



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATHEUS MAIA DA SILVA

UM ESTUDO DE PONTOS CRÍTICOS DEGENERADOS E NÃO
DEGENERADOS

REDENÇÃO

2024

MATHEUS MAIA DA SILVA

UM ESTUDO DE PONTOS CRÍTICOS DEGENERADOS E NÃO DEGENERADOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Licenciado em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO

2024

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Silva, Matheus Maia.

S586e

Um estudo de pontos críticos degenerados e não degenerados /
Matheus Maia da Silva. - Redenção, 2024.
68f: il.

Monografia - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e
da Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira, Redenção, 2024.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva.

1. Matemática - Funções - Classificação. 2. Pontos críticos.
3. Codimensão. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 515

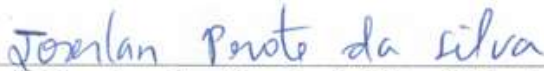
MATHEUS MAIA DA SILVA

UM ESTUDO DE PONTOS CRÍTICOS DEGENERADOS E NÃO
DEGENERADOS

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de licenciado em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 28 / 11 / 2024.

BANCA EXAMINADORA



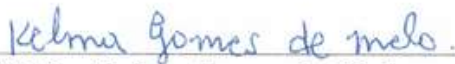
Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof.^a Dra. Danila Fernandes Tavares

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Prof.^a Me. Kelma Gomes de Melo

Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC)

Dedico este trabalho à minha família e aos amigos que estiveram ao meu lado durante todos esses anos, oferecendo apoio, conselhos, força e abraços nos dias mais difíceis. Chego a este momento com o coração repleto de gratidão e alegria, honrado por ter conhecido tantas pessoas incríveis na universidade. Espero que este trabalho possa inspirá-los a perseguir seus sonhos com determinação e coragem.

AGRADECIMENTOS

A Deus por me permitir viver muitas experiências dentro da universidade.

Ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, pela excelente orientação e pela oportunidade de dois anos de bolsa de iniciação científica, desenvolvida ao longo da graduação.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof.^a Dra. Danila Fernandes Tavares e Prof.^a Me. Kelma Gomes de Melo pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos demais professores da graduação, pelas aulas, orientações e conversas que fortaleceram ainda mais a minha vontade de seguir em frente nesta trajetória, com especial agradecimento à Prof.^a Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes, com quem tive a oportunidade de cursar diversas disciplinas e ainda ser seu orientando de extensão.

Aos colegas da turma de graduação, pelas reflexões, críticas e sugestões.

A minha família pelo suporte de todos esses anos.

A universidade por me conceder a oportunidade de vivenciar experiências incríveis que levarei por toda minha vida.

A CNPq, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de pesquisa.

“Tudo o que fizerem, façam de todo o coração, como para o Senhor, e não para os homens. Colossenses 3:23.”

RESUMO

Neste trabalho, realizamos um estudo aprofundado sobre a classificação dos pontos críticos, com foco em sua distinção entre degenerados e não degenerados. Para os pontos críticos não degenerados, empregamos o Lema de Morse, que permite uma classificação precisa desses pontos a partir das características locais da função, quando a matriz Hessiana é diferente de zero. Já para os pontos críticos degenerados, aplicamos o “Splitting Lemma”, uma ferramenta essencial que facilita a compreensão e o tratamento de pontos críticos onde a matriz Hessiana se anula, apresentando uma estrutura mais complexa e demandando uma análise diferenciada. Esse trabalho inclui um estudo detalhado dos germes de funções, com foco específico nas funções de codimensão menor ou igual a cinco. Ao limitar o estudo a esse intervalo, conseguimos uma análise rica e abrangente das singularidades de baixa a média complexidade, abordando tipos de singularidades que têm aplicações em diversas áreas, como física e geometria.

Palavras-chave: Classificação. Pontos Críticos. Codimensão.

ABSTRACT

In this work, we conducted an in-depth study on the classification of critical points, focusing on their distinction between degenerate and non-degenerate cases. For non-degenerate critical points, we applied Morse's Lemma, which enables a precise classification of these points based on the local characteristics of the function when the Hessian matrix is non-zero. For degenerate critical points, we used the Splitting Lemma, an essential tool that aids in understanding and handling critical points where the Hessian matrix vanishes, presenting a more complex structure that requires a different analytical approach. This work includes a detailed study of function germs, specifically focusing on functions with codimension less than or equal to five. By limiting the study to this range, we achieve a rich and comprehensive analysis of low- to medium-complexity singularities, addressing types of singularities with applications in various fields, such as physics and geometry.

Keywords: Classification. Singular Points. Codimension.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ponto de Mínimo.	28
Figura 2 – Ponto de máximo.	29
Figura 3 – Parametrização	34
Figura 4 – Parametrização	34
Figura 5 – Mínimo.	45
Figura 6 – Sela.	45
Figura 7 – Máximo.	45
Figura 8 – Cúbica cuspidéa.	49
Figura 9 – Relação de equivalência.	49
Figura 10 – Funções equivalentes.	52
Figura 11 – Difeomorfismo.	60
Figura 12 – Umbílico elíptico.	64
Figura 13 – Umbílico hiperbólico.	64
Figura 14 – Umbílico parabólico.	64

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classificação de germes	63
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	PRELIMINARES	14
2.1	LIMITE E CONTINUIDADE	14
2.2	FUNÇÕES DIFERENCIAIS	15
2.2.1	Derivadas	16
2.2.2	Derivadas parciais	19
2.2.3	Plano tangente	20
2.2.4	Derivadas direcionais	21
2.3	DIFERENCIABILIDADE	22
2.4	MÁXIMOS E MÍNIMOS	27
2.5	SÉRIE	30
2.5.1	Série de Taylor	31
2.6	SUPERFÍCIES	32
2.6.1	Superfícies no espaço euclidiano	33
2.7	APLICAÇÕES INVERSAS E IMPLÍCITAS	37
3	PONTOS CRÍTICOS	40
3.1	CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS	40
3.2	LEMA DE MORSE	40
3.3	GERMES DE APLICAÇÕES SUAVES	47
3.4	GRUPOS AGINDO EM CONJUNTOS	50
4	SINGULARIDADES DE FUNÇÕES SUAVES	52
4.1	A ÁLGEBRA NO ε_n	52
4.2	DETERMINANCIA DE GERMES	56
4.3	CLASSIFICAÇÃO DE GERMES DE CODIMENSÃO MENOR OU IGUAL A CINCO	58
4.3.1	Germes de codimensão 1	59
4.3.2	Classificação para germes de codimensão ≥ 2	60
4.4	SPLITTING LEMMA	61
4.4.1	O germe g tem codimensão 4	64
4.4.2	O germe g tem codimensão 5	65
5	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	68

1 INTRODUÇÃO

A Matemática moderna apresenta ramos que não só ampliam o entendimento teórico, mas também oferecem ferramentas práticas aplicáveis a uma ampla gama de áreas. Entre esses, destaca-se a Teoria de Singularidades, um campo fascinante e interdisciplinar, cuja abrangência vai muito além dos limites tradicionais. Distante de uma teoria axiomática rígida, a Teoria de Singularidades possui fronteiras flexíveis e múltiplas interações com outras disciplinas, incluindo a física, a robótica, e a geometria diferencial. Seu desenvolvimento permite o estudo profundo dos pontos críticos em funções, trazendo aplicações em situações práticas e soluções para problemas complexos.

A compreensão e análise de pontos críticos (valores em que uma função atinge máximos, mínimos ou pontos de sela) são essenciais para resolver questões de otimização e caracterização de superfícies e formas geométricas. Esses pontos são identificados e classificados através das derivadas e do determinante da matriz hessiana, instrumentos fundamentais do Cálculo Diferencial. Desenvolvido a partir do século XVII com as contribuições de Leibniz e Newton e formalizado no século XIX por Cauchy, o cálculo diferencial revolucionou diversos campos do conhecimento, permitindo uma análise precisa de fenômenos dinâmicos e mudanças.

Por singularidades entendemos o estudo de pontos críticos de funções diferenciais que aparecem naturalmente nos estudos do cálculo quando a derivada de uma função zera aplicada em um ponto do domínio. Nesse contexto, seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e f é de classe C^∞ , este conceito aparece naturalmente e dizemos que um ponto $x \in U$ é um ponto crítico de f se a sua matriz das derivadas parciais calculada no ponto x não tem posto máximo. A Teoria das Singularidades surgiu com o objetivo de estudar esses pontos.

Este trabalho tem como objetivo principal classificar os germes de funções de pontos críticos não degenerados e degenerados, para isso, explora o uso do lema de Morse para a classificação dos pontos críticos não degenerados bem como o “splitting lemma” para a classificação dos pontos críticos degenerados.

Por classificação, no caso de aplicações de classe C^∞ definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$ com valores em $\mathbb{R}^p$, se dá através de uma mudança de coordenadas locais no domínio, tal que para uma vizinhança do ponto conseguimos um difeomorfismo local, no domínio e contradomínio, a qual conseguimos uma equivalência de funções, onde a função inicial a menos de uma composição de função tem um modelo conhecido. Assim, classificar singularidades é obter as classes de equivalência segundo esta relação.

Inicialmente no capítulo II, nas preliminares, faremos uma revisão de conceitos importantes para o trabalho. Veremos limites e derivadas de funções reais, as definições de derivadas ordinárias, direcionais e parciais. Faremos uma revisão sobre os pontos de máximos, mínimos e de inflexão para pontos críticos no $\mathbb{R}^2$, posteriormente os pontos de

máximo mínimo e sela para funções no $\mathbb{R}^3$. Em seguida iremos fazer uma breve revisão sobre séries, com ênfase em série de Taylor que é muito importante para o trabalho. Prosseguindo com as preliminares, revisitamos as superfícies no espaço euclidiano e o teorema do posto constante.

No capítulo III, damos início ao estudo dos pontos críticos e, nesse momento, introduzimos o lema de Morse que é o teorema pelo qual classificamos os pontos críticos não degenerados.

No capítulo IV, estudamos os pontos críticos de aplicações suaves, em seguida introduzimos o espaço $\varepsilon_{n,p}$, onde $\mathbb{R}^n$ representa o conjunto do domínio e $\mathbb{R}^p$ o conjunto da imagem e ainda nesse capítulo, chegamos as classificações dos germes de codimensão maior ou igual a dois e menor ou igual a cinco, tal que, para classificarmos utilizamos o “splitting lemma.”

2 PRELIMINARES

Nessa seção, iremos tratar dos pré requisitos básicos para que o leitor possa ter uma melhor compreensão dos assuntos que serão abordados durante o trabalho. Relembraremos definições e teoremas de cálculo diferencial e análise, juntamente com exemplos para o melhor entendimento. Ressaltamos que maior parte das definições e exemplos aqui ilustrados foram retirados de Stewart (2022a), Guidorizzi (2001), Apostol (1991) e Lima (2014a).

