UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ MESSIAS E SILVA

IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA DE ALGUNS NÚMEROS

REDENÇÃO
2024

JOSÉ MESSIAS E SILVA

IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA DE ALGUNS NÚMEROS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

REDENÇÃO - CE

2024

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Silva, Jose Messias e.

S586i

Irracionalidade e transcendência de alguns números / Jose Messias e Silva. - Redenção, 2024.
43f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto De Ciências Exatas E Da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2024.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Matemática - Número - Irracionalidade. 2. Transcendência. 3. Algebricidade. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 510

JOSÉ MESSIAS E SILVA

IRRACIONALIDADE E TRANSCENDÊNCIA DE ALGUNS NÚMEROS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Graduado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 29/11/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Profa. Dra. Tatiana Skoraia
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Documento assinado eletronicamente por **RAFAEL JORGE PONTES DIOGENES**, **PROFESSOR(A) DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 29/11/2024, às 22:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **JOSERLAN PEROTE DA SILVA**, **PROFESSOR(A) DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 30/11/2024, às 23:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **TATIANA SKORAIA**, **VICE-COORDENADOR(A) DE CURSO DE GRADUAÇÃO**, em 01/12/2024, às 09:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unilab.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1065130** e o código CRC **9D674F4E**.

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

À Unilab, pela oportunidade de cursar uma graduação de qualidade na área de meu interesse e pelo apoio financeiro com os auxílios através do programa PAES. Agradeço aos programas do PIBIC-Unilab e da Funcap, pelas bolsas de iniciação científica durante os 5º-6º e 7º-8º semestres, respectivamente. Sem dúvida, essas bolsas contribuíram grandemente para minha maturidade matemática.

Ao Prof. Dr. Rafael Diógenes, pela excelente orientação, pela paciência e apoio pessoal.

Aos professores participantes da banca examinadora Dr. Joserlan Perote e Tatiana Skoraia pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Meus sinceros agradecimentos aos meus professores de Matemática do ensino médio, José Bernardo, Gustavo Júnior e Rafael Castro. Sem dúvida, em muitos momentos, a contribuição desses foi decisiva para a minha entrada na graduação, sem a intervenção desses, nada do que aconteceu teria sido como conhecemos, quem sabe eu nunca tivesse entrado em uma graduação e nunca tivesse obtido o nível superior, a minha vida e o meu destino seriam outros.

Aos colegas da turma de graduação, em especial, Marinaldo Braga, Matheus Maia e Miguel Freitas, pelas reflexões, críticas e sugestões.

Agradeço aos professores do ICEN, pelos ensinamentos teóricos e morais ao longo de todos esses anos de graduação.

Agradeço aos meus pais, José Alberto Carlos e Antônia Rosangela, pelo apoio e paciência ao longo desses anos de graduação.

Agradeço e dedico toda honra Àquele que era, que é e que há de Ser, ao Senhor da minha vida, Senhor dos Senhores, nosso Deus. Todas essas pessoas que contribuíram para este resultado, direta ou indiretamente, não apareceram por acaso, elas foram enviadas por Deus. Apesar de termos o livre arbítrio, acredito que todos concordam que às vezes, nós estamos no lugar certo, na hora certa e nos aparece a oportunidade certa.

"Há um sentimento inescapável... de que essas fórmulas matemáticas têm existência própria... de que elas são mais sábias que nós, mais sábias até do que quem as descobriu... de que o que tiramos delas é mais do que aquilo que de início nelas foi posto."

Heinrich Hertz, citado por F.J. Dyson

RESUMO

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso é apresentar os resultados sobre irracionalidade e transcendência de alguns números partindo de propriedades fundamentais dos respectivos conjuntos que serão tratados aqui. No presente trabalho o leitor não encontrará apenas um compilado de teoremas sobre transcendência ou irracionalidade de alguns números, encontrará, também uma série de proposições, ou pequenos teoremas que serão parte da construção lógica dos resultados que incluem a transcendência de π e e. Este trabalho pode ser dividido em duas partes: racionalidade e irracionalidade de alguns números e algebricidade e transcendência de alguns números. A primeira parte se concentra, em sua maioria, na área de teoria elementar dos números. Nela, o leitor encontrará proposições e teoremas de conceitos básicos sobre as operações entre racionais e irracionais, bem como as demonstrações da irracionalidade de alguns raízes e suas somas ou diferenças e as provas da irracionalidade de π e do número de Euler, e. Na segunda parte desse trabalho o leitor encontrará uma construção de pequenos resultados que tratam da transcendência e que se concentra mais no ramo da Teoria Analítica dos números, que, como o nome já indica, nos resultados desse capítulo serão usadas técnicas da Análise em muitos momentos.

Palavras-chave: Irracionalidade. Transcendência. Algebricidade.

ABSTRACT

The objective of this final course work is to present some results on the irrationality and transcendence of some numbers based on fundamental properties of the respective sets that will be treated here. In this work the reader will not only find a compilation of theorems on the transcendence or irrationality of some numbers, he will also find a series of propositions, or small theorems that will be part of the logical construction of the results that include the transcendence of and e. This work can be divided into two parts, namely rationality and irrationality of some numbers and algebricity and transcendence of some numbers. The first part focuses, in most of the results and lemmas, on the area of elementary number theory. In it, the reader will find propositions and theorems of basic concepts about the operations between rational and irrational numbers, as well as the demonstrations of the irrationality of some roots and their sums or differences and the proofs of the irrationality of and Euler's number, and so on. In the second part of this work, the reader will find a construction of small results that deal with transcendence and that focuses more on the branch of Analytical Number Theory, which, as the name already indicates, in the results of this chapter will be used techniques of Analysis in many moments.
Keywords: Irrationality. Transcendence. Algebricity.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Que o leitor não seja levado a pensar que o termo "elementar"que aparece em Teoria Elementar dos números, indique se tratar de uma área morta, ou seja, uma área que não tem problemas para serem objetos de exploração e pesquisa e, portanto, um ramo que pode ser subestimado. Pelo contrário, essa área possui problemas atuais e inclusive que são simples o suficiente para ser explicado a um aluno de 2 ano do ensino médio e que, no entanto estão ainda, sem resposta. Um exemplo de problema como o referido acima é: $\pi + e \in \mathbb{Q}$?

Tratando de irracionalidade, podemos falar sobre problema citado no parágrafo anterior: $\pi + e \in \mathbb{Q}$? O primeiro termo que aparece nessa soma se trata do número pi, que surgiu há milênios na geometria e que pode ser obtido a partir de qualquer circunferência dividindo o seu comprimento pelo seu diâmetro. O seu valor aproximado é 3,14, porém, como será tratado neste trabalho mais a frente, esse número é irracional. O segundo termo nessa soma trata-se do número Euler, que faz parte da matemática moderna desde, aproximadamente, 1727 e surgiu do estudo dos logaritmos neperianos, a saber, do estudo da curva de $f(x) = \frac{1}{x}$, que é motivado por problemas na economia da época. Sua aproximação é 2,71, no entanto, como será visto ao longo deste TCC, esse número é irracional.

Pois bem, esses termos são conhecidos pelos estudantes desde o ensino básico, sendo assim, a soma não é algo difícil de se conceber, no entanto, não se sabe se ela é racional ou não até os dias atuais. Um dos meios que o leitor pode ser tentado a seguir nesse problema é o fato de que o número de Euler é obtido pela série $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!}$ e pelo limite $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$, e o número π também pode ser obtido por meio da integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}$. Dessa forma, pode-se abordar o problema com a análise, ou seja, uma abordagem por esse caminho pode ser tentadora por estar ao alcance das poderosas ferramentas da análise, no entanto, até então nenhum matemático conseguiu obter êxito na solução do presente problema. Reforçando, assim, que apesar dos pré-requisitos serem elementares, ele surge como uma intrigante "ilusão de facilidade".

Podemos definir os números transcendentes como os números não algébricos. Por sua vez, definimos os números algébricos como os números que são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros. O conjunto desses polinômios será denotado por $\mathbb{Z}[x]$. Vejamos, os inteiros são raízes de uma equação do tipo $x + a = b$, os racionais são raízes de uma equação do tipo $bx = a$, alguns irracionais são raízes de uma equação do tipo $x^n = b$, $b \geq 0$ não sendo um quadrado perfeito. E alguns números complexos são raízes da equação $xx = -b$, etc. Sendo assim, pela definição que fornecemos anteriormente, todos esses números citados até agora são algébricos. Pode valer a pena ressaltar, rapidamente, que todos os complexos com coeficientes inteiros são algébricos. Pode-se dizer, em linguagem informal, que quase todos os números são transcendentes, devido

à enumerabilidade do conjunto dos algébricos e à não-enumerabilidade do conjunto dos transcendentes, ou seja, supondo uma visão completa do plano complexo, ao se escolher um número aleatório, provavelmente seria um transcendente. Apesar de "quase todos"os números serem transcendentes, há muita dificuldade em provar a transcendência de um número, devido a falta de teoremas fundamentais na teoria analítica dos números, como existem em outras áreas. Ou seja, ao escolher um número aleatório no plano complexo, a dificuldade extraordinariamente maior seria provar sua transcendência ou não.

2 IRRACIONAIS E RACIONAIS

Neste capítulo, teremos uma seção dedicada somente às operações básicas entre números racionais e irracionais, isso foi feito para que o leitor seguisse uma linha intuitiva e se familiarizasse com os conceitos que regem os resultados desta parte do trabalho. Sendo assim, falaremos sobre a soma e o produto de racionais e irracionais, destacando que o resultado dessas operações envolvendo dois números não-nulos, um de cada conjunto citado, dará um número irracional. Bem como a soma e o produto de algébricos são algébricos, no entanto como já era de suspeitar, a soma e o produto de dois números irracionais pode resultar em um racional ou não. Por exemplo: $e + (-e) \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{3}.\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{3}.\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e $2.\pi \notin \mathbb{Q}$. Sendo assim, não existe um padrão geral envolvendo somente irracionais. Para representar a notação $mdc(m, n)$ será usada de agora em diante somente a notação (m, n), ou seja, $(m, n) = mdc$ entre m e n. Para iniciar as abordagens sobre esses números, seguem suas definições.

