UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA

INSTITUTO DE CIENCIAS EXATAS E DA NATUREZA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

HERNANI DA CONCEIÇÃO GASPAR CAMUEGE

PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE ORDEM SUPERIOR

REDENÇÃO-CE

2024

HERNANI DA CONCEIÇÃO GASPAR CAMUEGE

PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE ORDEM SUPERIOR

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Skoraia

REDENÇÃO-CE

2024

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Camuege, Hernani da Conceição Gaspar.

C18p

Progressão aritmética de ordem superior / Hernani da Conceição Gaspar Camuege. - Redenção, 2025.
41f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2025.

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Skoraia.

1. Progressão aritmética. 2. Operador diferença. 3. Ordem da progressão. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 512.7

HERNANI DA CONCEIÇÃO GASPAR CAMUEGE

PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE ORDEM SUPERIOR

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Tatiana Skoraia

HERNANI DA CONCEIÇÃO GASPAR CAMUEGE

PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE ORDEM SUPERIOR

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 28/11/2024

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
TATIANA SKORAIA
Data: 06/06/2025 12:37:33-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

....
Profa. Dra. Tatiana Skoraia (Orientadora)
Universidade da Integração da Lusofonia Afro-Brasileira
(UNILAB)

Documento assinado digitalmente
DANILA FERNANDES TAVARES
Data: 06/06/2025 15:41:47-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

....
Profa. Dra. Danila Fernandes Tavares
Universidade da Integração da Lusofonia Afro-Brasileira
(UNILAB)

Documento assinado digitalmente
WESLLEY MARINHO LOZORIO
Data: 07/06/2025 18:49:20-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

....
Prof.Dr. Weslley Marinho Lozorio
Universidade da Integração da Lusofonia Afro-Brasileira
(UNILAB)

Dedico este trabalho aos meus pais, sempre.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus Pai todo poderoso por me dar força e sabedoria para levar adiante a elaboração desse TCC, depois aos meus Pais Paulo Quissanga Camuege e Domingas Canana Vunge Gaspar, por acreditarem sempre em mim, se por ventura em algum momento eu tenha falhado no meu percurso acadêmico acreditem foi sempre na intenção de fazer o certo mais as coisas estavam além da minha visão.

Quero agradecer também os meus irmãos Cirilo da Conceição Gaspar Camuege, Fifí da Conceição Gaspar Camuege e Lucrécia da Conceição Gaspar Camuege, sei que vocês estiveram lá do outro lado do oceano a torcer por mim, meu muito obrigado.

Agradecimento a instituição UNILAB, pela oportunidade que me deu de frequentar um curso superior, a todos os professores do curso de Matemáticas em particular a minha orientadora professora Tatiana Skoraia, muito obrigado pelos ensinamentos que vocês proporcionaram a nós. Agradecer também aos meus colegas do curso de licenciatura em Matemática, pela coragem de enfrentar as batalhas juntos ao longo do curso, sem esquecer os meus amigos Quintino Fernandes, António Raul, Nicolau das Neves, Edmilson Matamba, Aderito Sumbo, Miguel Cassoma entre outros que deram suas contribuições cada um da sua forma para efetivação desse trabalho, muito obrigado.

O Principal trabalho de um Matemático é conseguir reduzir um problema complicado, a problema mais simples, que ele consiga resolver.

Autor: desconhecido

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo desmistificar diversos problemas que vários estudantes apresentam em relação as progressão aritmética de ordem superior, uma vez que eles aparecem escondidos, ou seja, são PAs dentro de outras PAs, e o aluno se deparando com exercícios do gênero acabam achando estranho por somente ter visto PAs clássicas. E de maneira especifica explicar que as progressões aritméticas podem ser vistas como polinômios de grau k. Se $k > 1$ estaremos diante de uma PA de ordem superior. Tal como no ensino médio aprendemos a calcular o termo geral de uma PA, a soma dos n primeiros termos, neste trabalho vamos apresentar o termo geral para uma progressão aritmética de segunda ordem a partir de conhecimentos prévio de PA clássicas, o termo geral da progressão aritmética de terceira ordem e assim sucessivamente, os números figurados e seus termos gerais, a soma dos termos para progressão Aritmética de ordem superior.

Palavras-chaves: Progressão Aritmética. Operador diferença. Ordem da Progressão

ABSTRACT

This work aims to demystify various problems that several students present regarding higher-order Arithmetic Progressions, as they appear hidden, that is, they are APs within other APs, and the student, when faced with exercises of this kind, ends up finding them strange because they have only seen classic APs. Specifically, it seeks to explain that Arithmetic Progressions can be seen as polynomials of degree k. If $k > 1$; we are dealing with a higher-order AP, just as in high school we learn to calculate the general term of an AP, the sum of the first n terms, in this work we will present the general term for a second-order Arithmetic Progression based on prior knowledge of classic APs, the general term of the third-order Arithmetic Progression, and so on, the figurate numbers and their general terms, the sum of terms for higher-order Arithmetic Progressions.
Keywords: Arithmetic Progression. Difference Operator. Order of Progression.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No ensino médio quando aprendemos progressão aritmética (PA) achamos que tudo sobre progressão se resumia naquilo que o professor passava na sala de aula, se por acaso nos confrontassem com uma progressão aritmética de ordem superior aquilo já estaria fora do alcance da nossa visão, logo como os exercícios que nos ensinavam obedeciam um mesmo padrão então por falta de conhecimento responderíamos que aquilo que nos foi apresentado não seria uma progressão aritmética.

Por essa razão decidimos trazer esse tema com o objetivo de dissipar todas as incongruências que muitos alunos apresentam a respeito das progressões aritméticas, e ir mais além com as PAs de ordem superior, uma vez que o assunto não é bastante abordado nas escolas, inclusive nas universidades nos cursos de graduação, e quando o estudante lhe é cobrado um exercício do gênero nas olímpiadas de matemática ou concursos ele fica sem saber o que fazer, logo esse trabalho acredito que vai ajudar a solucionar questões desta natureza pra quem tiver a oportunidade de ler.

Se observarmos detalhadamente as progressões aritméticas de ordens superiores acabamos percebendo, que elas são PAs dentro de outras PAs, ou seja aparecem escondidas. Admitimos que é um pouco mais simples lidar com as PAs de segunda ou terceira ordem. Se as ordens forem maiores que essas, a situação começa a ficar bem mais complicada.

O estudo das sequencias numéricas pelos estudantes sempre despertou bastante curiosidade. e é um elemento que pode ensejar o uso de raciocínio e técnicas, que serão muito uteis em problemas mais complexos [...] (Filho, 2020, p.11).

Por isso é imprescindível que o estudo das progressões tanto geométricas quanto aritméticas merecem ser aprofundadas no ensino superior, o que não ocorre, uma vez que a maioria dos alunos veem com tantas lacunas a respeito dos temas a partir do ensino médio, isso para não falar de PA de ordem superior, ali a situação ficaria mais crítica.

Por essa razão é pertinente detalharmos com todo rigor o que é uma progressão aritmética de ordem superior, para que não haja dúvidas ou lacunas uma vez que esse assunto quase anda no esquecimento ou simplesmente não é abordado. Uma progressão aritmética de ordem superior é uma sequencia de termos de ordem $n > 1$, em que se aplicarmos n vezes o operador diferença resulta em uma PA estacionária.

Neste trabalho começamos a recordar as progressão aritmética clássicas aquelas que a gente estuda no ensino médio, como por exemplo calcular o termo geral de uma progressão aritmética, a razão, a soma dos n primeiros termos, os termos equidistantes, a interpolar n meios aritméticos, o termo médio.

Em seguida entramos nas progressões de ordem superiores, onde definimos operadora diferença, ordem de uma progressão aritmética, definimos também os números figurados e mostramos que eles formam uma progressão aritmética de ordem superior, abordamos em seguida sobre coeficientes binomiais, notação cientifica e triangulo de pascal, teorema das linhas e das colunas.

Terminamos calculando o termo geral de uma progressão de ordem superior, a soma dos termos de uma de uma PA de ordem K finita, algumas aplicação de progressão de ordem superior e a conclusão.

2 BREVE HISTÓRICO SOBRE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Segundo (Silva, *et al.* 2004, p.2) a história da Matemática é realmente fascinante e está repleta de figuras que dedicaram suas vidas a descobertas que moldaram nosso entendimento atual do mundo. Muitos matemáticos antigos, como Pitágoras, Euclides, Arquimedes, entre outros, viveram em épocas em que a ciência estava profundamente entrelaçada com a filosofia e a religião. Suas descobertas não eram apenas vistas como avanços técnicos, mas também como explorações dos mistérios do universo.