2.1 LIMITE E CONTINUIDADE

Neste momento, abordaremos o tema das funções diferenciais e suas definições fundamentais, com base em Stewart (2022a). O Cálculo Diferencial, essencial na matemática, lida com a taxa de variação das funções e suas aplicações práticas, sendo vital para entender como as variáveis interagem.

As definições e teoremas explorados nos ajudarão a identificar pontos críticos, como descontinuidades e extremos locais, que são fundamentais para o estudo das singularidades. Compreender esses conceitos é indispensável para a análise e desenvolvimento da estrutura e comportamento das funções. Assim, utilizaremos o conhecimento adquirido para explorar as nuances e implicações das singularidades. Começamos com a definição formal de limite.

Definição 2.1. *Seja $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função. Dizemos que o limite da função f no ponto $a \in X$ é L , se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que, dado $x \in X$, temos: $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$.*

Quando dizemos $0 < |x - a|$, estamos dizendo que, embora x não pertença ao domínio da função, quando a função não está definida em $f(x)$, ainda sim o limite existe, já que, estamos sempre interessados em uma vizinhança muito próxima de x , mas, nunca o próprio x . Escrevemos que o limite de uma função f quando x tende a um valor a é igual a L da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Para a resolução da maioria dos problemas envolvendo limite, usaremos uma série de propriedades de limite. Essas propriedades são dadas pelo teorema a seguir.

Teorema 2.1. *Supondo que c seja uma constante e os limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existam, então:*

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
4. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Definição 2.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, com $a \in X$. Diremos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$*

quando, para todo $A > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X \longrightarrow f(x) > A$.

Exemplo 2.1. Calcule o limite de $f(x) = \frac{1}{x}$ quando x tende à 0.

Solução: Note que, para $x = 0$, a função não está definida, no entanto, sempre estamos interessados em uma vizinhança de zero, assim o limite existe.

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Portanto, quando x tende à 0, $f(x)$ tende ao infinito. ■

Outro conceito inicial importante é o de continuidade. Uma função contínua é uma função que tem uma curva sem saltos dentro do intervalo estabelecido.

Definição 2.3. Seja f uma função $f: X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função é contínua em $a \in X$ se: $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0$, tal que, dado $x \in D(f)$, temos: $|x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$.

Note que essa definição, ao contrário da definição de limite, permite que $|x - a|$ seja 0. Isso quer dizer que o ponto de limite tem que fazer parte do domínio da função. Quando $X \cap (a - \delta, a + \delta) \neq \emptyset$ podemos ver a continuidade da seguinte forma:

Definição 2.4. Uma função f é contínua em um número a se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Exemplo 2.2. Mostre que a função $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ é contínua no intervalo $[-1, 1]$.

Solução: Se $-1 < a < 1$, então, usando as propriedades de limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (1 - \sqrt{1 - x^2}) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} 1 - \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{1 - x^2} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= 1 - \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} (1 - x^2)} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= 1 - \sqrt{1 - a^2} = f(a). \end{aligned}$$

Assim, pela definição 2.4, f é contínua em a se $-1 < a < 1$. ■

2.2 FUNÇÕES DIFERENCIAIS

Um dos conceitos mais importantes no contexto do cálculo diferencial é o de derivadas. As derivadas estão ligadas diretamente a taxas de variação, como, por exemplo, a velocidade é a taxa de variação do deslocamento em função do tempo, ou a aceleração é a taxa de variação da velocidade em função do tempo. As derivadas de uma função do $\mathbb{R}^2$, também define a inclinação da reta tangente a uma curva e esse é um dos conceitos mais importantes para esse trabalho.

Primeiramente definiremos como encontrar a inclinação de uma reta tangente a uma certa curva passando por um ponto.

2.2.1 Derivadas

Definição 2.5. A reta tangente à curva $y = f(x)$ com um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com inclinação m dado por:

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (1)$$

desde que esse limite exista.

Exemplo 2.3. Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

Solução: Note que, aqui temos $a = 1$ e $f(x) = x^2$. Logo,

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ m &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} \\ m &= \lim_{(x \rightarrow 1)} x + 1 \\ m &= 1 + 1 \\ m &= 2. \end{aligned}$$

Logo, a inclinação da reta é 2. como a equação da reta é dada por: $y - y_0 = m(x - x_0)$ e sabemos que $y_0 = 1$ e $x_0 = 1$, temos:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 1 &= 2(x - 1) \\ y &= 2x - 1. \end{aligned}$$

■

Essa é a reta tangente à curva passando pelo ponto dado. Algumas vezes nos referimos à inclinação da reta tangente como a inclinação da curva no ponto. A ideia por detrás disso é que, se dermos zoom(suficiente) em direção ao ponto, a curva parecerá quase uma reta.

Na equação 1, se fizermos $x - a = h$ então $x = a + h$ desta forma a inclinação da reta tangente pode ser escrita como:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \quad (2)$$

A equação 2, quando substituindo m por $f'(a)$, é a definição de derivada, que significa dizer, derivada da função f no ponto a . Logo, podemos reescrever a equação 2 como:

Definição 2.6. A derivada de uma função f em um ponto $(a, f(a))$, denotada por $f'(a)$, é:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}. \quad (3)$$

Exemplo 2.4. Suponha que a bola foi deixada cair do posto de observação da torre, 450m acima do solo.

1. Qual a velocidade da bola após 5 segundos?
2. Com qual velocidade a bola chega ao solo?

Solução: Precisaremos encontrar a velocidade quando $t = 5s$ bem como quando a bola

atinge o solo, de modo que é eficiente começar encontrando a velocidade em um instante geral $t = a$. Usando a equação de movimento uniformemente variado $\Delta y = v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$, sendo v_0 a velocidade inicial da bola igual a zero e usando a gravidade $g = a = 9.8 \text{ m/s}^2$, temos $\Delta y = f(t) = 4,9t^2$. Logo,

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(a+h)^2 - 4,9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4,9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 4,9(2a + h) = 9,8a. \end{aligned}$$

1. Logo a velocidade após 5 s é de $v(5) = 9,8 \cdot 5 = 49 \text{ m/s}$.
2. Uma vez que o posto de observação está 450 m acima do solo, a bola vai atingir o chão em t_1 , quando $s(t_1) = 450$, isto é,

$$4,9t_1^2 = 450,$$

isto fornece,

$$t_1^2 = \frac{450}{4,9} = \sqrt{\frac{450}{4,9}} \approx 9,6s.$$

A velocidade com que a bola atinge o chão é, portanto,

$$v(t_1) = 9,8t_1 = 9,8\sqrt{\frac{450}{4,9}} \approx 94 \text{ m/s}. \quad \blacksquare$$

Definimos que uma função é diferenciável (ou derivável) da seguinte forma:

Definição 2.7. Uma função f é derivável ou diferenciável em a , se existir $f'(a)$. É derivável ou diferenciável em um intervalo aberto (a,b) [ou $(a,+\infty)$ ou $(-\infty,a)$ ou $(-\infty,+\infty)$] se for diferenciável em cada número do intervalo.

Exemplo 2.5. Onde a função $|x|$ é diferenciável?

Solução: Se $x > 0$, então $|x| = x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para $x+h > 0$ e portanto o $|x+h| = x+h$. consequentemente para $x > 0$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1, \end{aligned}$$

e, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x > 0$.

Analogamente, para $x < 0$ temos $|x| = -x$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x+h < 0$, e assim $|x+h| = -(x+h)$. Portanto, para $x < 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) - x}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1.
\end{aligned}$$

E, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x < 0$. Para $x = 0$ temos de averiguar,

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}.
\end{aligned}$$

O limite a direita é dado por:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

E o limite à esquerda é:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(-\frac{h}{h}\right) = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1.$$

Uma vez que esses limites laterais são diferentes, o limite não existe. Logo, f é diferenciável para todo x , exceto 0. A figura ilustra esta situação. O fato de que $f'(0)$ não existe está refletido geometricamente no fato de que a curva $y = |x|$ não tem reta tangente em $(0, 0)$, ou seja, esta função não é suave no ponto $(0, 0)$ podemos dizer que o gráfico da função módulo de x tem uma espécie de “bico” no ponto $(0, 0)$. ■

Tanto a continuidade como a diferenciabilidade são propriedades desejáveis em uma função. O seguinte teorema mostra como essas propriedades estão relacionadas.

Teorema 2.2. *Se f for diferenciável em a , então f é contínua em a .*

Demonstração: Ver (STEWART (2022a), p. 142). ■

Observação 2.1. *A recíproca do Teorema 2.2 é falsa, isto é, há funções que são contínuas, mas não são diferenciáveis.*

Exemplo 2.6. Podemos dar o exemplo da função $y = |x|$ que é contínua, já que,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

no entanto, de acordo com o exemplo 2.5, não é diferenciável.

Terminando essa seção, trazemos um teorema muito especial para a análise de funções diferenciais chamado teorema do confronto ou do sanduíche.

Teorema 2.3. *Seja $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções definidas em um intervalo aberto que contém a (exceto possivelmente em a). Se,*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

e,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{para todo } x \text{ no intervalo,}$$

então,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Demonstração: Ver (STEWART (2022a), p. 90). ■

2.2.2 Derivadas parciais

As derivadas parciais são um conceito fundamental no cálculo diferencial de funções de várias variáveis. Elas medem a taxa de variação de uma função em relação a uma variável específica, enquanto mantêm as outras variáveis constantes. Este conceito é necessário para a compreensão e análise de funções que dependem de múltiplas variáveis, permitindo uma análise detalhada de como mudanças em cada variável individual afetam o valor da função.

Definição 2.8. Se f é uma função de duas variáveis x e y , tem derivada em a , nós a chamaremos derivada parcial de f em relação a x em (a, b) e podemos denotá-la por $f_x(a, b)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Assim,

$$f_x(a, b) = g'(a) \text{ onde } g(x) = f(x, b).$$

Sendo,

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h},$$

teremos,

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y é dada por:

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

Existem diversas notações alternativas para as derivadas parciais. Por exemplo, em vez de f_x , podemos escrever f_1 ou $D_1 f$ (para indicar a derivação em relação à primeira variável) ou $\frac{\partial f}{\partial x}$. Mas aqui $\frac{\partial f}{\partial x}$ não pode ser interpretada como uma razão de diferenciais. A notação para a derivada parcial de f em relação a x usada nesse trabalho será $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Exemplo 2.7. Seja $f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$, encontre $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$.

Solução: Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, trataremos y como constante e calcularemos $f(x, y)$ em relação a x . Desta forma, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy^3.$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16,$$

analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 x^2 - 4y.$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 3 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 1 = 8. \quad \blacksquare$$

Definição 2.9. Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais $(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y})$, chamadas derivadas parciais de segunda ordem de f .

Se $z = f(x, y)$, usamos a seguinte notação:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Portanto a notação $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ diz que primeiro derivamos em relação a y e depois em relação a x .

