4.4 - justificativa: ângulo $\widehat{HAJ}$. 36
Figura 33 – Problema 4.4 - Justificativa para E: congruência de triângulos. 37
Figura 34 – Problema 4.4 - Justificativa para E: perpendicular q. 38
Figura 35 – Problema 4.4 - Justificativa para E: triângulo ACN. 38
Figura 36 – Problema 1.7 - Ilustração da resposta. 39

Figura 37 – Problema 1.7 - Euclidea. 40
Figura 38 – Problema 1.7 - Passo 1E. 40
Figura 39 – Problema 1.7 - Passo 2E. 41
Figura 40 – Problema 1.7 - Passo 3E. 41
Figura 41 – Problema 1.7 - Passo 4E. 42
Figura 42 – Problema 1.7 - Passo 5E. 42
Figura 43 – Problema 1.7 - Passo 6E. 43
Figura 44 – Problema 1.7 - Passo 7E. 43
Figura 45 – Problema 1.7 - Passo 1L. 44
Figura 46 – Problema 1.7 - Passo 2L. 45
Figura 47 – Problema 1.7 - Passo 3L. 45
Figura 48 – Problema 1.7 - Passo 4L. 45
Figura 49 – Problema 1.7 - Passo 5L. 46
Figura 50 – Problema 1.7 - Passo 6L. 46
Figura 51 – Problema 3.2 - Ilustração da resposta. 47
Figura 52 – Problema 3.2 - Euclidea. 47
Figura 53 – Problema 3.2 - Passo 1E. 48
Figura 54 – Problema 3.2 - Passo 2E. 48
Figura 55 – Problema 3.2 - Passo 3E. 49
Figura 56 – Problema 3.2 - Passo 4E. 49
Figura 57 – Problema 3.2 - Passo 5E. 50
Figura 58 – Problema 3.2 - Passo 6E. 50
Figura 59 – Problema 3.2 - Passo 1L. 51
Figura 60 – Problema 3.2 - Passo 2L. 52
Figura 61 – Problema 3.2 - Passo 3L. 52
Figura 62 – Problema 3.8 - Ilustração da resposta. 53
Figura 63 – Problema 3.8 - Euclidea. 53
Figura 64 – Problema 3.8 - Passo 1E. 54
Figura 65 – Problema 3.8 - Passo 2E. 54
Figura 66 – Problema 3.8 - Passo 3E. 55
Figura 67 – Problema 3.8 - Passo 4E. 55
Figura 68 – Problema 3.8 - Passo 5E. 56
Figura 69 – Problema 3.8 - Passo 6E. 56
Figura 70 – Problema 3.8 - Passo 1L. 57
Figura 71 – Problema 3.8 - Passo 2L. 57
Figura 72 – Problema 3.8 - Passo 3L. 58
Figura 73 – Problema 3.8 - Passo 4L. 58
Figura 74 – Problema 3.8 - Passo 5L. 58
Figura 75 – Problema 3.8 - Passo 1: 4 estrelas. 59

Figura 76 – Problema 3.8 - Passo 2: 4 estrelas. 60
Figura 77 – Problema 3.8 - Passo 3: 4 estrelas. 60
Figura 78 – Problema 3.8 - Passo 4: 4 estrelas. 61
Figura 79 – “Soldados de Conway” - Tabuleiro inicial. 62
Figura 80 – Exemplo de movimento. 62
Figura 81 – Eixo do tabuleiro. 63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Grupo de Klein 23
Tabela 2 – Número das casas (por jogada) 64

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 14
2 HISTÓRIA DOS JOGOS MATEMÁTICOS 16
2.1 IMPACTO DOS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA 17
3 RESTA UM 19
4 EUCLIDEA 26
4.1 REGRAS DO JOGO 26
4.2 FERRAMENTAS DISPONÍVEIS 26
4.3 PROBLEMAS RESOLVIDOS 28
4.3.1 Triângulo equilátero inscrito em um círculo a partir de um ponto dado 29
4.3.1.1 *Solução mínima para L* 29
4.3.1.2 *Solução mínima para E* 33
4.3.2 Quadrado inscrito em um círculo a partir de um vértice 39
4.3.2.1 *Solução mínima para E* 40
4.3.2.2 *Solução mínima para L* 44
4.3.3 Triângulo a partir de duas retas e o ortocentro. 47
4.3.3.1 *Solução mínima para E* 47
4.3.3.2 *Solução mínima para L* 51
4.3.4 Losango com um ângulo de 45° a partir de um lado dado. . . . 53
4.3.4.1 *Solução mínima para E* 53
4.3.4.2 *Solução mínima para L* 57
4.3.4.3 *Solução para a estrela extra.* 59
5 SOLDADOS DE CONWAY 62
5.1 REGRAS DO JOGO 62
5.2 CHEGANDO À QUINTA LINHA 63
6 CONCLUSÃO 68
REFERÊNCIAS 69

1 INTRODUÇÃO

A matemática muitas vezes é vista como uma matéria teórica e que normalmente não pode ser aplicada durante o seu ensino, mas existem inúmeras formas de se trabalhar ela, desde utilidades e problemas diários até em jogos, que serão o foco deste trabalho.

Com isso, neste trabalho foram apresentados alguns jogos matemáticos, assim como as suas devidas regras, resoluções e explicações dos meios matemáticos que foram usados para solucionar cada um dos problemas neles citados, além de mostrar quais são as possibilidades que rodeiam esses jogos. Também explorou-se os conteúdos à serem usados em cada um dos jogos, além do contexto histórico de onde e por quem os jogos foram criados e como a aplicação desses jogos impacta na educação, principalmente no ensino da matemática.

Os jogos à serem trabalhados neste trabalho são três, sendo o "Resta um" o primeiro deles, presente no capítulo três. O jogo consiste em um tabuleiro cheio de peças e com um espaço vazio no meio, normalmente o tabuleiro tem o formato de uma cruz, onde as peças do jogo só podem ser movidas passando por cima de outra peça e parando em um espaço vago. O objetivo do jogo, como o próprio nome já diz, é que sobre apenas uma peça no tabuleiro. Durante esse capítulo, serão abordadas algumas das possibilidades de onde o jogo pode ser finalizado, ou seja, onde a última peça irá ficar quando o jogo for concluído, além de outras possibilidades de final quando o espaço vazio de inicio de jogo é alterado, analisando se a alteração feita no inicio do jogo irá alterar o espaço final que a peça irá terminar, sendo explorados os conteúdos de grupos para o melhor entendimento de como os locais das peças finais são escolhidos.

O segundo jogo esta presente no capítulo quatro, sendo ele o "Euclidea". O "Euclidea" é um jogo criado em ambiente virtual e trabalha completamente com os conceitos da geometria plana. Nele temos as ferramentas, como a reta e o círculo, que devem ser usados para concluir desafios predefinidos, como usar um números mínimo de ferramentas ou traços. Durante o capítulo serão resolvidos alguns problemas do jogo, mostrando todas as suas possíveis soluções mínimas e também será justificado o porquê de cada desafio aceitar tal solução.

O terceiro jogo abordado neste trabalho será os "Soldados de Conway", que é um jogo conceitual concebido pela mente de John Horton Conway, levando o seu nome como homenagem. O jogo tem um desafio simples, mas que se prova praticamente impossível de ser alcançado. Nele temos uma linha que divide um tabuleiro semi infinito de peças, cada uma ocupando um espaço e cinco linha vazias acima delas, e este é o objetivo do jogo, mover qualquer peça para algum ponto da quinta linha. As peças se movimentam como no tabuleiro de "Resta um", uma peça passa por cima da outra, tirando ela do tabuleiro e ocupando o espaço vazio posterior a peça eliminada, dificultando o desafio

pois cada vez mais as peças vão se afastado umas das outras. Durante esse capítulo será visto se é realmente impossível que o jogo seja completo, mesmo usando todas as peças do tabuleiro, além disso, também foi trabalho os conceitos de séries para se aprofundar nas inúmeras jogadas que podem ser feitas para se aproximar da quinta linha.

2 HISTÓRIA DOS JOGOS MATEMÁTICOS

Os jogos matemáticos têm uma longa e incrível história que mostra o desenvolvimento da matemática e das técnicas de ensino ao longo dos séculos. Desde os primeiros registros até a era digital, esses jogos têm desempenhado um papel muito importante para a educação, principalmente nos mais jovens, que buscam cada vez mais estímulos durante o aprendizado.

Os primeiros jogos matemáticos são datados desde a antiguidade, com exemplos como o "jogo dos nove pontos" e o "jogo de tabelas" encontrados na matemática babilônica e egípcia. Estes jogos eram utilizados não apenas para entretenimento, mas também para ensinar e praticar habilidades matemáticas básicas, como contar os algarismos.

Durante a Idade Média, jogos matemáticos começaram a aparecer em escritos e livros didáticos. O "jogo da torre de Hanoi", inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883, é um exemplo muito famoso, embora suas origens possam ter raízes em tradições muito mais antigas, nele uma série de movimentos precisam ser executados usando a lógica para solucionar o desafio. Estes jogos ajudavam na compreensão de conceitos matemáticos complexos de maneira lúdica e envolvente.

Com o avanço da matemática, os jogos matemáticos se tornaram mais sofisticados. O matemático e filósofo Blaise Pascal, no século XVII, criou o "Triângulo de Pascal", que, embora não seja um jogo no sentido moderno, influenciou muitos jogos e problemas matemáticos posteriores, sempre instigando a sua exploração na construção de vários conteúdos matemáticos.

No século XIX, o matemático Charles Lutwidge Dodgson, mais conhecido como Lewis Carroll, que também era escritor e apaixonado pela lógica e jogos matemáticos, as suas obras abraçavam a matemática e a usavam de várias maneiras inusitadas, como em poemas que usam matrizes para trazer novos versos e mensagens, influenciando na popularização dos jogos matemáticos e ajudando a integrar eles na educação formal.

O século XX viu uma explosão na popularidade dos jogos matemáticos, com o surgimento de muitos quebra-cabeças e jogos de tabuleiro que envolvem matemática. Jogos como o "Sudoku", que ganhou popularidade global nas últimas décadas, exemplificam como os conceitos matemáticos podem ser aplicados de maneiras criativas e divertidas.

Com o advento da computação e da internet, a evolução dos jogos matemáticos tomou uma nova direção. Os jogos matemáticos passaram a ser desenvolvidos para plataformas digitais, permitindo interatividade e acessibilidade em escala global. Jogos como "Math Blaster" e "Prodigy" foram criados para ensinar matemática de forma envolvente e personalizada, aproveitando a tecnologia para adaptar os desafios às necessidades individuais dos alunos.

Hoje, os jogos matemáticos continuam a evoluir com o avanço das tecnologias,

incluindo realidade aumentada e inteligência artificial. Plataformas online e aplicativos educativos estão constantemente inovando, oferecendo experiências matemáticas imersivas e adaptativas. O objetivo é tornar a matemática acessível e divertida, incentivando o aprendizado de maneira dinâmica.

Os jogos matemáticos têm percorrido um longo caminho desde seus primórdios na Antiguidade, passando por transformações significativas ao longo dos séculos. Hoje, eles continuam a desempenhar um papel importante na educação e no entretenimento, refletindo o progresso contínuo no campo da matemática e da tecnologia. O futuro promete ainda mais inovações, com novas formas de integrar a matemática ao jogos, oferecendo desafios cada vez mais imersivos e educativos. O leitor que tiver interesse em história dos jogos pode consultar Teixeira (2016).

2.1 IMPACTO DOS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Os jogos matemáticos desempenham um papel significativo na compreensão e no ensino da matemática, oferecendo métodos inovadores e eficazes para facilitar a aprendizagem. Eles não apenas tornam o processo educacional mais envolvente, mas também abordam diversos aspectos do aprendizado matemático de maneira dinâmica.

Os jogos matemáticos desafiam os jogadores a pensar criticamente e a resolver problemas de maneira criativa. Por exemplo, jogos como o "Resta um" e os quebra-cabeças lógicos exigem que os jogadores identifiquem padrões e usem estratégias para encontrar soluções. Esses desafios ajudam a desenvolver habilidades de pensamento analítico e resolução de problemas que são fundamentais na matemática.

Além disso, jogos como "Math Blaster" e "Prodigy", já citados anteriormente, incorporam conceitos matemáticos em contextos lúdicos, permitindo que os alunos pratiquem habilidades como adição, subtração, multiplicação e divisão enquanto se divertem. Ao aplicar esses conceitos em jogos, os alunos reforçam seu entendimento e memorização de maneira mais eficaz do que através de métodos tradicionais, além de associar o aprendizado como algo prazeroso e estimulante.

A natureza interativa e divertida dos jogos matemáticos pode aumentar significativamente a motivação dos alunos. Quando a matemática é apresentada de maneira lúdica, os alunos tendem a se engajar mais no aprendizado, tornando o processo menos intimidante e mais prazeroso. Isso é particularmente importante em níveis iniciais de educação, onde a atitude em relação à matemática pode ser formada.

Os jogos matemáticos digitais frequentemente oferecem níveis de dificuldade ajustáveis, permitindo que os alunos aprendam no seu próprio ritmo. Isso possibilita uma abordagem mais personalizada, onde os desafios podem ser adaptados às habilidades individuais dos alunos, garantindo que cada um possa progredir conforme suas próprias necessidades.

Alguns jogos matemáticos são projetados para serem jogados em grupos ou

competições, promovendo habilidades sociais e colaborativas. Jogos de tabuleiro e aplicativos multijogadores incentivam a comunicação e o trabalho em equipe, ajudando os alunos a desenvolver a sua sociabilidade enquanto aplicam conceitos matemáticos.

Muitos jogos matemáticos simulam situações da vida real ou criam cenários que exigem a aplicação de conceitos matemáticos para resolver problemas práticos, como fazer compras no mercado ou calcular a distância entre pontos. Isso ajuda os alunos a entender como a matemática pode ser usada fora da sala de aula, conectando o aprendizado teórico com aplicações práticas.

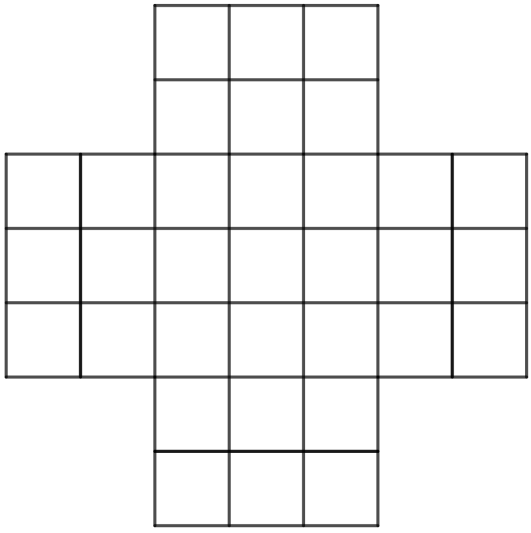
Os jogos matemáticos são ferramentas valiosas no ensino da matemática, oferecendo uma abordagem interativa e estimulante para a aprendizagem. Eles ajudam a desenvolver habilidades críticas, reforçar conceitos, aumentar a motivação e personalizar o aprendizado. Ao integrar jogos matemáticos no currículo educacional, os professores podem criar um ambiente de aprendizado mais dinâmico e eficaz, preparando os alunos para enfrentar desafios matemáticos com confiança e criatividade.

3 RESTA UM

O “Resta um” é um jogo de origem desconhecida, algumas histórias dizem que o jogo foi inventando por um prisioneiro solitário em uma bastilha, já outras dizem que o jogo existe desde o período medieval, tendo esse sofrido alterações até chegar no jogo conhecido hoje. O que se verdadeiramente sabe é que o jogo foi difundido e popularizado durante o século XVIII, em toda a Europa.

O jogo consiste em um tabuleiro redondo com vários espaços dentro dele, que por sua vez, formam algum tipo de figura, normalmente geométrica, onde em todos os espaços são colocados as suas peças que, para o inicio do jogo, precisa que todos os espaços estejam preenchido a menos de um, o qual normalmente é do centro. O tabuleiro de estudo será o clássico, o qual é mostrado na figura abaixo.

Figura 1 – Tabuleiro clássico de “Resta um”.



Fonte: Autor (2022).

Além desse, também existem uma grande quantidade de outros tabuleiros que variam de formas como o quadrado, triângulo, retângulo, hexágono e afins, além de que, alguns desses formatos podem variar de tamanho e também sofrer algumas deformações, tornando-os desproporcionais em comparação com o tabuleiro clássico.

Figura 2 – Exemplo de tabuleiro triangular.

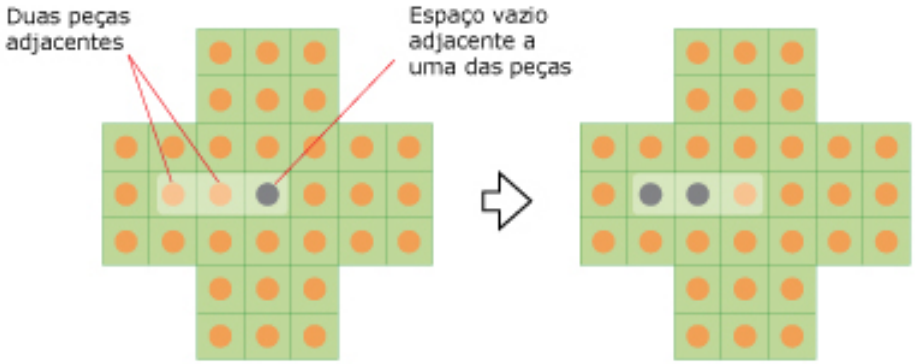
Fonte: https://se.pinterest.com/pin/41236152816843521/ (2024).