Definição 2.1 *Diz-se que um número real α é racional se ele pode ser escrito como uma fração $\frac{m}{n}$, sendo m e n inteiros e $n \neq 0$. E o conjunto dos números racionais é representado por $\mathbb{Q}$.*

Definição 2.2 *Diz-se que um número real α é irracional se ele não pode ser escrito como uma fração $\frac{m}{n}$, sendo m e n inteiros e $n \neq 0$.*

Observação 2.1 *Como não exite outra possibilidade, o conjunto dos números reais é a união do conjunto dos racionais e irracionais.*

2.1 OPERAÇÕES ENVOLVENDO RACIONAIS E IRRACIONAIS

Nossa intenção, agora, será a de obter alguns resultados simples ou até imediatos sobre operações entre racionais e irracionais, resultados esses que são essenciais mais adiante.

Proposição 2.1 *A soma e o produto de números racionais são racionais.*

Demonstração: Sejam α e β números racionais, então existem inteiros m, n, p e q tais que

$$\alpha = \frac{m}{n}, (m, n) = 1 \text{ e } \beta = \frac{p}{q}, (p, q) = 1.$$

Soma: $\alpha + \beta = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq}$, ou seja, racional.
Produto: $\alpha \cdot \beta = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$, ou seja, racional. ■

Proposição 2.2 *A soma e o produto de um número racional, não nulo, por um irracional são irracionais.*

Demonstração: Tomemos o mesmo α anterior, ou seja, $\alpha = \frac{m}{n}, (m, n) = 1$ e um irracional γ. Temos

Para o produto: Suponha que $\alpha \cdot \gamma \in \mathbb{Q}$, então existem $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\alpha \cdot \gamma = \frac{x_1}{y_1} \Rightarrow \frac{m}{n} \cdot \gamma = \frac{x_1}{y_1} \Rightarrow \gamma = \frac{n \cdot x_1}{m \cdot y_1},$$

o que é uma contradição, pois $\gamma \notin \mathbb{Q}$.
Para a soma: Suponha que $\alpha + \gamma \in \mathbb{Q}$, então existem $x_3, y_3 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\alpha + \gamma = \frac{x_3}{y_3} \Rightarrow \gamma = \frac{x_3}{y_3} - \frac{m}{n} = \frac{n \cdot x_3 - m \cdot y_3}{n \cdot y_3},$$

o que é uma contradição, pois $\gamma \notin \mathbb{Q}$. ■

2.2 ALGUMAS RAÍZES IRRACIONAIS

Começaremos a apresentar alguns resultados sobre irracionalidade de alguns números propriamente ditos. Partiremos com um resultado que é visto no ensino básico, ou seja, a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

Proposição 2.3 *$\sqrt{2}$ é irracional.*

Demonstração: Suponha que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, então existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}\ ,\ (p, q) = 1.$$

Note que $q \neq 1$, pois caso contrário, $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$.
Temos

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2.$$

Por essa última parte, concluímos que p^2 é par.
No entanto, o quadrado de um número só é par, se o próprio número for par. Dessa forma podemos escrever $p = 2k, k\ \in \mathbb{Z}$.
Temos

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2^2k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2.$$

Por essa última equação, concluímos que q^2 é par. Podemos concluir, pelos argumentos anteriores, que isso implica que q é par. Dessa forma concluímos que p e q são ambos pares. Isso é um absurdo, pois $(p, q) = 1$. ■
Seguindo a mesma linha de raciocínio do resultado anterior, temos o mesmo resultado referente a $\sqrt{3}$.

Proposição 2.4 *$\sqrt{3}$ é irracional.*

Demonstração: Suponha que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, então existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}\ ,\ (p, q) = 1.$$

Note que $q \neq 1$, pois caso contrário, $\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$.
Temos

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow 3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 3 \mid p^2.$$

No entanto, como todos os expoentes do primos da fatoração de p^2 são pares e 3 está entre esses primos, concluímos que seu expoente também é par, ou seja

$$3 \mid p^2 \Rightarrow 3 \mid p.$$

Dessa forma, $p = 3k, k \in \mathbb{Z}$.
Temos

$$p^2 = 3q^2 \Rightarrow 3^2k^2 = 3q^2 \Rightarrow 3k^2 = q^2.$$

Portanto $3 \mid q^2$, mas, como visto anteriormente, isso implica que $3 \mid q$. Sendo assim, concluímos que $3 \mid p$ e $3 \mid q$. Isso é um absurdo, pois $(p, q) = 1$. ■

Podemos generalizar os resultados anteriores para a soma $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, como mostra o próximo resultado.

Proposição 2.5 *$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ é irracional.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{3} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ tais que

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{m}{n}, (m, n) = 1.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{m}{n} &\Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \frac{m\sqrt{3} - m\sqrt{2}}{n} \\
&\Rightarrow n = m\sqrt{3} - m\sqrt{2} \\
&\Rightarrow n + m\sqrt{2} = m\sqrt{3} \\
&\Rightarrow (n + m\sqrt{2})^2 = (m\sqrt{3})^2 \\
&\Rightarrow n^2 + 2nm\sqrt{2} + 2m^2 = 3m^2 \\
&\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{3m^2 - n^2 - 2m^2}{2mn} = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.
\end{aligned}$$

Isso implica que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, que é um absurdo, pois, como visto anteriormente, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

■

Usando os mesmos métodos do teorema anterior, temos o resultado semelhante que segue.

Proposição 2.6 *$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ é irracional.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{3} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ tais que

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{m}{n}, (m, n) = 1.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}-\sqrt{2}=\frac{m}{n} &\Rightarrow (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\frac{m\sqrt{3}+m\sqrt{2}}{n}\\
&\Rightarrow n=m\sqrt{3}+m\sqrt{2}\\
&\Rightarrow n-m\sqrt{3}=m\sqrt{2}\\
&\Rightarrow (n-m\sqrt{3})^2=(m\sqrt{2})^2\\
&\Rightarrow n^2-2nm\sqrt{3}+3m^2=2m^2\\
&\Rightarrow \sqrt{3}=\frac{-3m^2-n^2+2m^2}{-2mn}=\frac{m^2+n^2}{2mn}.
\end{aligned}$$

Isso implica que $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$, que é um absurdo, pois, como visto anteriormente, $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$.

■

Na linha de generalização dos casos anteriores, temos o seguinte resultado, que começa a usar o conceito de número primo.

Proposição 2.7 *Se p natural for primo, então $\sqrt{p}$ é irracional.*

Demonstração: Suponha que $\sqrt{p}\in\mathbb{Q}$, então existem $p,q\in\mathbb{Z}$ tais que

$$\sqrt{p}=\frac{m}{n}\ ,\ (m,n)=1.$$

Note que $n\neq 1$, pois caso contrário, $\sqrt{p}\in\mathbb{Z}$, isso implica que p é um quadrado perfeito, ou seja, existiria $k\in\mathbb{Z}$ tal que $p=k^2$. Por sua vez, isso implicaria que $k\mid p$, isso não pode acontecer, pois p é primo.

Temos

$$\sqrt{p}=\frac{m}{n}\Rightarrow p=\frac{m^2}{n^2}\Rightarrow p\mid m^2.$$

Por p ser primo, note que para ele estar entre os fatores de m^2, necessariamente, ele deve estar entre os fatores de m. Pois todos os fatores primos de m^2 têm expoentes pares e p é primo, ou seja, seu expoente é par. Dessa forma, $p\mid m$. Temos que existe $g\in\mathbb{Z}$ tal que $m=pg$, disso segue que

$$n^2p=m^2\iff n^2p=p^2g^2\iff n^2=pg^2\Rightarrow p\mid n^2.$$

Por argumentos anteriores, podemos concluir que $p\mid n$. Então $p\mid m$ e $p\mid n$. Isso é um absurdo, pois $(m,n)=1$.

■

Usando os métodos das proposições anteriores, temos o próximo resultado sobre a irracionalidade da soma de raízes de primos.

Teorema 2.1 *$\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}$ é irracional, sendo p_1 e p_2 números primos.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}\in\mathbb{Q}$, então existem $m,n\in\mathbb{Z}$ e

n $\neq 0$ tais que

$$\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} = \frac{m}{n}, (m, n) = 1.$$

Temos

$$\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} = \frac{m}{n} \Rightarrow (\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2})(\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2}) = \frac{m\sqrt{p_1} - m\sqrt{p_2}}{n} \Rightarrow$$

$$n(p_1 - p_2) = m\sqrt{p_1} - m\sqrt{p_2} \Rightarrow n(p_1 - p_2) + m\sqrt{p_2} = m\sqrt{p_1} \Rightarrow$$

$$[n(p_1 - p_2) + m\sqrt{p_2}]^2 = (m\sqrt{p_1})^2 \Rightarrow n^2(p_1 - p_2)^2 + 2nm(p_1 - p_2)\sqrt{p_2} + m^2p_2 = m^2p_1 \Rightarrow$$

Caso $p_1 \neq p_2$:

$$\sqrt{p_2} = \frac{m^2p_1 - m^2p_2 - n^2(p_1 - p_2)^2}{2mn(p_1 - p_2)}.$$

Isso implica que $\sqrt{p_2} \in \mathbb{Q}$, que é um absurdo, pois como visto anteriormente, $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$, sendo p primo qualquer.
Caso $p_1 = p_2$: é simples, pois $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} = 2\sqrt{p_2}$, que é irracional, pela Proposição 2.2.
Portanto, fica demonstrado o resultado procurado. ■

Observação 2.2 *Através dessas últimas 3 proposições, podemos obter generalizações sobre a soma e diferença de raízes irracionais. Seguindo o mesmo caminho, podemos concluir que* $\sqrt{p_1} - \sqrt{p_2} \notin \mathbb{Q}$, *sendo* p_1 *e* p_2 *primos e* $p_1 \neq p_2$.