Exemplo 2.8. Determine as derivadas parciais de:

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2.$$

Solução: No exemplo 2.7 vimos que,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2x^2 - 4y.$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y^3,$$

e,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2,$$

analogamente,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2,$$

e,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - 4.$$

■

2.2.3 Plano tangente

O plano tangente a uma superfície em um ponto específico é o melhor plano que aproxima a superfície localmente naquele ponto. Este conceito tem diversas aplicações e é essencial para compreender o comportamento local das superfícies. Algo necessário para o estudo de singularidades e para à análise local de superfícies. O plano tangente fornece uma aproximação linear da superfície em torno de um ponto. Isso permite uma análise mais simples e intuitiva do comportamento da superfície próxima a esse ponto, facilitando a visualização e o estudo de propriedades locais, como inclinações e curvaturas.

Definição 2.10. *Suponha que f tenha derivadas parciais contínuas. Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por:*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Exemplo 2.9. Determine o plano tangente ao paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Solução: Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y. \\ \text{E,} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) &= 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2. \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com a definição 2.10, temos:

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ z - 3 &= 4(x - 1) + 2(y - 1) \\ z &= 4x + 2y - 3. \end{aligned}$$

■

2.2.4 Derivadas direcionais

As derivadas direcionais são uma extensão do conceito de derivada no cálculo diferencial, e desempenham um papel importante na análise de funções de várias variáveis. Diferente das derivadas ordinárias, que medem a taxa de variação de uma função em uma direção específica, as derivadas direcionais permitem que analisemos a variação da função em qualquer direção arbitrária no espaço. A importância das derivadas direcionais reside na sua capacidade de fornecer uma visão mais detalhada do comportamento de funções multivariáveis.

Enquanto a derivada ordinária de uma função de uma variável nos diz como a função varia ao longo da sua linha de ação, as derivadas direcionais nos permitem avaliar a taxa de variação em direções específicas, que não são necessariamente alinhadas com os eixos coordenados. Isso é particularmente útil em problemas de otimização, onde é necessário entender como uma função se comporta em direções que não são diretamente evidentes. Para mais detalhes sobre derivadas direcionais consultar Guidorizzi (2000), Stewart (2022b) e Lima (2014c).

Definição 2.11. A derivada direcionada de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ é:

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Teorema 2.4. Se f é uma função diferenciável de x e y , então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\vec{u} = \langle a, b \rangle$,

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b.$$

Exemplo 2.10. Encontre a derivada direcional $D_{\vec{u}}f(x, y)$ se $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e $\vec{u}$ é o vetor unitário dado pelo ângulo $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Qual será $D_{\vec{u}}f(1, 2)$?

Solução: Podemos usar o teorema 2.8. Logo:

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y)\sin\frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}[3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$D_{\vec{u}}f(1, 2) = \frac{1}{2}[3\sqrt{3} - 3 + (8 - 3\sqrt{3})2] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}.$$

■

O cálculo diferencial utiliza o conceito de gradiente e vetores normais para estudar superfícies. O gradiente de uma função fornece a direção de maior taxa de variação, enquanto o vetor normal é essencial para a análise da inclinação e da orientação da superfície. Esses conceitos são fundamentais em otimização e na solução de problemas envolvendo superfícies.

Definição 2.12. Se f é uma função de duas variáveis x e y , então o gradiente de f é a função vetorial ∇f definida por:

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j},$$

onde $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ são os vetores unitários nas coordenadas x e y , respectivamente.

Exemplo 2.11. Se a função $f(x, y) = \sin x + e^{xy}$, calcule o vetor gradiente.

Solução: O vetor gradiente é dado por:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (\cos x + ye^{xy}, xe^{xy}).$$

■

2.3 DIFERENCIABILIDADE

Segundo Lima (2014c) uma aplicação f é diferenciável no ponto a quando, para pequenos valores de v , o acréscimo $f(a + v) - f(a)$ é, aproximadamente, uma função linear de v . Mais precisamente:

A aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável no ponto $a \in U$ quando existe uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + r(v),$$

onde,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Aqui, supõe-se tacitamente que $a + v \in U$, para que $f(a + v)$ tenha sentido. Como U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $|v| < \delta \rightarrow a + v \in U$.

A igualdade acima é a definição do “resto” $r(v)$. Uma vez dada T , a diferenciabilidade de f no ponto a tem sua essência na afirmação de que $r(v)$ é infinitésimo em relação a v , o que se exprime com:

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Ou, em termos explícitos: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |v| < \delta \rightarrow |r(v)| < \varepsilon|v|$.

Em alguns casos, para evitar as exceções causadas pelo denominador zero, é conveniente pôr o resto sob a forma $r(v) = \rho(v) \cdot |v|$, onde a aplicação ρ é definida, para todo v tal que $a + v \in U$, por:

$$\rho(v) = \frac{r(v)}{|v|}, \quad \text{se } v \neq 0, \quad \text{e } \rho(0) = 0.$$

Então a diferenciabilidade de f no ponto a se exprime como:

$$f(a + v) - f(a) = T \cdot v + \rho(v) \cdot |v|,$$

onde,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0.$$

de modo que ρ é contínua no ponto 0. Como a validade da condição

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0 \quad (\text{ou } \lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0),$$

independente das normas tomadas em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, vemos que o fato de uma aplicação ser ou não diferenciável em um determinado ponto também não depende das normas.

Toda aplicação diferenciável em um ponto é, evidentemente, contínua nesse ponto.

Vejamos agora como interpretar a transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ que ocorre na definição acima.

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. A derivada direcional de f em um ponto $a \in U$, relativamente a um vetor $v \in \mathbb{R}^m$, é, por definição,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}^n,$$

quando tal limite existe.

Podemos visualizar $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ do seguinte modo: seja $\delta > 0$ tal que o segmento de reta aberto $(a - \delta v, a + \delta v)$ esteja contido em U . O caminho retilíneo $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow U$, dado por $\lambda(t) = a + tv$, é transformado por f no caminho $f \circ \lambda : t \mapsto f(a + tv)$, no espaço $\mathbb{R}^n$. A derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ é o vetor-velocidade de $f \circ \lambda$ no instante $t = 0$.

Se $f = (f_1, \dots, f_n)$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right).$$

Quando $v = e_j$, sendo e_j o j -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^m$, escreve-se $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ em vez de $\frac{\partial f}{\partial e_j}(a)$. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right).$$

Supondo f diferenciável no ponto a , para todo $v \in \mathbb{R}^m$ e qualquer $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno tem-se:

$$f(a + tv) - f(a) = T \cdot tv + \rho(tv) \cdot |tv|,$$

com,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \rho(tv) = 0.$$

Como $T \cdot tv = t \cdot T \cdot v$ e $|tv| = |t| \cdot |v|$, segue-se, para $t \neq 0$:

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = T \cdot v + \rho(tv) \cdot |v|,$$

donde,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = T \cdot v.$$

Portanto, $T \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(a)$.

Em particular, vemos que é única a transformação linear T que fornece a boa aproximação para o acréscimo $f(a + v) - f(a)$ na vizinhança do ponto a . Ela é chamada a derivada de f no ponto a e indicada com a notação $f'(a)$.

Portanto, se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, é diferenciável no ponto $a \in U$, sua derivada é a aplicação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, caracterizada por:

$$f(a + v) - f(a) = f'(a) \cdot v + r(v), \quad \text{com} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0,$$

ou,

$$f(a+v) - f(a) = f'(a) \cdot v + \rho(v)|v|, \quad \text{com} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0.$$

Às vezes usa-se também a notação $Df(a)$ em vez de $f'(a)$.

Para $n = 1$, a derivada $f'(a)$ coincide com a diferencial $df(a)$. Quando $m = n = 1$, a transformação linear $f'(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ confunde-se com o número $f'(a) \cdot 1$ e, para todo $v \in \mathbb{R}$, $f'(a) \cdot v$ é simplesmente o produto do número $f'(a)$ pelo número v .

A transformação linear $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ possui, em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, uma matriz $n \times m$ chamada a matriz jacobiana de f no ponto a , indicada com a notação $Jf(a)$. Suas m colunas são os vetores $f'(a) \cdot e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right)$. Assim,

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right),$$

onde $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções-coordenada de f . Cada uma das n linhas

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(a) \right).$$

É a matriz $1 \times m$ do funcional linear $df_i(a)$, ou seja, a diferencial da i -ésima função-coordenada f_i . Para todo $v \in \mathbb{R}^m$, temos:

$$f'(a) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right) = (df_1(a) \cdot v, \dots, df_n(a) \cdot v).$$

A igualdade vetorial $f(a+v) - f(a) = f'(a) \cdot v + r(v)$ equivale às n igualdades numéricas,

$$f_i(a+v) - f_i(a) = df_i(a) \cdot v + r_i(v),$$

onde,

$$r(v) = (r_1(v), \dots, r_n(v)),$$

enquanto que o limite vetorial,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0,$$

corresponde aos n limites numéricos,

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_i(v)}{|v|} = 0.$$

Isto prova o teorema a seguir:

Teorema 2.5. *A aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in U$ se, e somente se, cada uma das suas funções-coordenada $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável nesse ponto.*

Corolário 2.1. *A aplicação $f = (g, h) : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, dada por $f(x) = (g(x), h(x))$, é diferenciável no ponto $a \in U$ se, e somente se, cada uma das aplicações coordenadas $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ o é. No caso afirmativo,*

$$f'(a) = (g'(a), h'(a)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p.$$

Com efeito, as funções-coordenada de f são as funções-coordenada de g mais as de h .

O Teorema 2.5 permitirá, mais adiante, reduzir algumas proposições sobre aplicações diferenciáveis a fatos análogos sobre funções. No momento, faremos uma observação simples, dele decorrente. Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, é diferenciável no ponto $a \in U$, então, dado qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^m$, temos:

$$f'(a) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = (f \circ \lambda)'(0) = \text{vetor-velocidade, no instante } t = 0,$$

do caminho $f \circ \lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\lambda : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ não precisa ser o caminho retilíneo $\lambda(t) = a + tv$, mas pode ser qualquer caminho diferenciável no ponto $t = 0$, tal que $\lambda(0) = a$ e $\lambda'(0) = v$. Basta notar que:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial v}(a) \right),$$

e este fato é verdadeiro para funções diferenciáveis. Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diz-se diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ quando é diferenciável em todos os pontos de U . Neste caso, fica definida a aplicação derivada $f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, que associa a cada ponto $x \in U$ a transformação linear $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, derivada de f naquele ponto. Fica também definida, para cada $v \in \mathbb{R}^m$, a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, cujo valor num ponto $x \in U$ é a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = f'(x) \cdot v$.

O espaço vetorial $L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, formado pelas transformações lineares $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, possui, como sabemos, uma norma natural, dada por:

$$|T| = \sup\{|T \cdot v|; v \in \mathbb{R}^m, |v| = 1\}.$$

Identificaremos $L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ com $\mathbb{R}^{nm}$ fazendo corresponder a cada transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ sua matriz em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Com esta identificação, as funções-coordenada de uma aplicação $\varphi : X \rightarrow L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}^p$, são as nm funções $\varphi_{ij} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$, $\varphi_{ij}(x)$ é o (i, j) -ésimo elemento da matriz da transformação linear $\varphi(x)$.