Figura 3 – Exemplo de tabuleiro octogonal.

Fonte: https://br.pinterest.com/pin/654499758367249108/ (2024).

As regras do jogo são bem simples, só é permitido fazer movimentos na vertical ou na horizontal, onde uma peça só pode se mover com uma condição: ela precisa passar por cima de outra peça e parar em um espaço vazio, eliminando a peça que estava entre o espaço inicial e o final no processo. O jogo acaba quando não há mais movimentos para serem feitos, resultando em uma derrota ou se sobrou apenas uma peça, significando que o jogo foi ganho.

Figura 4 – Movimento possível das peças.

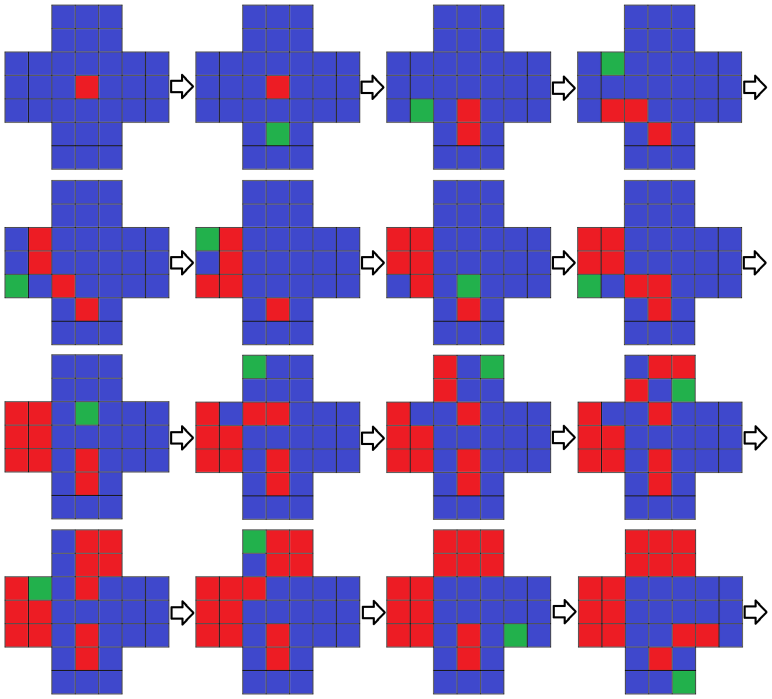


Fonte: Jogadamais (2014).

Agora será apresentado um exemplo de resolução do jogo, que tem a finalidade de exemplificar como o jogo funciona, a disposição das peças no tabuleiro e demonstrar que é possível a conclusão do jogo. Essa resolução é apenas uma entre várias outras, que podem ser exploradas dependendo da estratégia usada pelo jogador.

Nessa resolução, as casa azuis representam as peças presentes no tabuleiro, as casas vermelhas são os espaços vazios e as casas verdes são as próximas peças a serem movidas. Assim, a primeira ideia para conseguir a solução é eliminar todas as pontas da cruz e deixar apenas a parte central com as peças. As primeiras duas linhas da resolução mostram a eliminação das peças da ponta esquerda, continuando com as outras duas linhas que mostram a eliminação das peças da ponta superior da cruz.

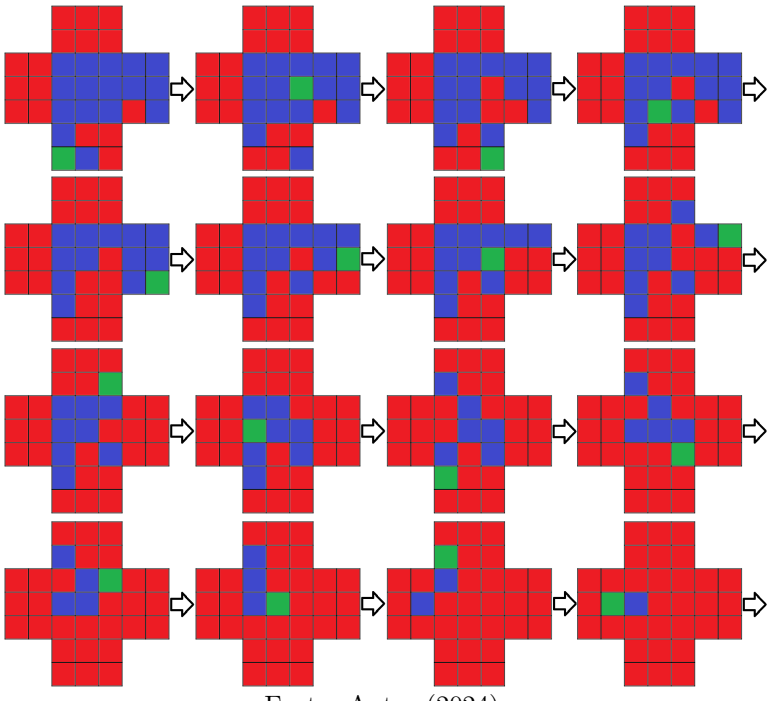
Figura 5 – Exemplo de solução: parte 1.



Fonte: Autor (2024).

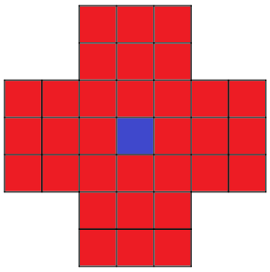
Após isso, será trabalhado a eliminação das ultimas duas pontas que sobraram, sendo elas a inferior e a da direita, na primeira linha é eliminada quase toda a parte inferior, sobrando apenas uma peça, já na segunda linha, é apresentada a eliminação das peças da parte direita da cruz, sobrando apenas um amontoado de peças no meio, que após algumas movimentações são eliminadas e dão espaço para a conclusão do jogo.

Figura 6 – Exemplo de solução: parte 2.



Fonte: Autor (2024).

Figura 7 – Exemplo de solução: parte 3.



Fonte: Autor (2024).

Como há várias maneiras de se resolver o jogo, não há como estipular um meio matemático para resolvê-lo, mas pode-se ver como o jogo funciona e os possíveis locais de conclusão do jogo, a depender de qual peça inicial for retirada. Para isso, o conteúdo de álgebra linear se faz necessário durante essa análise, mais precisamente o conteúdo de grupos, que pode ser mais explorado usando Domingues (2003).

Vale ressaltar que, durante as análises feitas ao longo desta seção, não foram apresentadas estratégias para que sobre apenas uma peça no tabuleiro, focando apenas na estrutura matemática por trás do jogo e, como mencionado acima, em quais espaços do tabuleiro existem a possibilidade de finalizar o jogo. Caso tenha interesse em algumas estratégias para concluir o jogo com sucesso, o trabalho de Cunha (2021), que além de mostrar a resolução para o jogo clássico, também mostra o trabalho feito em sala de aula, com os alunos de $8^{\underline{o}}$ ano, usando desafios que mudam a abordagem do jogo, estimulando a criatividade dos alunos para que a organização das peças cumpram os requerimentos propostos.

Com isso, as seguintes propriedades fazem-se necessárias para a análise do funcionamento do jogo e os possíveis espaços que ele pode ser finalizado.

Proposição 3.1 *Seja G um conjunto não vazio e $*$ uma operação qualquer definida em G. G é dito grupo munido da operação $*$ (simbolicamente $(G, *)$) se obedece as seguintes condições*

- Associatividade: Quaisquer elementos $a, b, c \in G$, vale

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

- Existência do elemento neutro: Existe $e \in G$, tal que

$$a * e = e * a = a.$$

- Existência do elemento simétrico: Para todo $a \in G$ existe um elemento $a' \in G$, tal que

$$a * a' = a' * a = e.$$

$(G, *)$ é dito grupo abeliano ou grupo comutativo, se além dessa propriedade, $(G, *)$ admite que para todo $a, b \in G$

$$a * b = b * a.$$

Além disso, $(G, *)$ é um grupo cíclico quando todos os seus elementos são formados por potências de um único elemento. A notação desse grupo se dá por $G = \langle g \rangle$, onde g é o elemento que gera os demais elementos do grupo.

$$G = g^m, m \in \mathbb{Z}.$$

Um dos exemplos clássicos de um grupo abeliano é o grupo de Klein, que é um grupo comutativo, sendo ele, o menor grupo comutativo não cíclico. O grupo de Klein é um grupo de quatro elementos $K = \{a, b, c, e\}$, onde dados $v, x, y, z \in K$, tem-se que

$$x * x = e,$$

e se

$$x * y = z \text{ e } x * v = z \text{ então } y = v.$$

Assim, a tabela abaixo representa a operação dos elementos presentes no grupo de Klein.

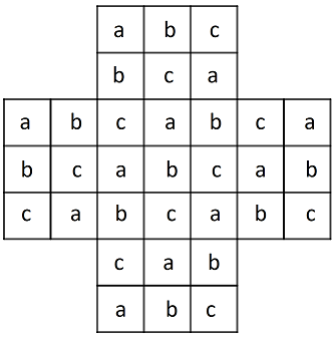
Tabela 1 – Grupo de Klein

$*$	a	b	c	e
a	e	c	b	a
b	c	e	a	b
c	b	a	e	c
e	a	b	c	e

Fonte: Autor (2022).

Pode-se organizar o tabuleiro por meio dessa tabela, sendo que cada jogada com uma peça, é uma operação realizada sobre K.

Figura 8 – "Resta um" preenchido com os elementos de K.



Fonte: Autor (2022).

Veja que o tabuleiro tem trinta e três peças, sendo onze de cada um dos três elementos a, b e c. Assim, o produto de todos os elementos do tabuleiro vale

$$a^{11} * b^{11} * c^{11}.$$

E que pela comutatividade pode ser organizado da seguinte forma

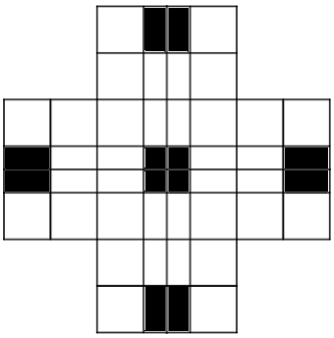
$$(a * b * c)^{11} = (c * c)^{11} = e^{11} = e.$$

Observe que normalmente é a peça central que é retirada para o inicio do jogo, no caso da figura 3, retira-se uma peça b, fazendo com que o produto de todos os elementos do tabuleiro seja igual a

$$a^{11} * b^{10} * c^{11} = (a * b * c)^{10} * a * c = e * a * c = b.$$

Assim, só é possível ganhar o jogo em locais de valor b, mas com uma retrição, a peça que sobra no final do jogo deve estar alinhada com a peça que foi retirada para que o jogo tivesse inicio. Sendo assim, pode-se estabelecer um eixo de simetria a partir da primeira peça que foi retirada do tabuleiro, tendo ela valor b e estando localizada no centro do tabuleiro.

Figura 9 – Eixo de simetria no centro do tabuleiro.

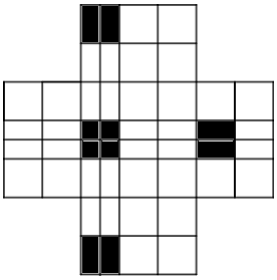


Fonte: Autor (2022).

Agora, se uma peça qualquer for tirada, então o resultado final do jogo será

mudado. Nesse caso, a ultima peça teria que terminar em um espaço correspondente à da primeira peça retirada do tabuleiro, tendo também o eixo de simetria centrado na peça retirada. Assim, se for retirada a primeira peça a esquerda do centro, denotada pelo elemento a, e então operando todas as peças do tabuleiro teremos o elemento a como resultado. Dessa forma o jogo poderia terminar nas seguintes posições.

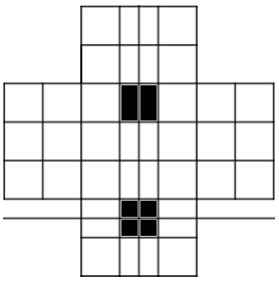
Figura 10 – Finais possiveis pelo eixo de simetria.



Fonte: Autor (2022).

Veja também que é impossível obter uma peça no tabuleiro a qual o jogo não será ganho, podendo ser obtido apenas o resultado mínimo de dois pontos finais, o que é óbvio, devido a comutatividade de K.

Figura 11 – Exemplo de mínimo resultado.



Fonte: Autor (2022).

Isso possibilita uma melhor abordagem do conteúdo por trás do jogo, visto que o jogador pode prever em quais espaços o jogo pode ser concluído com êxito e traçar uma estratégia de eliminação de peças. Além disso, a despadronização do jogo atraí a atenção do discente, que busca o desafio de conclusão em outros espaços, com o intuito de desafiar e procurar novos espaços em que o jogo possa ser concluído ou se a mudança da peça inicial criaria mais de um eixo de simetria, já que alguns dos espaços do tabuleiro não são proporcionais como o do problema inicial.

4 EUCLIDEA

Euclidea é um software disponível em android, apple e via site, tendo sido produzido e distribuído pela HORIS INTERNATIONAL LIMITED. O jogo consiste em vários problemas geométricos dividido em sessões, que devem ser resolvidos para passar ao problema seguinte, onde, completando todos os problemas de uma sessão, a outra será liberada.

Para resolver os problemas, o jogo disponibiliza uma série de ferramentas, que são liberados conforme a progressão no jogo, cada um tendo as suas especificações e com "custos" variados.

Durante o capítulo foram utilizados conteúdos variados de Geometria Euclidiana Plana para a justificativa das resoluções dos problemas. Os assuntos supracitados podem ser explorados melhor com o auxílio de Rezende (2008).

4.1 REGRAS DO JOGO

Cada ferramenta do jogo tem custo, este custo será dividido em duas partes, sendo chamadas de custo de ferramenta e custo de linha. Toda ferramenta tem custo um de ferramenta, mas se diferenciam no custo de linha, por exemplo, uma reta possui custo um de ferramenta e custo um de linha, visto que só é necessário uma ferramenta para fazê-la, já uma mediatriz, tem custo três de linha, já que é preciso de duas circunferências e uma reta para obtê-la.

Os níveis são compostos de três estrelas, tendo alguns a quarta estrela, que não é mostrada para o jogador. As três estrelas principais, são a de conclusão da fase, a de conclusão de ferramentas mínimas e a de conclusão de linhas mínimas.

Para obter a estrela de conclusão é necessário apenas concluir o jogo de qualquer forma, a de conclusão de ferramentas mínimas é obtida quando termina o jogo com o menor número possível de ferramentas, que é especificado no jogo, e analogamente, a conclusão de linhas mínimas acontece quando o menor números de linhas são usados para concluir o desafio. Vale ressaltar que cada estrela pode ser obtida de forma independente, visto que, em alguns problemas, não é possível atingir ambas as estrelas, de ferramenta e linha, simultaneamente.

4.2 FERRAMENTAS DISPONÍVEIS

- Movimento: Serve para movimentar a tela e os pontos colocados sobre a tela.

Figura 12 – Ícone de movimento (Euclidea).

Fonte: Autor (2023).

- Ponto: Serve para estabelecer um ponto em qualquer lugar da tela. O ponto não tem custo.

Figura 13 – Ícone de Ponto (Euclidea).

Fonte: Autor (2023).

- Segmento de reta: Estabelece um segmento de reta entre dois pontos. Se os pontos não foram dados, eles são criados nos dois lugares clicados na tela, fazendo automaticamente o segmento de reta entre eles. O segmento de reta tem custo um de linha. A reta se define como uma figura geométrica com infinitos pontos e sem curvatura e que, dado dois pontos, somente uma reta não colinear passa por eles.

Figura 14 – Ícone de reta (Euclidea).

Fonte: Autor (2023).

- Circunferência: Cria uma circunferência centrada em um ponto e com raio igual a distância entre este ponto e outro desejado. A circunferência tem custo um de linha. A circunferência é uma figura geométrica que não contém lados e que é marcada pela propriedade que do centro da circunferência, chamado de origem, até qualquer ponto da circunferência, a distância é a mesma, sendo esse segmento denominado de raio.

Figura 15 – Ícone de circunferência (Euclidea).

Fonte: Autor (2023).

- Mediatriz: Estabelece uma reta equidistante entre dois pontos. A mediatriz tem custo três de linha. A mediatriz é uma reta que corta um segmento de reta exatamente no seu ponto médio, dividindo ele ao meio e a distância dos pontos do

segmento de reta até qualquer ponto da mediatriz tem a mesma distância. Ela também forma uma ângulo de 90° com o segmento de reta ao qual ela é mediatriz.

Figura 16 – Ícone de mediatriz (Euclidea).

Fonte: Autor (2023).

- Perpendicular: Estabelece uma reta perpendicular entre o ponto desejado e uma reta. A perpendicular tem custo três de linha. A reta perpendicular forma um ângulo de 90° com a reta a qual ela é perpendicular.

Figura 17 – Ícone de reta perpendicular (Euclidea).

Fonte: Autor (2023).

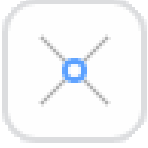
- bissetriz: Cria uma reta que divide o ângulo alvo em dois angulos iguais. A bissetriz tem custo quatro de linhas.

Figura 18 – Ícone de bissetriz (Euclidea).

Fonte: Autor (2023).

- Interseção: Cria todos os pontos de interseção entre dois objetos desejados. A interseção não tem custo de linhas. Uma interseção entre duas figuras geométricas acontece quando ambas tem um ou mais pontos em uma mesma coordenada ou de mesmo valor.

Figura 19 – Ícone de interseção (Euclidea).



Fonte: Autor (2023).