> As progressões foram estudadas desde povos muito antigos como os babilônicos. Inicialmente, procurou-se estabelecer padrões como o da enchente do Rio Nilo, onde os egípcios de 5.000 anos atrás tiveram que observar os períodos em que ocorria a enchente do rio, pois para poderem plantar na época certa e assim garantir seus alimentos, os egípcios precisavam saber quando haveria inundação. Havia, portanto, necessidade de se conhecer o padrão desse acontecimento. Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sirius se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Isis e Nephthys. Os egípcios dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada de crescimento e período da colheita. (Silva, *et al.* 2004, p.2).

Presume-se que se deve a Pitágoras (585 a.c. – 500 a.c.) e aos sábios gregos que viveram depois dele, a criação da Aritmética teórica, pois os pitagóricos conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as harmônicas e musicais (Silva, *et al.* 2004, p.6)

O estudo da Progressão Aritmética teve grande contribuição do matemático alemão Carl Friedrich Gauss, considerado como o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Em um de seus estudos favoritos, a Teoria dos Números, Gauss dizia a seguinte frase: “A Matemática é a Rainha das Ciências e a Teoria dos Números é a Rainha da Matemática”. Mas sua mais conhecida história ocorreu quando, na época escolar, seu professor queria controlar a indisciplina na sala de aula e ordenou que os alunos somassem os números de 1 a 100, para assim demorarem bastante tempo para fazerem os cálculos. Mas para surpresa do professor, o menino Gauss (aos 10 anos de idade), que também ficou conhecido como o “Príncipe da Matemática”, resolveu rapidamente a operação. Gauss calculou mentalmente a soma da progressão aritmética 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100, observando que 100 + 1 = 101, 99 + 2 = 101, 98 + 3 = 101 e assim por diante com os cinquentas pares possíveis dessa maneira, chegando em 50 x 101 = 5050.

3 CONCEITOS INICIAIS SOBRE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

3.1 Introdução

Sabemos que não é tão fácil compreender as progressões aritméticas de ordem superior sem antes termos conhecimento prévio das PAs clássicas, por isso resolvemos traze-las para facilitar a compreensão do assunto que pretendemos aqui abordar, Como material de apoio vamos utilizar o livro Fundamentos de Matemática Elementar IV do (Iezzi,2004), e também vamos utilizar o livro Manual das Progressões do (Lopes,1998) que acreditamos ser os mais adequados para o assunto.

3.1.1**Definição: Progressão aritmética** (Lopes, 1998) P.A é uma sequência { $a_{1,}\ a_{2,}\ a_{3,}\ a_{4,}$ . . . ,a_n } de números $\{a_i\}$, denominados termos, na qual a diferença entre cada termo a_i e o seu antecessor a_{i-1} é uma constante chamada razão. Assim,

$$a_i - a_{i-1} = r \ , \ \forall i > 1 \qquad \text{(I)}$$

onde r é a razão da P.A

Exemplo: (Iezzi, 2004)

a) { 1, 5, 9, 13} ($r = 4$)

b) { 3, 5, 7, 9 } ($r = 2$)

c) {2, 2, 2, 2, . . .} ($r = 0$)

3.1.2 **Preposição Classificação das Progressões Aritméticas** (Iezzi, 2004).

As progressões aritméticas podem ser classificadas em três categorias:

1) Crescente: são P.A, em que cada termo é maior que o anterior.

É imediato que isso ocorre somente se $r > 0$, pois:

$$a_n > a_{n-1} \leftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \leftrightarrow r > 0$$

2) Constante: são as P.A, em que cada termo é igual ao anterior.

É fácil ver que isso só ocorre quando $r = 0$, pois:

$$a_n = a_{n-1} \leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \leftrightarrow r = 0$$

3) Decrescente: são as P.A em que cada termo é menor que o anterior. Isso ocorre somente se $r < 0$, pois:

$$a_n < a_{n-1} \leftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0, \leftrightarrow r < 0$$

3.1**.**3**Teorema Fórmula do Termo Geral** (Lopes, 1998) Se $\{a_i\}$ é uma progressão aritmética de razão r, então o termo de ordem n, a_n, é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Demonstração

Da definição de P.A, vem:

$$a_2 - a_1 = r$$

$$a_3 - a_2 = r$$

$$a_4 - a_3 = r$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n - a_{n-1} = r$$

Somando membro a membro essas $n - 1$ igualdades, obtemos $a_n - a_1 = (\, n - 1)r$,

Isto é:

$$a_n \, = a_1 + \, (\, n - 1)r \quad \forall n \geq 1 \qquad \text{(II)}$$

A fórmula (II) permite calcular o n-esimo termo de uma P.A quando se conhecem o primeiro termo a_1 e a razão r. Suponhamos agora que conhecemos o termo a_p de ordem p, aplicando a formula (II), encontramos $a_p = a_1 + (\, p - 1)r$ ou

$a_1 = a_p - (\, p - 1)r$ substituindo este valor a_1 em (II) temos:

$$a_n = a_p + (\, n - p)r \qquad \text{(III)}$$

A formula (III) nos permite calcular o n-esimo termo de uma P.A quando se conhecem o termo de ordem p e a razão r.

Exemplo: (Lopes, 1998) determinar a razão de uma P.A cujos termos de ordem 5 e 12 valem 11 e 32, respectivamente.

$$a_n = a_p + (\, n - p)r$$

$$a_n = a_{12} = 32$$

$$a_p = a_5 = 11$$

$$a_{12} = a_5 + (12 - 5)r \qquad \therefore r = 3$$

3.1.4 **Definição: Interpolação Aritmética** (Lopes, 1998) Designamos por meios aritméticos os termos situados entre dois termos não consecutivos de uma progressão aritmética.

Interpolar ou inserir k meios aritméticos entre dois números A e C é equivalente a formar uma a P.A de $k + 2$ termos cujos extremos são A e C (A é o primeiro termo e C, o ultimo). A interpolação aritmética consistirá, então, na determinação da razão r da P.A. Podemos escrever:

$$a_n = \text{C}.$$

$$a_1 \ = A$$

$$n = k + 2$$

$$C = A + (\ k + 2 - 1)r$$

$$\therefore r = \frac{C - A}{k + 1}$$

Exercício (Adaptado, Iezzi): Escrevendo-se nove meios aritméticos entre 15 e 45, qual é o sexto termo da P.A.

Solução

Vamos formar uma P.A, com 11 termos em que $a_1 = 15$, e $a_{11} = 45$. Temos

$$a_{11} = a_1 + 10r \quad \rightarrow \quad r = \frac{a_{11} - a_1}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

Logo o sexto termo será $a_6 = a_1 + 5r \quad \therefore \quad a_6 = 15 + 15 = 30.$

3.1.5 **Preposição: Média Aritmética** (Lopes, 1998).

Calcular a média aritmética B de dois números A e C equivale a inserir um meio aritmético entre A e C.

Demonstração

Formemos a P.A $a_1, a_2, a_3,$ onde $a_1 = A, a_2 = B\ e\ a_3 = C$

$$r = \frac{C - A}{2}$$

$$a_2 = a_1 + r \quad \rightarrow \quad a_2 = \ A + \frac{C - A}{2} = \frac{A + C}{2} \ \ ou\ B = \frac{A + C}{2}$$

■

4 SOMA DOS TERMOS PARA UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Vamos deduzir uma formula para calcular a soma S_n dos n termos iniciais de uma P.A.

Teorema 4.1 (Iezzi, 2004): A soma dos n primeiros números inteiros positivos é:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstração por indução finita

i) para $n = 1,$ temos: $1 = \frac{1(\ 1+1)}{2}$. (Sentença verdadeira)

ii) Admitamos a validade da fórmula para $n = p$:

$$1 + 2\ + 3 + \cdots + p = \frac{p(\ p+1)}{2}$$

E provemos para $n = p + 1$

$$1\ + 2\ + 3 + \cdots + p +\ (\ p + 1) = \frac{P(\ P+1)}{2} + (P + 1)$$

$$= \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2}$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

Então:

$$1\ + 2\ + 3\ + \cdots + n\ =\ \frac{n(\ n\ + 1\ )}{2}\ ,\qquad \forall n\ \in N *$$

■

Utilizando a fórmula do termo geral, podemos calcular a soma s_n dos n termos iniciais da P.A. $\{\ a_{1,} a_2, a_3, \ldots\ a_n, \ldots\ \}$

Teorema 4.2 **(**Iezzi, 2004**):** Em toda PA, tem-se:

$$S_n = na_1\ + r\ \frac{n(\ n\ - 1\ )}{2}$$

Demonstração:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

....

$$a_n = a_1 +\ (\ n - 1\ )r$$

Somando a coluna dos membros da equação temos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_3 + \cdots + a_n =\ (\ a_1 + a_1 + \cdots + a_1\ )\ + [\ r + 2r + \cdots +\ (\ n - 1\ )r]$$

$$= na_1 + \ (1 + 2 + \cdots + \ (n - 1))r$$

Pelo **Teorema** 4.1

$$1 + 2 + \cdots + \ (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}$$

Então:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = na_1 + r\ \frac{n(n - 1)}{2}$$

Isto é:

$$S_n = na_1 + r\ \frac{n(n - 1)}{2}$$

■

Teorema 4.3(Iezzi, 2004): Em toda P.A. tem-se:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Demonstração

$$S_n = na_1 + r\frac{n(n - 1)}{2} = \frac{2na_1 + n(n - 1)r}{2} = \frac{n[2a_1 + \ (n - 1)r]}{2}$$

$$= \frac{n[a_1 + a_1 + \ (n - 1)r]}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

■

Exercício 4.4 **(**Adaptado, Iezzi): Calcule a soma dos múltiplos de 6 entre 100 e 400.