Como duas normas quaisquer em $\mathbb{R}^{nm}$ são equivalentes, então uma aplicação $\varphi : X \rightarrow L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é contínua se, e somente se, cada elemento da matriz de $\varphi(x)$ é uma função contínua de x . Por sua vez, do Teorema 2.5 que uma aplicação $\varphi : U \rightarrow L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é diferenciável no ponto $a \in U$ se, e somente se, cada uma das funções $\varphi_{ij} : I \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $\varphi_{ij}(x)$ sendo o (i, j) -ésimo elemento da matriz de $\varphi(x)$, é diferenciável no ponto a . Estas considerações levam ao seguinte teorema:

Teorema 2.6. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *f é diferenciável e a aplicação derivada $f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é contínua;*
2. *As funções-coordenada $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ da aplicação f possuem derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$;*
3. *Para cada $v \in \mathbb{R}^m$, existe a derivada direcional $\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(x)$ em qualquer ponto $x \in U$ e a aplicação $\frac{\partial f}{\partial v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.*

Diz-se que a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, e escreve-se $f \in C^1$, para significar que f cumpre as condições do teorema 2.6.

Em particular, $f \in C^1$ se, e somente se, cada uma das suas funções-coordenada é de classe C^1 .

Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, diz-se duas vezes diferenciável no ponto $a \in U$ quando é diferenciável em U e cumpre as condições abaixo:

1. A aplicação derivada $f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é diferenciável no ponto a ;

2. Cada derivada parcial $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no ponto a ;
3. Para cada vetor $v \in \mathbb{R}^m$, a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável no ponto a .

Como no Teorema 2.6, vê-se facilmente que as três condições acima são equivalentes, de modo que f cumpre uma delas se, e somente se, cumpre todas.

Quando $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é duas vezes diferenciável no ponto $a \in U \subset \mathbb{R}^m$, sua derivada segunda no ponto a é a aplicação bilinear

$$f''(a) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

cujo valor no ponto $(v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ é o vetor

$$f''(a) \cdot v \cdot w = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) (a) \in \mathbb{R}^n.$$

Como é natural, escreveremos $\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(a)$ em vez de $\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) (a)$.

Se $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ e $w = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, então:

$$f''(a) \cdot v \cdot w = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) (a) = \frac{\partial}{\partial w} \left(\sum_j \alpha_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (a) = \sum_{j,k=1}^m \alpha_j \beta_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a),$$

é o vetor de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas são os números

$$f''_i(a) \cdot v \cdot w = \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(a) \cdot \alpha_j \beta_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Segue-se do Teorema de Schwarz para funções que, para todo $i \in [1, n]$,

$$f''_i(a) \cdot v \cdot w = f''_i(a) \cdot w \cdot v,$$

de onde obtemos que:

$$f''(a) \cdot v \cdot w = f''(a) \cdot w \cdot v.$$

Em outras palavras, a derivada segunda de f é simétrica em v e w , ou seja,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}(a),$$

quando a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é duas vezes diferenciável no ponto a .

Assim, a simetria da derivada segunda de f se mantém devido à continuidade das derivadas parciais mistas, como garantido pelo Teorema de Schwarz.

Teorema 2.7. *Se a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, é duas vezes diferenciável no ponto $a \in U$, então a derivada segunda $f''(a) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação bilinear simétrica.*

Diz-se que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ se for diferenciável e sua derivada $f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ for de classe C^1 . Em outras palavras, para cada $v \in \mathbb{R}^m$, a derivada direcional $\partial f / \partial v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ também é de classe C^1 . Isso equivale a dizer que, para $i \in [1, n]$ e $j, k \in [1, m]$, as derivadas segundas $\partial^2 f_i / \partial x_j \partial x_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ existem e são contínuas em U .

Por indução, dizemos que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, é k vezes diferenciável no ponto $a \in U$ quando f é diferenciável em U e sua derivada $f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é $k - 1$ vezes diferenciável em a . Isso equivale a dizer que, para todo vetor $v \in \mathbb{R}^m$, a derivada direcional $\partial f / \partial v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é $k - 1$ vezes

diferenciável em a ou que as derivadas parciais $\partial f_i / \partial x_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ são todas $k - 1$ vezes diferenciáveis em a .

Quando $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é k vezes diferenciável em a , define-se a k -ésima derivada (ou derivada de ordem k) de f no ponto a como a aplicação k -linear

$$f^{(k)}(a) : \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

cujo valor no ponto $(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m$ é o vetor

$$f^{(k)}(a) \cdot v_1 \cdots v_k = \frac{\partial^k f}{\partial v_k \partial v_{k-1} \cdots \partial v_1}(a) \in \mathbb{R}^n.$$

Um corolário do Teorema de Schwarz garante que $f^{(k)}(a)$ é uma aplicação k -linear simétrica. Por exemplo, se $k = 3$ e $n = 1$, dados os vetores $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $v = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, e $w = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, temos:

$$f^{(3)}(a) \cdot u \cdot v \cdot w = \sum \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) \alpha_i \beta_j \gamma_k.$$

Sabemos dos estudos de derivadas parciais, que $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ independem da ordem dos índices i, j, k .

Define-se que uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ quando é diferenciável e sua derivada $f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é uma aplicação de classe C^{k-1} . Isto equivale a dizer que, para todo $v \in \mathbb{R}^m$, a aplicação $\partial f / \partial v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^{k-1} ou que todas as derivadas parciais de ordem $\leq k$ das funções coordenadas de f existem e são contínuas em U . Escrevemos, então, $f \in C^k$.

Para completar, dizemos que f é de classe C^0 quando é contínua e de classe C^∞ quando $f \in C^k$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$. Evidentemente, $f \in C^k \rightarrow f \in C^{k-1}$.

Quando $v_1 = \cdots = v_k = v$, o valor da aplicação k -linear $f^{(k)}(a)$ na lista $(v, \dots, v)$ será indicado como $f^{(k)}(a) \cdot v \cdots v$. Em particular, se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função k vezes diferenciável no ponto $a \in U$, sua k -ésima diferencial no ponto a é

$$d^k f(a) \cdot v^k = f^{(k)}(a) \cdot v^k.$$

Finalmente, observe que se $f = (g, h) : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, dada por $f(x) = (g(x), h(x))$, é k vezes diferenciável num ponto (ou de classe C^k em U), então suas aplicações coordenadas $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ são k vezes diferenciáveis nesse ponto (ou de classe C^k em U).

2.4 MÁXIMOS E MÍNIMOS

Algumas das aplicações do cálculo diferencial são os problemas de otimização. A seguir, listamos alguns dos problemas de otimização.

1. Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo de manufatura?
2. Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial? (Esta é uma questão importante para os astronautas que têm de suportar os efeitos da aceleração.)

Esses problemas podem ser reduzidos a encontrar os valores máximo ou mínimo de uma função, esse valor é encontrado de acordo com a definição a seguir.

Definição 2.13. *Seja c um número no domínio D de uma função f . Então $f(c)$ é o:*

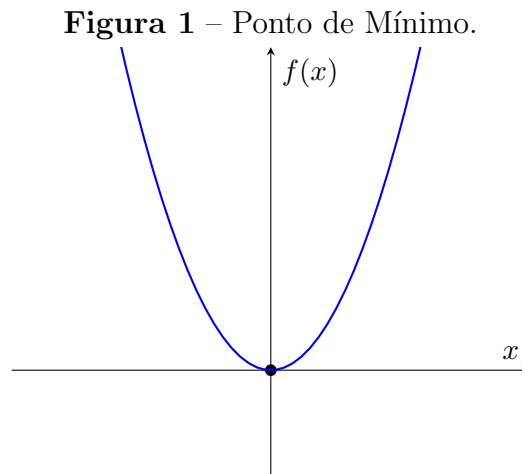
1. valor máximo absoluto de f em D se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em D .
2. valor mínimo absoluto de f em D se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em D .

O ponto de máximo e mínimo é encontrado quando a derivada da função é zero em um ponto do domínio. Nesse caso, temos:

Definição 2.14. Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que ou $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Numa função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ temos que o ponto crítico pode ser de máximo, mínimo ou um ponto de inflexão local. Um ponto de máximo local significa que, dentro de um intervalo estipulado, não há nenhum ponto pertencente a função que seja maior que ele. Se não houver nenhum outro ponto pertencente a função maior que esse ponto, chamamos esse ponto de máximo absoluto. Analogamente, um ponto é um mínimo localmente se dentro de um intervalo não existir um ponto da função menor que ele, se não existir nenhum outro ponto menor que ele em toda a função, ele é um ponto de mínimo absoluto. Chamamos de ponto de inflexão o ponto em que uma função muda o sentido da concavidade.

Exemplo 2.12. Seja $f(x) = x^2$, temos $f'(x) = 2x$. Logo, $f'(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$, o que implica, $f(0) = 0$. Portanto, o ponto crítico é $(0, 0)$. Então, $f(x) \geq f(0)$, para todo x . Consequentemente, $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto (e local) de f . Isso corresponde ao fato de que a origem é o menor ponto na parábola $y = x^2$. Porém, não há um ponto mais alto sobre a parábola e, dessa forma, a função não tem um valor máximo.



Exemplo 2.13. A função $f(x) = \cos x$ assume seu valor máximo (local e absoluto) infinitas vezes, uma vez que $\cos(2n\pi) = 1$ para todo inteiro n e pertencente a $-1 < \cos x < 1$ para todo x . Da mesma forma, $\cos(2n+1)\pi = -1$ é seu valor mínimo, onde n é qualquer número inteiro.

Em alguns casos pode parecer difícil de dizer se o ponto crítico é máximo ou mínimo da função, para isso, podemos classificar o ponto utilizando o teorema a seguir.

Teorema 2.8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e c um ponto crítico de f , supondo que f'' seja contínua

nas proximidades de c , temos:

1. se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c .
2. se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c .
3. se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, nada podemos dizer sobre o ponto.

Desta forma, utilizando as derivadas primeira e segunda conseguimos classificar os pontos de acordo com as hipóteses do teorema.

Exemplo 2.14. Seja a função $f(x) = -x^2 + x$, verifique se o ponto crítico é de máximo, mínimo ou de inflexão.

Solução: Inicialmente, calculamos as derivadas primeira e segunda $f'(x) = -2x + 1$ e $f''(x) = -2$.