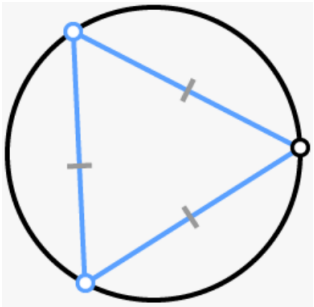
4.3 PROBLEMAS RESOLVIDOS

A seguir, foram selecionados quatro problemas presentes no jogo “Euclidea”. Neles é possível ver o uso da matemática focando na área de geometria plana que, como foi visto

na seção anterior, pode ser usada para revisar conteúdos básicos da geometria e também ser trabalhada nos anos finais, usando o desenho com régua e compasso para atrair e desenvolver o enteresse dos alunos com relação a esse conteúdo.

4.3.1 Triângulo equilátero inscrito em um círculo a partir de um ponto dado

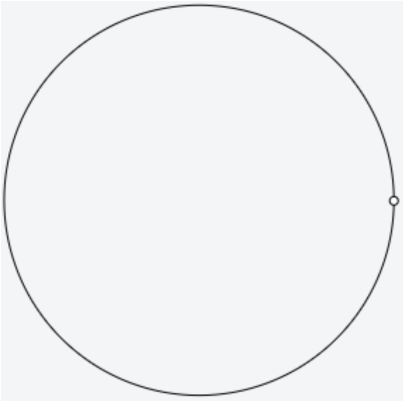
Figura 20 – Problema 4.4 - Ilustração da resposta.



Fonte: Autor (2023).

Este problema consiste em inscrever um triângulo em um círculo, com uma estrela de cinco ferramentas (5L) e outra de seis linhas (6E). Nele ainda não foi possível obter as duas estrelas simultaneamente, o que obriga ao jogador encontrar duas maneiras de solução para o problema.

Figura 21 – Problema 4.4 - Euclidea.

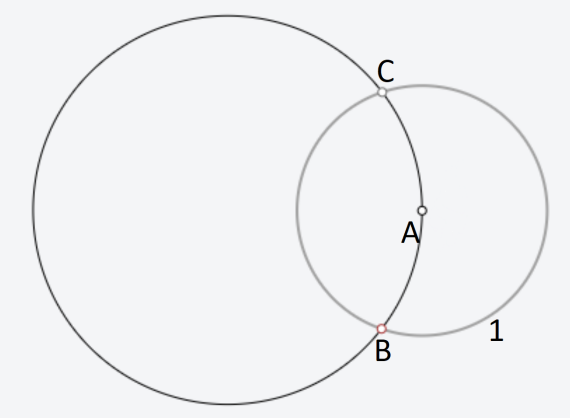


Fonte: Autor (2023).

4.3.1.1 *Solução mínima para L*

- Passo 1: Crie uma circunferência centrada em A, denotada por 1. Então marque as duas interseções de 1 com a curcinferência original, esses pontos serão chamados de B e C.

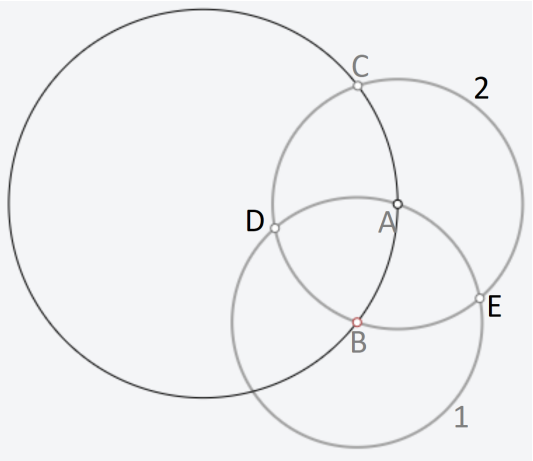
Figura 22 – Problema 4.4 - Passo 1L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 2: Crie um circunferência centrada em B e de raio BA, chamada de 2. Agora marque os pontos D e E em ambas as interseções de 1 e 2.

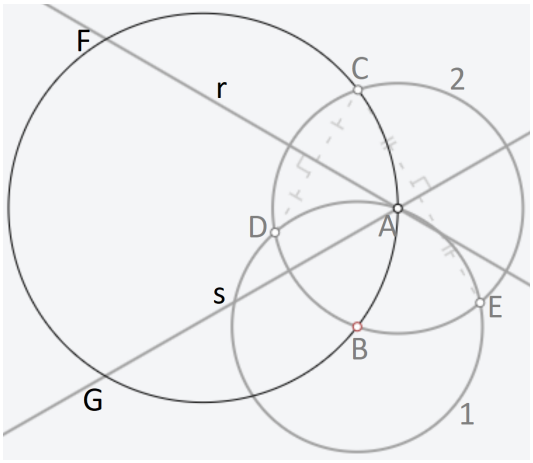
Figura 23 – Problema 4.4 - Passo 2L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 3: Crie uma mediatriz entre os pontos C e D, e outra entre os pontos C e E, denotadas por r e s, respectivamente. Em seguida arma os pontos F e G, que serão a interseção de r e s com a circunferência original.

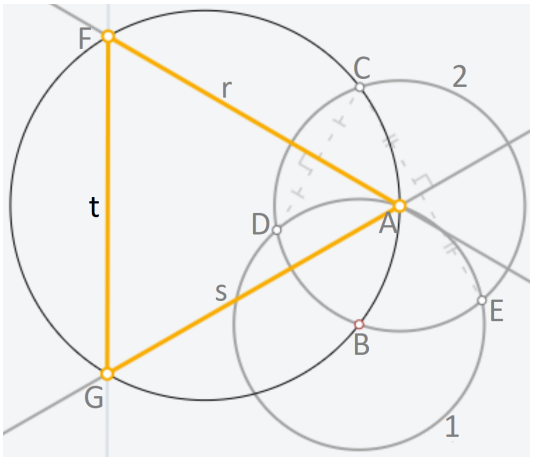
Figura 24 – Problema 4.4 - Passo 3 e 4L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 4: Ligue os pontos F e G, formando a reta t.

Figura 25 – Problema 4.4 - Passo 5L.



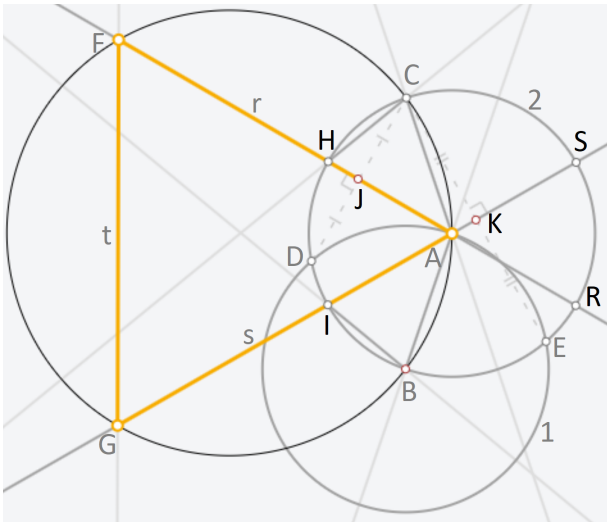
Fonte: Autor (2023).

Assim, o triângulo AFG será o triângulo desejado.

Por que isso funciona?

Marque os pontos H, I, R e S nas interseções das retas r e s com a circunferência 2. Além disso, marque o ponto J na interseção da reta r com a mediatriz do segmento $\overline{DC}$ e o ponto K na interseção da reta s com a mediatriz do segmento $\overline{CE}$. Também trace os segmentos de reta $\overline{CH}$,$\overline{CA}$,$\overline{BI}$ e $\overline{BA}$, que formam dois triângulos na figura.

Figura 26 – Problema 4.4 - Justificativa para L.



Fonte: Autor (2023).

Note que $\widehat{CJA} = \widehat{CKA} = 90°$, já que ambas são formadas pelas mediatrizes dos segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{CE}$. Em soma, os triângulos DAB e BAE são equiláteros, ou seja $\widehat{DAB} = \widehat{BAE} = 60°$. Dessa forma, $\overset{\frown}{DE}= 120°$ e como C é um ângulo inscrito oposto a esse arco, é notório que $\widehat{HCK} = 60°$.

Assim, usando os três ângulos conhecidos do quadrilátero $AHCK$, pode-se encontrar $\widehat{HAK} = 120°$ e usando a noção de arco complementar tem-se que $\widehat{HAI} = 60°$.

Agora veja que o triângulo AIB e o triângulo AHC são isósceles, com dois lados iguais ao raio da circunferência 2. Então, para solucionar o problema, basta mostrar que esses dois triângulos são congruentes, já que precisa-se que $\overset{\frown}{FA}=\overset{\frown}{GA}$. Assim

$$\widehat{AHC} = \frac{\overset{\frown}{CS}+\overset{\frown}{SR}}{2}.$$

Como $\overset{\frown}{SR}= 60°$, então

$$\widehat{AHC} = \frac{\overset{\frown}{CS}+60°}{2},$$

e, como visto acima $\widehat{BAE} = 60°$, então

$$\widehat{AIB} = \frac{\overset{\frown}{ES}+60°}{2}.$$

Mas note que $\overset{\frown}{CS}=\overset{\frown}{ES}$, já que a reta s é a mediatriz do segmento $\overline{CE}$, dividindo a circunferência em duas partes iguais. Assim, resta que

$$\widehat{AHC} = \widehat{AIB}.$$

Logo, pelo caso de congruência LAL, os triângulos AHC e AIB tem os mesmos ângulos.

Tomando os ângulos $\widehat{HAC} = \widehat{IAB} = x$ e $\widehat{AIB} = \widehat{AHC} = y$, tem-se que os arcos $\overset{\frown}{FA}$ e $\overset{\frown}{GA}$ valem

$$\overset{\frown}{FA}=\overset{\frown}{FC} + \overset{\frown}{CA}.$$

e

$$\overset{\frown}{GA}=\overset{\frown}{GB} + \overset{\frown}{BA}.$$

E, visto que os ângulos opostos a $\overset{\frown}{FC}=\overset{\frown}{GB}= x$ e $\overset{\frown}{BA}=\overset{\frown}{CA}= y$, então

$$\overset{\frown}{GA}=\overset{\frown}{FA}= 2x + 2y.$$

Mostrando assim que os arcos opostos a $\widehat{AFG}$ e $\widehat{AGF}$ tem a mesma medida e valem 120°. Como F e G são pontos inscritos na circunferência, os seus ângulos valem metade do arco oposto a eles, mostrando assim que

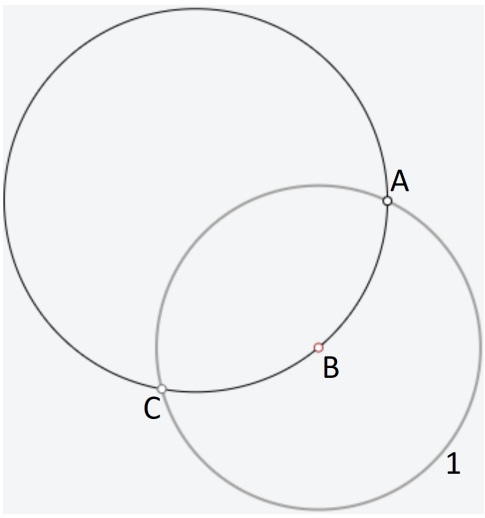
$$\widehat{FAG} = \widehat{AGF} = \widehat{AFG} = 60°.$$

Mostrando assim que o triângulo AFG é equilátero.

4.3.1.2 *Solução mínima para E*

- Passo 1: Crie uma circunferência, denotada por 1, centrada em um ponto B arbitrário da circunferência original e de raio BA. Após isso marque o ponto C, que será dado pela interseção de 1 com a circunferência original.

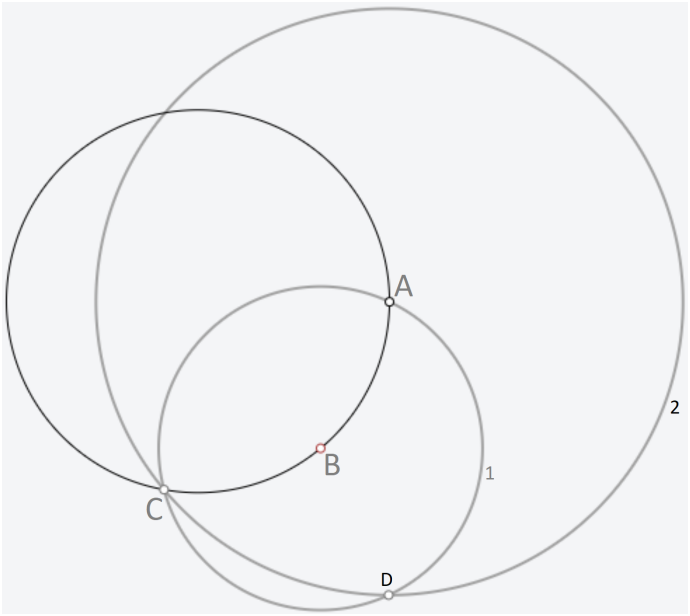
Figura 27 – Problema 4.4 - Passo 1E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 2: Crie uma circunferência, denotada por 2, centrada em A e de raio AC. Em seguida marque como D a interseção existente de 1 e 2.

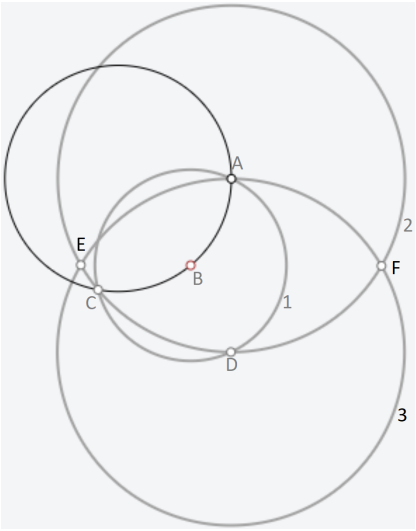
Figura 28 – Problema 4.4 - Passo 2E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 3: Crie uma circunferência, denotada por 3, centrada em D e de raio AD. Depois marque os pontos E e F como as interseções de 2 e 3.

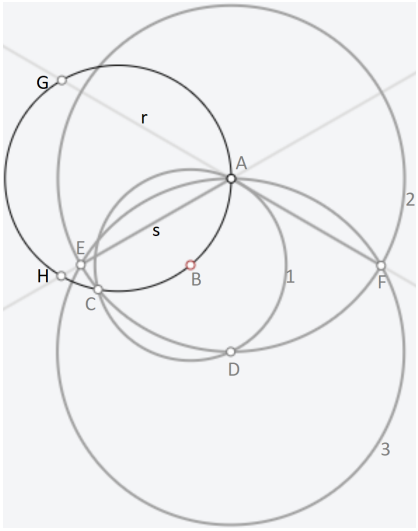
Figura 29 – Problema 4.4 - Passo 3E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 4: Trace uma reta entre os pontos A e F, denotada por reta r. E também trace outra reta entre os pontos A e E, esta denotada por s. Então marque os pontos G e H como sendo a interseção de r e s, respectivamente, com a circunferência original.

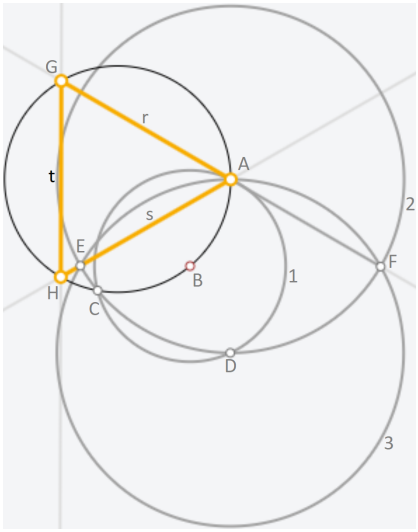
Figura 30 – Problema 4.4 - Passo 4 e 5E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 5: Por fim, trace uma reta, denotada por t, passando pelo pontos G e H.

Figura 31 – Problema 4.4 - Passo 6E.



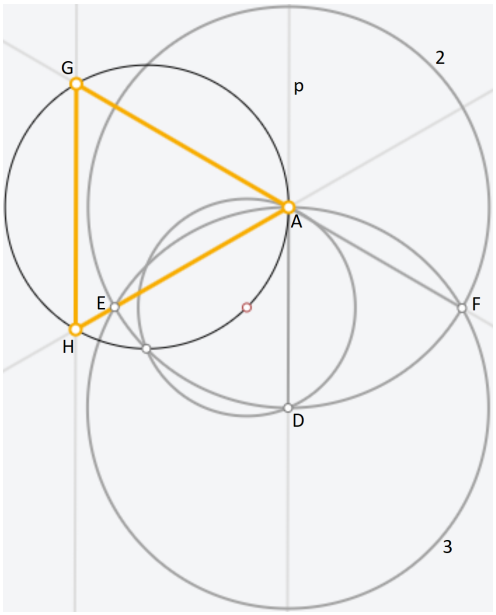
Fonte: Autor (2023).

Assim, o triângulo AGH será o triângulo desejado para a solução do problema.

Por que isso funciona?

Primeiramente, faça uma reta que passe pelos pontos A e D, denotada por p.

Figura 32 – Problema 4.4 - justificativa: ângulo $\widehat{HAJ}$.



Fonte: Autor (2023).