Solução: Se dividirmos 100 por 6 é igual a 16 e resta 4, mais se somarmos 2 $+4 = 6$, logo a nossa divisão será exata que é 17, e 400 dividir por 6 é igual a 66, resta 4, como queremos números entre 100 e 400 , $a_1 = 100 + 2 = 102, e\ a_n = 400 - 4 = 396$

Podemos perceber que a $r = 6$

logo: 396$= 102 + \ (n - 1).6 \rightarrow 294 = 6n - 6 \rightarrow 300 = 6n$

$$n = \frac{300}{6} = 50$$

Assim,

$$S_n = \frac{50(102\ + 396)}{2}\ = 12450$$

4.1 OUTRAS PROPRIEDADES DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

4.1.1 **Definição: Termos Equidistantes dos extremos** (Lopes, 1998).

Dois termos de uma sequência finita são equidistantes dos extremos quando o número de termos que precede um deles é igual ao número de termo que sucede ao outro. Assim, na sequencia

$$(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-i}, a_{n-i+1}, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

Os termos a_{i+1} e a_{n-i} são equidistantes dos extremos. Observe que dois termos a_k e a_l serão equidistantes dos extremos se $k + l = n + 1$. Logo, a_1 e a_n, a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2} etc. são termos equidistantes dos extremos.

4.1.2 **Proposição: Propriedades das Progressões Aritméticas** (Lopes, 1998)

1) Em toda P.A cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre o antecedente e o consequente.

Demonstração

Seja a P.A $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots.,)$

Onde a_{i-1}, a_i, a_{i+1} são termos consecutivos. Sabemos que:

$$a_i - a_{i-1} = a_{i+1} - a_i \quad \therefore \quad a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$$

2) Em toda P.A finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração

Seja P.A finita

$$(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-i}, a_{n-i+1}, \dots, a_{n-1}, a_n).$$

Sabemos que a_{i+1} e a_{n-i} são termos equidistantes dos extremos Podemos escrever:

$$a_{i+1} = a_1 + (i + 1 - 1)r$$
$$a_{n-i} = a_1 + (n - i - 1)r$$
$$a_{i+1} + a_{n-i} = a_1 + a_1 + (n - 1)r = a_1 + a_n.$$

■

Como consequência das propriedades 1 e 2, temos a propriedade 3.

3) Em toda P.A finita, com número ímpar de termos, o termo médio (central) é a média aritmética dos extremos (ou de dois termos equidistantes dos extremos)

Demonstração

Seja a P.A de $2n + 1$ temos

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}, a_{2n+1})$$

O termo central é a_{n+1}, a_n e a_{n+2} são dois termos equidistante dos extremos. Das propriedades anteriores, temos:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2} = \frac{a_1 + a_{2n+1}}{2}$$

■

4) Em toda P.A, a soma de dois termos quaisquer será igual à soma de dois outros, desde que a soma das ordens (índices) dos dois primeiros seja igual a soma das ordens dos dois outros.

Demonstração

Sejam os termos a_p, a_q, a_s e a_t onde, por hipótese, $p + q = s + t$. Podemos escrever:

$$a_p = a_1 + (p - 1)r \qquad a_s = a_1 + (s - 1)r$$

$$a_q = a_1 + (q - 1)r \qquad a_t = a_1 + (t - 1)r$$

Adicionando membro a membro os dois grupos de igualdades, temos:

$$a_p + a_q = 2a_1 + (p + q - 2)r$$

$$a_s + a_t = 2a_1 + (s + t - 2)r$$

Como $p + q = s + t$, então:

$$a_p + a_q = a_s + a_t.$$

■

Exercicio 3.3.3: (Autor) Seja a PA $(2, 4, 6, 8, 10)$, mostre a propriedade 4.

Seja $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ a_4 = 8,\ a_5 = 10$

Então:

$$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 12. \qquad a_3 + a_4 = a_2 + a_5 = 14.$$

5 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR

5.1 Definição: Operador diferença (Nobre, 2018): dada uma sequência $(a_n)_{n\in N}$ define-se operador diferença , $(\Delta a_n)_{n\in N} = (a_{n+1} - a_n)_{n\in N}$ que constitui uma nova sequência. Como $(\Delta a_n)_{n\in N}$ forma uma sequência, podemos novamente obter o operador diferença, isto é $(\Delta(\Delta a_n))_{n\in N} = (\Delta^2 a_n)_{n\in N}$, e assim recursivamente, $(\Delta^k a_n)_{n\in N}$ para $k \geq 3$.

5.2 Definição: Ordem de uma PA (Nobre, 2018): uma sequência $(a_n)_{n\in N}$ será uma PA de ordem k se for necessário aplicar o operador diferença k vezes para se chegar a uma sequência constante.

Desse modo, uma sequencia $(a_n)_{n\in N}$ será uma PA de ordem 1 se o operador diferença $(\Delta a_n)_{n\in N}$ for uma PA constante, será uma PA de segunda ordem ou de ordem 2 se o operador diferença $(\Delta^2\, a_n)_{n\in N}$ for uma PA constante, e assim por diante, ou ainda uma sequência $(a_n)_{n\in N}$ será uma PA de ordem 2 se $(\Delta a_n)_{n\in N}$ for uma PA de primeira ordem, será uma PA de ordem 3 se $(\Delta^2 a_n)_{n\in N}$ for uma PA de primeira ordem, e assim por diante.

Exemplo 5.1.1 (Nobre, 2018)

a) A sequência $(a_n)_{n\in N} = (3, 7, 13, 21, 31, \ldots)$, onde $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = a_n + 2n + 2$, para $n \geq 1$, é uma PA de ordem 2, pois, $\forall n \in N$, $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = 2n + 2$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = 2$, e assim, $(\Delta a_n)_{n\in N} = (4, 6, 8, 10, \ldots)$ e $(\Delta^2 a_n)_{n\in N} = (2, 2, 2, \ldots)$.

b) A sequência $(b_n)_{n\in N} = (2, 8, 20, 40, 70, \ldots)$, onde $b_1 = 2$ e $b_{n+1} = b_n + n^2 + 3n + 2$, para $n \geq 1$, é uma PA de ordem 3, pois, $\forall n \in N$, $\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = n^2 + 3n + 2$, $\Delta^2 b_n = \Delta b_{n+1} - \Delta b_n = 2n + 4$, $\Delta^3 b_n = \Delta^2 b_{n+1} - \Delta^2 b_n = 2$, e assim
$(\Delta b_n)_{n\in N} = (6, 12, 20, 30, 42, \ldots)$, $(\Delta^2 b_n)_{n\in N} = (6, 8, 10, 12, \ldots)$ e $(\Delta^3 b_n)_{n\in N} = (2, 2, 2, \ldots)$.

c) sequência $(c_n)_{n\in N} = (1, 6, 20, 50, \ldots,)$, onde $c_1 = 1$ e $c_{n+1} = c_n + \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13n + 6)$, para $n \geq 1$, é uma PA. De ordem 4, pois, $\forall n \in N$, $\Delta c_n = c_{n+1} - c_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 13 + 6)$, $\Delta^2 c_n = \Delta c_{n+1} - \Delta c_n = n^2 + 4n + 4$, $\Delta^3 c_n = \Delta^2 c_{n+1} - \Delta^2 c_n = 2n + 5$, $\Delta^4 c_n = \Delta^3 c_{n+1} - \Delta^3 c_n = 2$, assim $(\Delta c_n)_{n\in N} = (5, 14, 30, 55, 91, \ldots)$,
$(\Delta^2 c_n)_{n\in N} = (9, 16, 25, 36, \ldots.)$, $(\Delta^3 c_n)_{n\in N} = (7, 9, 11, 13, \ldots)$ e $(\Delta^4 c_n)_{n\in N} = (2, 2, 2, \ldots)$.

d) A sequência $(d_n)_{n\in N} = \{-1, 0, 16, 97, 353, \ldots\}$, onde $d_1 = -1$ e $d_{n+1} = d_n + n^4$, para $n \geq 1$, é uma PA de ordem 5, pois $\forall n \in N, \Delta d_n = d_{n+1} - d_n = n^4$, $\Delta^2 d_n = \Delta d_{n+1} - \Delta d_n = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1, \Delta^3 d_n = \Delta^2 d_{n+1} - \Delta^2 d_n = 12n^2 + 24n + 14$, $\Delta^4 d_n = \Delta^3 d_{n+1} - \Delta^3 d_n = 24n + 36, \Delta^5 d_n = \Delta^4 d_{n+1} - \Delta^4 d_n = 24$, e assim, $(\Delta d_n)_{n\in N} = (1, 16, 81, 256, \ldots)$, e $(\Delta^2 d_n)_{n\in N} = (15, 65, 175, 369, \dots.)$, $(\Delta^3 d_n)_{n\in N} = (50, 110, 194, 302, \dots)$, $(\Delta^4 d_n)_{n\in N} = (60, 84, 108, 132, \dots)$ e $(\Delta^5 d_n)_{n\in N} = (24, 24, 24, 24, \dots)$.