Voltamos a um resultado mais simples, mas, que garante chegar a conclusão de que a raiz de um número natural ou é inteiro ou irracional.

Proposição 2.8 *A raiz quadrada de um número natural que não é um quadrado perfeito é irracional.*

Demonstração: Dado p natural que não seja um quadrado perfeito, ou seja, na sua decomposição em primos, existe um primo p_1 tal que seu expoente não seja par. Note que $p \neq 1$, pois os expoentes de 1 são todos nulos, ou seja, pares.
Suponha que existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\sqrt{p} = \frac{n}{m} \; ; \; (m, n) = 1.$$

Veja que $m \neq 1$, pois caso contrário, $\sqrt{p} \in \mathbb{Z}$, ou seja, p seria um quadrado perfeito.
Assim

$$p = \frac{n^2}{m^2}.$$

Isso implica que $m^2 \mid n^2$, no entanto, isso não pode acontecer pois os fatores primos que aparecem na fatoração de m são os mesmos que aparecem em m^2. O mesmo acontece com o caso de n e n^2. Como não existem primos em comum entre n e m, não existirão primos em comum entre n^2 e m^2. Ou seja, $(m, n) = 1 \Rightarrow (m^2, n^2) = 1$.
Portanto, chegamos a um absurdo ao supormos que $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$. ■

2.3 IRRACIONALIDADE DE e

O número de Euler, representado pela letra e, é uma constante matemática cuja aproximação é 2,71828. Ele é a base dos logaritmos naturais e surge naturalmente em diversas áreas da matemática, como no cálculo, na análise e na teoria dos números. Seu valor pode ser obtido por meio do limite $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. O número e foi descoberto no século XVII, inicialmente em estudos sobre juros compostos, onde aparece ao descrever o crescimento exponencial. Jacob Bernoulli foi um dos primeiros a observar sua presença ao estudar o problema de crescimento em taxas contínuas. Posteriormente, Leonhard Euler formalizou sua importância e usou extensivamente em seus trabalhos, consolidando-a como uma constante fundamental na matemática moderna. O e tem aplicações que vão muito além da matemática pura, recorrentemente representada pela Análise. Ele está presente em áreas como Física, Biologia e Economia. É essencial para descrever fenômenos de crescimento contínuo, como o crescimento populacional, a desintegração radioativa e a propagação de doenças. Na Análise, a função e^x é especial, pois é sua própria derivada, o que a torna uma ferramenta poderosa quando se trata de resolver equações diferenciais.

A seguir, será mostrado se tratar de um número irracional. Para isso, a seguinte demonstração se mostrou ser a mais simples sobre a irracionalidade de e. Sua autoria é creditada a Fourier em 1815. Essa versão foi baseada na versão que se encontra no livro "Teoria dos números transcendentes"cujo autor é o saudoso pesquisador (MARQUES, 2013), com quem tive o prazer de trocar algumas mensagens a algum tempo.

Teorema 2.2 *O número de Euler, e, é irracional.*

Demonstração: Como $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$, dado $m\in\mathbb{N}$, temos

$$0<m!e-\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m!}{(m+k)!},$$

note que $\binom{m+k}{k}\geq m, \forall k\geq 1$. Dessa forma,

$$\frac{(m+k)!}{k!m!}\geq m \Rightarrow \frac{m!}{(m+k)!}\leq\frac{1}{mk!},$$

sendo assim,

$$0<m!e-\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!}\leq\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{e-1}{m}. \tag{1}$$

Suponha que e é racional $e=\frac{p}{q}$ com denominador $q\geq 2$, assim, $\frac{e-1}{q}<1$. Pela condição $e\in\mathbb{Q}$, tem-se que $eq!\in\mathbb{Z}$. Portanto, da equação (1), obtemos que $eq!-\sum_{k=1}^{q}\frac{q!}{k!}$ é inteiro entre 0 e 1. Isso é um absurdo, vindo da suposição de que e é racional, portanto, essa

suposição é falsa e e é irracional. ■

2.4 IRRACIONALIDADE DE π.

O número π é uma constante fundamental na Matemática, definida como a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, cuja aproximação é 3,14159. É um número irracional, ou seja, não pode ser expresso como a fração entre dois inteiros. O número π é conhecido desde a Antiguidade. Civilizações como os babilônios e os egípcios já utilizavam suas aproximações em seus cálculos. No entanto, foi o matemático grego Arquimedes que, no século III a.C., desenvolveu um método mais preciso para calcular o valor de π, utilizando polígonos inscritos e circunscritos a um círculo, isso utilizando um breve noção de limite. Com o avanço da matemática, o número π foi estudado por diversos matemáticos, como Ludolph van Ceulen, que calculou com 35 casas decimais no século XVI, e foi popularizado por seu símbolo, introduzido por William Jones em 1706 e amplamente adotado por Leonhard Euler, um dos fundadores da Matemática moderna. O número π é essencial em diversas áreas da Matemática e ciências aplicadas. Ele surge em fórmulas que descrevem fenômenos naturais e processos físicos, como no cálculo de áreas e volumes de figuras geométricas relacionadas a círculos e esferas, nas equações do movimento ondulatório, e até na teoria da relatividade. Além disso, está presente em métodos estatísticos, Teoria dos números e Análise matemática.

Segue agora a demonstração de sua irracionalidade de π. Para isso partiremos de uma função estratégica que possui propriedades que serão úteis ao longo da demonstração.

Considere a função

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

sendo n um número inteiro não negativo.

Lema 2.1 *Sendo $D^k f$ a k-ésima derivada de f, $D^k f(0)$ é um inteiro, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Partiremos da fórmula de Leibniz para derivadas de um produto de funções g e h,

$$D^k(gh) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j g D^{k-j} h.$$

Note que podemos colocar $f(x) = g(x)h(x)$, sendo $g(x) = \frac{x^n}{n!}$ e $h(x) = (1-x)^n$.
Aplicando a fórmula de Leibniz:

$$D^k f = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j \left(\frac{x^n}{n!}\right) D^{k-j}(1-x)^n = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j(x^n) D^{k-j}(1-x)^n.$$

Note que tanto $D^j x^n$ quanto $D^{k-j}(1-x)^n$ são inteiros para $x = 0$, independentemente de k.

De fato, tem-se

$$D^j[x^n]_{|_{x=0}} = \begin{cases} 0, \text{ se } j < n \\ n!, \text{ se } j = n \\ 0, \text{ se } j > n. \end{cases}$$

e

$$D^j[(1-x)^n]_{|_{x=0}} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-j)!}(-1)^j, \text{ se } j < n \\ n!(-1)^n, \text{ se } j = n \\ 0, \text{ se } j > n. \end{cases}$$

Note que esses valores são sempre inteiros. Substituindo esses casos, temos

$$D^k f(x)_{|_{x=0}} = \begin{cases} 0, \text{ se } k < n \\ \frac{1}{n!}n! = 1, \text{ se } k = n. \\ \frac{1}{n!}\binom{k}{j}n!D^{k-n}(1-x)^n{}_{|_{x=0}} = \binom{n}{k} \cdot D^{k-n}(1-x)^n{}_{|_{x=0}}, \text{ se } k > n. \end{cases}$$

Sabendo que os coeficientes binomiais e $D^{k-n}(1-x)^n{}_{|_{x=0}}$ são inteiros, a demonstração está finalizada. ■

Lema 2.2 *$D^k f(1)$ é um inteiro, $k \in \mathbb{Z}^+$.*
Demonstração: Note que

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^n(x)^n}{n!} = f(x)$$

então

$$D^k f(1-x) = D^k f(x)$$

de onde segue

$$D^k f(1-x)_{|_{x=0}} = D^k f(x)_{|_{x=0}}$$

sendo assim,

$$D^k f(x)_{|_{x=1}} = D^k f(x)_{|_{x=0}}.$$

Pelo lema anterior, temos o resultado de que $D^k f(1)$ também é inteiro. ■

Teorema 2.3 *π é irracional.*
Demonstração: Suponha o contrário, ou seja, $\pi \in \mathbb{Q}$. Note que $\pi \in \mathbb{Q} \Rightarrow \pi^2 \in \mathbb{Q}$, sendo assim, se provarmos que $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$, então $\pi \notin \mathbb{Q}$. Suponha que $\pi^2 = \frac{p}{q}$.
Considere a função

$$F(x) = q^n\{\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}D^2f(x) + ... + (-1)^n D^{2n}f(x)\}$$

sendo $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

Veja que, pelos Lemas 2.1 e 2.2 e pela suposição $\pi^2 = \frac{p}{q}$, temos que $F(0)$ e $F(1)$ são inteiros, pois

$$\begin{aligned} F(0) &= q^n\{\pi^{2n}f(0) - \pi^{2n-2}D^2f(0) + ... + (-1)^nD^{2n}f(0)\} \\ F(0) &= p^nf(0) - p^{n-1}qD^2f(0) + ... + p^0q^nD^{2n}f(0). \end{aligned}$$

Como p^k e $q^k \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{Z}^+$, além disso, $D^kf(0) \in \mathbb{Z}$, o resultado segue. Além disso,

$$\begin{aligned} F(1) &= q^n\left\{\frac{p^n}{q^n}f(1) + \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}D^2f(1) + ... + (-1)^nD^{2n}f(1)\right\} \\ F(1) &= p^nf(1) + p^{n-1}qD^2f(1) + ... + (-1)^nq^nD^{2n}f(1). \end{aligned}$$