Note que $\widehat{EAD} = \widehat{DAF} = 60°$, pois ambos os triângulos são formados por raios das circunferências 2 e 3, que na construção foram feitos com a mesma medida. Como $\widehat{EAD} + \widehat{DAF} + \widehat{HAG} = 180°$, pode-se concluir que

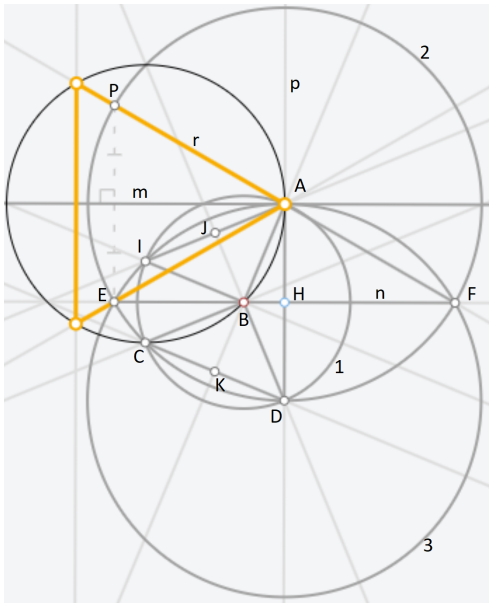
$$\widehat{HAG} = 60°.$$

Agora marque o ponto P na interseção da reta r com a circunferência 2 e o ponto I, localizado na interseção da circunferência 1 e 3, traçando a mediatriz do ponto P e E logo em seguida, denominada de m. Também trace a mediatriz do segmento $\overline{AD}$, que é dado pelo segmento de reta $\overline{EF}$, chamando-a de n. Marque o ponto H como sendo a interseção entre n e p.

Veja que p é perpendicular a m, visto que o triângulo AEP é equilátero e a mediatriz divide $\widehat{PAE}$ em dois ângulos iguais de 30°, e como $\widehat{EAD} = 60°$ isso implica que a angulação da reta m e p mede 90°, ou seja, são perpendiculares. Dessa forma, m é paralela a n, pois n também é perpendicular a p.

Depois disso, faça os segmentos de reta $\overline{AI}$, $\overline{CD}$, $\overline{BI}$ e $\overline{BC}$, além de traçar a mediatriz do segmentos $\overline{AI}$ e $\overline{CD}$, onde a mediatriz de $\overline{AI}$ é corda das circunferências 1 e 3, e a mediatriz de $\overline{CD}$ é corda das circunferências 1 e 2. Em seguida, marque o ponto J na interseção da mediatriz de $\overline{AI}$ com o próprio segmento $\overline{AI}$ e o ponto K na interseção da mediatriz de $\overline{CD}$ com o segmento $\overline{CD}$.

Figura 33 – Problema 4.4 - Justificativa para E: congruência de triângulos.



Fonte: Autor (2023).

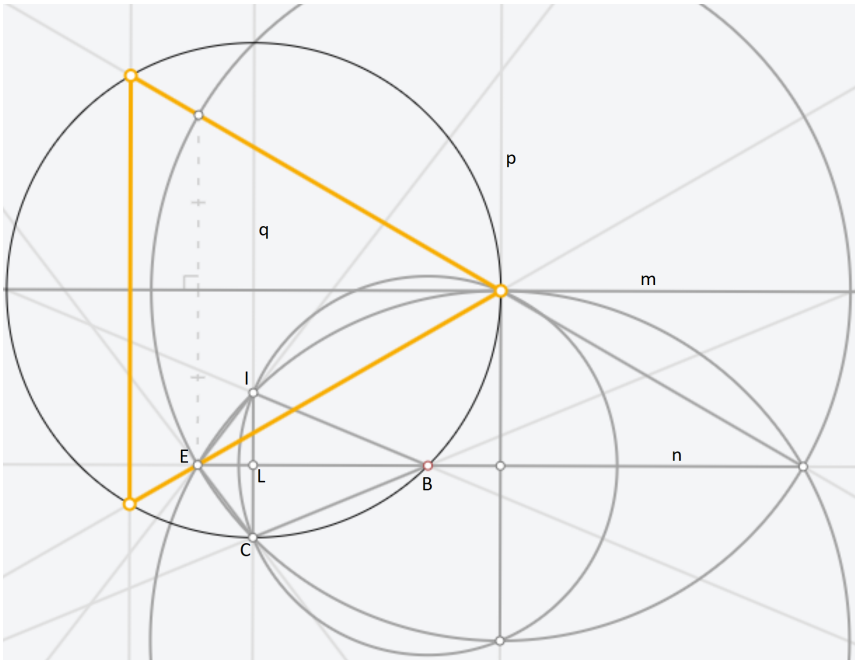
Note que o triângulo BDH é congruente a BAH, já que ambos possuem os três lados iguais, sendo $\overline{BH}$ comum aos dois lados, $\overline{BA} = \overline{BE}$ pois ambos são raios e $\overline{AH} = \overline{DH}$, já que n é a mediatriz de $\overline{AD}$.

Veja que os triângulos BIJ e BAJ também são congruentes, assim como os triângulos BCK e BDK, pois ambos compartinham um lado, tem o mesmo raio e a mediatriz de um segmento está em comum entre eles, formando o caso de congruência LAL. Como $\widehat{ABH} = \widehat{CBK} = \widehat{DBH} = \widehat{IBJ}$, então os triângulos IBA e CBD são congruentes. Como esses quatro ângulos são iguais, resta que $\widehat{IBE} = \widehat{CBE}$, concluindo que

$$EBI \cong EBC.$$

Agora trace uma reta denominada por q que passe pelos pontos C e I, também marque o ponto L na interseção de q e n

Figura 34 – Problema 4.4 - Justificativa para E: perpendicular q.



Fonte: Autor (2023).

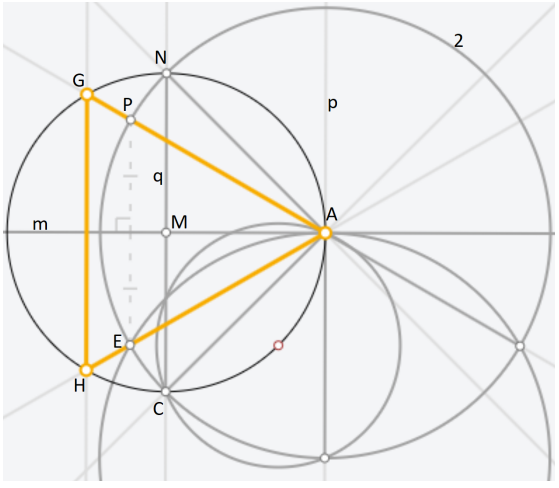
Observe que $\overline{EI}$ é equidistante de $\overline{AD}$, devido a congruência dos dois triângulos vista anteriormente. Além disso, note que $\widehat{IEL} = \widehat{CEL}$ e $\overline{EL}$ é um lado em comum dos dois. Assim, pelo caso de congruência LAL

$$ELI \cong ELC.$$

O que implica que $\widehat{ELI} = \widehat{ELC} = 90°$. Mostrando assim que q é perpendicular a n e como n é paralela a m, então q é perpendicular a m.

Por fim, marque o ponto M na interseção de q e m, além do ponto N, que fica na interseção da circunferência original com a reta q.

Figura 35 – Problema 4.4 - Justificativa para E: triângulo ACN.



Fonte: Autor (2023).

Note que $\widehat{NAM} = \widehat{CAM}$, visto que os pontos C e N estão localizados na interseção da circunferência 2, que tem origem no ponto A, e a circunferência original do problema, além de m ser bissetriz de $\widehat{PAE}$. Assim, $\overline{AN} = \overline{AC}$, $\widehat{NAM} = \widehat{CAM}$ e $\overline{AM}$ é lado comum dos dois triângulos. Pelo caso de congruência LAL, note-se que os triângulos ANM e ACM são congruentes.

Dessa forma

$$\widehat{PAN} = \widehat{EAC} \rightarrow \overset{\frown}{GN} = \overset{\frown}{HC}.$$

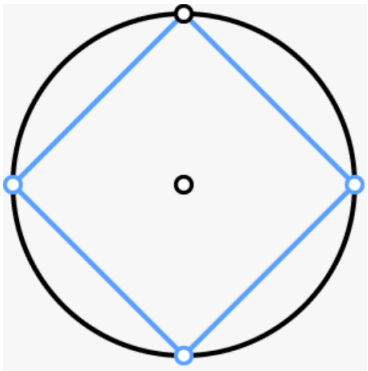
E como $\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{CA}$ por estarem equidistântes em relação a A e as duas circunferências, então

$$\overset{\frown}{GA} = \overset{\frown}{HA} \rightarrow \overset{\frown}{GA} + \overset{\frown}{HA} = 240° \rightarrow \overset{\frown}{GA} = 120°.$$

Mostrado assim que $\widehat{AHG} = \widehat{AGH} = \widehat{GAH} = 60°$, concluindo a prova e confirmando que o triângulo inscrito era equilátero.

4.3.2 Quadrado inscrito em um círculo a partir de um vértice

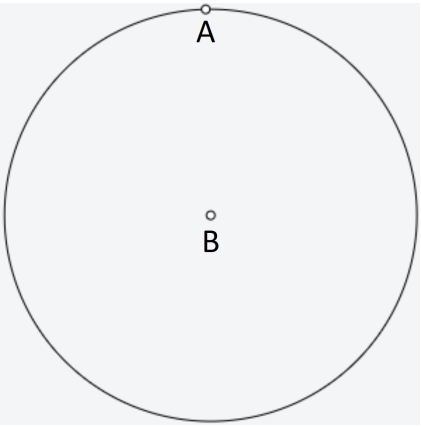
Figura 36 – Problema 1.7 - Ilustração da resposta.



Fonte: Autor (2023).

O problema consiste em inscrever um quadrado em um círculo a partir de um dos seus vértices e o centro do círculo, com uma estrela de seis ferramentas (6L) e outra de sete linhas (7E). Da mesma forma do problema anterior, não é possível conseguir ambas as estrelas com a mesma resolução, pedindo uma abordagem diferente para cada um dos dois casos.

Figura 37 – Problema 1.7 - Euclidea.

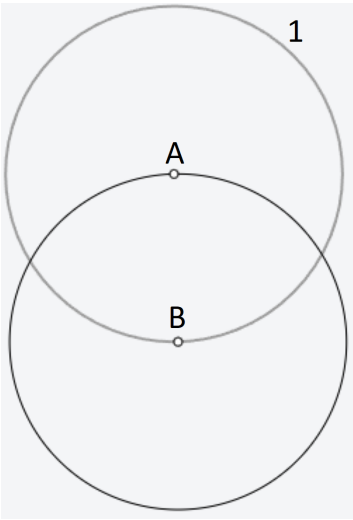


Fonte: Autor (2023).

4.3.2.1 *Solução mínima para E*

- Passo 1: Crie uma circunferência denotada por 1, centrada em A e de raio AB. Em seguida, marque os pontos C e D, que estão na interseção entre 1 e a circunferência original.

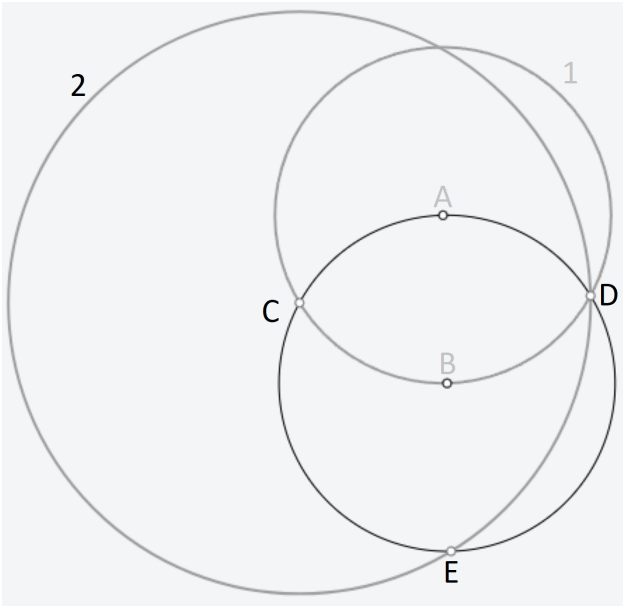
Figura 38 – Problema 1.7 - Passo 1E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 2: Crie uma circunferência centrada em C e com raio CD chamada de 2. Marque o ponto E localizado na interseção da circunferência 2 e a circunferência original.

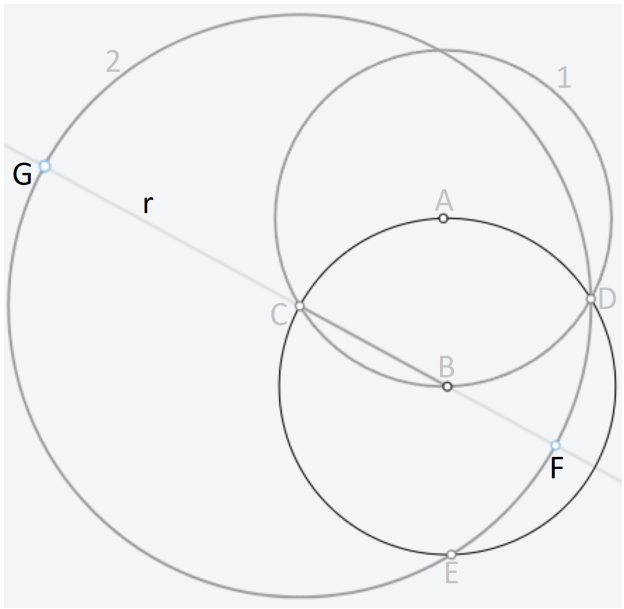
Figura 39 – Problema 1.7 - Passo 2E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 3: Trace uma reta que forma o segmento CB, denotada por r. Depois, marque os pontos F e G na interseção entre a reta r e a circunferência 2.

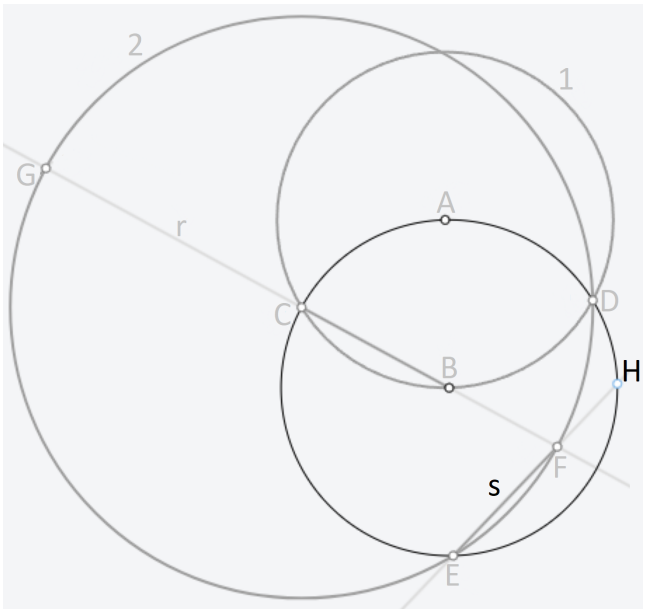
Figura 40 – Problema 1.7 - Passo 3E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 4: Trace uma reta que passa pelos pontos E e F, denotada por s. Marque a interseção da reta s com a circunferência original, chamando o ponto de H. O segmento EH forma um dos lados do quadrado do desafio.

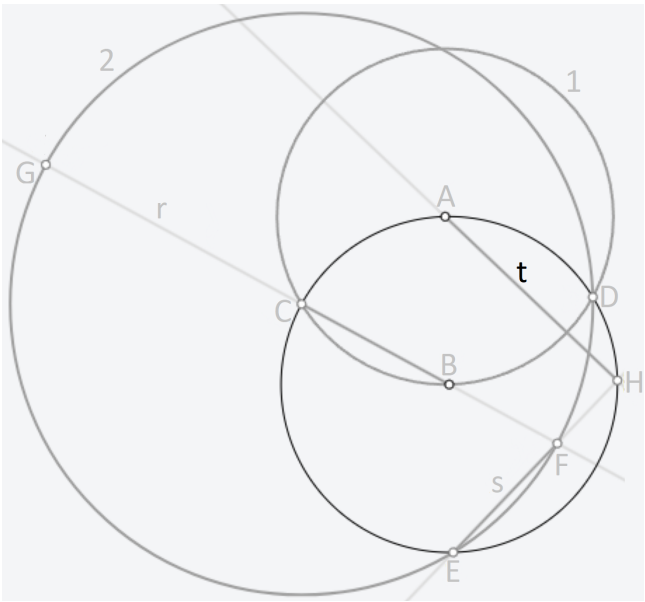
Figura 41 – Problema 1.7 - Passo 4E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 5: Trace uma reta e delimite o segmento AH, que será o outro lado do quadrado. Nomeie a reta criada de t.

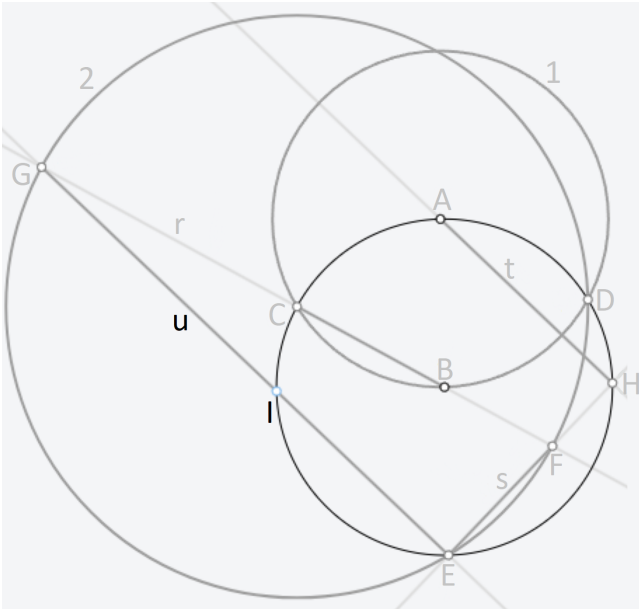
Figura 42 – Problema 1.7 - Passo 5E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 6: Trace uma reta que passe por E e G, chamada da u. Marque a interseção de u e a circunferência original como o ponto I. O segmento EI é um dos lados do quadrado desejado.