Em seguida, enunciamos uma importante relação entre as PAs de ordem superior e as funções polinomiais, cuja demonstração pode ser encontrada em (Morgado, Carvalho, 2013)

Proposição 5.1.2 (Morgado, 2013): Se $(a_n)_{n\in N}$ é uma PA de ordem k, então seu termo geral a_n é um polinómio de grau k na variável n. Reciprocamente, se p(n) é um polinómio de grau k, então a sequencia $(a_n)_{n\in N} = (p(1), p(2), p(3), \dots, p(n), \dots)$

É uma PA de ordem k.

Com o objetivo de ilustrar essa proposição, apresentamos o seguinte exercício.

Exemplo 5.1.3 (Nobre, 2018)

a) supondo que uma sequência $(a_n)_{n\in N}$ seja uma PA de ordem 2 e que seus primeiros termos sejam dados por $a_1 = 5, a_2 = 8, a_3 = 13$, obtenha o polinómio de grau 2 que representa o termo geral a_n.

b) dado o polinómio p$(n) = n^3 - 3n^2 + 1$, verifique que a sequencia $(a_n)_{n\in N}$ = (p(1), p(2),..., p(n), ...) é uma PA de ordem 3.

Solução: a) como $(a_n)_{n\in N}$ é uma PA de ordem 2 pela proposição 1, devemos ter

$$a_n = p(n) = an^2 + bn + c.$$

Assim, p(1)= 5, p(2)= 8 e p(3)= 13, ou seja:

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$$

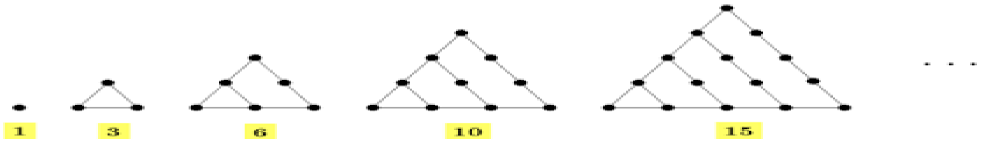
Verifica-se que a única solução desse sistema linear é $a = 1, b = 0$, e $c = 4$. Portanto

$$a_n = n^2 + 4.$$

b) como $a_n = p(n) = n^3 - 3n^2 + 1$, temos: $\forall n \in N, \Delta a_n = p(n+1) - p(n) = 3n^2 - 3n - 2, \Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = 6n$, e $\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n = 6$, logo, $(a_n)_{n\in N} = (-1, -3, 1, 17, 51, \dots)$, $(\Delta a_n)_{n\in N} = (-2, 4, 16, 34, \dots)$, $(\Delta^2 a_n)_{n\in N} = (6, 12, 18, 24, \dots)$ e $(\Delta^3 a_n)_{n\in N} = (6, 6, 6, \dots)$ portanto, $(a_n)_{n\in N}$ é uma PA de terceira ordem ou de ordem 3.

5.3 Definição: Números Figurados (Nobre, 2018): Os números figurados são representações geométricas formados por pontos e associados a um número F, de modo que F é a quantidade de pontos necessários para formar tal figura. Mais precisamente, apresentaremos os Números Triangulares, Quadrados, pentagonais e Hexagonais.

Proposição 5.1.4(Nobre, 2018): Os números triangulares são bem antigos e remontam a época dos pitagóricos, sua estrutura pode ser vista na figura abaixo.



Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP

Note que os números triangulares formam uma sequência $(T_n) = (1, 3, 6, 10, 15, \dots)$.

Aplicando o operador diferença a (T_n), obtém-se $(\Delta T_n) = (2, 3, 4, 5, \dots)$. Portanto, de acordo com a **definição** 5.3 a sequência dos números Triangulares é uma PA de segunda ordem.

A proposição a seguir define o termo geral da sequência dos números triangulares.

Teorema 5.1.5(Nobre, 2018): seja $(T_n) = (1, 3, 6, 10, 15, \dots)$ a sequencia dos números triangulares, então o termo geral será:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

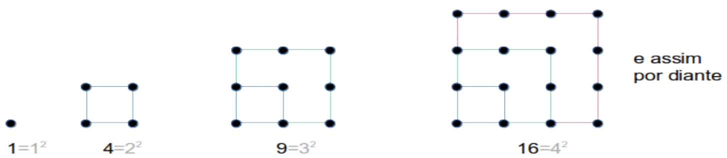
Demonstração: seja $(b_n) = (1, 2, 3, 4 \ \dots, n)$ a sequencia dos números naturais, note que: $T_1 = b_1, T_2 = b_1 + b_2, \ \ T_3 = b_1 + b_2 + b_3, \ \ \dots \ \ T_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_n$. Como $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$ é a soma dos n primeiro números naturais, usando o Teorema 4.1 tem:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

■

Esse resultado é muito importante e será usado no processo de obtenção do termo geral para uma PA de ordem superior.

Proposição 5.1.6(Nobre, 2018): Assim como os números triangulares, os números quadrados também são sequencias bem antigas no meio matemático, e sua particularidade mais interessante é que cada termo desta sequência pode ser adquirido a partir dos termos da sequência dos números triangulares.



Fonte:www.matematica.br

Teorema 5.1.7 (Nobre, 2018)**:** Dada uma sequência $(Q_n) = (1, 4, 9, 16, \dots)$, então $(Q_n) = n^2$, $\forall n \in N$.

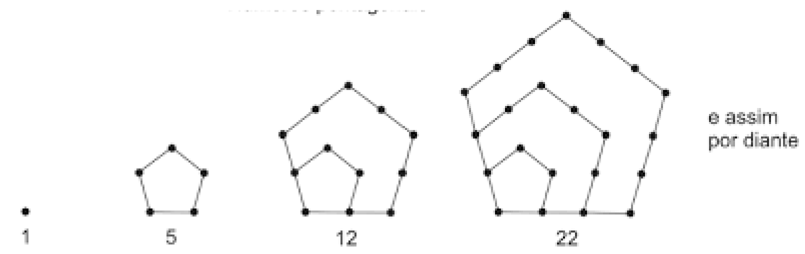
Demonstração: observando a figura acima, vemos que $(Q_n) = T_n + T_{n-1}$, a partir do segundo termo, daí vem:

$$Q_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2$$

■

Logo Q_n é o termo geral para calcular os números quadrados.

Proposição 5.1.8 (Silva, *et al.* 2004): O n-esimo número Pentagonal P_n é também dado pela soma de uma progressão aritmética.



Fonte: Universidade Estadual do Ceará

Demonstração

Esta sequência geométrica está associada a sequência $(P_n) = (1, 5, 12, 22, 35, \dots)$, de onde vem $(\Delta P_n) = (4, 7, 10, 13, \dots)$ e $(\Delta^2 P_n) = (3, 3, 3, \dots)$, que é uma PA estacionaria, portanto, a sequência dos números pentagonais é uma PA de segunda ordem.

Vejamos que, $P_2 = P_1 + \Delta P_1$, $P_3 = P_1 + \Delta P_1 + \Delta P_2$, $P_n = P_1 + \Delta P_1 + \cdots + \Delta P_{n-1}$

Logo: $P_n = P_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+1)$

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2} = n + \frac{3n(n-1)}{2}$$

$$P_n = n + 3T_{n-1}$$

Logo P_n é o termo geral para calcular os números Pentagonais.

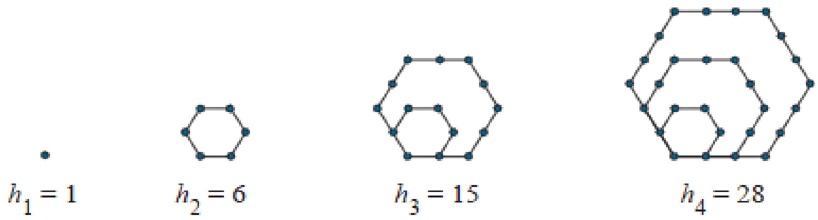
Exercício 5.1.9 **(**Autor**)**: Sabendo que o sexto número triangular é o 21, calcula o sétimo número pentagonal.

Solução: vimos que $P_n = n + 3T_{n-1} \to P_7 = 7 + 3T_6 = 7 + 3 \times 21 = 70$

Exercício 5.2.1**(**Autor**)**: Calcula o quarto número triangular, sabendo que o quinto número pentagonal é o 35.