Assim, se $x = \frac{1}{2}$ teremos $f'(\frac{1}{2}) = 0$, dessa forma, o ponto crítico é dado por:

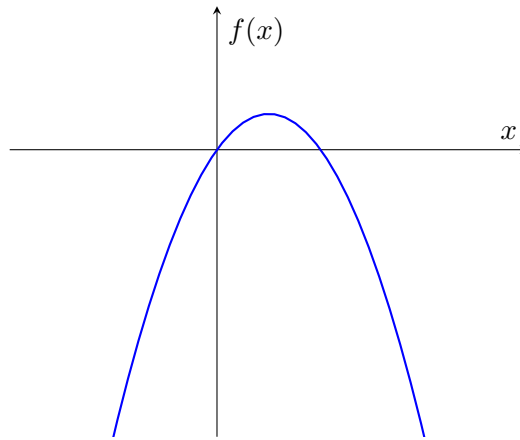
$$f(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Logo, o ponto crítico é $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

Assim, temos $f'(\frac{1}{2}) = 0$ e $f''(\frac{1}{2}) = -2 < 0$.

Portanto, de acordo com o teorema 2.8, temos que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ é ponto de máximo, de acordo com a figura a seguir:

Figura 2 – Ponto de máximo.



Fonte: Próprio Autor (2024).

■

Para determinarmos um número crítico de funções de ordem superior, devemos calcular as derivadas parciais e avaliar para quais pontos do domínio, a função não possui imagem ou a derivada aplicada no ponto é zero, veja o exemplo a seguir:

Exemplo 2.15. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$, analise se a função tem ponto de máximo, mínimo ou de inflexão.

Solução: Inicialmente, devemos calcular as derivadas parciais de primeira ordem.

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2,$$

e,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 6.$$

Essas derivadas parciais são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$, portanto, o único ponto crítico é $(1, 3)$. Completando os quadrados, achamos:

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2.$$

Já que $(x - 1)^2 \geq 0$ e $(y - 3)^2 \geq 0$, temos $f(x, y) \geq 4$ para todos os valores de x e y . Logo, $f(1, 3) = 4$ é um mínimo local e, de fato, é o mínimo absoluto de f . Ainda nesse trabalho estudaremos mais profundamente os máximos, mínimos e pontos de sela de funções diferenciáveis, trazendo técnicas mais bem elaboradas para o estudo de pontos críticos. ■

2.5 SÉRIE

O estudo de séries é bem relevante no cálculo diferencial e na análise matemática, oferecendo uma ferramenta poderosa para a aproximação e solução de problemas complexos. Em essência, uma série é uma soma infinita de termos que pode ser usada para representar funções e resolver equações que não podem ser tratadas facilmente com métodos diretos.

Se tentarmos somar os termos de uma sequência infinita $[a_n]_{n=1}^{\infty}$, obteremos uma expressão da forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots,$$

que é denominada uma série infinita (ou apenas série) e é denotada, com simplicidade, pelo símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ou $\sum a_n$.

De acordo com Stewart (2022a) e Lima (2014b) temos que uma série é convergente quando:

Definição 2.15. *Dada uma série $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ denote por s_n sua n -ésima soma parcial:*

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Se a sequência s_n for convergente e,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s,$$

existir como um número real, então a série $\sum a_i$ é chamada convergente, e escrevemos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = s,$$

ou,

$$\sum_{i=1}^n a_n = s.$$

O número s é chamado a soma da série. Se a sequência s_n é divergente, então a série é chamada divergente.

Assim, a soma de uma série é o limite da sequência de somas parciais. Desse modo, quando escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, queremos dizer que, somando um número suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s . Observe que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Exemplo 2.16. Suponhamos que se saiba que a soma dos primeiros n termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{2n}{3n+5}.$$

Em seguida, a soma da série é o limite da sequência s_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3 + \frac{5}{n}} = \frac{2}{3}.$$

2.5.1 Série de Taylor

Aproximação de Funções: As séries de Taylor e de Maclaurin permitem aproximar funções complexas por polinômios de grau finito. Isso facilita a análise e a solução de problemas ao transformar funções complicadas em expressões mais simples que são mais fáceis de manipular e calcular. A série de Taylor, por exemplo, expande uma função em torno de um ponto específico, oferecendo uma aproximação local que é extremamente útil para cálculos e análises.

Definição 2.16. Dada a série:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

Essa série é chamada série de Taylor da função f em a (ou em torno de a ou centrado em a).

Teorema 2.9. Se $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, onde $P_n(x)$ é o polinômio de Taylor de n -ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{para } |x-a| < R,$$

então $f(x)$ é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x-a| < R$.

Teorema 2.10. Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor se torna:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots$$

E esse caso especial recebe o nome de série de Maclaurin.

Exemplo 2.17. Encontre a série de Maclaurin da função e seu raio de convergência.

Solução: Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, para todo n ,

Portanto, a série de Taylor para f em 0 (isto é, a série de Maclaurin) é dada

por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para encontrarmos o raio de convergência, fazemos:

$$a_n = \frac{x^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Então,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Como o limite é 0 para todo x , pelo Teste da Razão, a série converge para todo x . Assim, o raio de convergência é $R = \infty$. ■

Exemplo 2.18. Encontre a série de Taylor de $f(x) = e^x$ em $a = 2$.

Solução: Temos $f^n(2) = e^2$ e, assim, colocando $a = 2$ na definição de uma série de Taylor 2.16, obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(2)}{n!} (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n.$$

Decorre do Teorema do Confronto 2.3 que $f(x) = e^x$ e, portanto, para todos os valores de x . Pelo Teorema 2.10, $f(x)$ é igual à soma de sua série de Maclaurin, isto é:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Assim,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n,$$

para todo x . ■

Definição 2.17. Se f tiver uma representação (expansão) em série de potências em a , isto é, se:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \text{ onde } |x-a| < R.$$

Então seus coeficientes são dados pela fórmula:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Substituindo essa fórmula para c_n de volta na série, vemos que, se f tiver uma expansão em série de potências em a , então ela deve ser da seguinte forma:

Definição 2.18. O polinômio de Taylor para derivada de ordem n é dado por:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

A série na 2.18 é chamada de função de Taylor de f em a (ou em torno de a ou centrado em a).

2.6 SUPERFÍCIES

As superfícies desempenham um papel central no cálculo diferencial, especialmente quando se trata de funções de duas ou mais variáveis. No contexto do cálculo diferencial, uma superfície é uma extensão do conceito de função, onde cada ponto no espaço tridimensional é associado a um valor que depende de duas variáveis independentes. O leitor interessado no tema dessa seção pode consultar Tenenblat (2008) e Freitas (2017).

2.6.1 Superfícies no espaço euclidiano

Uma superfície euclidiana é uma superfície que pode ser descrita dentro do espaço tridimensional usando as regras da geometria euclidiana, onde as propriedades e relações entre pontos, linhas e planos seguem as axiomas e teoremas da geometria clássica.

Superfícies euclidianas fornecem uma base para a modelagem e visualização de objetos e fenômenos em três dimensões.

Teorema 2.11. *Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^m$ abertos. Um difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ é, como sabemos, uma bijeção diferenciável cuja inversa é diferenciável. Em particular, f é um homeomorfismo entre U e V .*

O exemplo clássico de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, mostra que um homeomorfismo pode ser diferenciável sem que seu inverso o seja. Quando o difeomorfismo f é de classe C^k , seu inverso também será.

Evidentemente, a aplicação composta de dois difeomorfismos é ainda um difeomorfismo. Se $f : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo, a Regra da Cadeia nos garante que sua derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, em cada ponto $x \in U$, é um isomorfismo. Em termos do determinante jacobiano, isto significa que $\det Jf(x) \neq 0$ para todo $x \in U$, onde

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)$$

é a matriz jacobiana de f no ponto x . É natural indagar se vale a recíproca, pois, afinal de contas, a utilidade das aplicações diferenciáveis está em que se podem deduzir algumas de suas propriedades a partir de propriedades das suas derivadas. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.19. Uma função diferenciável $f : I \rightarrow J$, de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ sobre o intervalo $J \subset \mathbb{R}$, é um difeomorfismo se, e somente se, sua derivada $f'(x)$ é diferente de zero para todo $x \in I$. Com efeito, se $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então, pelo Teorema de Darboux, ou $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, donde f é um homeomorfismo crescente, ou então $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, e f é um homeomorfismo decrescente. Em qualquer caso $f^{-1} : J \rightarrow I$ é diferenciável.

Uma parametrização de classe C^k de um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo $\varphi : V_0 \rightarrow V$, que é também uma imersão de classe C^k , definida no aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$. Tem-se necessariamente $m \leq n$. Quando for preciso ser explícito, dir-se-á que φ é uma parametrização m -dimensional do conjunto V .

A definição acima, mencionando “imersão”, só faz sentido quando $k \geq 1$. Às vezes é interessante considerar parametrizações de classe C^0 , que são apenas homeomorfismos $\varphi : V_0 \rightarrow V$, de um aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ sobre um conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$.

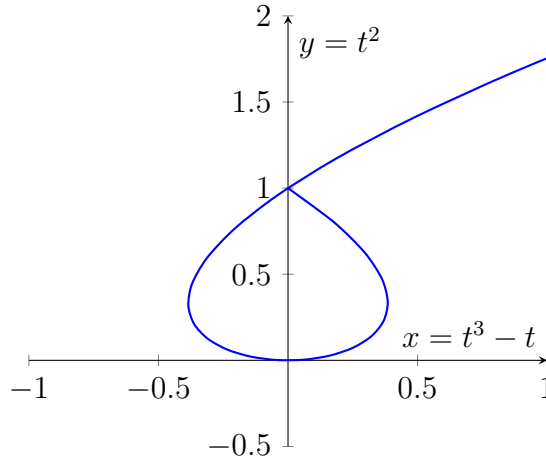
Exemplo 2.20. Uma imersão injetiva $\varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$, mesmo de classe C^∞ , pode não ser um homeomorfismo de V_0 sobre $V = f(V_0)$. Um exemplo disso é o caminho $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $f(t) = (t^3 - t, t^2)$. Vê-se facilmente que f é uma bijeção do aberto $V_0 = (-1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ sobre $V = f(V_0) \subset \mathbb{R}^2$, que $f \in C^\infty$ e que $f'(t) = (3t^2 - 1, 2t)$

nunca se anula. Mas se tomarmos uma sequência decrescente de números reais t_n , com $\lim t_n = -1$, veremos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = (0, 1) = f(1),$$

sem que seja $\lim t_n = 1$. Portanto $f^{-1} : V \rightarrow V_0$ não é contínua e f não é um homeomorfismo de V_0 sobre V .

Figura 3 – Parametrização



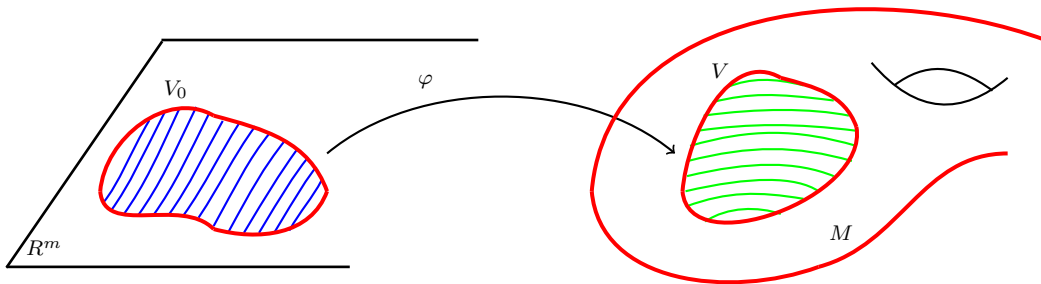
Fonte: Próprio Autor (2024).