Pelo lema 2.2, concluímos que $F(1)$ também é inteiro.
Agora note que

$$\begin{aligned} \{F'(x)\text{sen}\,\pi x - \pi F(x)\cos\pi x\}' &= F''(x)\text{sen}\,\pi x + \pi^2F(x)\text{sen}\,\pi x \\ \{F'(x)\text{sen}\,\pi x - \pi F(x)\cos\pi x\}' &= sen\pi x\{F''(x) + \pi^2F(x)\}. \end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} F''(x) + \pi^2F(x) &= q^n\{\pi^{2n}D^2f(x) - \pi^{2n-2}D^4f(x) + ... + (-1)^nD^{2n+2}f(x)\} \\ &\quad +q^n\{\pi^{2n+2}f(x) - \pi^{2n}D^2f(x) + ... + (-1)^nD^{2n}\pi^2f(x)\} \\ &= q^n\{\pi^{2n+2}f(x) + (-1)^nD^{2n+2}\pi^2f(x)\} \end{aligned}$$

$$F''(x) + \pi^2F(x) = q^n\pi^{2n+2}f(x),$$

pois $D^{2n+2}\pi^2f(x) = 0$, já que $D^kx^n = 0$, se $k > n$. Portanto

$$\begin{aligned} F''(x) + \pi^2F(x) &= q^n\frac{p^{2n+2}}{q^{2n+2}}f(x) \\ F''(x) + \pi^2F(x) &= p^n\pi^2f(x). \end{aligned}$$

Portanto

$$\{F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x\}' = p^n\pi^2f(x)sen\pi x.$$

Pelo Teorema fundamental do cálculo, temos

$$\begin{aligned} \pi^2p^n\int_0^1 f(x)sen\pi x\,dx &= F'(1)sen\pi - \pi F(1)cos\pi - F'(0)sen0 + \pi F(O)cos0 \\ \pi^2p^n\int_0^1 f(x)sen\pi x\,dx &= \pi F(1) + \pi F(0). \end{aligned}$$

Portanto

$$\pi p^n \int_0^1 f(x) sen\pi x \, dx = F(1) + F(0),$$

ou seja, essa integral resulta em um inteiro.
Note que para $0 < x < 1$, temos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!} \Rightarrow 0 < \pi p^n \int_0^1 f(x) sen\pi x \, dx < \pi p^n \int_0^1 \frac{sen\pi x}{n!} \, dx.$$

Portanto

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x) sen\pi x \, dx < \frac{\pi p^n}{n!} \int_0^1 sen\pi x \, dx.$$

Como

$$\int_0^1 sen\pi x \, dx = \frac{2}{\pi},$$

então

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x) sen\pi x \, dx < \frac{2p^n}{n!}.$$

Como esse n é arbitrário, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2p^n}{n!} = 0 \Rightarrow \exists \overline{n} \in \mathbb{N}; \frac{2p^{\overline{n}}}{\overline{n}!} < 1.$$

Portanto, teremos

$$0 < \pi p^{\overline{n}} \int_0^1 f(x) sen\pi x \, dx < \frac{2p^{\overline{n}}}{\overline{n}!} < 1.$$

Por essa integral ser um número inteiro, teremos um inteiro entre 1 e 0, que é um absurdo. Portanto, π^2 é irracional, que implica que π é irracional.

■

3 TRANSCENDENTES E ALGÉBRICOS

Os números algébricos e os números transcendentes são duas categorias fundamentais na teoria dos números, classificando os números complexos com base em suas relações com equações polinomiais de coeficientes inteiros. O conceito de números algébricos remonta à Antiguidade, com estudos de raízes quadradas e cúbicas, que já eram uma dor de cabeça para a época, por se tratarem, às vezes, de números com dízima não periódica, ou seja, os irracionais já davam conta de provocar problemas, então o contato com algo não algébrico seria inconcebível para essa época.

Já os números transcendentes só começaram a ser formalmente investigados no século XVII, com o avanço da Análise. Charles Hermite provou em 1873 que e é transcendental. Em 1882, Ferdinand von Lindemann estabeleceu que π também é transcendental, resolvendo o problema da quadratura do círculo. Os números algébricos são fundamentais na álgebra e na geometria, especialmente no estudo de estruturas algébricas e em problemas clássicos como soluções de equações polinomiais. Os números transcendentes, por sua vez, surgem, por exemplo, na demonstração da impossibilidade de certos problemas geométricos, como a duplicação do cubo e a trissecção do ângulo.

Nesse capitulo serão introduzidos alguns resultados sobre transcendência de números. Aqui o leitor encontrará uma demonstração sobre a existência dos números transcendentes, a saber, números que não são raízes de polinômios com coeficientes inteiros, sendo assim, pode-se dizer que eles escapam das operações elementares, daí o termo transcendentes. Bem como encontrará proposições e teoremas sobre conceitos básicos sobre as operações entre números algébricos e transcendentes, as quais serão usadas fortemente durante esse capítulo. Encontrará, também, uma série de proposições fundamentais sobre as operações entre números transcendentes e algébricos, e encontrará os teoremas que tratam das transcendências dos números π e e.

Definição 3.1 *Definimos um número complexo como algébrico se ele é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, ou seja, um polinômio em $\mathbb{Z}[x]$. A notação $\mathbb{Z}[x]$ será usada para representar o conjunto dos polinômios na variável x e com coeficientes em $\mathbb{Z}$.*

Dessa definição, pode-se ver que, por exemplo, $\sqrt{2}$ é algébrico pois é raiz do polinômio de coeficientes inteiros $p(x) = x^2 - 2$ e é irracional, como já visto nesse trabalho. Além disso, todos os números racionais são algébricos, pois dado um racional $\frac{m}{n}$ é raiz do polinômio $p(x) = nx - m$.

Definição 3.2 *Definindo o complementar complexo dos algébricos, temos o conjunto dos números transcendentes, números que não são raízes de um polinômio com coeficientes inteiros. Para simplificar, o conjunto dos números transcendentes poderá ser denotado por $\mathbb{T}$, quando necessário.*

Observação 3.1 *Pelo dito após a definição anterior, todo número real transcendente é irracional.*

3.1 A EXISTÊNCIA DE NÚMEROS TRANSCENDENTES

Nesta seção, exploraremos a enumerabilidade do conjunto dos números algébricos e sua relação com os números transcendentes. Inicialmente, demonstraremos que os números algébricos formam um conjunto enumerável, estabelecendo uma correspondência com os polinômios de coeficientes inteiros. Em seguida, discutiremos a não enumerabilidade dos números transcendentes, tanto reais quanto complexos, destacando a implicação dessa propriedade no contexto da bijeção $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$. Por fim, concluiremos que o conjunto dos números transcendentes é não enumerável, reforçando a distinção fundamental entre esses dois subconjuntos dos números complexos.

Definição 3.3 *Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.*

Teorema 3.1 *O conjunto dos números algébricos, representado por $\mathbb{A}$, é enumerável.*

Demonstração: Considere $\mathbb{Z}[x]$ como o conjunto dos polinômios p, com coeficientes inteiros, na variável x e grau n. Defina

$$\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Z}[x]$$

dado por

$$\phi(a_0, a_1, ..., a_n) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n.$$

Note que ϕ se trata de uma bijeção. Mas $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}^*$ é um produto cartesiano de enumeráveis, portanto, enumerável. Por ϕ ser uma bijeção, X_n também é enumerável. Dado um polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, denotamos o conjunto das raízes de p por $\mathcal{R}_p$. Veja que $\mathcal{R}_p$ tem, no máximo, n elementos, pelo Teorema Fundamental da álgebra. Dessa forma, podemos definir

$$A_n = \bigcup_{\partial p = n} \mathcal{R}_p$$

Veja que se trata de uma união enumerável de uma união enumerável de conjuntos finitos, portanto, A_n é enumerável. No entanto, pela definição de números algébricos, temos

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Veja que temos uma união enumerável de enumeráveis, que é enumerável.

■

Observação 3.2 *Veja que acabamos de concluir que, fixado um grau n, existe uma quantidade enumerável de polinômios $\mathbb{Z}[x]$ com esse grau.*

Observação 3.3 *Mostraremos, a seguir, que os transcendentes reais são não enumeráveis, disso consequentemente, também não o serão nos complexos pois os reais são subconjunto de* $\mathbb{C}$*, portanto, se os transcendentes reais são não enumeráveis, então o conjunto dos transcendentes complexos também não o serão.*

Corolário 3.1 *O conjunto dos números transcendentes é não enumerável.*

Demonstração: Sabemos que a união de enumeráveis é enumerável. Vendo que $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$, sabendo que $\mathbb{R}$ é não enumerável e $\mathbb{A}$ é enumerável, o resultado é que $\mathbb{T}$ é não enumerável. Dessa forma, podemos concluir que existem mais números transcendentes que algébricos. ■

3.2 RESULTADOS INICIAIS ENTRE NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

De maneira semelhante ao que fizemos no capítulo 2 com os irracionais, agora começaremos com alguns resultados interessantes envolvendo números algébricos e transcendentes.

Proposição 3.1 *Se* A *é algébrico, então o inverso* A^{-1} *é algébrico.*

Demonstração: Se A algébrico, então é raiz de um polinômio do tipo

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x].$$

Disso, temos

$$a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação por A^{-n}, temos

$$a_o A^{-n} + a_1 A^{-(n-1)} + ... + a_{n-1}A^{-1} + a_n = 0.$$

Sendo assim, podemos verificar que A^{-1} é raiz do polinômio

$$P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Z}[x].$$

Dessa forma, A algébrico implica A^{-1} também algébrico. ■

Proposição 3.2 *Se* T *é transcendente e* A *é algébrico, então o produto* $T \cdot A$ *é transcendente.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $T \cdot A$ seja algébrico. Teremos

$$T \cdot A = b,\ b \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Por estarmos nos complexos, existe o inverso multiplicativo de A, que também é algébrico,

pela proposição 3.1. Temos então

$$A^{-1} \cdot A \cdot T = A^{-1} \cdot b \implies T = A^{-1} \cdot b.$$

Note que o produto de algébricos é algébrico, pela Proposição 3.6. Sendo assim, $A^{-1} \cdot b$ é algébrico. Com isso, temos um absurdo nessa igualdade, pois $T \in \mathbb{T}$, por hipótese.