Solução: $P_n = n + 3T_{n-1} \to P_5 = 5 + 3T_4 \to 30 = 3T_4 \to T_4 = 10$

Proposição 5.2.2(Silva, *et al.* 2004): O n-esimo número Hexagonal H_n é também dado pela soma de uma progressão aritmética.



Fonte:www.rpm.org.br

Demonstração

Os números hexagonais estão associados a sequência $(H_n) = (1, 6, 15, 28, 45, \dots)$, assim $(\Delta h_n) = (5, 9, 13, 17, \dots)$ e então $(\Delta^2 h_n) = (4, 4, 4, \dots)$. Portanto os números hexagonais formam uma PA de segunda ordem.

Vejamos que, $h_2 = h_1 + \Delta h_1$, $h_3 = h_1 + \Delta h_1 + \Delta h_2$, $H_n = h_1 + \Delta h_1 + \cdots + \Delta h_{n-1}$

Logo: $H_n = h_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k + 1)$

$$H_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = \frac{n(1 + 4n - 3)}{2} = \frac{n(4n - 2)}{2} = n(2n - 1)$$

Logo H_n é o termo geral para calcular os números Hexagonais.

5.4 Definição: Coeficiente Binomiais (Hazzan, 2004)

Seja $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{p}$ dois números naturais $(n \geq p)$, chamamos de coeficiente binómial de classe $\boldsymbol{p}$, do número $\boldsymbol{n}$, o número $\binom{n}{p}$ (lê-se $\boldsymbol{n}$ sobre $\boldsymbol{p}$)

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n - p)!}$$

Ao Estudarmos coeficiente Binomiais podemos nos deparar com várias propriedades, mais iremos destacar apenas duas que são:

1) Se $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in N$ e $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{n}$ então $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$

Coeficientes binomiais como esses, que tem o mesmo numerador e a soma dos denominadores igual ao numerador, são chamados **complementares.**

Exemplo:

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

2) Se $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in N$ e $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{p} - 1 \geq 0$ então $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$

Essa igualdade é conhecida como **relação de Stifel** (Michael Stifel, matemático alemão, 1487 - 1567). Exemplo:

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$$

5.5 Definição: Notação de Fatorial (Hazzan, 2004)

Seja n um numero inteiro não negativo $(n \in N)$,definimos fatorial de n (e indicamos $n!$) através da relação.

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$$

$0! = 1$

$1! = 1$

Exemplos

$3! = 3.2.1 = 6$

$5! = 5.4.3.2.1 = 120$

5.6 **Proposição**: **Triangulo de Pascal** (Benevides, 2020)

No estudo do Triangulo de Pascal podemos extrair várias propriedades, mais nós iremos destacar apenas o teorema das linhas e das colunas.

$$\begin{array}{l}
\textit{linha } 0: \binom{0}{0} \\
\textit{linha } 1: \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
\textit{linha } 2: \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
\textit{linha } 3: \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
\textit{linha } 4: \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\
\textit{linha } 5: \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}
\end{array}$$

Fonte: Brasil Escola

5.6 Teorema das Linhas (Benevides, 2020)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Exemplo:

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \cdots + \binom{10}{10} = 2^{10} = 1024$$

5.7 Teorema das Colunas (Benevides, 2020)

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

Exemplo:

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{10}{3} = \binom{11}{4}$$

6 TERMO GERAL PARA (PA) DE ORDEM SUPERIOR

Na progressão aritmética de primeira ordem, ou de ordem 1 já conhecemos o seu termo geral $a_n = a_1 + (n-1)r$ e s_n a soma dos n termos, que nos permite resolver uma gama de exercícios dos mais simples aos mais complexos, diante disso com essas formulas já conhecidas vai nos auxiliar a fazer uma análise mais profunda e deduzir as formulas dos termos gerais das progressões aritmética de ordem superior.

A fórmula para o termo geral de PAs de ordem superior, a qual envolve coeficientes binomiais, será útil para a resolução de diversos problemas. A seguir, enunciamos o termo geral das PAs de ordens 1, 2, 3, 4, e o termo geral de uma PA de ordem k.

Se $(a_n)_{n\in N}$ é uma PA de **primeira ordem** de razão r, então $a_n = a_1 + (n-1)r$, ou seja:

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} r,$$

Se $(a_n)_{n\in N} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-1}, a_n)$ é uma PA de **segunda ordem**, então $(\Delta a_n)_{n\in N} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots, b_{n-1})$ é uma PA de **primeira ordem** e $(\Delta^2 a_n)_{n\in N} = (r, r, r, \dots)$ é uma PA estacionária.

Logo:

$$b_1 = a_2 - a_1$$

$$b_2 = a_3 - a_2$$

$$b_3 = a_4 - a_3$$

....

$$b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$

Já vimos que $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1}$, é uma PA de primeira ordem, então podemos calcular a soma $s_{n-1} = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}$.

$$s_{n-1} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$$

Obtemos: $s_{n-1} = a_n - a_1 \rightarrow a_n = a_1 + s_{n-1}$

Nota que s_{n-1} já conhecemos, pois é a soma dos termos de uma PA de primeira ordem.

De acordo com o **Teorema** 4.2 temos**:**

$$s_{n-1} = b_1(n-1) + \frac{r(n-1)(n-2)}{2}$$

Logo expressando o termo geral para PA de segunda ordem, temos:

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \frac{r(n-1)(n-2)}{2}$$

Podemos expressar na forma binomial

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} b_1 + \binom{n-1}{2} r$$

Se $(a_n)_{n\in N} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-1}, a_n)$ é uma PA de **terceira ordem** então $(\Delta a_n)_{n\in N} = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots b_{n-1})$ é uma PA de **segunda ordem**, $(\Delta^2 a_n)_{n\in N} = (c_1, c_2, c_{3,} c_4, \dots, c_{n-2})$ é uma PA de **primeira ordem** e $(\Delta^3 a_n)_{n\in N} = (r, r, r, \dots r)$ é uma PA estacionária.

Já sabemos que $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1})$ é uma PA de segunda ordem, possui $n-1$ termos somando os seus termos temos:

$$s_{n-1} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{n-1}$$

$$b_1 = a_2 - a_1$$

$$b_2 = a_3 - a_2$$

$$b_3 = a_4 - a_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$

$$s_{n-1} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

Resulta:

$$s_{n-1} = a_n - a_1 \quad \rightarrow \ a_n = a_1 + s_{n-1}$$

Vejamos que s_{n-1} é a soma dos termos de uma progressão aritmética (PA) de segunda ordem, iremos apresentar aqui, mais só faremos a dedução adiante.

$$s_{n-1} = b_1(n-1) + c_1\frac{(n-1)(n-2)}{2} + r\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

Logo o termo geral para uma progressão aritmética de terceira ordem será:

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + c_1\frac{(n-1)(n-2)}{2} + r\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

Escrevendo na forma binomial será:

$$a_n = \binom{n-1}{0}a_1 + \binom{n-1}{1}b_1 + \binom{n-1}{2}c_1 + \binom{n-1}{3}r$$

Se $(a_n)_{n\in N} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma PA de **ordem 4**,$(\Delta a_n)_{n\in N} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-1})$ é uma PA de **terceira ordem**, $(\Delta^2 a_n)_{n\in N} = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-2})$ é uma PA de **segunda ordem**, $(\Delta^3 a_n)_{n\in N} = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_{n-3})$ é uma PA de **primeira ordem**, $(\Delta^4 a_n)_{n\in N} =$
$(r, r, r, \dots, r)$ é uma PA estacionária.