Seja $\varphi : V_0 \rightarrow V$ uma parametrização, então cada ponto $y = \varphi(x) \in V$, embora pertença a $\mathbb{R}^n$, necessita apenas de m números para ter sua posição determinada, a saber, as m coordenadas de $x \in V_0$, chamadas os parâmetros que servem para localizar os pontos de V .

Todo sistema de coordenadas num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma parametrização de U . Quando $m < n$, a imagem V de uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$, definida em $V_0 \subset \mathbb{R}^m$, é um conjunto com interior vazio em $\mathbb{R}^n$, em virtude da Forma Local das Imersões.

Uma superfície de dimensão m e classe C_k em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ que pode ser coberto por uma coleção de abertos $U \subset \mathbb{R}^n$, tais que cada $V = U \cap M$ admite uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$, de classe C_k , definida num aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$. Cada

Figura 4 – Parametrização



Fonte: Próprio Autor (2024).

um desses conjuntos $V = U \cap M$ é um aberto em M . Para cada $p \in M$, diz-se que V é

uma vizinhança parametrizada de p .

Assim, uma superfície de classe C_k e dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto tal que cada um dos seus pontos possui uma vizinhança parametrizada por uma parametrização de classe C_k e dimensão m . Quando $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície de dimensão m , escrevemos às vezes M^m . Dizemos também que M tem codimensão $n - m$. Se $\dim M = 1$, M chama-se uma curva de classe C_k .

Como a restrição de uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$ a um aberto $W_0 \subset V_0$ é ainda uma parametrização de $W = \varphi(W_0)$, todo ponto p de uma superfície M possui vizinhanças parametrizadas arbitrariamente pequenas: se $\varphi : V_0 \rightarrow V$ é uma parametrização de $V = U \cap M$ e B é qualquer bola aberta de centro p contida em U , então $W = B \cap M$ é parametrizada pela restrição de φ a $W_0 = \varphi^{-1}(W)$.

Um desses conjuntos $V = U \cap M$ é um aberto em M . Para cada $p \in M$, diz-se que V é uma vizinhança parametrizada de p . Assim, uma superfície de classe C^k e dimensão m em $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto tal que cada um dos seus pontos possui uma vizinhança parametrizada, por uma parametrização de classe C^k e dimensão m .

Exemplo 2.21. Todo aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície de dimensão n e classe C^∞ em $\mathbb{R}^n$, coberta por uma única vizinhança parametrizada U , sendo $\varphi : U \rightarrow U$ a aplicação identidade. Reciprocamente, se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma superfície de dimensão n e classe C^1 , então cada vizinhança parametrizada $V \subset M$, sendo imagem do aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ pelo difeomorfismo $\varphi : V_0 \rightarrow V$, é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, pelo Teorema da Aplicação Inversa. O conjunto M , reunião das vizinhanças parametrizadas V , é portanto aberto em $\mathbb{R}^n$. Assim, as superfícies de classe C^1 e dimensão n em $\mathbb{R}^n$ são os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.12. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C^k e dimensão m e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k (respectivamente diferenciável no ponto $a \in U$), definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $f(U) \subset V$, onde V é a imagem de uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V \subset M$ (de classe C^k), então a aplicação composta $\varphi^{-1} \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de classe C^k (respectivamente diferenciável no ponto a).*

Vejam agora algumas consequências do Teorema 2.12. A primeira é a definição do espaço vetorial tangente a uma superfície em um dos seus pontos. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de dimensão m e classe C^k ($k \geq 1$). Dado um ponto $p \in M$, o espaço vetorial tangente a M no ponto p é o subespaço vetorial $T_p M \subset \mathbb{R}^n$ que pode ser descrito de duas maneiras:

Definição 2.19. *Tomamos uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$, de classe C^k , de uma vizinhança $V \ni p$; seja $\varphi(a) = p$. Pomos $T_p M = \varphi'(a) \cdot \mathbb{R}^m$ igual a imagem da transformação linear injetiva $\varphi'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$;*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(a) = \varphi'(a) \cdot e_1, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(a) = \varphi'(a) \cdot e_m.$$

A segunda consequência do Teorema 2.12 se refere à mudança de parame-

trização. Iremos enunciá-lo a seguir:

Teorema 2.13. *Seja $\psi : W_0 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ uma parametrização m -dimensional de classe C^k . A fim de que uma aplicação $\varphi : V_0 \rightarrow V$, de classe C^k , seja uma parametrização de V , é necessário e suficiente que $\varphi = \psi \circ \xi$, onde $\xi : V_0 \rightarrow W_0$ é um difeomorfismo C^k .*

A terceira consequência do teorema 2.12 é a definição de aplicação diferenciável numa superfície. Antes de demonstrá-lo, dizíamos que a noção de aplicação diferenciável só tinha sentido quando o domínio era um aberto do espaço euclidiano. Agora podemos estender o conceito, de modo a abranger aplicações definidas em superfícies.

Definição 2.20. *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície de classe C_k (com $k \geq 1$). Uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^r$ diz-se diferenciável no ponto $p \in M$ quando existe uma parametrização C_k , $\varphi : V_0 \rightarrow V$, de uma vizinhança V de p em M , tal que $f \circ \varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^r$ (aplicação definida num aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$) é diferenciável no ponto $a = \varphi^{-1}(p)$. Se tomarmos qualquer outra parametrização C_k , $\psi : W_0 \rightarrow W$, de uma vizinhança de p em M , teremos $f \circ \psi$ diferenciável no ponto $\psi^{-1}(p)$ se, e somente se, $f \circ \varphi$ for diferenciável no ponto $\varphi^{-1}(p)$, pois $f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$ e sabemos que $\varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(V \cap W) \rightarrow \varphi^{-1}(V \cap W)$ é um difeomorfismo de classe C_k .*

Analogamente, dada a aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^r$, definida numa superfície de classe C_k , dizemos que f é de classe C_i ($0 \leq i \leq k$) quando, para cada ponto $p \in M$, existe uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V \subset M$, com $p \in V$, $\varphi \in C_k$, tal que $f \circ \varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^r$ é de classe C_i no aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$. Neste caso, para qualquer outra parametrização $\psi : W_0 \rightarrow W \subset M$, com $p \in W$ e $\psi \in C_k$, tem-se ainda $f \circ \psi : W_0 \rightarrow \mathbb{R}^r$ de classe C_i . Mas se for $i \geq k + 1$, não tem sentido definir a noção de aplicação de classe C_i em M se esta superfície é apenas de classe C_k e não mais.

Definição 2.21. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^r$ diferenciável no ponto $p \in M$. Sua derivada nesse ponto é a transformação linear $f'(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^r$ definida do seguinte modo. Tomamos uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$, com $p = \varphi(a)$. Dado um vetor $v \in T_p M$, temos $v = \varphi'(a) \cdot v_0$ para um vetor $v_0 \in \mathbb{R}^m$. Então, pomos:*

$$f'(p) \cdot v = (f \circ \varphi)'(a) \cdot v_0.$$

Qualquer vetor $v \in T_p M$ é o vetor-velocidade, $v = \lambda'(0)$, de um caminho $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, com $\lambda(0) = p$. Então, a imagem $f'(p) \cdot v = (f \circ \lambda)'(0)$ é o vetor-velocidade, no ponto 0, do caminho $f \circ \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^r$.

Se $N \subset \mathbb{R}^r$ é outra superfície de classe C^k e a aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^r$, diferenciável no ponto $p \in M$, é tal que $f(M) \subset N$, diremos que $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável no ponto p . A observação que acabamos de fazer sobre $f'(b) \cdot v$ como vetor-velocidade de um caminho mostra que, se $f : M \rightarrow N$ é diferenciável no ponto $p \in M$, então a derivada $f'(p)$ é uma transformação linear de $T_p M$ em $T_q N$, onde $q = f(p)$.

Vale a Regra da Cadeia: se $f : M \rightarrow N$ é diferenciável no ponto $p \in M$ e $g : N \rightarrow \mathbb{R}^s$ é diferenciável no ponto $q = f(p)$, então $g \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ é diferenciável no

ponto p , com:

$$(g \circ f)'(p) = g'(q) \cdot f'(p).$$

Diremos que um ponto $c \in \mathbb{R}^n$ é valor regular de uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, quando, para todo ponto $x \in U$ tal que $f(x) = c$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma transformação linear sobrejetiva.

Considerando as funções-coordenada $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ da aplicação f , vemos que $c \in \mathbb{R}^n$ é um valor regular de f se, e somente se, em todo ponto $x \in f^{-1}(c)$, os vetores $\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_n(x)$ são linearmente independentes. Com efeito, estes vetores são as linhas da matriz jacobiana $J_f(x)$ e sua independência linear significa que esta matriz $n \times m$ tem posto n , ou seja, que a transformação linear $f'(x)$ é sobrejetiva.

Teorema 2.14. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ é valor regular de f , então $f^{-1}(c)$ é uma superfície de classe C^k e dimensão m em $\mathbb{R}^n$. Em cada ponto $p \in f^{-1}(c)$, o espaço tangente $T_p[f^{-1}(c)]$ é o núcleo da derivada $f'(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$.*

2.7 APLICAÇÕES INVERSAS E IMPLÍCITAS

Trataremos nessa seção das funções inversas e suas aplicações, o leitor poderá encontrar mais sobre o assunto em Lima (2014b).

Definição 2.22. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Uma aplicação $f : U \rightarrow V$ chama-se um difeomorfismo entre U e V quando é uma bijeção diferenciável, cuja inversa $g = f^{-1} : V \rightarrow U$ também é diferenciável.*

Se $f : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo, com $g = f^{-1} : V \rightarrow U$, então de $g \circ f = \text{id}_U$ e $f \circ g = \text{id}_V$, resulta, pela Regra da Cadeia, que:

$$Dg(f(x)) \cdot Df(x) = \text{id}_{\mathbb{R}^m} \quad \text{e} \quad Df(x) \cdot Dg(f(x)) = \text{id}_{\mathbb{R}^n},$$

para todo $x \in U$. Portanto, $Df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo cujo inverso é $Dg(f(x)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Em particular, $m = n$, ou seja, dois abertos em espaços euclidianos de dimensões diferentes não podem ser difeomorfos.

Os pontos do espaço $\mathbb{R}^{m+n}$ serão representados sob a forma $z = (x, y)$, onde $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Um difeomorfismo $h : U \rightarrow V$, entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^{m+n}$, será chamado de vertical quando for do tipo:

$$h(x, y) = (x, h_2(x, y)),$$

ou seja, quando deixar invariante a coordenada x . O inverso de um difeomorfismo vertical é ainda vertical.