■

Proposição 3.3 *Se T é transcendente, então o inverso T^{-1} é transcendente.*
Demonstração: Suponha, por absurdo, que T^{-1} seja algébrico, então $T^{-1} \cdot T$ será transcendente, pela Proposição 3,2.No entanto

$$T^{-1} \cdot T = 1,$$

o que é um absurdo, pois 1 é algébrico. Portanto, o inverso de um transcendente é também, transcendente. ■

Proposição 3.4 *Se A_1 e A_2 são algébricos, então a soma $A_1 + A_2$ é um número algébrico.*
Demonstração: Sendo A_1 e A_2 números algébricos, então são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros. Podemos dividir ambos os lados das equações pelos seus respectivos coeficientes líderes e chegamos, respectivamente a

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0 \tag{2}$$

e

$$x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x + b_0 = 0. \tag{3}$$

Por A_1 ser raiz de (2), temos

$$A_1^n = -a_{n-1}A_1^{n-1} - ... - a_1A_1 - a_0, \tag{4}$$

ou seja, podemos escrever A_1^n como combinação linear de $A_1^0, A_1^1, A_1^2, ..., A_1^{n-1}$ de coeficientes racionais. Multiplicando (4) por A_1, teremos A_1^{n+1} também como combinação de linear de $A_1^0, A_1^1, A_1^2, ..., A_1^{n-1}$ de coeficientes racionais. De fato, teremos

$$A_1^{n+1} = -a_{n+1}A_1^n - ... - a_1A_1^2 - a_0A_1, \tag{5}$$

No entanto, por A_1^n ser combinação linear de $A_1^0, A_1^1, A_1^2, ..., A_1^{n-1}$ de coeficientes racionais, podemos substituir A_1^n por sua é combinação de linear na equação (5) concluir que A_1^{n+1} é combinação de linear de $A_1^0, A_1^1, A_1^2, ..., A_1^{n-1}$ de coeficientes racionais. Sendo assim, podemos escrever qualquer potência $A_1^i, i \geq n$, como combinação linear de $A_1^0, A_1^1, A_1^2, ..., A_1^{n-1}$

com coeficientes racionais. Analogamente, como A_2 é raiz de (3), podemos escrever qualquer potência $A_2^j, i \geq m$, como combinação linear de $A_2^0, A_2^1, A_2^2, ..., A_2^{m-1}$ usando coeficientes racionais. Considere os $mn+1$ números abaixo:

$$1, (A_1 + A_2), (A_1 + A_2)^2, ..., (A_1 + A_2)^{mn} \tag{6}$$

e considere, também o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado por

$$B = \{A_1^i A_2^j; 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}.$$

Note que B possui mn elementos, então sua base tem dimensão $dimB \leq mn$, sendo assim, os $mn+1$ elementos em (5) são LD.
Portanto existem racionais $r_0, r_1, ..., r_{mn}$ tais que

$$r_0 + r_1(A_1 + A_2)^1 + r_2(A_1 + A_2)^2 + ... + r_{mn}(A_1 + A_2)^{mn} = 0.$$

O que mostra que $(A_1 + A_2)$ satisfaz uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais, sendo assim, podemos multiplicar pelo mmc de todos os denominadores desses coeficientes e obteremos uma equação polinomial de coeficientes inteiros. ■

Proposição 3.5 *Se T é transcendente real e A é algébrico, então a soma $T + A$ é transcendente.*
Demonstração: Suponha, por absurdo, que $T + A$ seja algébrico. Então existe um polinômio $P(x)$ tal que $T + A$ é raiz de P.
Suponha

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

sendo assim, P possui m raízes reais, $m \leq n$. Temos pela relação de Girard:

$$(T + A) + r_1 + r_2 + ... + r_{m-1} = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$T = -(r_1 + r_2 + ... + r_{m-1}) - A - \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Note que do lado esquerdo da equação temos T, transcendente. Porém, do lado direito temos uma soma de algébricos, pois as raízes são algébricos, A é algébrico e $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ é racional, portanto, algébrico. Como a soma de algébricos resulta em um algébrico, chegamos em um absurdo. Portanto, $T + A$ é transcendente. ■

Proposição 3.6 *Se A_1 e A_2 são algébricos, então o produto $A_1 \cdot A_2$ é um número algébrico.*
Demonstração: Sendo A_1 e A_2 números algébricos, então são raízes de equações polinomiais com coeficientes inteiros. Podemos dividir ambos os lados das equações pelos seus

respectivos coeficientes líderes e chegamos, respectivamente a

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0 \tag{7}$$

e

$$x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1x + b_0 = 0. \tag{8}$$

Por A_1 ser raiz de (7), temos

$$A_1^n = -a_{n-1}A_1^{n-1} - ... - a_1A_1 - a_0, \tag{9}$$

ou seja, podemos escrever A_1^n como combinação linear de $A_1^0, A_1^1, A_1^2, ..., A_1^{n-1}$ de coeficientes racionais. Multiplicando (9) por A_1, teremos A_1^{n+1} também como combinação de linear de $A_1^0, A_1^1, A_1^2, ..., A_1^{n-1}$ de coeficientes racionais. De fato, teremos

$$A_1^{n+1} = -a_{n+1}A_1^n - ... - a_1A_1^2 - a_0A_1. \tag{10}$$

No entanto, por A_1^n ser combinação linear de $A_1^0, A_1^1, A_1^2, ..., A_1^{n-1}$ de coeficientes racionais, podemos substituir A_1^n por sua é combinação de linear na equação (10) concluir que A_1^{n+1} é combinação de linear de $A_1^0, A_1^1, A_1^2, ..., A_1^{n-1}$ de coeficientes racionais. Sendo assim, podemos escrever qualquer potência $A_1^i, i \geq n$, como combinação linear de $A_1^0, A_1^1, A_1^2, ..., A_1^{n-1}$ com coeficientes racionais. De forma semelhante, como A_2 é raiz de (8), podemos escrever qualquer potência $A_2^j, i \geq m$, como combinação linear de $A_2^0, A_2^1, A_2^2, ..., A_2^{m-1}$ usando coeficientes racionais. Considere os $mn + 1$ números abaixo:

$$1, (A_1 \cdot A_2), (A_1 \cdot A_2)^2, ..., (A_1 \cdot A_2)^{mn} \tag{11}$$

e considere, também o espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ gerado por

$$B = \{A_1^iA_2^j; 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}.$$

Note que B possui mn elementos, então sua base tem dimensão $dimB \leq mn$, sendo assim, os $mn + 1$ elementos em (10) são LD.
Então existem racionais $r_0, r_1, ..., r_{mn}$ tais que

$$r_0 + r_1(A_1 \cdot A_2)^1 + r_2(A_1 \cdot A_2)^2 + ... + r_{mn}(A_1 \cdot A_2)^{mn} = 0.$$

O que mostra que $(A_1 + A_2)$ satisfaz uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais, sendo assim, podemos multiplicar pelo mmc de todos os denominadores desses coeficientes e obteremos uma equação polinomial de coeficientes inteiros. ■

Proposição 3.7 *Se T_1 e T_2 são transcendentes, então $T_1 + T_2$ ou $T_1 - T_2$ não são, ambos*

algébricos.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $T_1 + T_2$ e $T_1 - T_2$ sejam algébricos, então existem polinômios com coeficientes inteiros $P(x)$ e $Q(x)$ tais que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

sendo $T_1 + T_2$ uma raiz.

e

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0,$$

sendo $T_1 - T_2$ uma raiz.

O polinômio $P(x)$ possui k raízes reais, $k \leq n$. Da mesma forma, o polinômio $Q(x)$ possui j raízes reais, $j \leq m$. Dessa forma, podemos estabelecer a relação de Girard para cada um dos polinômios:

$$(T_1 + T_2) + r_1 + r_2 + ... + r_{k-1} = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

e

$$(T_1 - T_2) + s_1 + s_2 + ... + s_{j-1} = \frac{-b_{m-1}}{b_m}.$$

Podemos, agora somar essas duas equações:

$$(T_1 + T_2) + (T_1 - T_2) + r_1 + r_2 + ... + r_{k-1} + s_1 + s_2 + ... + s_{j-1} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{b_{m-1}}{b_m}.$$

De onde temos

$$2T_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{b_{m-1}}{b_m} - r_1 - r_2 - ... - r_{k-1} - s_1 - s_2 - ... - s_{j-1}.$$

Ou seja

$$T_1 = \frac{1}{2}(-\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{b_{m-1}}{b_m} - r_1 - r_2 - ... - r_{k-1} - s_1 - s_2 - ... - s_{j-1}).$$

Note que do lado esquerdo da equação temos T_1, que é transcendente. No entanto, do lado direito temos uma soma de raízes, que são algébricos, e racionais, que também são algébricos. Dessa forma, chegamos a um absurdo. Portanto, existe um transcendente no conjunto $\{T_1 - T_2, T_1 + T_2\}$. ■

3.3 A TRANSCENDÊNCIA DE π

Para essa demonstração será utilizada como referência a demonstração apresentada pelo professor (DE FIGUEIREDO, 1969) que pode ser encontrada no livro "Números

irracionais e transcendentes".