Logo o seu termo geral é:

$$a_n = \binom{n-1}{0}a_1 + \binom{n-1}{1}b_1 + \binom{n-1}{2}c_1 + \binom{n-1}{3}d_1 + \binom{n-1}{4}r$$

De forma geral temos:

Se $(a_n)_{n\in N}$ é uma PA de ordem k $(\Delta a_n)_{n\in N} = (\Delta a_1, \Delta a_2, \dots, \Delta a_n, ..)$, $(\Delta^2 a_n, \dots)_{n\in N} = (\Delta^2 a_1, \Delta^2 a_2, \dots, \Delta^2 a_n)$.....$(\Delta^{k-1} a_n)_{n\in N} = (\Delta^{k-1} a_1, \Delta^{k-1} a_2, \dots, \Delta^{k-1} a_n, \dots)$,e $(\Delta^k a_n)_{n\in N} =$

$(r, r, r, \dots,)$,são operadores diferenças associados a $(a_n)_{n\in N}$, então o termo geral para uma PA de ordem k será:

$$a_n = \frac{a_1}{0!} + \frac{b_1(n-1)}{1!} + \frac{c_1(n-1)(n-2)}{2!} + \cdots + \frac{r(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!}$$

Escrevendo na forma binomial temos:

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \cdots + \binom{n-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_1 + \binom{n-1}{k} r$$

Exemplo 6.1(Nobre, 2018): as sequencias $(a_n)_{n\in N} = (3, 7, 13, 21, 31, \dots .)$, $(b_n)_{n\in N} = (2, 8, 20, 40, 70, \dots)$, $(c_n)_{n\in N} = (1, 6, 20, 50, 105, \dots .)$ e $(d_n)_{n\in N} = (-1, 0, 16, 97, 353, \dots)$ são apresentadas na forma recursiva, as quais são PAs de ordens 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Portanto por 2, 3, 4 e 5 temos:

$$a_n = \binom{n-1}{0} 3 + \binom{n-1}{1} 4 + \binom{n-1}{2} 2$$

$$= \frac{(n-1)!}{0!\,(n-1)!} 3 + \frac{(n-1)!}{1!\,(n-2)!} 4 + \frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!} 2$$

$$= 3 + \frac{(n-1)(n-2)!}{1(n-2)!} 4 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2(n-3)!} 2$$

$$= 3 + 4(n-1) + (n-1)(n-2)$$

$$= 3 + (n-1)(n-2+4)$$

$$= 3 + (n-1)(n+2) \ = n^2 + n + 1.$$

$$b_n = \binom{n-1}{0} 2 + \binom{n-1}{1} 6 + \binom{n-1}{2} 6 + \binom{n-1}{3} 2$$

$$= \frac{(n-1)!}{0!\,(n-1)!} 2 + \frac{(n-1)!}{1!\,(n-2)!} 6 + \frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!} 6 + \frac{(n-1)!}{3!\,(n-4)!} 2$$

$$= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n)$$

$$c_n = \binom{n-1}{0} 1 + \binom{n-1}{1} 5 + \binom{n-1}{2} 9 + \binom{n-1}{3} 7 + \binom{n-1}{4} 2$$

$$= \frac{(n-1)!}{0!\,(n-1)!} 1 + \frac{(n-1)!}{1!\,(n-2)!} 5 + \frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!} 9 + \frac{(n-1)!}{3!\,(n-4)!} 7 + \frac{(n-1)!}{4!\,(n-5)!} 2$$

$$= \tfrac{1}{12}(n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n).$$

$$d_n = \binom{n-1}{0}(-1) + \binom{n-1}{1} 1 + \binom{n-1}{2} 15 + \binom{n-1}{3} 50 + \binom{n-1}{4} 60 + \binom{n-1}{5} 24$$

$$= \frac{1}{30}(6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n - 30)$$

Observação: Dado que o termo geral $(a_n)_{n\in N}$ de uma PA de ordem k é um polinômio de grau k na variável n (Proposição 4.4), podemos calcular o termo geral dessas PAs por meio da resolução de sistemas de equações lineares. No entanto, tal procedimento é muito mais árduo que o ora exposto. Por exemplo, a sequência $(c_n)_{n \in N}$ = (1, 6, 20, 50, 105, ...) do Exemplo 5.1 é uma PA de ordem 4. Portanto, seu termo geral é da forma $c(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$. Assim, devemos ter $c(1) = 1, c(2) = 6, c(3) = 20, c(4) = 50,\ c(5) = 105$, ou seja,

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 1 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = 6 \\ 81a + 27b + 9c + 3d + e = 20 \\ 256a + 64b + 16c + 4d + e = 50 \\ 625a + 125b + 25c + 5d + e = 105 \end{cases}$$

Existem vários métodos para resolver esse sistema de equação linear (por exemplo o de eliminação de Gauss), que tem como solução:

$$a = \frac{1}{12}\ , b = \frac{1}{3}\ , c = \frac{5}{12}\ , d = \frac{1}{6}\ , e = 0$$

Portanto:

$$c_n = \frac{1}{12}(n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n)$$

Para PA de ordem elevada, a resolução só é viável computacionalmente. Por exemplo, para uma PA de ordem 9, deve-se resolver um sistema de 10 × 10 equações lineares.

7 SOMA DOS TERMOS PARA (PA) DE ORDEM K FINITA

Teorema 7.1.1 (Lopes,1998)**:** A soma s_n^k dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de ordem k é um polinómio de grau $k+1$ em n.

Demonstração

Seja a PA de ordem k finita $(a_1, a_2, \dots., a_{n-1}, \dots, a_n)$ e s_n^k, a soma dos n primeiros termos. Podemos escrever:

$$s_n^k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{n-1}^k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

$$s_n^k - s_{n-1}^k = \Delta s_{n-1}^k = a_n$$

■

Como a_n é termo geral de uma PA de ordem k, podemos dizer que a_n é um polinômio de grau k em n. Assim, após uma operação diferença entre os termos consecutivos da sequencia $s_1^k, s_2^k, \dots, s_n^k$, obtemos uma PA de ordem k. A sequencia s_n^k é uma PA de ordem $k+1$.

7.1 Soma dos Termos Para PA de Segunda Ordem

A soma dos termos de uma progressão aritmética de primeira ordem já é conhecida, e a soma para uma PA de segunda ordem já utilizamos quando deduzimos o termo geral de uma progressão aritmética de terceira ordem, agora aqui vamos demonstrar o termo geral da soma dos n termos de uma PA de segunda ordem.

Seja $s_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n)$ a soma dos termos de uma PA de segunda ordem, a partir do termo geral da PA de segunda ordem temos:

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + \frac{r(n-1)(n-2)}{2}$$

$$a_1 = a_1 + 0b_1 + 0r$$

$$a_2 = a_1 + 1b_1 + 0r$$

$$a_3 = a_1 + 2b_1 + 1r$$

$$a_4 = a_1 + 3b_1 + 3r$$

$$a_5 = a_1 + 4b_1 + 6r$$

$$a_6 = a_1 + 5b_1 + 10r$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

Somando as colunas dos dois membros da igualdade obtemos:

$$s_n = na_1 + b_1[0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] + r[0 + 0 + 1 + 3 + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)}{2}]$$

$$s_n = na_1 + b_1\frac{n(n-1)}{2} + r\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Portanto essa é a soma dos termos para progressão aritmética de segunda ordem.

Exercício 7.1.2: considerando que a sequencia $(a_n)_{n\in N}$ seja uma PA de segunda ordem, e que seus três primeiros termos sejam dados por $a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 12$, encontre o polinómio do terceiro grau que corresponde a soma termos dessa PA.

Solução: a sequencia $a_n = (4, 7, 12, ...)$,é uma PA de segunda ordem, então o operador diferença $(\Delta a_n) = (3, 5, ...)$ é uma PA de primeira ordem, e $(\Delta^2 a_n) = (2, 2, 2, ...)$ é uma PA estacionária, logo substituindo na soma dos termos da PA de segunda ordem temos:

$$S_n = na_1 + b_1\frac{n(n-1)}{2} + r\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$S_n = 4n + 3\frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$S_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{19n}{6}$$

Logo:

$$S_n = p(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{19n}{6}$$

Portanto a soma dos termos para uma PA de segunda ordem é um polinómio do terceiro grau, conforme mostra o teorema 6.1.

7.2 Soma dos Termos para PA de Terceira Ordem

Seja $s_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n)$ a soma dos termos de uma PA de terceira ordem, a partir do termo geral da PA de terceira ordem temos:

$$a_n = a_1 + b_1(n-1) + c_1\frac{(n-1)(n-2)}{2} + r\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

$$a_1 = a_1 + 0b_1 + 0c_1 + 0r$$

$$a_2 = a_1 + 1b_1 + 0c_1 + 0r$$

$$a_3 = a_1 + 2b_1 + 1c_1 + 0r$$

$$a_4 = a_1 + 3b_1 + 3c_1 + 1r$$

$$a_5 = a_1 + 4b_1 + 6c_1 + 4r$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

Somando as colunas dos dois membros da igualdade obtemos:

$$s_n = na_1 + b_1[0 + 1 + \cdots + (n-1)] + c_1[0 + 0 + 1 + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)}{2}] + r[0 + 0 + 0 + 1 + 4 + \cdots \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}]$$

$$s_n = na_1 + b_1\frac{n(n-1)}{2} + c_1\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + r\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Portanto essa é a soma dos termos para uma progressão aritmética de terceira ordem.

Exercício 7.1.3: considerando que uma sequência $(a_n)_{n\in N}$ seja uma PA de terceira ordem, e que seus quatro primeiros termos sejam dados por $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 20, a_4 = 62$, encontre o polinómio do quarto grau que corresponde a soma dos termos dessa PA.