Um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ é usualmente interpretado como uma transformação geométrica que aplica diferencialmente o conjunto U sobre o conjunto V , de forma invertível. Às vezes, porém, é conveniente olhar para φ como uma *mudança de coordenadas*, em que as coordenadas do ponto $x \in U$ passam a ser aquelas da sua imagem $y = \varphi(x) \in V$.

Sob este ponto de vista, o teorema a seguir diz que, se a derivada de uma

aplicação f , de classe C^k , é sobrejetiva num ponto p , então é possível obter (de modo bastante simples) um sistema de coordenadas, válido numa vizinhança aberta Z de p , tal que, em termos dessas novas coordenadas, a aplicação f assume a expressão:

$$(x_1, \dots, x_m, w_1, \dots, w_n) \mapsto (w_1, \dots, w_n).$$

Teorema 2.15. (*Aplicação inversa*). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k (com $k \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Seja $a \in U$ tal que a derivada $Df(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é invertível. Então, existe uma bola aberta $B = B(a; \delta) \subset U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$ contendo $f(a)$.*

Teorema 2.16. (*Forma local das submersões*) *Seja $f = (f_1, \dots, f_n)$ uma aplicação de classe C^k (com $k \geq 1$) de um aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ em $\mathbb{R}^n$.*

Se, num ponto $p = (a, b) \in U$, a matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p)\right)_{i,j=1,\dots,n}$ é invertível, então existem abertos $Z \ni p$ em $\mathbb{R}^{m+n}$, $V \ni a$ em $\mathbb{R}^m$, $W \ni c = f(p)$ em $\mathbb{R}^n$, e um difeomorfismo vertical $h : V \times W \rightarrow Z$, de classe C^k , tal que $f(h(x, w)) = w$ para todo $x \in V$ e todo $w \in W$.

Demonstração: Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a aplicação de classe C^k definida por:

$$\varphi(x, y) = (x, f(x, y)).$$

A matriz jacobiana de φ tem a forma:

$$J\varphi = \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

onde I é a matriz identidade $m \times m$ e a matriz $n \times n$

$$B = B(z) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(z)\right).$$

É dado que, no ponto $p = (a, b)$, a matriz B é invertível.

Pelo Teorema 2.15, φ é um difeomorfismo de um aberto $Z \ni p$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, o qual podemos supor da forma $V \times W$, onde $V \subset \mathbb{R}^m$ e $W \subset \mathbb{R}^n$, com $a \in V$ e $c = f(a, b) \in W$.

O difeomorfismo inverso $h : V \times W \rightarrow Z$ é da forma:

$$h(x, w) = (x, h_2(x, w)).$$

Então, para qualquer $(x, w) \in V \times W$, tem-se:

$$(x, w) = \varphi(h(x, w)) = \varphi(x, h_2(x, w)) = (x, f(x, h_2(x, w))) = (x, f(h(x, w))),$$

logo,

$$f(h(x, w)) = w, \quad \text{para qualquer } (x, w) \in V \times W. \quad \blacksquare$$

Definição 2.23. *Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$, a matriz de sua derivada $Df(p) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem n linhas e $m + n$ colunas. Esta é a matriz jacobiana $Jf(p)$.*

Dizer que a transformação linear $Df(p)$ é sobrejetiva significa afirmar que é possível escolher n dessas colunas de modo que a matriz $n \times n$ resultante seja invertível.

No enunciado do teorema acima, as colunas escolhidas são as n últimas, porém isto nada tem de essencial; trata-se apenas de simplificar a notação.

Quando a aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$, possui derivada sobrejetiva

$Df(z) : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ em todo ponto $z \in U$, diz-se que f é uma submersão.

No Teorema 2.16, a restrição de f ao aberto Z é uma submersão.

Com esta terminologia, podemos enunciar o:

Corolário 2.2. *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma submersão de classe C^k , definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$.*

Para cada ponto $z \in U$, existem abertos $Z \subset U$, contendo z , $W \subset \mathbb{R}^n$, contendo $c = f(z)$, $V \subset \mathbb{R}^m$, e um difeomorfismo $h : V \times W \longrightarrow Z$ de classe C^k , tais que $f(h(x, w)) = w$ para todo $x \in V$ e todo $w \in W$.

Definição 2.24. *Uma imersão do aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ no espaço $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $x \in U$, a derivada $f'(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear injetiva. Isto, naturalmente, só pode ocorrer quando $m \leq n$. Quando $m = n$, toda imersão de $U \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo local.*

Em geral, para quaisquer $m \leq n$, o teorema a seguir assegura que toda imersão é uma aplicação localmente injetiva.

Teorema 2.17. *Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se, para algum $a \in U$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva, então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $B = B(a; \delta) \subset U$ e, para quaisquer $x, y \in B$, tem-se:*

$$|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|.$$

Em particular, a restrição $f|_B$ é injetiva.

Demonstração: A função $u \mapsto |f'(a) \cdot u|$ é positiva em todos os pontos u da esfera unitária S^{m-1} , a qual é compacta. Pelo Teorema de Weierstrass, existe $c > 0$ tal que:

$$|f'(a) \cdot u| \geq 2c \quad \text{para todo } u \in S^{m-1}.$$

Por linearidade, segue-se que:

$$|f'(a) \cdot v| \geq 2c|v| \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^m.$$

Para todo $x \in U$, escrevamos:

$$r(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a).$$

Então, para quaisquer $x, y \in U$, temos:

$$f(x) - f(y) = f'(a) \cdot (x - y) + r(x) - r(y).$$

Levando em conta que $|u + v| \geq |u| - |v|$, segue-se que:

$$|f(x) - f(y)| \geq |f'(a) \cdot (x - y)| - |r(x) - r(y)| \geq 2c|x - y| - |r(x) - r(y)|.$$

Observemos que a aplicação r , acima definida, é de classe C^1 , com $r(a) = 0$.

Pela continuidade de r , existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \longrightarrow x \in U$ e $|r(x)| < c$.

A Desigualdade do Valor Médio, aplicada a r no conjunto convexo $B = B(a; \delta)$, nos assegura que se $x, y \in B$ então:

$$|r(x) - r(y)| \leq c|x - y|.$$

Consequentemente, para $x, y \in B$:

$$|f(x) - f(y)| \geq 2c|x - y| - c|x - y| = c|x - y|,$$

como queríamos demonstrar. ■

Com todos os conceitos abordados neste capítulo, estamos de posse das ferramentas necessárias para darmos início aos assuntos principais desse trabalho.

3 PONTOS CRÍTICOS

Um dos problemas centrais da Teoria de Singularidades é a classificação de tipos de pontos críticos. Esses pontos críticos podem ser não degenerados e degenerados, inicia-se nesta seção esta classificação provando-se o Lema de Morse para os pontos críticos não degenerados, que classifica pontos críticos para qualquer número de variáveis. Estes pontos críticos serão chamados pontos críticos de Morse. Retiramos os resultados aqui apresentados de Saia (2011), Freitas (2017), Tognon (2007) e Gibson (1979).

3.1 CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , isto é, uma função que possui derivada de todas as ordens e cada uma dessas derivadas é uma função contínua. Um ponto $u \in \mathbb{R}^n$ é dito um ponto crítico de f se as derivadas parciais de f se anulam em u , isto é, se:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(u)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(u)}{\partial x_n} = 0,$$

onde $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. O valor $f(u)$ é então chamado um valor crítico de f .

Vendo isso geometricamente, os pontos críticos ocorrem quando o gráfico de f possui uma tangente horizontal. Se $n = 1$, ou seja, tem-se uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, os pontos críticos de f são classificados como máximo local, mínimo local e pontos de inflexão.

Para $n = 2$, teremos $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ teremos mais possibilidades, as mais comuns são ponto de máximo, mínimo e sela. Para classificarmos os pontos não degenerados usaremos o lema que será enunciado ao decorrer deste capítulo.

Definição 3.1. A matriz Hessiana de uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é dada por:

$$\det H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Definição 3.2. Seja $u \in \mathbb{R}^n$ e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Considere que u seja um ponto crítico de f . Se a matriz Hessiana de f em u possui determinante não nulo, então u é um ponto crítico não degenerado de f . Caso contrário, é um ponto crítico degenerado de f .

Nesse momento estudaremos os pontos críticos não degenerados que são classificados pelo lema a seguir.

3.2 LEMA DE MORSE

Teorema 3.1. (Lema de Morse). Seja $u \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico não degenerado da função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Então existe uma mudança de coordenadas ψ em $\mathbb{R}^n$, isto é, uma função $\psi: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $\mathbb{U}$ é uma vizinhança do ponto u , tal que a função

$f \circ \psi: \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

$$(f \circ \psi)(u) = f(u) - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_l^2 - y_{l+1}^2 + \cdots + y_n^2.$$

Para todo $u = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{U}$, $1 \leq l \leq n$.

Para provarmos o lema de Morse enunciaremos dois lemas.

Lema 3.1. *Seja f uma função de classe C^∞ em uma vizinhança da origem, com $f(0) = 0$. Então existem funções $f_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , $i = 1, \dots, n$, definidas em uma vizinhança da origem tais que $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f_i$, com $f_i(0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_i}$.*

Lema 3.2. *Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ em uma vizinhança da origem.*

1. *Se $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, então existem funções $g_1, g_2, g_3: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas em uma vizinhança de $(0,0)$, tais que $f(x,y) = x^2 g_1(x,y) + xy g_2(x,y) + y^2 g_3(x,y)$.*
2. *Se $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$, então existem funções $g_1, g_2, g_3, g_4: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas em uma vizinhança de $(0,0)$ tais que $f(x,y) = x^3 g_1(x,y) + x^2 y g_2(x,y) + x y^2 g_3(x,y) + y^3 g_4(x,y)$.*
3. *Se $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$, então existem funções $g_1, g_2: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas em uma vizinhança de $(0,0)$ tais que $f(x,y) = x^2 g_1(x,y) + y^2 g_2(x,y)$.*

Usando o Lema 3.1, iremos provar o Lema 3.2.

Demonstração: 1. Seja $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Pelo lema 3.1 temos que existem funções $f_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f_2: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas em uma vizinhança da origem tais que

$$f(x,y) = x f_1(x,y) + y f_2(x,y),$$

com $f_1(0,0) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$ e $f_2(0,0) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$.

Agora, pode-se aplicar o Lema 3.1 à função f_1 obtendo-se funções $f_{11}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f_{12}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas em uma vizinhança de $(0,0)$ tais que $f_1(x,y) = x f_{11}(x,y) + y f_{12}(x,y)$. Analogamente, aplicando o Lema 3.1 à função f_2 tem-se $f_2(x,y) = x f_{21}(x,y) + y f_{22}(x,y)$.