As funções complexas são funções que associam a cada número complexo $z = x + iy$ (onde x e y são números reais e i é a unidade imaginária) um valor também complexo. Tais funções são a base do estudo da análise complexa e possuem algumas propriedades semelhantes às funções reais. A existência de derivadas, por exemplo. Uma função complexa $f(z)$ é dita analítica (ou holomorfa) em uma região do plano complexo se ela for derivável em cada ponto dessa região e se as suas derivadas forem contínuas. A condição de uma função ser analítica é mais forte do que a simples existência de derivada, e ela implica que a função pode ser representada por uma série de potências na série de Taylor em torno de qualquer ponto em sua região de definição. A derivada de uma função complexa, denotada por $f'(z)$, é definida de forma semelhante à derivada de funções reais, mas com a diferença crucial de que ela leva em conta tanto as variações na direção real quanto na direção imaginária. Para que uma função seja derivável no sentido complexo, ela deve satisfazer as equações de Cauchy-Riemann, um sistema de duas equações diferenciais que garantem que a função se comporta de maneira consistente e regular com a noção de derivada no plano complexo semelhante ao modo conhecido em $\mathbb{R}$. Sendo, assim, pode-se dizer que uma Função complexa é analítica se tem o melhor comportamento possível, ou seja, possui todas as derivadas de qualquer grau.

Definição 3.4 *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função dada por*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

onde $z = x + iy$, com $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sendo as partes real e imaginária de f.
Para que f seja derivável no sentido complexo, ela deve satisfazer as ***equações de Cauchy-Riemann****:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se essas equações forem satisfeitas em um ponto (x, y) e as derivadas parciais forem contínuas, então f é holomorfa nesse ponto.

Definição 3.5 *Formalmente, um número s é chamado de* ***supremo*** *de S, e escrevemos $s = \sup S$, se s é um* ***majorante*** *de S, ou seja, $x \leq s$ para todo $x \in S$. Além disso, s deve ser o* ***menor*** *dos majorantes, ou seja, para qualquer outro majorante m, vale $s < m$.*

Observação 3.4 *Se o supremo pertence ao próprio conjunto S, ele é chamado de máximo de S.*

Lema 3.1 *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica e sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Então*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq 2|z_2 - z_1| \sup\{|f'[z_1 + \lambda(z_2 - z_1)]|;\ 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

sendo $|z|$ representa o módulo do número complexo $z = x + yi$, isto é, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Demonstração: Considere u e v as partes real e imaginária de $f(z)$. Sendo $z_0 = x_0 + iy_0$, definimos as funções $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pelas expressões

$$\phi(\lambda) = u(\lambda x_0, \lambda y_0) \tag{12}$$

e

$$\psi(\lambda) = v(\lambda x_0, \lambda y_0). \tag{13}$$

Por f ser analítica, as funções u e v são deriváveis e consequentemente contínuas, então pode aplicar o teorema do valor médio em ψ e ϕ no intervalo $[0, 1]$. Temos

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\lambda_1), 0 < \lambda_1 < 1 \tag{14}$$

e

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\lambda_2), 0 < \lambda_2 < 1. \tag{15}$$

Usando o teorema de derivação de funções e as equações (12), (13), (14) e (15), temos

$$u(x_0, y_0) - u(0, 0) = u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0$$

e

$$v(x_0, y_0) - v(0, 0) = v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0.$$

Disso, obtemos

$$f(z_0) - f(0) = u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0 + i[v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0]. \tag{16}$$

Pela desigualdade triangular, tem-se

$$|z| \leq |x| + |y| \tag{17}$$

sendo o mesmo $z = x + yi$. E pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \tag{18}$$

sendo a_1, a_2, b_1 e b_2 reais quaisquer. Com as desigualdades (17) e (18), obtém-se de (16):

$$\begin{aligned} |f(z_0) - f(0)| \quad \leq \quad & \sqrt{u_x^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) + u_y^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0}\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ & + \sqrt{v_x^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)}\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{aligned} \tag{19}$$

usando as equações de Cauchy-Riemann, ou seja, $f'(z) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y)$, os radicais

em (19) são o módulo f' calculado em pontos específicos, logo

$$|f(z_0) - f(0)| \leq |f'(\lambda_1 z_0)||z_0| + |f'(\lambda_2) z_0||z_0|$$

de onde segue

$$|f(z_0) - f(0)| \leq 2|z_0| \sup\{|f'(\lambda z_0)|;\ 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

resultado segue aplicando à função $g(x) = f(z + z_1)$. ■

Lema 3.2 *Seja $f(t_1, ..., t_n)$ um polinômio simétrico de grau d, com coeficientes em $A \subset \mathbb{C}$. Então existe um polinômio $g(s_1, ..., s_n)$ de grau menor ou igual a d, com coeficientes em A, em que $s_1, s_1, ..., s_n$ são polinômios simétricos elementares (ou seja, com coeficientes em $\mathbb{Z}$) tal que*

$$f(t_1, ..., t_n) = g(s_1, ..., s_n).$$

Demonstração: A demonstração desse resultado pode ser encontrada em (Oliveira, 2013). ■

Lema 3.3 *Sendo $P(x) = \dfrac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} (R(x))^p$ polinômio de grau r, $R(x)$ também um polinômio com coeficientes inteiros e a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = P(x) + P'(x) + ... + P^r(x)$, nessas condições, tem-se*

$$\frac{d}{dx}[e^{-x} F(x)] = -e^{-x} P(x).$$

Demonstração: De fato, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[e^{-x} F(x)] &= (e^{-x})' F(x) + F(x)' e^{-x} \\
&= -e^{-x} F(x) + e^{-x} F(x)' \\
&= -e^{-x}[P(x) + P'(x) + ... + P^r(x)] + e^{-x}[P'(x) + P^{(2)}(x) + ... + P^{r+1}(x)] \\
&= e^{-x}[-P(x) - P'(x) - ... - P^r(x)] + e^{-x}[P'(x) + P^{(2)}(x) + ... + P^{r+1}(x)] \\
&= e^{-x}[-P(x) - P'(x) - ... - P^r(x) + P'(x) + P^{(2)}(x) + ... + P^{r+1}(x)] \\
&= e^{-x}[-P(x) + P^{r+1}(x)].
\end{aligned}$$

No entanto, pelo grau de $P(x)$ ser r, então $P^{r+1}(x)$ é nulo. O resultado é:

$$\frac{d}{dx}[e^{-x} F(x)] = -e^{-x} P(x).$$

■

Teorema 3.2 *O número π é transcendente.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que π seja algébrico. Pela Proposição 3.6, o produto $i\pi$ é algébrico, sendo i a unidade imaginária, que é raiz de $p(x) = x^2 + 1$, ou seja,

algébrico.
Então $i\pi$ é raiz de um polinômio do tipo $P_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
Sejam $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2, ..., \alpha_n$ as raízes de $P_1(x)$, ou seja, o grau de P_1 supomos n.
Pela identidade de Euler $e^{i\pi} = -1$, temos

$$\prod_{j=1}^{n}(1 + e^{\alpha_j}) = 0.$$

Desenvolvendo esse produto, temos

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2})...(1 + e^{\alpha_n}) = 0.$$

Nesse produto teremos $1 + \sum e^y$ sendo os expoentes y da forma

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \tag{20}$$

$$\alpha_i + \alpha_j, para\ i < j \tag{21}$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, para\ i < j < k \tag{22}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n. \tag{23}$$

Note que em (20) teremos n termos, em (21) teremos $\binom{n}{2}$ termos, assim sucessivamente até em (23) que teremos $\binom{n}{n} = 1$ termo.
O fato a seguir pode ter a sua demonstração encontrada em (CURANT R., 2002). Segue que do fato dos números em (20) serem raízes de um polinômio $P_1 \in \mathbb{Z}[x]$ com grau n, temos que os números em (16) são raízes de um polinômio $P_2 \in \mathbb{Z}[x]$ de grau $\binom{n}{2}$, os números em (22) são raízes de um polinômio $P_3 \in \mathbb{Z}[x]$ de grau $\binom{n}{3}$, etc, e os números em (23) são raízes de um polinômio $P_n \in \mathbb{Z}[x]$ de grau $\binom{n}{n} = 1$.
Dessa forma, os números de (20),(21),(22),..., (23) são raízes do polinômio

$$P_1(x)P_2(x)...P_n(x)$$

que terá coeficientes inteiros e grau $n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n} = 2^n - 1$. Já que alguns números em (20),(21),...,(23) podem se anular, suponha que m deles não se anulem e os representaremos por $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$. Dessa forma, podemos simplificar o polinômio anterior e chegarmos que $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ são raízes de um polinômio de grau m da forma

$$R(x) = cx^m + c_{m-1}x^{m-1} + ... + c_1x + c_0,\ R(x) \in \mathbb{Z}[x].$$

Efetuando o produtório $\prod_{j=1}^{n}(1+e^{\alpha_j})=0$, teremos

$$k+e^{\beta_1}+...+e^{\beta_m}=0$$

sendo $k=\sum_{y=1}^{x}1, x=2^n-1-m$, ou seja, são os casos em que as potências de e têm expoente nulo.
Considere o polinômio

$$P(x)=\frac{c^s}{(p-1)!}x^{p-1}(R(x))^p, \tag{24}$$

sendo c o coeficiente líder de $R(x)$ e sendo $s=mp-1$, com p primo que será escolhido, convenientemente, depois. Vale ressaltar que o grau de $P(x)$ é $r=s+p$, isso pode ser verificado ao desenvolver o produto em (24). Considere, também, a função

$$F(x)=P(x)+P'(x)+...+P^r(x).$$

Note que, pelo Lema 3.3, tem-se

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}F(x)]=-e^{-x}P(x). \tag{25}$$