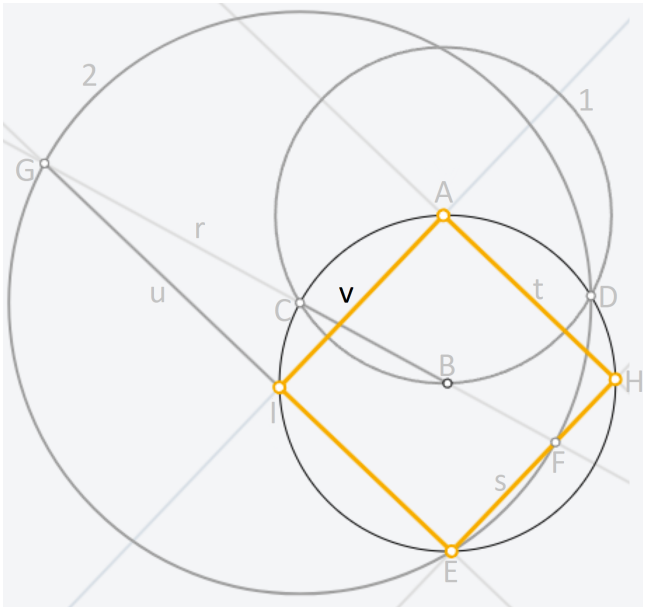
Figura 43 – Problema 1.7 - Passo 6E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 7: Trace a reta v, que passa pelos pontos A e O, formando o segmento AI e completando o quadrado com o último lado.

Figura 44 – Problema 1.7 - Passo 7E.



Fonte: Autor (2023).

Assim, o quadrado AHEI está inscrito na circunferência e resolve o problema proposto.

Por que isso funciona?

Essa solução será dividida em duas partes, a primeira focando se os ângulos construidos na figura têm medidas de 90° e a segunda mostrando que todos os lados são iguais.

Veja que $\overline{AE}$ é diâmetro da circunferência original, logo $\widehat{AHE}$ e $\widehat{AIE}$ tem a mesma medida e, como âmbos são ângulos inscritos eles medem a metade do arco $\overset{\frown}{AE}$, que como é diâmetro da circunferência, mede 180°, concluindo assim que

$$\widehat{AIE} = \widehat{AHE} = 90°.$$

Da mesma forma, vê-se que

$$\widehat{IAH} = \widehat{IEH} = 90°.$$

Agora marque o ponto J na segunda interseção entre as circunferências 1 e 2, notando que o segmento de reta $\overline{BJ}$ é diametro da circunferência 1. Agora, veja que o triângulo JCB é um triângulo retângulo, tal que $\widehat{JCB} = 90°$, já que o arco $\overset{\frown}{JB}= 180°$ e C é um ponto inscrito da circunferência 1.

Além disso, como a reta r tem um arco de 180°, pode-se ver que o triângulo $\widehat{JCG} = 90°$, ou seja, o arco $\overset{\frown}{GJ}$ mede 90°. Para concluir, basta basta ver que o ângulo $\widehat{JEG} = 45°$ e que, como visto na primeira parte da solução, todos os ângulos da figura formada medem 90°, assim $\widehat{IAE} = \widehat{HEA} = \widehat{HAE} = 45°$.

Dessa forma,

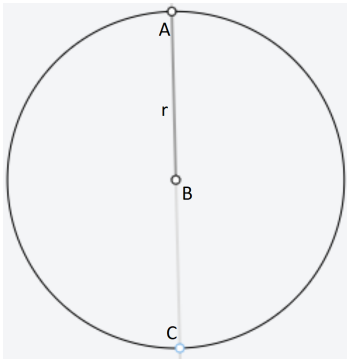
$$\overline{AH} = \overline{HE} = \overline{EI} = \overline{IA}.$$

Pois todos os segmentos estão opostos a arcos de 45° e são cordas da circunferência original do problema, concluindo assim a demonstração.

4.3.2.2 *Solução mínima para L*

- Passo 1: Trace uma reta que passa pelos pontos A e B, denotada por r. Marque o ponto C na interseção da reta r e da circunferência principal.

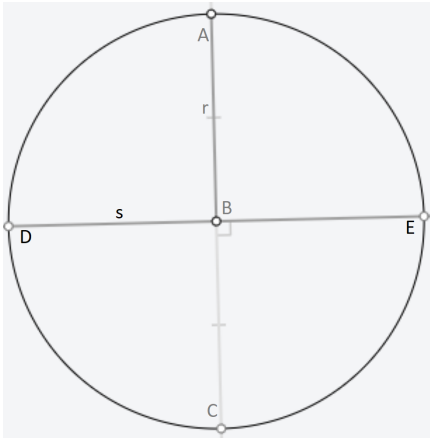
Figura 45 – Problema 1.7 - Passo 1L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 2: Trace a mediatriz do segmento de reta AC, formando a reta s. Em seguida, marque os pontos D e E nas interseções de s e a circunferência principal.

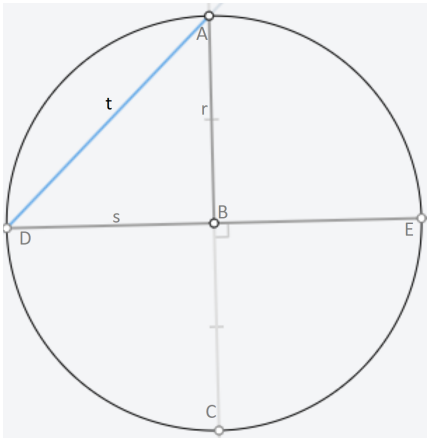
Figura 46 – Problema 1.7 - Passo 2L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 3: Trace uma reta que passa pelos pontos A e D, demorado por t. O segmento AD forma um lado do quadrado.

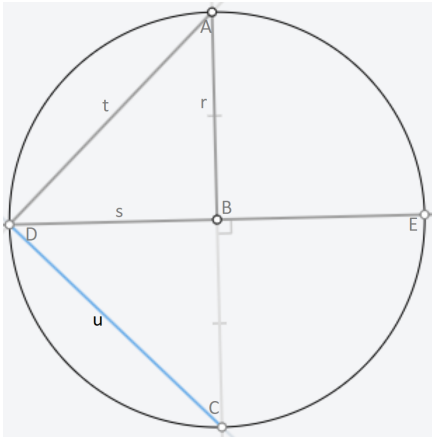
Figura 47 – Problema 1.7 - Passo 3L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 4: Trace uma reta que contenha o segmento DC, chamada de u. Essa segmento forma outro lado do quadrado.

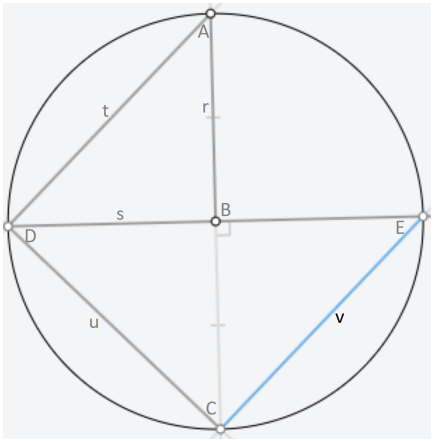
Figura 48 – Problema 1.7 - Passo 4L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 5: Trace a reta v, que passa pelos pontos C e E e contém o segmento CE, formando o penúltimo lado do quadrado.

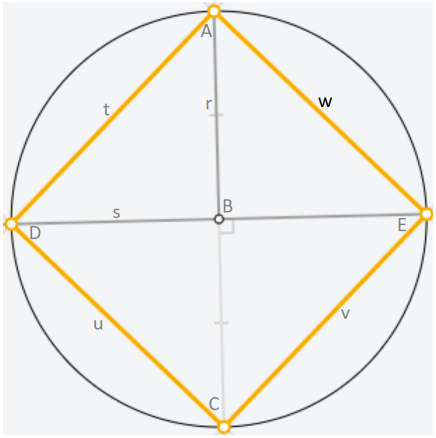
Figura 49 – Problema 1.7 - Passo 5L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 6: Trace uma reta formando o segmento de reta AE, denotado por w. Formando o último lado do quadrado.

Figura 50 – Problema 1.7 - Passo 6L.



Fonte: Autor (2023).

Assim, o quadrado ADCE é o quadrado desejado e que soluciona o problema para o L.

Por que isso funciona?

Primeiramente, o quadrado será dividido em quatro triângulos, essa parte será feita com apenas um desses triângulos, mas a lógica usada serve para os quatro, ja que os seus vértices são todos iguais ao raio da circunferência, apenas mudando as suas bases, que esse problema quer mostrar que são iguais.

O triângulo ABE é um triângulo retângulo, visto que a reta s é a mediatriz do segmento de reta $\overline{AC}$, sendo assim $\widehat{ABE} = 90°$. Como justificado acima $\overline{BA} = \overline{BE}$ e $\widehat{BAE} = \widehat{BEA} = 45°$, visto que o triângulo é isoceles. Repetindo esse processo em todos

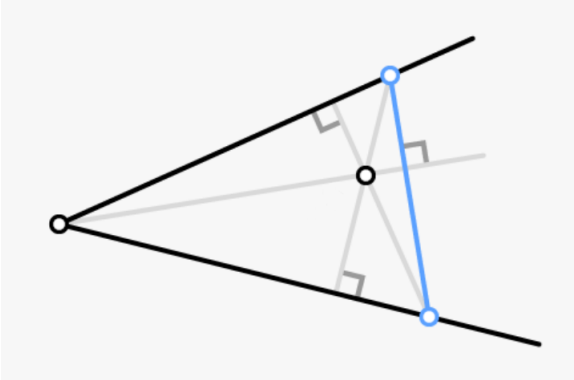
os quatro triângulos, tem-se que todos os ângulos do quadrado $AECD$ valem 90° e pelo caso de congruência LAL, todos os triângulos são congruentes, ou seja,

$$\overline{AE} = \overline{EC} = \overline{CD} = \overline{DA}.$$

Provando assim, que essa figura se trata de um quadrado e, como só existe uma interseção de cada vértice com a circunferência, está inscrito nela.

4.3.3 Triângulo a partir de duas retas e o ortocentro.

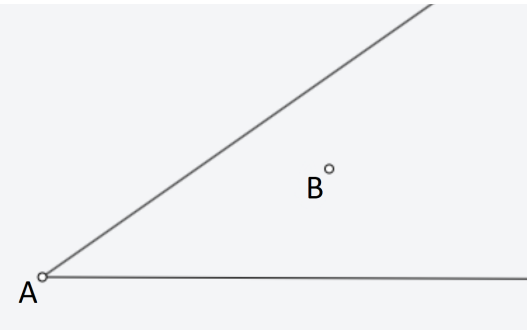
Figura 51 – Problema 3.2 - Ilustração da resposta.



Fonte: Autor (2023).

O problema consiste em encontrar os dois vértices nas semi retas dadas e, a partir delas, traçar uma reta de modo que o ponto B seja o ortocentro desse triângulo. A solução mínima para esse problema é de seis linhas (6E) e três ferramentas (3L), que não podem ser obtidas na mesma resolução.

Figura 52 – Problema 3.2 - Euclidea.

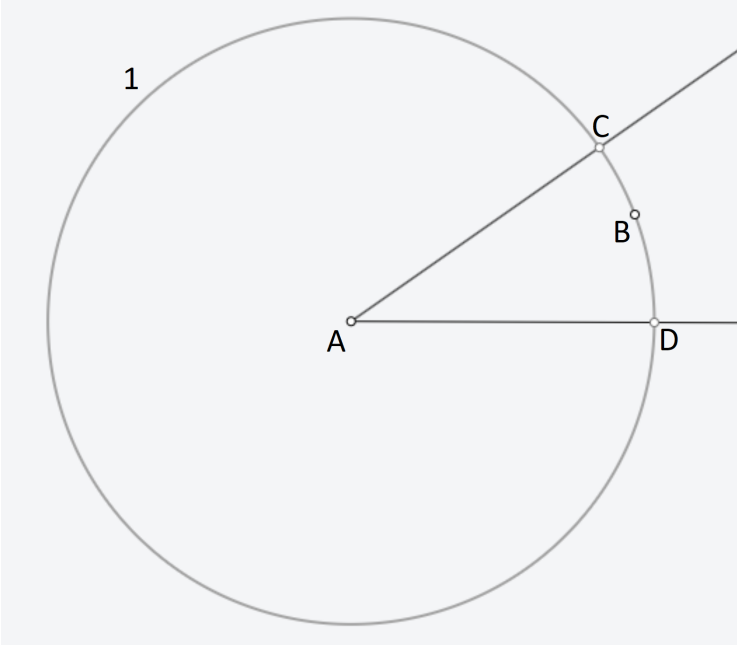


Fonte: Autor (2023).

4.3.3.1 *Solução mínima para E*

- Passo 1: Trace uma circunferência centrada em A e de raio AB, denotada por 1. Marque os Pontos C e D na interseção de 1 com as duas retas originais do problema.

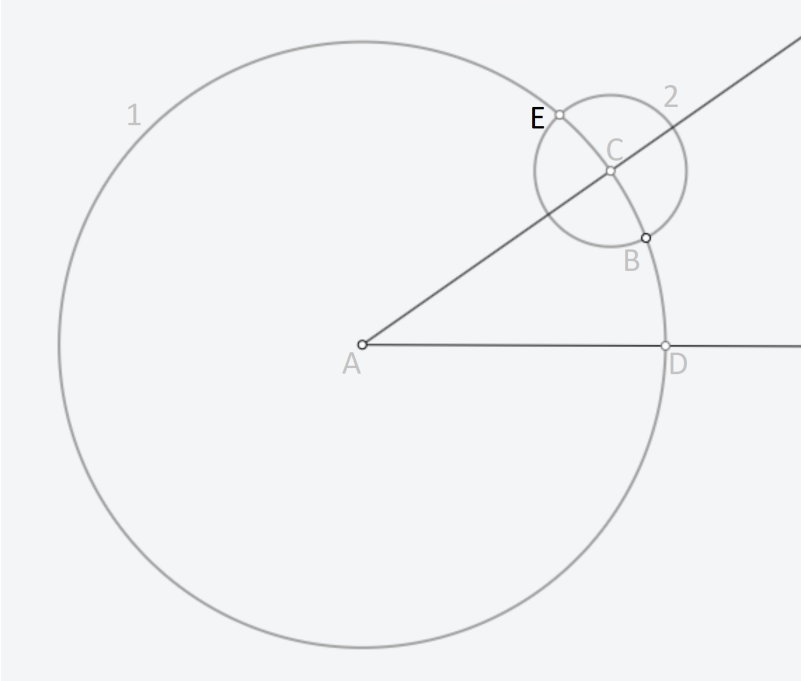
Figura 53 – Problema 3.2 - Passo 1E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 2: Trace outra circunferência, mas desta vez centrada em C e de raio CB, denotada por 2. Marque o ponto E na interseção entre a circunferência 1 e a circunferência 2.

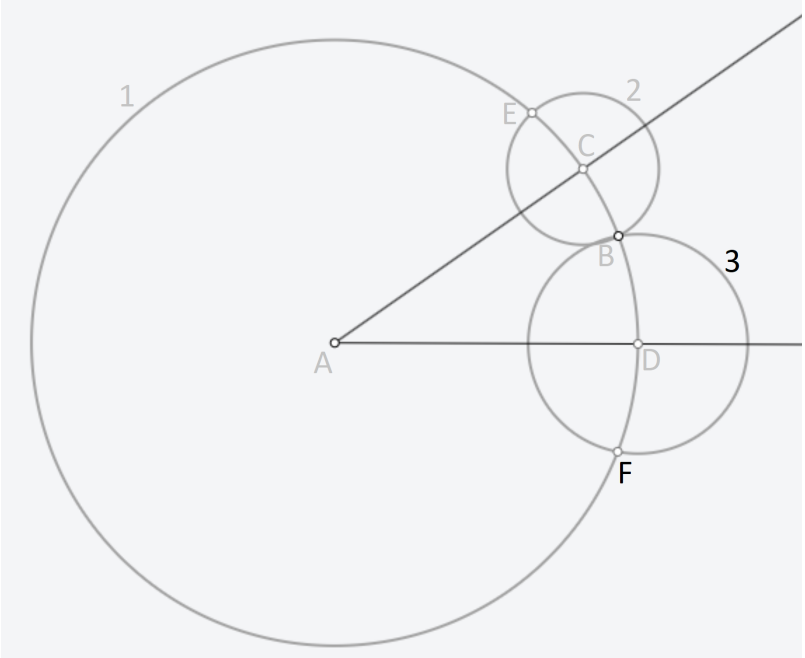
Figura 54 – Problema 3.2 - Passo 2E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 3: Da mesma forma do item anterior, trace uma circunferência centrada em D e de raio DB, chamando-a de 3. Localize a interseção entre 3 e 1 e marque o ponto F nela.