Solução: a sequencia $a_n = (2, 4, 20, 62 \ \ ...)$,é uma PA de terceira ordem, então o operador diferença $(\Delta a_n) = (2, 16, 42 \ldots.)$ é uma PA de segunda ordem, e $(\Delta^2 a_n) = (14, 26, , \ldots)$ é uma PA de primeira ordem e $(\Delta^3 a_n) = (12, 12, 12, \ldots.)$, é uma PA estacionária, logo substituindo na soma dos termos da PA de terceira ordem temos:

$$S_n = na_1 + b_1 \frac{n(n-1)}{2} + c_1 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + r\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$S_n = 2n + 2\frac{n(n-1)}{2} + 14\frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 12\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$S_n = \frac{n^4}{3} - \frac{2n^3}{3} + \frac{2n^2}{3} + \frac{5n}{3}$$

Portanto a soma dos termos para uma PA de terceira ordem é um polinómio do quarto grau, conforme mostra o teorema 6.1.

7.3 Generalizando para k ordem

Primeira Ordem

$$S_n = na_1 + r\frac{n(n-1)}{2}$$

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} r$$

Segunda Ordem

$$S_n = na_1 + b_1 \frac{n(n-1)}{2} + r\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} b_1 + \binom{n}{3} r$$

Terceira Ordem

$$S_n = na_1 + b_1 \frac{n(n-1)}{2} + c_1 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + r\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} b_1 + \binom{n}{3} c_1 + \binom{n}{4} r$$

Ordem k

$$S_n = \frac{na_1}{1!} + b_1 \frac{n(n-1)}{2!} + c_1 \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + r\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{(k+1)!}$$

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} b_1 + \binom{n}{3} c_1 + \cdots + \binom{n}{k+1} r$$

Exercício 7.1.4 (Autor): Calcula a soma dos vinte primeiros números triangulares

Solução: seja $(T_n) = (1, 3, 6, 10, 15, \dots)$ a sequência dos números triangulares, então aplicando o operador diferença $(\Delta t_n) = (2, 3, 4, 5, \dots)$, $(\Delta^2 t_n) = (1, 1, 1, \dots)$ portanto aplicamos duas vezes o operador diferença resultou em uma PA estacionária logo a sequência dos números triangulares é uma PA de segunda ordem, a soma dos termos de uma Progressão Aritmética de segunda ordem é:

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} b_1 + \binom{n}{3} r$$

$$S_n = \binom{20}{1} 1 + \binom{20}{2} 2 + \binom{20}{3} 1$$

$$S_n = 1540.$$

Exercício 7.1.5**(**Adaptado, Iezzi): calculando a soma dos dez primeiros números Pentagonais por descuido não se somou o sétimo termo, qual é a soma encontrado.

Solução: seja a sequência dos números pentagonais é $p_n =$ (1, 5, 12, 22, ...), se aplicarmos o operador diferença $(\Delta p_n) = (4, 7, 10, \dots)$, e $(\Delta^2 p_n) = (3, 3, 3, \dots.)$

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} b_1 + \binom{n}{3} r$$

$$S_n = \binom{10}{1} 1 + \binom{10}{2} 4 + \binom{10}{3} 3$$

$$S_n = 550.$$

Nota que somamos os dez primeiros números Pentagonais, agora vamos subtrair o sétimo termo assim obteremos a soma desejada. O termo geral dos números pentagonais é:

$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$P_7 = \frac{7(3 \times 7 - 1)}{2} = 7 \times 10 = 70$$

Portanto a soma desejada será: $S_n = 550 - 70 = 480.$

8 APLICAÇÃO

Exemplo 8.1 (Nobre, 2018): A figura abaixo mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. De quantos baralhos de 52 cartas precisamos, no mínimo, para construir um castelo de 10 andares?

Fonte: OBMEP-2009

Solução: Seguindo a lógica da Figura, deduz que o n-ésimo termo da sequência $(a_n)_{n\in N}$, onde a_1 = 2 e $\forall n \in N$, a_{n+1} = a_n + $3n$ + 2, isto é, $(a_n)_{n\in N}$ = (2, 7, 15, 26, 40, ...), representa a quantidade mínima de cartas para construir um castelo de n andares. Observe que, $\forall n \in N$, (Δa_n) = $3n$ + 2 e $(\Delta^2 a_n) = 3$, isto é, $(\Delta a_n)_{n\in N}$ = (5, 8, 11, 14, ...) e $(\Delta^2 a_n)_{n\in N}$ = (3, 3, 3, 3, ...). Logo, $(a_n)_{n\in N}$ é uma PA de segunda ordem. Assim, temos:

$$b_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} b_1 + \binom{n-1}{2} r$$

$$b_n = \binom{n-1}{0} 2 + \binom{n-1}{1} 5 + \binom{n-1}{2} 3$$

$$= \frac{(n-1)!}{0!\,(n-1)!} 2 + \frac{(n-1)!}{1!\,(n-2)!} 5 + \frac{(n-1)!}{2!\,(n-3)!} 3$$

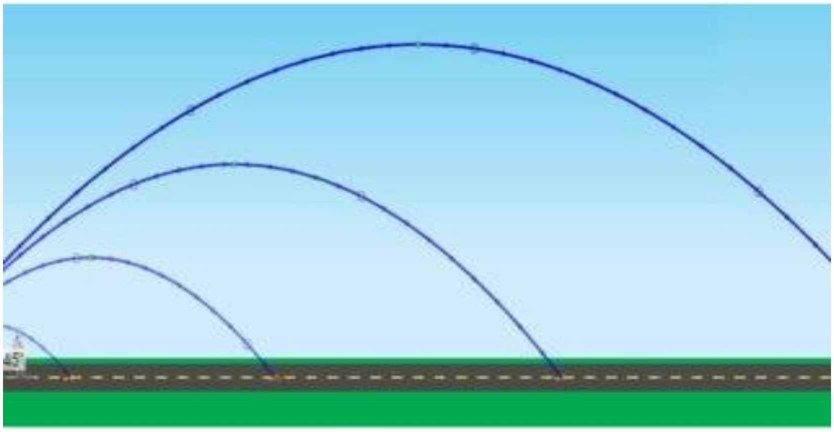
$$= \frac{1}{2}(3n^2 + n)$$

Portanto, $a_{10} = \frac{1}{2}(3 \times 10^2 + 10) = 155$ representa o número mínimo de cartas para construir um castelo de 10 andares. Como um baralho tem 52 cartas, serão necessários, no mínimo, 3 baralhos para construir um castelo de 10 andares.

Exemplo 8.2 (Nobre, 2018): Um operador de canhão está fazendo testes para medir a relação entre a quantidade de pólvora usada na explosão e a distância atingida pela bala quando o canhão está com inclinação de 45 graus. Ele já sabe que, para cada meio quilo de pólvora, há uma variação de 10 m/s na velocidade de lançamento. Quanto de pólvora deve ser utilizada no canhão para que o projétil ultrapasse 300 metros? A Figura abaixo ilustra esse problema e a Tabela 1 mostra algumas relações que foram calculadas pelo operador.

Nota: após alguns testes, o operador de canhão percebeu que a sequência das distâncias atingidas $(D_n)_{n\in N}$ obedece ao seguinte padrão: D_1= 10.2 e, $\forall n \in N \in$, D_{n+1} = D_n+ 20.41n + 10.2.

Figura: Lançamento obliquo



FONTE:(Nobre,2018)

Pólvora (kg)	Velocidade (m/s)	Distância (m)
0,5	10	10.2
1	20	40.81
1,5	30	91.83
2	40	163.26

Tabela 1: Dados complementar do exercício acima

Solução: Seja $(D_n)_{n\in N} = (10.2, 40.81, 91.83, 163.26, \ldots.)$, onde $D_1 = 10.2$ e $\forall n \in N$, $D_{n+1} = D_n + 20.41n + 10.2$, a sequência das distancias atingidas. Assim, $\forall n \in N$, $(\Delta D_n)_{n\in N} = 20.41n + 10.2$, e $(\Delta^2 D_n)_{n\in N} = 20.41$, isto é $(\Delta D_n)_{n\in N} = (30.61, 51.02, 71.43, 91.84, \ldots.)$ e $(\Delta^2 D_n)_{n\in N} = (20.41, 20.41, \ldots.)$, desse modo, $(D_n)_{n\in N}$ é uma PA de segunda ordem e, então:

$$D_n = \binom{n-1}{0}10.2 + \binom{n-1}{1}30.61 + \binom{n-1}{2}20.41$$
$$= 10.205n^2 - 0.005n.$$

Assim, para que o projetil ultrapassa 300 metros, $10.205n^2 - 0.005n > 300$, o que nos leva a $n > 5.42$. pela tabela 1, $v = 10n$. Logo, a velocidade requerida para ultrapassar 300 metros deverá ser maior que $54.2m/s$, o que equivale a dizer, por proporção, que serão necessário mais que $2.71kg$ de pólvora para que o projetil ultrapasse 300 metros.

Exercício 8.3 (Nobre, 2018): Um objeto foi solto de uma altura h, em queda livre. A partir do terceiro segundo de queda, um sistema começou a monitorar as alturas desse objeto em relação ao seu tempo de queda. Alguns dos dados monitorados estão disponíveis na Tabela 2 a seguir.