Aplicaremos a desigualdade do Lema 3.1 à função $e^{-z}F(z)$ com $z_1=0$ e $z_2=\beta_j$

$$|e^{-\beta_j}F(\beta_j)-F(0)|\leq 2|\beta_j|\sup\{|e^{-\lambda\beta_j}P(\lambda\beta_j)|;\ 0\leq\lambda\leq 1\},$$

sendo $j=1,2,...m$.
Considerando $\varepsilon_j=\sup\{|e^{(1-\lambda)\beta_j}P(\lambda\beta_j)|;\ 0\leq\lambda\leq 1\}$, temos

$$|F(\beta_j)-e^{\beta_j}F(0)|\leq\varepsilon_j.$$

Somando e aplicando a desigualdade triangular, temos

$$|\sum_{j=1}^{m}F(\beta_j)-kF(0)|\leq\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j. \tag{26}$$

sendo k o número de potências de e que têm expoente nulo.
Vamos mostrar que o lado direito é menor que 1, para p primo escolhido convenientemente e que o lado esquerdo é um inteiro não-nulo para a esse mesmo p.
Calcularemos, agora as derivadas de $P(x)$ nos pontos $0,\beta_1,...,\beta_m$. Desenvolvendo o polinômio $P(x)$, temos

$$P(x)=\frac{c^s}{(p-1)!}[c_0x^{p-1}+bx^p+...], b\in\mathbb{Z}.$$

Logo, temos

$$P^{(i)}(0) = 0,\ para\ i < p-1\ e\ P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p.$$

Agora note que

$$P'(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}(p-1)x^{p-2}\cdot[R(x)]^p + \frac{c^s}{(p-1)!}x^{p-1}p[R(x)]^{p-1}\cdot R'(x).$$

Por este exemplo, podemos enxergar que para $P^{(i)}(x),\ i < p$, sempre teremos $R(x)$ com todos os fatores, ou seja, $P^{(i)}(\beta_j) = 0, j \in \{1, 2, 3, ...\}$ pois β_j é raiz de $R(x)$.
Agora, analisaremos as derivadas para $P^{(i)}$ para $i \geq p$. Usaremos o seguinte fato para essa análise: Sendo $Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^i$ um polinômio com coeficientes inteiros, então, sendo $p < r$:

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!}a_j x^{i-j}, i \leq r. \tag{27}$$

Além disso, $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$, para $i \geq r$ tem coeficientes divisíveis por p. De fato, teremos

$$\frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=i}^{r}\frac{j!}{(j-i)!}a_j x^{i-j} = \sum_{j=i}^{r}\frac{1}{(p-1)!}.\frac{j!}{(j-i)!}a_j x^{i-j}$$

ou seja, seus coeficientes serão da forma

$$b_j = \frac{1}{(p-1)!}\frac{j!}{(j-i)!}a_j = \frac{p}{p!}.\frac{j!}{(j-i)!}a_j,$$

sendo assim, basta mostrar que $\frac{j!}{p!(j-i)}$ é inteiro. De fato é, pois

$$\frac{j!}{p!(j-i)} = \frac{i!j!}{p!i!(j-i)} = \frac{i!}{p!}.\binom{j}{i}$$

que é inteiro pois $i \geq p$ e $j \geq i$. Aplicando esse fato ao $P^{(i)}$, temos que seus coeficientes serão divisíveis por pc^s. Desses resultados, temos

$$F(0) = c^s c_0^p + pc^s k_0, k_0 \in \mathbb{Z}.$$

Para os $F(\beta_j)$, temos:

$$\sum_{j=i}^{m} F(\beta_j) = \sum_{j=i}^{m}\sum_{i\geq p}^{r} P^{(i)}(\beta_j) = \sum_{i\geq p}^{r}\sum_{j=i}^{m} P^{(i)}(\beta_j).$$

Analisaremos a expressão $\sum_{j=i}^{m} P^{(i)}(\beta_j)$ para $p \leq i \leq r$. Já sabemos que, para esse caso, o polinômio $P^{(i)}(x)$ tem coeficientes divisíveis por pc^s. Pelo fato do grau de P ser $r = p+s$, então o grau de $P^{(i)}$ será $s + p - i < s$. Dessa forma, podemos reescrever a expressão

anterior como

$$\sum_{j=i}^{m} P^{(i)}(\beta_j) = pc^s.Q(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$$

sendo Q um polinômio nos $\beta_i's$ com grau menor que s com coeficientes inteiros. Além disso, é um polinômio simétrico nos $\beta_i's$. Aplicando o Lema 3.2 ao polinômio Q, temos a existência de um polinômio com coeficientes inteiros $g(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$ com grau menor ou igual a s.

Por outro lado, observe que:

$$\theta_1 = c^{-1}c_{m-1}, \theta_2 = c^{-1}c_{m-2}, ..., \theta_m = c^{-1}c_0.$$

Logo, $c^sQ(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m) \in \mathbb{Z}$, portanto

$$p \mid \sum_{j=1}^{m} P^{(i)}(\beta_j).$$

Dessa forma,

$$\sum_{j=1}^{m} F(\beta_j) = pk_1, k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Como consequência, temos

$$|kF(0) + \sum_{j=1}^{m} F(\beta_j)| = |k(c^s c_o^p + pc^s k_0) + pk_1|$$

$$|kc^s c_o^p + p(c^s k_0 k + k_1)| = |kc^s c_o^p + pH|,$$

sendo $H = c^s k_0 k + k_1$.

O passo seguinte é escolhermos um número primo p tal que $p > \max\{k, c, c_0\}$, com isso $p \nmid |kc^s c_o^p + pH|$, ou seja, $|kc^s c_o^p + pH| \neq 0$. Encontramos um inteiro não-nulo. Agora, resta-nos encontrar uma estimativa adequada para $\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j$. Considere $M = \max\{|\beta_1|, |\beta_2|, ..., |\beta_m|\}$. Logo, temos

$$\varepsilon_j = 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} \sup\{|\lambda\beta_j|^{p-1}|R(\lambda\beta_j)|^p;\ 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

Por $R(\lambda\beta_j)$ se tratar de um conjunto fechado, então considere

$$N = \max\{|R(z)|; |z| < m\},$$

temos

$$\varepsilon_j = 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} M^{p-1}N^p.$$

Relembrando que

$$\lim \frac{A^n}{n!} = 0, A > 0,$$

segue que

$$\exists\, \overline{p}, m[2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} M^{p-1} N^p] < 1, p > \overline{p}$$

sendo $\overline{p}$ primo. Portanto, para $p > \max\{c_0, k, c, \overline{p}\}$, teremos

$$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j < 1.$$

O que é um absurdo, pois encontramos um inteiro não-nulo menor que 1. Portanto π é transcendente. ■

3.4 A TRANSCENDÊNCIA DO NÚMERO DE EULER

Nesta seção, investigaremos a transcendência do número de Euler, e, um resultado fundamental na teoria dos números. Para isso, introduziremos os Lemas 3.4 e 3.5, que estabelecem propriedades essenciais de divisibilidade e construção de polinômios que nos serão úteis. Em seguida, utilizaremos esses resultados na demonstração do Teorema 3.3, que prova que e não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros, garantindo assim sua transcendência. Essa abordagem destaca técnicas analíticas clássicas no estudo de números transcendentes.

Lema 3.4 *Se $d_i, i = 1, 2, ..., r$ são inteiros tais que $p \mid d_i$ e $p \nmid d_0$, então*

$$p \nmid \sum_{i=0}^{r} d_i.$$

Demonstração: Suponha, por absurdo, que $p \mid \sum_{i=0}^{r} d_i$, sendo assim existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{r} d_i = kp. \tag{28}$$

Sabendo que $p \mid d_i, 0 \leq i \leq r$, então

$$d_i = pk_i.$$

Voltando à equação (26), temos

$$kp = \sum_{i=0}^{r} d_i = d_0 + d_1 + ... + d_r = d_0 + pk_1 + ... + pk_r$$

disso temos

$$-d_0 = -kp + (k_1 + ... + k_r)p = p(-k + k_1 + ... + k_r).$$

Por $p \mid p(-k + k_1 + ... + k_r)$, então $p \mid d_0$, isso é um absurdo pois, por hipótese $p \nmid d_0$. ■

Lema 3.5 *Seja $p(x)$ definido por*

$$p(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p...(n-x)^p,$$

sendo p primo tal que $p > n$. Então $p(x)$ pode ser expresso na forma

$$p(x) = \frac{(n)!^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!}x^p + ...,$$

onde temos $p^{(i)}(k) = 0, k = 1, ..., n;\ i < n,\ p^{(p-1)}(0) = (n!)$ e $p^{(i)}(0) = 0, i < p-1$.
Demonstração: Veja que cada fator de $p(x)$ pode ser escrito como:

$$(1-x)^p = 1^p + p(-x) + ... + p(-x)^{p-1} + (-x)^p$$

$$(2-x)^p = 2^p + p2^{p-1}(-x) + ... + p2(-x)^{p-1} + (-x)^p$$

$$(3-x)^p = 3^p + p3^{p-1}(-x) + ... + p3(-x)^{p-1} + (-x)^p$$

$$\vdots$$

$$(n-x)^p = n^p + pn^{p-1}(-x) + ... + pn(-x)^{p-1} + (-x)^p.$$

Substituindo esses resultados em $p(x)$, temos

$$p(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1^p + p(-x) + ... + p(-x)^{p-1} + p(-x)^P) \cdot ...$$

$$\cdot(n^p + pn^{p-1}(-x) + ... + pn(-x)^{p-1} + (-x)^p$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1^p \cdot 2^p \cdots n^p + xb_0 + ...)$$

com $b_0 = -(p1^p \cdot 2^p \cdots n^p + p2^{p-1}3^p...n^p + ... + p2^p3^p...n^{p-1})$, então a expressão acima é igual a:

$$\frac{x^{p-1}}{((p-1!)}((n!)^p + xb_0 + ...) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_0x^p}{(p-1)!} + \cdots .$$