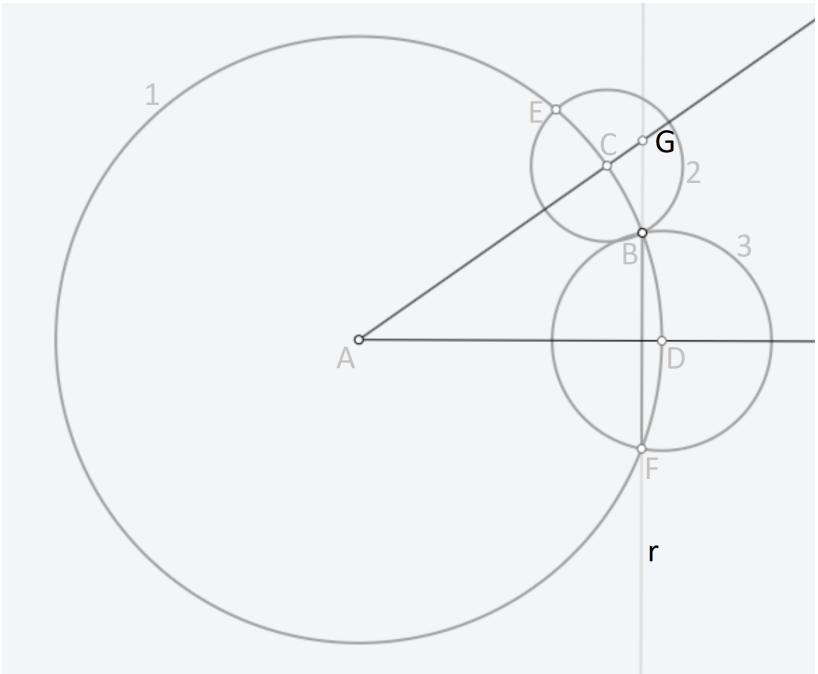
Figura 55 – Problema 3.2 - Passo 3E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 4: Trace uma reta, chamada de r, entre os pontos F e B. Marque o ponto G na interseção entre r e o segmento de reta original do problema, na parte superior.

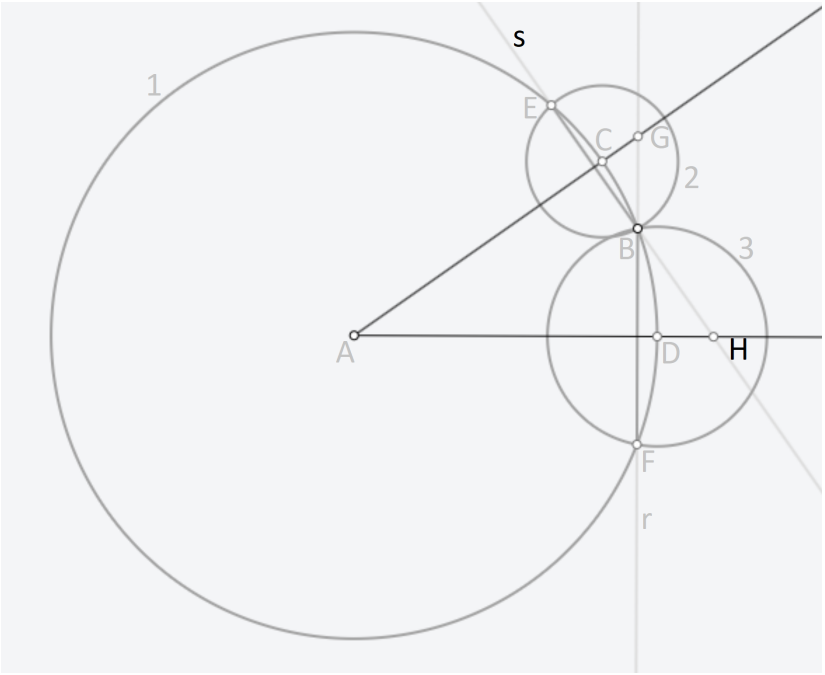
Figura 56 – Problema 3.2 - Passo 4E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 5: Trace outra reta que passa pelos pontos E e B, chamada de s. Denote por H o ponto que fica na interseção entre s e a reta inferior do problema original.

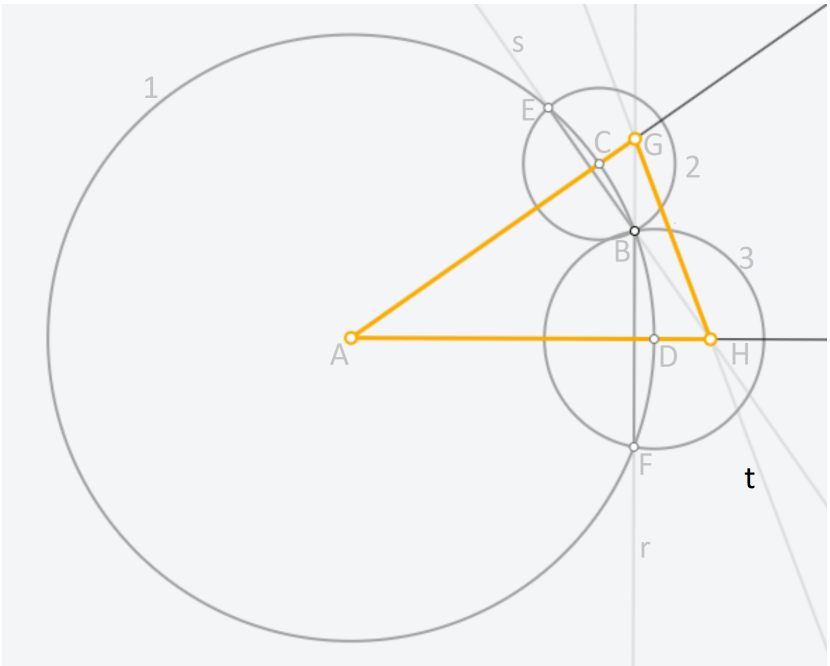
Figura 57 – Problema 3.2 - Passo 5E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 6: Trace uma reta, denotada por t, entre os pontos G e H.

Figura 58 – Problema 3.2 - Passo 6E.



Fonte: Autor (2023).

Assim, o triângulo AGH é o triângulo cujo o ortocentro é o ponto B, resolvendo o problema proposto para E.

Porque isso funciona?

O ortocentro de um triângulo é o ponto criado pela interseção das alturas de

todos os seus lados, sendo assim, basta mostrar que a reta s é perpendicular a $\overline{AG}$ e que a reta r é perpendicular a $\overline{AH}$ para concluir que a resolução está correta.

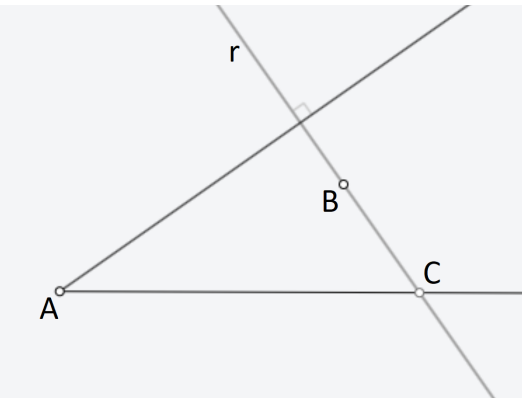
Veja que a circunferência 1 está sobre o mesmo segmento de reta que a circunferência 2, com as duas sendo feitas usando o ponto B como referência. A reta s, formada pela ligação do pontos B e E, que por sua vez são os pontos de interseção das duas circunferências acima citadas, é o eixo radical da circunferências 1 e 2. Dessa forma, o segmento de reta s é por definição perpendicular ao segmento de reta que contém o centro das duas circunferências, ou seja, s é perpendicular a $\overline{AG}$.

Da mesma forma, pode-se ver que r é perpendicular a $\overline{AH}$, concluindo a justificativa.

4.3.3.2 *Solução mínima para L*

- Passo 1: Trace uma perpendicular na reta original superior do problema e o ponto B, denote a reta perpendicular a ela por r. Marque o ponto C na interseção de r e a reta original inferior do problema.

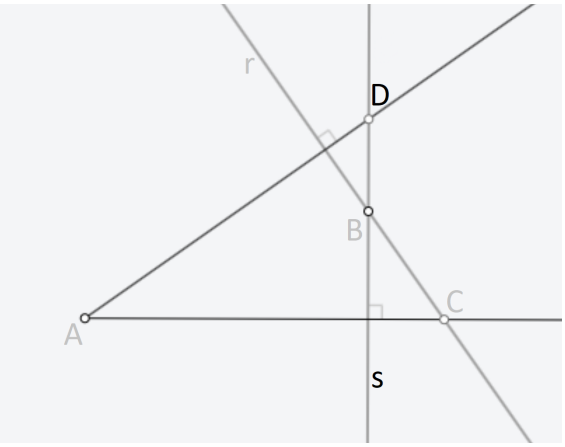
Figura 59 – Problema 3.2 - Passo 1L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 2: Trace outra reta perpendicular a reta original inferior do problema, a reta perpendicular será a reta s. Entre a interseção de s e a reta original superior do problema, marque o ponto D.

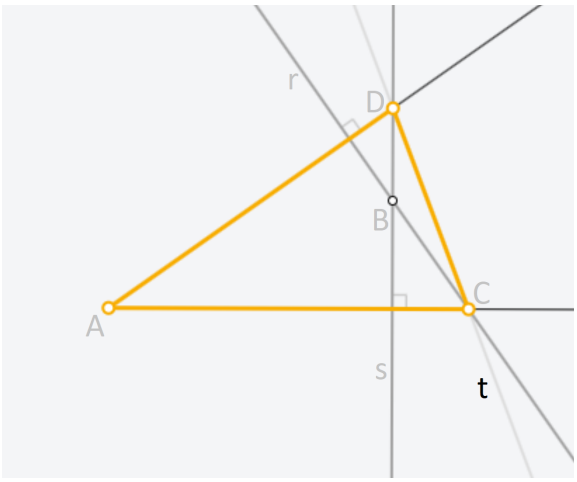
Figura 60 – Problema 3.2 - Passo 2L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 3: Trace uma reta que passa entre os ponto C e D, denotada por t.

Figura 61 – Problema 3.2 - Passo 3L.



Fonte: Autor (2023).

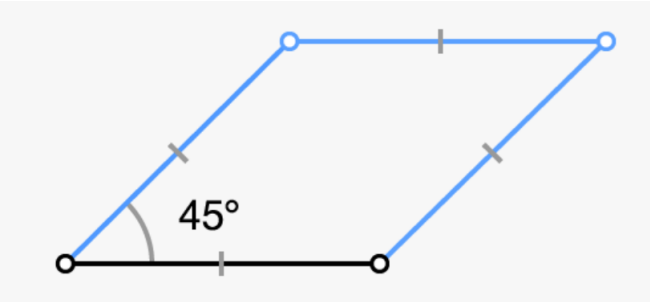
O triângulo ACD é o triângulo cujo o ortocentro é o ponto B, resolvendo o problema desejado para L.

Por que isso funciona?

Usando a definição de ortocentro, fica nítido que as interseções das perpendiculares formadas pelo ponto B e as semi retas originais do problema marcam exatamente os dois vértices que faltam do triângulo ACD, sendo as duas perpenculares as alturas em relação a C e D.

4.3.4 Losango com um ângulo de 45° a partir de um lado dado.

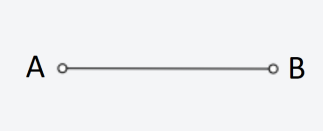
Figura 62 – Problema 3.8 - Ilustração da resposta.



Fonte: Autor (2023).

O problema consiste em construir um losango a partir de um de seus lados, esse losango precisa ter em dois de seus ângulos a medida de 45°. O desafio do problema é solucionar ele com o máximo de sete linhas (7E) e cinco ferramentas (5L), sendo esses dois problemas não solucionáveis ao mesmo tempo. Ele também é um problema especial, já que contém uma estrela extra caso o jogador consiga exboçar todas as soluções possíveis para o problema.

Figura 63 – Problema 3.8 - Euclidea.

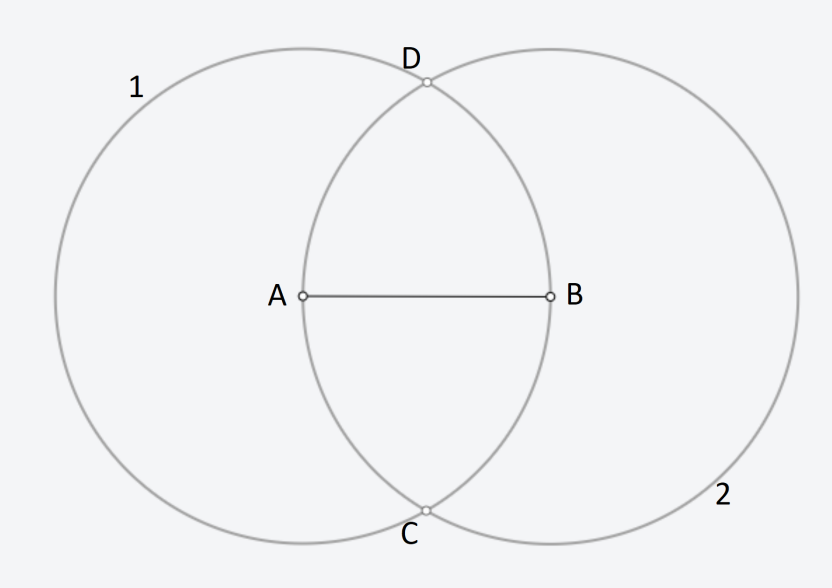


Fonte: Autor (2023).

4.3.4.1 *Solução mínima para E*

- Passo 1: Trace duas circunferências entre os pontos A e B, uma centrada em A e de raio AB, denotada por 1, e outra centrada de B de mesmo raio, que será denotada por 2. Marque os pontos C e D na interseção entre as circunferências 1 e 2 recém criadas. Veja que serão necessárias duas linhas para esse passo.

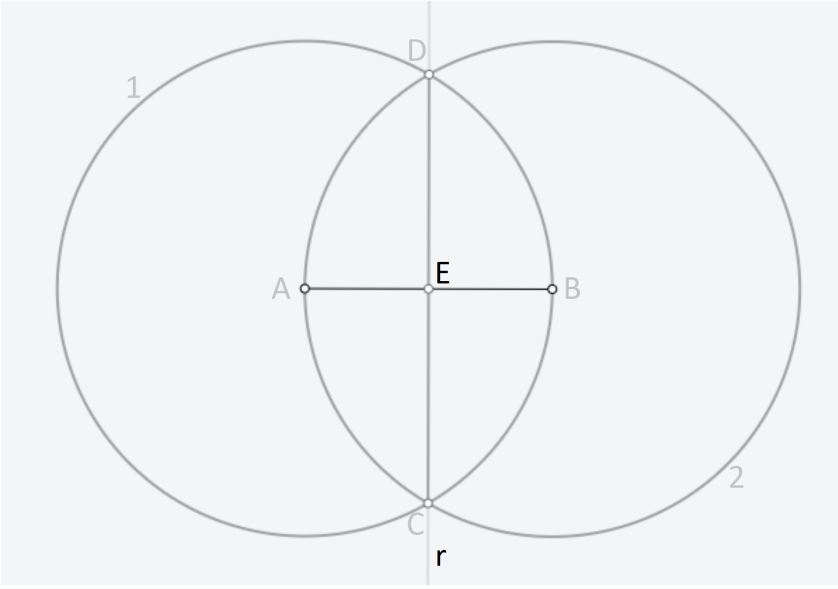
Figura 64 – Problema 3.8 - Passo 1E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 2: Trace uma reta que passa pelos pontos C e D, nomeada de r. Marque o ponto E no lado dado do losango. Note que a reta r se trata da mediatriz do segmento AB.

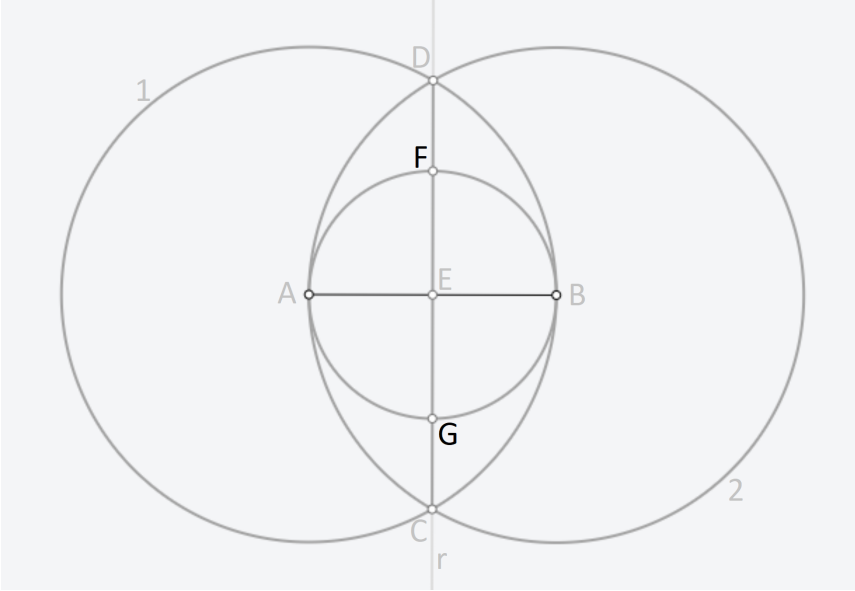
Figura 65 – Problema 3.8 - Passo 2E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 3: Trace uma circunferência centrada em E e de raio EA, que também será igual a EB, denote a circunferência por 3. Marque os pontos F e G nas interseções entre 3 e a mediatriz r.