Objeto em Queda Livre	
Tempo (s)	Altura (m)
3	955
4	920
5	875
6	820
7	755

Tabela 2: Altura em função do tempo de queda.

a) De que altura o objeto foi solto?

b) quanto tempo o objeto gastará para chegar ao solo?

Solução: Como os tempos fornecidos são consecutivos, podemos interpretar as respectivas alturas como termos de uma sequência. Assim, seja $(h_n)_{n \in N}$ = (..., 955, 920, 875, 820, 755, ...), onde h_1 = 955 e,$\forall n \in N$, $h_{n+1} = h_n - 10n - 25$, a sequência das alturas. Logo, $\forall n \in N$, $(\Delta h_n) = h_{n+1} - h_n$ = −10n – 25 e $(\Delta^2 h_n) = \Delta h_{n+1} - \Delta h_n$ =−10, isto é,

$(\Delta h_n)_{n \in N}$ = (..., −35, −45, −55, −65, ...) e $(\Delta^2 h_n)_{n \in N}$ = (..., −10, −10, −10, ...).

Logo, as alturas formam uma PA de segunda ordem. Portanto, o termo geral de $(h_n)_{n \in N}$ é dado por

$$h_n = \binom{n-1}{0} 955 + \binom{n-1}{1}(-35) + \binom{n-1}{2}(-10)$$
$$= -5n^2 - 20n + 980.$$

Uma vez calculado o termo geral da PA, vamos apresentar as respostas às perguntas formuladas.

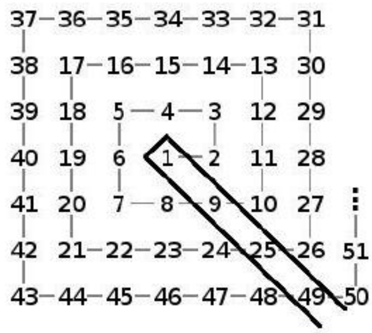
a) Nesse caso, desejamos calcular $h_{(-2)}$ (isso é possível, pois consideramos o terceiro termo da sequência como o primeiro). Portanto,

$$h_{(-2)} = -5 \cdot (-2)^2 - 20 \cdot (-2) + 980 = 1000,$$

Ou seja, o objeto foi solto a uma altura de 1000 metros.

b) Nesse caso, resolvemos a equação $-5n^2 - 20n + 980 = 0$, o que resulta em $n \cong 12.14$. Isto é, o objeto gastará, aproximadamente, 12.14 + 3 = 15.14 segundos para chegar ao solo.

Exercício 8.4 (Autor): Observe o esquema abaixo, no qual os números naturais estão colocados em formato de espiral.



Fonte: Matemática ensino Fundamental (básico)

Nesse esquema, uma diagonal de números está destacada. O primeiro termo dessa diagonal é 1, o segundo é 9, o terceiro é 25 e o quarto é 49.

Se continuarmos escrevendo a espiral, qual será o décimo termo dessa diagonal?

Solução: se observarmos a sequencia $a_n = (1, 9, 25, 49, \ldots.)$, podemos notar que se trata de uma PA de segunda ordem, então $(\Delta a_n) = (8, 16, 24, \ldots)$, é uma PA de primeira ordem e $(\Delta^2 a_n) = (8, 8, 8, \ldots.)$, é uma PA estacionária logo basta substituir na expressão do termo geral da PA de ordem 2.

$$a_n = \binom{n-1}{0}1 + \binom{n-1}{1}8 + \binom{n-1}{2}8$$

$$= 4n^2 - 4n + 1$$

$$a_{10} = 4(10)^2 - 4(10) + 1 = 361.$$

Logo o decimo termo da diagonal é 361.

Exercício 8.5 (Autor): qual é o trigesimo termo da PA de segunda ordem

$a_n = (4, 6, 10, 16, 24, a_{29}, a_{30})$

Sendo uma PA de segunda ordem temos $(\Delta a_n) = (2, 4, 6, 8\ \ldots)$, é uma PA de primeira ordem e $(\Delta^2 a_n) = (2, 2, 2, \ldots.)$, é uma PA estacionária, substituindo na expressão do termo geral temos:

$$a_n = \binom{n-1}{0}4 + \binom{n-1}{1}2 + \binom{n-1}{2}2$$

$$= n^2 - n + 4$$

$$a_{30} = 30^2 - 30 + 4 = 874.$$

Portanto o trigésimo termo da sequência é 874.

Outra forma

Temos a sequencia $a_n = (4, 6, 10, 16, 24, a_{29}, a_{30})$, supondo que não conhecemos o termo geral da PA de segunda ordem, então $a_{30} = 4 + (2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + b_{29})$

$$b_{29} = b_1 + 28r = 2 + 28 \times 2 = 2 + 56 = 58$$

$$a_{30} = 4 + \frac{(b_1 + b_{29})n}{2}$$

$$a_{30} = 4 + \frac{(2 + 58)29}{2} = 4 + 30 \times 29 = 4 + 870 = 874.$$

O termo procurado é o 874.

9 CONCLUSÃO

Entretanto ao destrincharmos esse lindo tema progressão aritmética de ordem superior é razoável que começássemos assim como fizemos abordar as progressão aritmética clássica aquela que vimos no ensino médio, deduzimos a fórmula do termo geral, calculamos a razão, a soma dos n primeiros termos, o termo médio, os termos equidistantes dos extremos, a interpolação, posteriormente entramos propriamente no objetivo principal do TCC que era as progressão aritmética de ordem superior.

Na progressão aritmética de ordem superior começamos a explicar o que era operador diferença e a ordem de uma progressão, a partir de uma P.A clássica ou de primeira ordem conseguimos deduzir uma de segunda ordem, com uma progressão aritmética de segunda ordem deduzimos uma progressão aritmética de terceira ordem e por adiante, calculamos também a soma dos termos de progressão aritmética de ordem superior a partir da soma de uma P.A já conhecida que as progressão aritmética clássicas.

Ao longo desta pesquisa sobre Progressão Aritmética de Ordem Superior, encontramos diversos percalços, mas estávamos cientes de que isso ocorreria. Caminhar na estrada da Matemática exige bastante cuidado, pois ela não é linear, como muitos pensam. É tão complexa quanto a estrada da vida, cheia de lombas e curvas. O que plantas não cresce se depender das chuvas.

REFERENCIAS

BENEVIDES, S. F. **Binômio de Newton e Triangulo de Pascal**, Soma de Elementos em Linhas, Colunas e Diagonais, Portal da Matemática, OBMEP, 2020, disponível em http://matematica.obmep.org.br/

FILHO, S. F. R.; **progressão Aritmética de Ordem Superior**, outro olhar, outra abordagem, Dissertação (Mestrado),PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão 2020.Disponivel em: https://tedebc.ufma.br/jspui/bitstream/tede/3201/2/SADOC-ROCHA.pdf

HAZZAN, S. **Combinatória e Probabilidade**, Fundamento Elementar 5, Atual, São Paulo:[s.n],2004.

IEZZI, G.; Hazzan, S.; **Sequencias. Matrizes. Determinantes. Sistemas**, Fundamento Elementar 4, Atual, São Paulo:[s.n], 2004.

LOPES, L.; **Manual de Progressões**, Interciencia, Rio de Janeiro, 1998, 126p.

MORGADO, A. C.; Carvalho, P. C. P. **Matemática Discreta**, Coleção Profmat; Rio de Janeiro, SBM, 2013.DIisponivel em: https://mail.google.com/mail/u/0/?tab=rm&ogbl#inbox?projector=1

NOBRE, J. F. F. **Progressões Aritméticas**, abordando as ordens superiores. Dissertação (Mestrado) -PROFMAT, Universidade Federal de Tocantins, 2018.Disponivel em: https://mail.google.com/mail/u/0/?tab=rm&ogbl#inbox?projector=1

NOBRE, J. F. F.; Rocha, R. A.; **Progressões Aritméticas de Ordem Superior**, Revista Professor de Matemática Online, v.6, n.1, Tocantins, 2018.Disponivel em: https://mail.google.com/mail/u/0/?tab=rm&ogbl#inbox?projector=1

NUNES, R. S. O.; Gomes, J. S. **Progressões Aritméticas e Geométricas de Ordens Superiores e Suas Relações**, Revista Professor de Matemática Online, V.8, n.4, Mato Grosso- UFMT, 2020, Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo840.

OLIVEIRA, E. J.; **Progressões Aritmética de Ordem Superior**, Resultados e aplicações, Dissertação (Mestrado) -PROFMAT, Universidade federal de Sergipe, 2019. Disponível em: https://mail.google.com/mail/u/0/?tab=rm&ogbl#inbox?projector=1

SILVA, *et al*. **Progressão aritmetica de ordem superior**, história e conceito. Sumários**,** Jaguariúna / Sp, v. 2, p. 01-35, out. 2004.Disponivel em: https://mail.google.com/mail/u/0/?tab=rm&ogbl#inbox?projector=1