Veja que $1, 2, ..., n$ são raízes de multiplicidade p de $P(x)$. Sabendo que o grau de $P(x)$ é maior que p, concluímos que $1, 2, ..., n$ são raízes das derivadas de ordens menores que p. Pode-se escrever $P(x) = (k-x)^p g(x)$, tal que:

$$g(x) = \frac{1}{p-1}x^{p-1}(1-x)^p...((k-1)-x)^p((k-1)-x)^p...(n-x)^p.$$

Dessa forma, pela regra do produto, tem-se

$$\begin{aligned} p'(x) &= p(k-x)^{p-1}(-1)g(x) + (k-x)^p g'(x) \\ p'(x) &= -p(k-x)^{p-1}g(x) + (k-x)^p g'(x) \\ p'(x) &= (k-x)^{p-1}[-pg(x) + (k-x)g'(x)] \\ p'(x) &= (k-x)^{p-1}g_1(x), \end{aligned}$$

sendo $g_1(x) = -pg(x)+(k-x)g'(x)$. Assim, temos $p^{(1)}(x) = (k-x)^{p-1}g_1(x)$ generalizando, temos

$$p^{(i)}(x) = (k-x)^{p-1}g_i(x).$$

Sendo assim, $p^{(i)}(0) = 0$, para $k = 1, 2, ..., n;\ i < p$. Note que

$$P^{(p-1)}(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}(p-1)! + \frac{b_0 x p!}{(p-1)!} + ...$$

Logo $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$. Veja também, que para $i < p-1$, todas as parcelas de $P^{(i)}$ possuem a variável x, logo $x = 0 \Rightarrow P^{(i)}(0) = 0$. ■

Teorema 3.3 *O número de Euler é transcendente.*
Demonstração: Vamos supor que e seja um número algébrico, então ele é solução de uma equação polinomial da forma

$$c_n e^n + ... + c_1 e + c_0 = 0 \tag{29}$$

sendo $c_0, c_1, ..., c_n$ inteiros. Considere a função

$$F(x) = P(x) + P'(x) + ... + P^{(r)}(x)$$

sendo P um polinômio de grau r em $\mathbb{Z}[x]$ e $P^{(r)}(x)$ a r-ésima derivada de P. Pelo Lema 3.5, temos

$$[-e^{-x}F(x)]' = -e^{-x}P(x)$$

podemos aplicar o teorema do valor médio à função $e^{-x}F(x)$ e obtermos

$$[F(k) - e^k F(0)]' = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$$

qualquer que seja $k > 0$ e $\theta_k \in (0, 1)$. De fato, para uma função contínua g, temos, pelo teorema do valor médio no intervalo $[0, k]$:

$$\frac{g(k) - g(0)}{(k-0)} = g'(c),$$

aplicando à função $e^{-x}F(x)$, temos

$$e^{-k}F(k) - e^0F(0) = -e^{-c}k.$$

Como $c \in [0, k]$, então $c = k\theta_k, \theta_k \in [0, 1]$, então

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -k(e^{-k\theta_k}P(k\theta_k)).$$

Multiplicando ambos os lados por e^k, temos

$$F(k) - e^kF(0) = -ke^{k(1-\theta_k}P(k\theta_k). \tag{30}$$

Obtemos o procurado.
Defina, agora

$$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k).$$

Afirmamos que

$$c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n) = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + ... + c_n\varepsilon_n.$$

De fato, pela igualdade (30), temos

$$\varepsilon_k = F(k) - e^kF(0),$$

então

$$c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + ... + c_n\varepsilon_n = c_1[F(1) - eF(0)] + c_2[F(2) - e^2F(0)] + ... + c_n[F(n) - ee^nF(0)] =$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_iF(i) - F(0)\sum_{i=1}^{n} c_ie^i = \sum_{i=1}^{n} c_iF(i) + F(0)\sum_{i=1}^{n} -c_ie^i.$$

No entanto, por (28) $\sum_{i=1}^{n} -c_ie^i = c_0$, portanto

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\varepsilon_i = \sum_{i=0}^{n} c_iF(i), \tag{31}$$

provando, assim, nossa afirmação.
Nosso objetivo será, de agora em diante, mostrar que o lado direito da última equação (31) é um inteiro não-nulo e o lado esquerdo é menor que 1, em módulo. Considere o polinômio

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p...(n-x)^p \tag{32}$$

sendo p primo tal que $p > \max\{n, c_0\}$. Note que o polinômio P pode ser escrito na forma

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!}x^p + \cdots .$$

Além disso, temos pelo Lema 3.5:

$$P^{(i)}(k) = 0, k = 1, ..., n; i < p,\ P^{(p-1)}(0) = (n!)^p \text{ e } P^{(i)}(0) = 0, i < p-1.$$

Dado um polinômio $Q(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{Z}$, os coeficientes de $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x), i \geq p$, são divisíveis por p e, como visto no resultado da equação (27) demonstrada no teorema anterior:

$$Q^{(i)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{j!}{(j-i)!}a_j x^{(j-i)}, i \leq r.$$

Usando o Lema 3.4 e o fato anterior, concluímos que $F(k)$ é um inteiro divisível por p, com $k = 1, 2, ..., n$.

Além isso, $F(0)$ não é divisível por p, caso contrário, $p \mid (n!)^p$ e isso não pode acontecer pois n é primo maior que n, por hipótese.

Usando o Lema 3.4, e o fato de $0 < \theta_k < p$, temos que

$$c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n)$$

é um inteiro não divisível por p, ou seja, um inteiro não-nulo.

Voltando ao lado esquerdo da equação (31), aplicaremos a definição de ε_k para o polinômio $P(x)$, teremos

$$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}\frac{(k\theta_k)^{p-1}}{(p-1)!}(1-k\theta_k)^p...(n-k\theta_k)^p.$$

Aplicando o módulo e considerando que $k(1-\theta_k) \leq n(1-\theta_k)$ e $k \leq n$, temos

$$|\varepsilon_k| \leq \| - ne^{n(1-\theta_k)}\frac{(n\theta_k)^{p-1}}{(p-1)!}(1-n)^p(2-n)^P...(n-n)^p\|$$

donde segue

$$|\varepsilon_k| \leq \|\frac{e^n n^p[(n-1)!]^p}{(p-1)!}\| < \|\frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}\| = \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}.$$

Lembrando que $\lim \frac{A^p}{p!} = 0, A > 0$, então para p suficientemente grande, teremos

$$|c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + ... + c_n\varepsilon_n| < 1.$$

De fato isso pode acontecer, seja $\varepsilon_m = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$ e $c_m = \max\{c_1, c_2, ..., c_n\}$, temos,

pela desigualdade triangular

$$|c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + ... + c_n\varepsilon_n| \leq |c_1\varepsilon_1| + |c_2\varepsilon_2| + ... + |c_n\varepsilon_n| \leq n|c_m\varepsilon_m| = n|c_m||\varepsilon_m|.$$

Sendo assim, basta tomar $|\varepsilon_m| \leq \frac{1}{n|c_m|}$.
Portanto, voltando à equação (31), encontramos um inteiro não-nulo cujo módulo é menor que 1. O que é um absurdo e, assim, finalizamos a demonstração. ■

4 CONCLUSÃO

O principal objetivo deste trabalho foi apresentar um pouco sobre os números irracionais e transcendentes utilizando abordagens da teoria analítica do números e técnicas avançadas de análise. Para isso, consideramos polinômios com coeficientes inteiros e desenvolvemos uma sequência de lemas e pequenos resultados que levaram à conclusão desejada baseada em uma suposição inicial.

O principal problema em decidir se um número é transcendente ou não é por sua definição indireta, ou seja, um número é transcendente se não for algébrico. Entre os resultados mais importantes deste trabalho, destacam-se as transcendências dos números π e e.

A demonstração utilizou, entre outros recursos, o teorema do valor médio e propriedades de derivadas de polinômios, além de noções da teoria elementar dos número, explorando como o comportamento de tais funções pode levar a uma contradição.

Devo destacar também as séries de pequenas proposições que introduziram os capítulos 2 e 3, respectivamente sobre irracionalidade e transcendência, algumas dessas proposições cujas demonstrações são exclusivas deste trabalho.

Por fim, Como curiosidade que possivelmente leve o leitor a se interessar pelo tema, sabe-se que tanto o número e quanto π são transcendentes. No entanto, outras combinações envolvendo e e π como π^{π}, π^{e} e e^{π} ainda aguardam uma demonstração que comprove sua possível transcendência.

Sendo assim, uma sugestão cruel minha seria que o leitor interessado nesses problemas pesquisasse primeiramente sobre a transcendência desses ainda separadamente ou pelo caminho do teorema Hermite-Lindemann, que não foi abordado nesse trabalho, por escapar dos nossos objetivos a nível de graduação.

REFERÊNCIAS

CURANT R., ROBBINS H. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2002.

DE FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Números irracionais e transcendentes.** Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIRA, Jamerson Silva. **Números algébricos e transcendentes.** 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2021. Disponível em: https://repository.ufrpe.br/handle/123456789/3635.0 Acesso em: 06 Nov. 2024.

MARQUES, Diego. **Teoria dos números transcendentes.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

OLIVEIRA, João Milton de. **A Irracionalidade e Transcendência do Número π.** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/entities/publication/2b36d70f-6c0f-4a6d-83d2-e8a5c751a6a5. Acesso em: 06 Nov. 2024.

OLIVEIRA, Gilberto Antonio de. **Número Irracionais e transcendentes.** 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2015.Disponível em: https://repositorio.unesp.br/entities/publication/85cbd465-43ab-4c05-b975-6040cad66ed2. Acesso em: 06 Nov. 2024.

RIBEIRO, Ana Carolina Silva Saliba. **Números racionais, irracionais e transcendentes.** 2022. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2022. Disponível em: https://lcm.caf.ufv.br/wp-content/uploads/2022/04/TCC_AnaSaliba.pdf. Acesso em: 06 Nov. 2024.