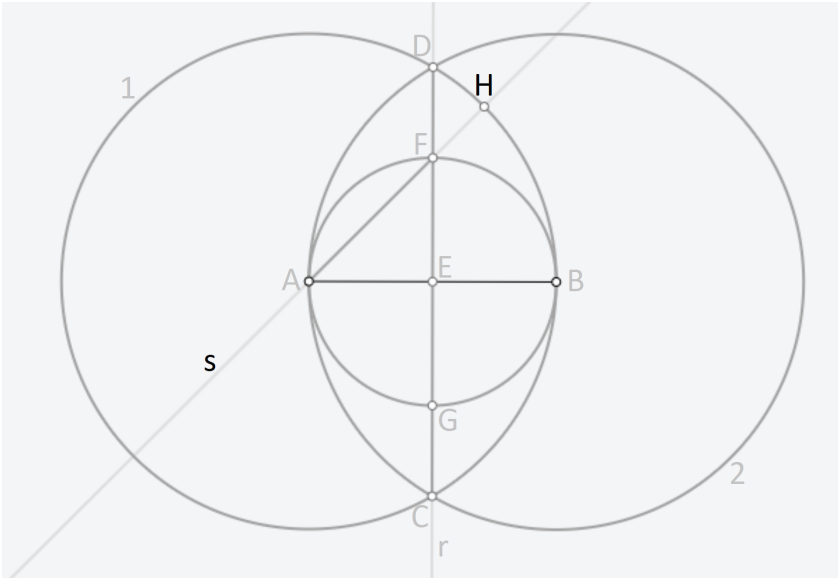
Figura 66 – Problema 3.8 - Passo 3E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 4: Trace uma reta que passe pelos pontos A e F, denotada por s. Marque o ponto H localizado na interseção de s com a circunfência 1.

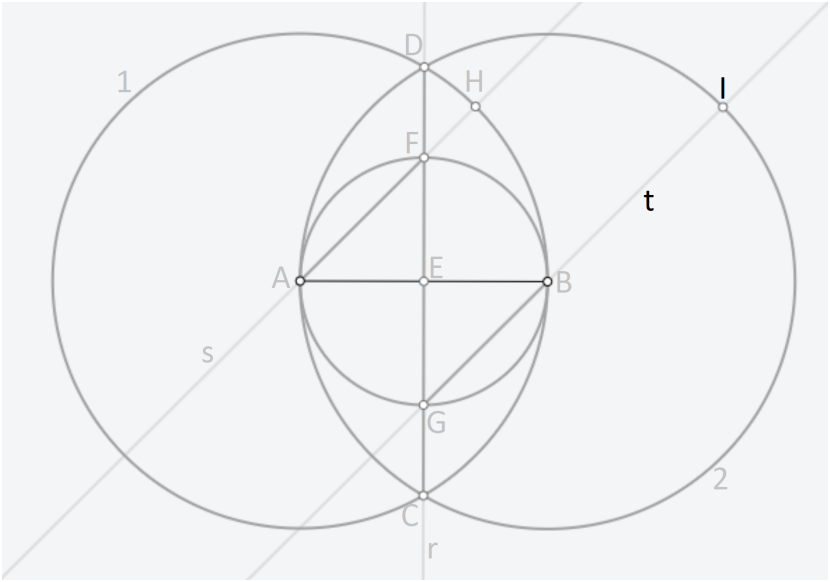
Figura 67 – Problema 3.8 - Passo 4E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 5: Trace outra reta que passe, desta vez, entre os pontos B e G, denote-a por t. A interseção de t com a circunferência 2 será o ponto I.

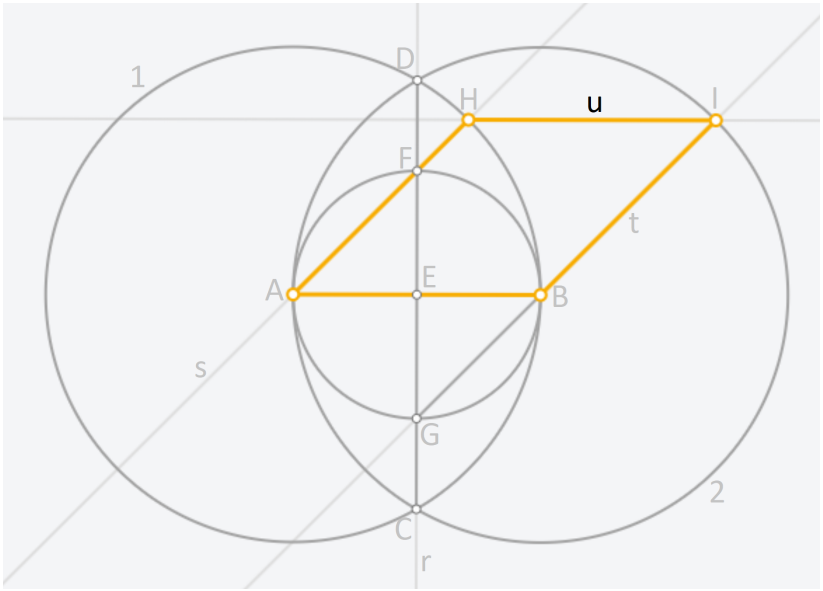
Figura 68 – Problema 3.8 - Passo 5E.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 6: Por fim, trace uma reta que liga os pontos H e I, denotada como reta u.

Figura 69 – Problema 3.8 - Passo 6E.



Fonte: Autor (2023).

Assim o losango ABIH é o losango que soluciona o problema proposto para E.

Por que isso funciona?

Primeiramente veja que o ângulo $\widehat{EAF}$ do losango ABIH mede 45°, já que AEF é um triângulo retângulo com $\widehat{AEF}$ medindo 90° e $\overline{EA} = \overline{EF}$. Além disso, o triângulo AEF é igual ao triângulo BEG e, como eles tem os seus ângulos de 90° opostos pelo vértice, suas bases serão paralelas. Logo $\overline{AH}$ é paralelo a $\overline{BI}$.

Também fica nítido que $\widehat{ABI}$ pode ser encontrado usando complemento de arco em relação ao ângulo $\widehat{EBG}$, que como se trata de um triângulo retângulo isóceles, tem os ângulos $\widehat{EGB} = \widehat{EBG} = 45°$ tendo seu complemento $\widehat{ABI} = 135°$.

Agora note que o triângulo ABH é isóceles, já que $\overline{AB} = \overline{AH}$. Como $\widehat{BAH}$ mede 45°, têm-se que os outros dois angulos desse triângulo medem $\widehat{ABH} = \widehat{AHB} = 67,5°$.

Dessa forma, vê-se que o segmento de reta $\overline{BH}$ é exatamente a mediatriz de $\widehat{ABH}$ e pelo caso de congruência LAL, pode-se ver que $ABH = IBH$.

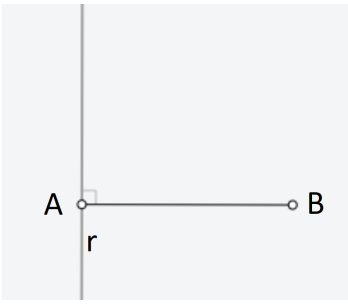
Logo

$$\overline{AB} = \overline{BI} = \overline{IH} = \overline{AH}.$$

4.3.4.2 *Solução mínima para L*

- Passo 1: Trace uma reta perpendicular ao lado dado do losango e no ponto A, denote essa reta por r.

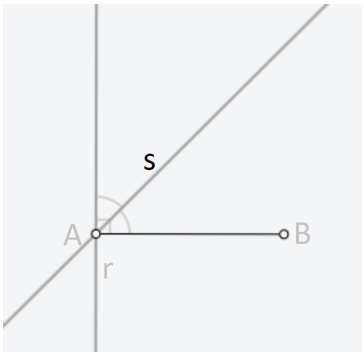
Figura 70 – Problema 3.8 - Passo 1L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 2: Trace a bissetriz do segmento de reta AB e a reta r.

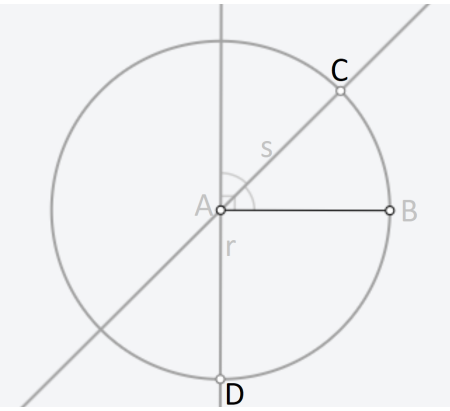
Figura 71 – Problema 3.8 - Passo 2L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 3: Trace uma circunferência centrada em A e de raio $\overline{AB}$, denotada por 1. Marque o ponto C localizado na interseção da circunferência 1 e da reta s e marque o ponto D localizado na interseção da circunferência 1 e da reta r.

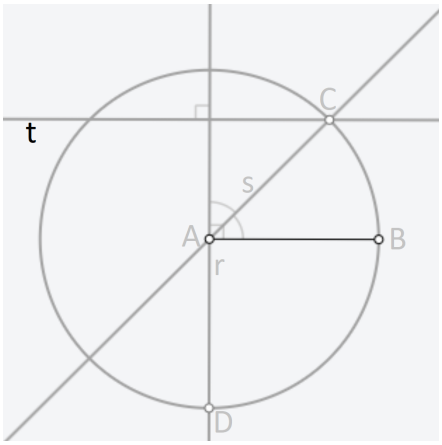
Figura 72 – Problema 3.8 - Passo 3L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 4: Trace uma reta perpendicular a reta r e que passe pelo ponto C, denote-a por t.

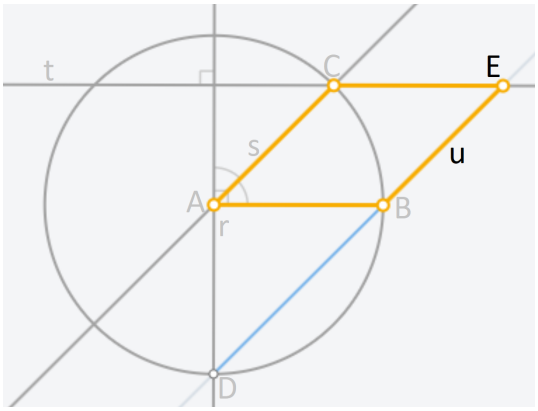
Figura 73 – Problema 3.8 - Passo 4L.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 5: Trace uma reta que passa pelos ponto B e D, denotada por u. Marque o ponto E na interseção da reta u com a reta t.

Figura 74 – Problema 3.8 - Passo 5L.



Fonte: Autor (2023).

Assim o losango ABEC é o losango que resolve o problema para L.

Por que isso funciona?

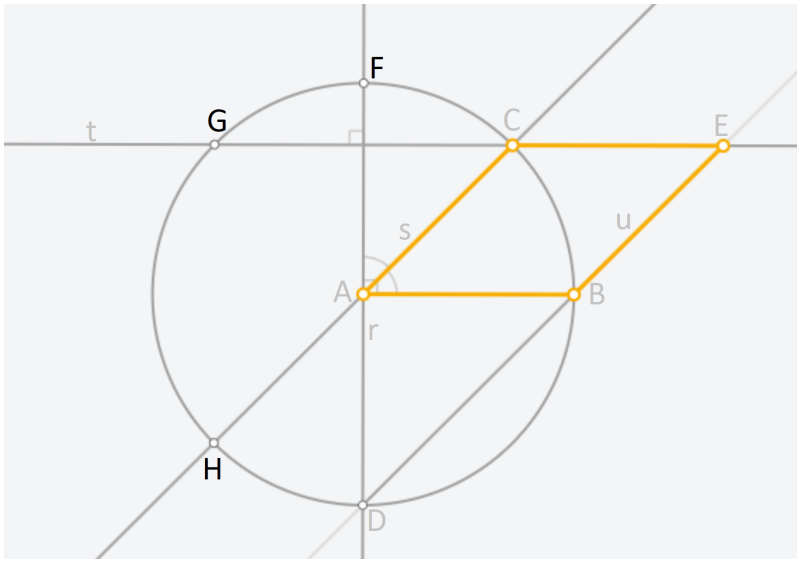
O problema pede um losango com um ângulo de 45° graus e, como a reta r é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, o ângulo formado entre ele é 90°, que quando dividido pela bissetriz forma o angulo de 45°. Além disso, a reta t é perpendicular a reta r, fazendo com que a reta t seja paralela ao segmento $\overline{AB}$, assim podendo encontrar o ângulo $\widehat{ACE}$ pelo complemento de 180°, mostrando que $\widehat{ACE} = 135°$.

Agora veja que o triângulo BAD é um triângulo retângulo e $\overline{AB} = \overline{AD}$, logo $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = 45°$. Isso mostra que o ângulo $\widehat{ABE}$ do losango $ABEC$ mede 135°, o que conclui que o $\widehat{BEC}$ mede 45°. Como $\overline{AB}$ e $\overline{CE}$ são paralelas e os ângulos opostos das figuras são iguas, isso mostrar que $\overline{AC}$ é paralela a $\overline{BE}$. Logo $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CE} = \overline{BE}$.

4.3.4.3 *Solução para a estrela extra.*

- Passo 1: Após concluir a resolução do problema para L, marque os pontos F, G e H, estando o ponto F localizado na interseção entre a circunferência 1 e a reta r, o ponto G localizado na interseção entre a circunferência 1 e a reta t e o ponto H localizado na interseção entre a circunferência 1 e a reta s.

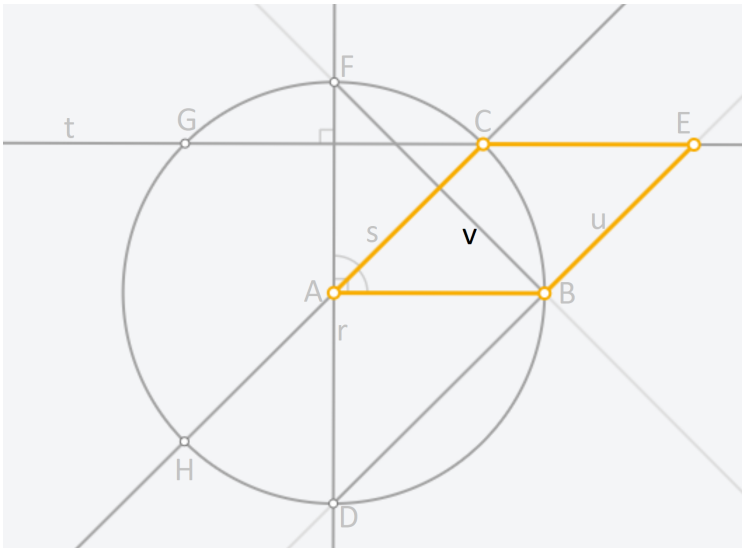
Figura 75 – Problema 3.8 - Passo 1: 4 estrelas.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 2: Trace uma reta que passa entre os pontos F e B, denotada por v.

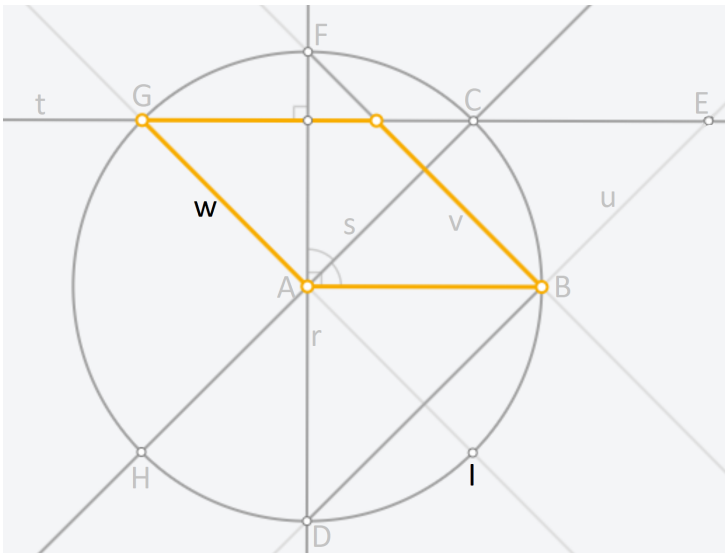
Figura 76 – Problema 3.8 - Passo 2: 4 estrelas.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 3: Trace uma reta que contenha o segmento $\overline{GA}$, chamada de w. Marque o ponto I na interseção entre a circunferência 1 e a reta w.

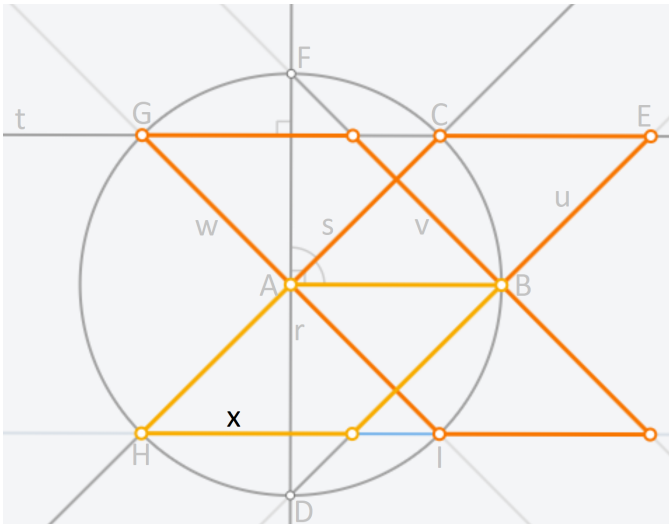
Figura 77 – Problema 3.8 - Passo 3: 4 estrelas.



Fonte: Autor (2023).

- Passo 4: Trace a reta denotada por x, que passa entre os pontos H e I.

Figura 78 – Problema 3.8 - Passo 4: 4 estrelas.



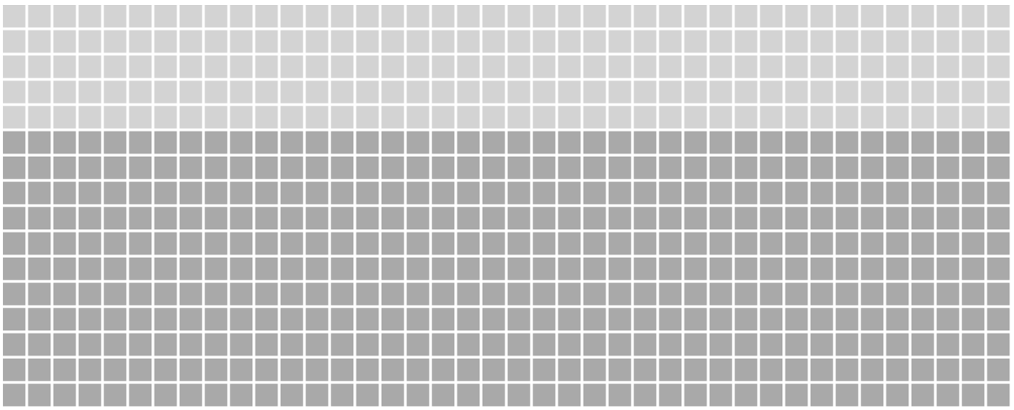
Fonte: Autor (2023).

Assim os quatro losangos representados na figura acima são as quatro possíveis soluções do problema que, quanto feitas todas ao mesmo tempo, dão a estrela extra do problema. Note que a solução do problema pode ser feita com qualquer um dos quatro losangos, independente da sua posição.

5 SOLDADOS DE CONWAY

O jogo “Soldados de Conway” é um desafio matemático proposto por John Horton Conway, cujo o jogo leva o seu nome. Esse jogo foi inspirado nas regras do “Resta um”, visto anteriormente neste trabalho, onde os soldados (peças do jogo) precisando avançar no tabuleiro e chegar a uma linha especifica no nele. O jogo ocorre em um tabuleiro de xadrez infinito, que é cortado por um traço horizontal infinito, separando as peças do jogo, que ficam abaixo desse traço, e as linhas a serem alcançadas, que ficam acima do traço.

Figura 79 – “Soldados de Conway” - Tabuleiro inicial.



Fonte: Autor (2024).

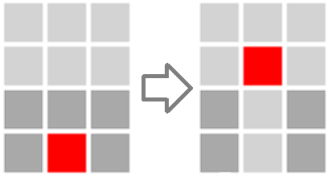
O desafio do jogo se dá com a impossibilidade de chegar na quinta linha acima do traço, que foi provada por Conway ao serem usados movimentos finitos. No entanto, seria possível a resolução desse problema por outra forma, para isso será preciso olhar para um tabuleiro que possibilite a execução de infinitas jogadas.

Nessa seção foi utilizado o conteúdo de séries para a exploração do problema e se é possível chegar na quinta linha. Para o estudo de séries indicamos Lima (2019).

5.1 REGRAS DO JOGO

As regras do jogo se assemelham com as regras do “Resta um”, cada peça no tabuleiro pode se mover na vertical ou horizontal. Para fazer um movimento, o jogador deve mover uma peça para duas casas a frente de onde ela se encontra, com as retrições de haver uma peça entre as duas casa e que a casa em que é pretendido colocar peça esteja vazia.

Figura 80 – Exemplo de movimento.



Fonte: Autor (2024).

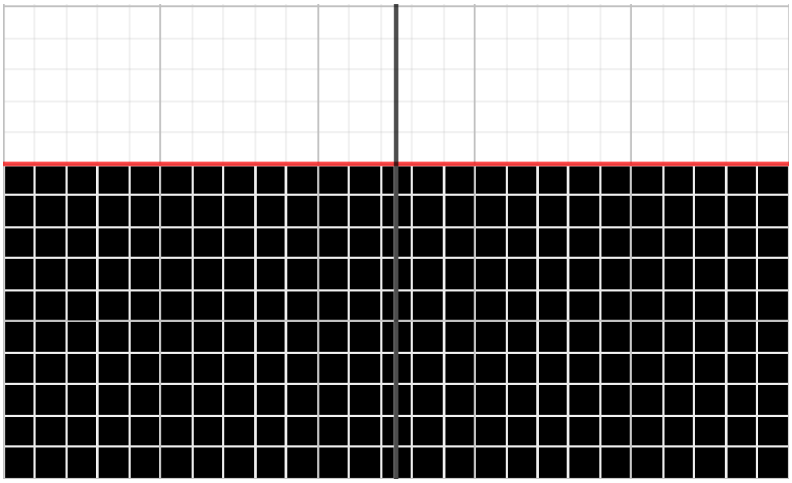
O jogo segue com o jogador movendo as peças para tentar chegar até a quinta linha, esvaziando cada vez mais as peças do tabuleiro no processo.

5.2 CHEGANDO À QUINTA LINHA

Como dito anteriormente, serão usadas todas as peças do tabuleiro infinito para que a quinta linha possa ser alcançada. Para isso primeiro deve-se organizar e nomear as casas do tabuleiro, que são os locais onde as peças podem ocupar, e os movimentos de cada peça.

Primeiro, cada casa deve ter uma coordenada, que vai ser obtida através do plano cartesiano, traçando o eixo x no limite superior de onde as peças se encontram e o eixo y em uma coluna arbitrária de peças. Fazendo isso, as peças do tabuleiro agora podem ser nomeadas, com a peça da origem tendo a coordenada $(0, 0)$ e a casa que queremos alcançar com a posição $(0, 5)$.

Figura 81 – Eixo do tabuleiro.



Fonte: Autor (2024).

Em seguida, será estipulado o número de jogadas que será preciso para chegar até o $(0, 5)$. Para isso, a casa $(0, 5)$ será chamada de a^0, expressando que as casas que precisam ser andadas até o objetivo final do jogo são zero. Da mesma forma, as casa adjacentes ao $(0, 5)$, ou seja, $(0, 4)$, $(0, 6)$, $(1, 5)$ e $(-1, 5)$, serão chamadas de a^1, pois só estão a uma casa de distância de onde o jogo acaba.

Ainda neste tópico, pode-se recorrer a uma equação que dará a distância de casas que existe entre uma respectiva casa e o final do jogo, para isso, primeiro precisa-se encontrar o ponto onde o jogo termina, que no caso seria o $(0, 5)$, como ele foi denominado como a^0, basta encontrar uma equação $c(x, y) = 0$ no ponto $(0, 5)$, onde c é o número de casas entre a casa atual e o final do jogo. Como $x = 0$ em $(0, 5)$ e cada casa que é movimentada muda em um o expoênte, então podemos chegar na equação

$$c(x, y) = |x| + |(y - 5)| \tag{1}$$

que no ponto (0,5) vale exatamente zero.

Assim, pode-se denotar um valor para cada coordenada do plano infinito, que fica expressado na tabela abaixo:

Tabela 2 – Número das casas (por jogada)

c^3	c^2	c^1	c^0	c^1	c^2	c^3
c^4	c^3	c^2	c^1	c^2	c^3	c^4
c^5	c^4	c^3	c^2	c^3	c^4	c^5
c^6	c^5	c^4	c^3	c^4	c^5	c^6
c^7	c^6	c^5	c^4	c^5	c^6	c^7
c^8	c^7	c^6	c^5	c^6	c^7	c^8
c^9	c^8	c^7	c^6	c^7	c^8	c^9

Fonte: Autor (2024).

Agora é preciso classificar os possíveis movimentos que as peças do tabuleiro podem fazer, que por sua vez são três possíveis movimentos:

- Movimento de aproximação em relação a c^0.
- Movimento de afastamento em relação a c^0.
- Movimento neutro em relação a c^0.

Proposição 5.1 *O único movimento positivo que pode ser feito pelas peças é o movimento de aproximação em relação a* c^0.

Prova: A prova será dividida em duas partes, a primeira mostrando que o movimento de aproximação à c^0 tem valor positivo e a segunda mostrando que os outros dois movimentos tem valores negativos.

Movimento de aproximação em relação a c^0

O movimento de aproximação em relação a c^0 sempre irá diminuir o valor do expoente de c, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$c^{a+2} + c^{a+1} = c^a; a \in \mathbb{N}.$$

Que por sua vez pode ser reorganizado para a seguinte equação de segundo grau:

$$c^a * (-c^2 - c^1 + 1) = 0.$$

Como $c = 0$ não é uma resposta apropriada para a solução, resta apenas resolver a equação de segundo grau, que dará o valor de c.

$$\Delta = (b)^2 - 4 * a * c = (-1)^2 - 4 * (-1) * (1) = 5.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 * a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{-2} = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Assim, pode-se encontrar duas soluções sendo elas $-\varphi$ e $\varphi - 1$. Pela praticidade, a solução a ser escolhida será $c = \varphi - 1$, onde φ é a proporção áurea. Assim, pode-se

chegar na seguinte equação:

$$c^2 = 1 - c. \tag{2}$$

Repare que $c < 1$, já que c^0 é o maior valor do tabuleiro e vale exatamente 1, assim, qualquer c^n deve ser menor que c^0, portanto $c < 1$. Assim, o movimento de aproximação em relação a c^0 tem o valor de movimento positivo e vale

$$\varphi - 1.$$

Agora resta mostrar que os outros dois movimentos tem o seu valor negativo.

O movimento de afastamento em relação a c^0 sempre fará o expoente de c aumentar, ou seja, será necessario mais movimentos para chegar até o fim do jogo. Dessa forma, pode-se expressar o movimento de afastamento de c^0 da seguinte maneira:

$$c^a + c^{a+1} = c^{a+2}; a \in Z.$$

Para ver o valor do movimento da jogada basta subtrair o valor final da peça pelos dois valores anteriores a ela, se o valor for positivo, então o valor de movimento da jogada é positivo, do contrário, o valor de movimento da jogada é negativo. Assim:

$$c^a * (c^2 - c^1 - 1); \text{onde } 0 < c < 1.$$

Como

$$c^{a+2} < c^{a+1} < c^a.$$

Então

$$c^a * (c^2 - c^1 - 1) < 0.$$

Dessa forma, vê-se que o movimento de afastamento em relação a c^0 tem valor de movimento negativo, não colaborando para o término do jogo.

Por fim, tem-se o movimento neutro, que irá ocorrer quando uma peça saltar pelo eixo de $x = 0$. Esse movimento pode ser representado pela seguinte expressão:

$$c^{a+1} + c^a = c^{a+1}; a \in Z.$$

Seguindo os mesmos passos usados na prova do movimento de afastamento em relação a c^0, pode-se chegar no seguinte calculo:

$$c^{a+1} - (c^a + c^{a+1}) = -c^a.$$

Tem-se que $c > 0$ devido a natureza do problema, visto que é importante

manter uma hierarquia de distancia em relação ao final do desafio, então:

$$c^0 < c^1 < c^2 < ... < c^n.$$

Assim, tem-se que o valor de movimento da jogada neutra em relação a c^0 é negativa, não ajudando na conclusão do jogo. ∎

Proposição 5.2 *A única forma de concluir o jogo é usando todas as peças do tabuleiro infinito.*

Prova: Inicialmente, precisa-se expressar corretamente o valor da soma de todas as peças do tabuleiro. Tendo em vista o eixo y, que é o eixo que se passa na origem, ou seja, o eixo $(0, y)$, pode-se formar a primeira soma, que começa em a^5, já que o ponto $(0, 0)$ marca o inicio das peças, e segue até o fim do eixo. Assim, podemos formar o seguinte somatório:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c^5 * c^i. \tag{3}$$

Agora, precisa-se expressar a soma das outras peças do tabuleiro. Para isso, o tabuleiro será dividido a partir do eixo $x = 0$, partindo as peças em duas partes simétricas, já que as mesmas peças apresentadas em um lado, também estão dispostas no outro lado da mesma maneira. Assim, basta apenas montar um somatório e duplicá-lo, dando as exatas peças de ambas os lados do tabuleiro dividido.

Para esboçar essa soma, é preciso fazer um somatório duplo, um que usa todas as peças na vertical, que começa do valor 1, visto que o eixo $x = 0$ já teve a sua soma expressa, e o outro somando todas as peças na horizontal, que tem inicio em $y = 0$. Expressando as duas somas se obtém o seguinte somatório:

$$2\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c^5 * c^j * c^k. \tag{4}$$

Agora basta juntar os somatórios (2) e (3) e usar de séries infinitas para obter o valor total das peças do tabuleiro infinito.

$$\sum_{i=0}^{\infty} c^5 * c^i + 2\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c^5 * c^j * c^k. \tag{5}$$

Para resolver esse somatório será usado o fato de $\sum_{t=0}^{\infty} a * x^t = \frac{a}{1-x}$. Aplicando em ambos o somatórios se irá obter o seguinte resultado:

$$\frac{c^5}{1-c} + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c^5 * c^j}{1-c}.$$

Usando a equação (1) e reorganizando o somatório de j para começar a partir do 0:

$$c^3 + 2\sum_{j=0}^{\infty} c^4 * c^j.$$

Aplicando novamente que $\sum_{t=0}^{\infty} a * x^t = \frac{a}{1-x}$ para resolver o somatório, irá obter-ser o seguinte resultado:

$$c^3 + 2\frac{c^4}{1-c}.$$

Novamente pela equação (1) pode-se obter

$$c^3 + 2 * c^2 = c^2 * (c + 2).$$

Como $c^2 = (1 - c)$, vê-se:

$$(1 - c) * (c + 2) = -c^2 - c + 2 = -1 + c - c + 2 = 1.$$

Então a soma dos valores de todas as peças presentes no tabuleiro infinito é igual a 1, ou seja, igual a c^0. Logo para o jogar ser completo é preciso que todas as peças do tabuleiro sejam usadas, mas devido a imaterialidade dessa condição, o jogo se torna fisicamente impossível. ■

Como curiosidade, é possível fazer uma solução visual de como chegar na quinta linha, essa solução pode ser vista no trabalho de (TATHAM and TAYLOR (2010)).

6 CONCLUSÃO

Em síntese, pode-se ver de maneira clara a importância dos jogos matemáticos para a construção, entendimento e a aproximação dos conteúdos matemáticos para com o aluno, além de despertar o interesse do estudante através da curiosidade e dos motivos que permitem que os jogos sejam resolvidos a partir de estratégias matemáticas.

Somando a isso, a história dos jogos e como eles foram criados servem de inspiração para a resolução do jogo, junto com a curiosidade sobre as possíveis ideias que o criador do jogo teve ao criá-lo. Além de despertar o interesse sobre a possibilidade da criação de jogos usando vários conteúdos matemáticos que não foram explorados para a conceituação e invenção de novos jogos.

Cada jogo visto neste trabalho mostra como a matemática não está ligada limitada quanto a forma de abordar o seu conteúdo, mas sim trabalha em várias frentes e se flexibiliza a fim de conseguir tratar do conteúdo da melhor maneira possível. Isso pode ser visto no jogo "Resta um", que usa da curiosidade para que o jogador pense nas casas em que o jogo pode ser concluído com sucesso e tem uma simples resposta quando a teoria dos grupos é vista.

Vê-se também uma abordagem mais direta feita pelo jogo "Euclidea", onde o conteúdo e a matemática para resolver os problemas estão diretamente ligadas a própria geometria, usando suas ferramentas para alcançar o resultado desejado que, como foi visto, reforça tanto os conceitos básicos da geometria, como as propriedades da reta e da circunferência, quanto os conceitos mais avançados, fazendo o jogador criar várias figuras ou achar pontos através das propriedades dessas figuras geométricas.

Por fim, o jogo dos "Soldados de Conway abrange uma parte mais abstrata da matemática, já que, pela natureza não palpável do jogo, ele se torna uma ponte para o aprofundamento do conteúdo, buscando uma forma para demonstrar a possibilidade de conclusão do problema ou a prova de que é impossível existir uma solução que leve um dos para a quinta linha.

Com isso, pode-se ver que os jogos não só estimulam o pensamento cognitivo, como também instigam a curiosidade e o pensamento matemático, forçando sempre o jogador a procurar soluções criativas para os problemas propostos, ajudando a quebrar várias barreiras que surgem durante o ensino da matemática.

Ademais, espera-se que esse trabalho possa servir de inspiração para que os licenciandos se inspirem na didática existente por trás dos jogos matemáticos, que sirva de estudo e fonte de informação para pesquisas futuras e que os jogos possam ser visto como uma metodologia de ensino tanto para o ensino básico, como para o ensino superior, ajudando na prática docente.

REFERÊNCIAS

CUNHA, Jair Ferreira da. **Resta Um-Busca de Estratégias na Resolução**. Universidade de São Paulo, 2021.

DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. **Algebra Moderna:** volume único. *4a ed. reform., Sao Paulo: Atual*, 2003.

JOGADAMAIS. **Resta 1**. [*S.I*], 2014. Disponível em: https://jogadamais.blogspot.com/p/classicos.html. Acesso em: 12 nov. 2024.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**, v. 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2019.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Editora da UNICAMP, 2008.

TATHAM, Simon; TAYLOR, Gareth. **Reaching row five in solitaire army**. 2010.

Teixeira, Anabela; Silva, Jorge Nuno. **História de Jogos Matemáticos**. *Revista de História da Educação Matemática*, v. 2, n. 2, 2016.