Assim,

$$f(x,y) = x [x f_{11}(x,y) + y f_{12}(x,y)] + y [x f_{21}(x,y) + y f_{22}(x,y)]$$

$$f(x,y) = x^2 f_{11}(x,y) + xy f_{12}(x,y) + yx f_{21}(x,y) + y^2 f_{22}(x,y),$$

logo,

$$f(x,y) = x^2 f_{11}(x,y) + xy(f_{12}(x,y) + f_{21}(x,y)) + y^2 f_{22}(x,y).$$

Fazendo,

$$f_{11} = g_1, f_{12} + f_{21} = g_2 \text{ e } f_{22} = g_3,$$

temos que existem funções g_1, g_2 e g_3 , definidas em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$ tais que $f(x,y) = x^2 g_1(x,y) + xy g_2(x,y) + y^2 g_3(x,y)$, que é o resultado desejado.

2. Temos agora $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$. Do item anterior, temos que:

$$f(x,y) = x(x f_{11}(x,y) + y f_{12}(x,y)) + y(x f_{21}(x,y) + y f_{22}(x,y)).$$

Desta forma $f_{11}(0,0) = \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = 0$, por hipótese. Aplicando o lema 3.1 à função f_{11} , consegue-se obter funções $\bar{f}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{f}_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em uma vizinhança de $(0,0)$ tais que $f_{11}(x,y) = x\bar{f}_1(x,y) + y\bar{f}_2(x,y)$.

Temos

$$f_{12}(0,0) = \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y},$$

pois f é de classe C^2 .

Assim, por hipótese

$$f_{12}(0,0) = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Aplica-se, então, o Lema 3.1 à função f_{12} , logo se escreve $f_{12}(x,y) = x\bar{f}_{11}(x,y) + y\bar{f}_{12}(x,y)$, onde $\bar{f}_{11}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{f}_{12}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas em uma vizinhança de $(0,0)$.

Também, por hipótese

$$f_{21}(0,0) = \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Pelo Lema 3.1 aplicado a função f_{21} , tem-se $f_{21}(x,y) = x\bar{f}_{21}(x,y) + y\bar{f}_{22}(x,y)$, onde $\bar{f}_{21}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{f}_{22}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são definidas em uma vizinhança de $(0,0)$.

Finalmente, por hipótese

$$f_{22}(0,0) = \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2} = 0.$$

Então pelo Lema 3.1 escreve-se $f_{22}(x,y) = x\tilde{f}_1(x,y) + y\tilde{f}_2(x,y)$, onde $\tilde{f}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{f}_2$ são definidas em uma vizinhança de $(0,0)$. Daí, como $f(x,y) = x^2 f_{11}(x,y) + xy(f_{12}(x,y) + f_{21}(x,y)) + y^2 f_{22}(x,y)$. Substituindo na expressão, temos:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 f_{11}(x,y) + xy(f_{12}(x,y) + f_{21}(x,y)) + y^2 f_{22}(x,y) \\ &= x^2(x\bar{f}_1 + y\bar{f}_2)(x,y) + xy(x\bar{f}_{11} + y\bar{f}_{12} + x\bar{f}_{21} + y\bar{f}_{22})(x,y) + y^2(x\tilde{f}_1 + y\tilde{f}_2)(x,y) \\ &= x^3\bar{f}_1(x,y) + x^2y\bar{f}_2(x,y) + x^2y\bar{f}_{11}(x,y) + xy^2\bar{f}_{12}(x,y) + y^2x\tilde{f}_1(x,y) + y^3\tilde{f}_2(x,y) \\ &= x^3\bar{f}_1(x,y) + x^2y(\bar{f}_2(x,y) + \bar{f}_{11}(x,y)) + y^2x(\bar{f}_{12}(x,y) + \tilde{f}_1(x,y)) + y^3\tilde{f}_2(x,y). \end{aligned}$$

Agora, fazendo $\bar{f}_1 = g_1$, $\bar{f}_2 + \bar{f}_{11} = g_2$, $\bar{f}_{12} + \tilde{f}_1 = g_3$ e $\tilde{f}_2 = g_4$, temos:

$$f(x,y) = x^3g_1(x,y) + x^2yg_2(x,y) + xy^2g_3(x,y) + y^3g_4(x,y).$$

Desta forma, se observa que existem funções g_1, g_2, g_3 e g_4 definidas em uma vizinhança da origem, como queríamos demonstrar.

3. Se tivermos f como no item anterior, podemos escrever f como: $f(x,y) = x^2(xg_1(x,y) + yg_2(x,y)) + y^2(xg_3(x,y) + yg_4(x,y))$. De acordo como o Lema 3.1, existem funções g_5 e g_6 tais que: $g_5(x,y) = xg_1(x,y) + yg_2(x,y)$ e $g_6(x,y) = xg_3(x,y) + yg_4(x,y)$. Logo, podemos substituir g_5 e g_6 em f e teremos $f(x,y) = x^2g_5(x,y) + y^2g_6(x,y)$ como queríamos provar. ■

Com esse lema em mãos, podemos fazer a prova do Teorema 3.1. Provaremos para $n = 2$.

Demonstração: Pode-se supor, sem perda de generalidade, que o ponto crítico $u \subset \mathbb{R}^2$ é a origem, ou seja, $u = (0, 0)$.

Como u é o ponto crítico da função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deve-se ter $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Como f é de classe C^∞ , podemos desenvolvê-la em série de Taylor, até a ordem 2, em torno de $(0, 0)$.

Assim,

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}(x - 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}(y - 0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2}(x - 0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}(x - 0)(y - 0) + \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2}(y - 0)^2 \right] + g(x, y),$$

onde $g(x, y)$ são os termos de ordem superior no desenvolvimento.

Como $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$, fazendo,

$$a = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2}, b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad e \quad c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

temos, $f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{2} [ax^2 + 2bxy + cy^2]$. Observe que como f é de classe C^2 , se tem que $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}$.

Note que, para $u = (0, 0)$ temos, $f(0, 0) = f(0, 0) + g(0, 0)$. Logo, $g(0, 0) = 0$.

Analogamente,

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x}.$$

Logo, $\frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} = 0$. Assim, $\frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} + \frac{\partial g(0, 0)}{\partial y}$.

Logo $\frac{\partial g(0, 0)}{\partial y} = 0$ e também

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g(0, 0)}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g(0, 0)}{\partial y^2},$$

implica $\frac{\partial^2 g(0, 0)}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 g(0, 0)}{\partial y^2}$, respectivamente.

Assim, g e todas as suas derivadas de primeira e segunda ordem se anulam em $(0, 0)$. A hipótese de que $u = (0, 0)$ é um ponto crítico não degenerado de f é equivalente à $b^2 - ac \neq 0$ condição, uma vez que

$$Hess(f)_{(0, 0)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

então o determinante de $Hess(f)_{(0, 0)}$ é igual a $ac - b^2$ que é diferente de zero, pois $(0, 0)$ é ponto crítico não degenerado. Observe que $ac - b^2 \neq 0$ equivale a $b^2 - ac \neq 0$.

Assim, se $a \neq 0$ pode-se completar quadrados na parte quadrática de f obtendo-se:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)y^2.$$

Para $c \neq 0$, tem-se:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = c\left(y + \frac{b}{c}x\right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{c}\right)x^2.$$

Se $a = c = 0$, então $b \neq 0$ e assim pode-se escrever:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 2bxy = \frac{b}{2}[(x + y)^2 - (x - y)^2].$$

No caso em que $a \neq 0$, faz-se a seguinte mudança de coordenadas:

$$X = (x + \frac{b}{a}y)\sqrt{a} \text{ e } Y = y|\frac{ac - b^2}{a}|^{\frac{1}{2}}.$$

e então a parte quadrática de f toma a forma $\pm X^2 \pm Y^2$.

Tem-se que a aplicação $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x, y) = (X, Y)$ é invertível. Na verdade φ é um difeomorfismo.

Assim deduz-se que existe uma mudança de coordenadas ψ em $\mathbb{R}^2$ (ou seja, um difeomorfismo local) tal que a composta $f \circ \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tem a forma $(x, y) \mapsto d \pm x^2 \pm y^2 + h(x, y)$, onde $d = f(0, 0)$.

Observe que os sinais $\pm$ são independentes e, portanto existem quatro casos. Também se tem que h e todas as suas derivadas de primeira e segunda ordem se anulam em $(0, 0)$.

Aplicando o item 3 do Lema 3.2 à função, obtêm-se funções h_1 e h_2 definidas em uma vizinhança de $(0, 0)$ tais que $h = x^2 h_1 + y^2 h_2$ e então a expressão acima de $f \circ \psi$ se torna:

$$(x, y) \mapsto d \pm x^2(1 + h_1) \pm y^2(1 + h_2),$$

onde h_1 e h_2 se anulam em $(0, 0)$.

Para valores pequenos de x e y , $1 + h_1(x, y)$ e $1 + h_2(x, y)$ são não nulos. Colocando $X = x\sqrt{1 + h_1(x, y)}$ e $Y = y\sqrt{1 + h_2(x, y)}$, tem-se que a aplicação $f \circ \psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $(x, y) \mapsto d \pm x^2 \pm y^2$ é um difeomorfismo em uma vizinhança de $(0, 0)$.

Usando esta mudança de coordenadas obtêm-se as seguintes formas normais:

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto d + X^2 + Y^2 \\ (x, y) &\mapsto d + X^2 - Y^2 \\ (x, y) &\mapsto d - X^2 - Y^2, \end{aligned}$$

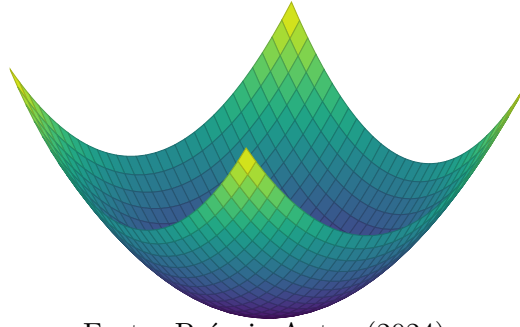
onde $d = f(0, 0)$. Isso conclui a demonstração. ■

Observação 3.1. 1. Não é necessário incluir a forma, pois $d - X^2 + Y^2 = (x, y) \mapsto (y, x)$ é uma mudança de coordenadas, o que significa que ao trocar x por y e y por x , obtemos o mesmo resultado.

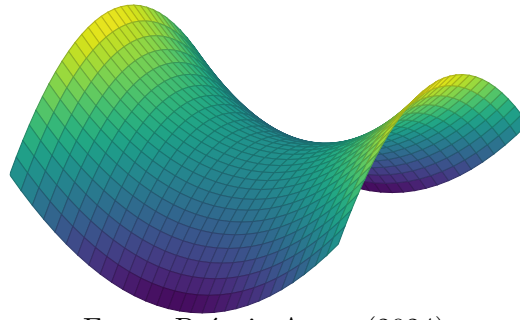
2. Os três casos do Lema de Morse correspondem, respectivamente, a um mínimo, uma sela e um máximo para a função f em $(0, 0)$.

3. O Lema de Morse afirma que a função não apenas se comporta como uma das três formas normais acima, mas também é igual a uma delas, exceto por uma mudança de coordenadas no plano.

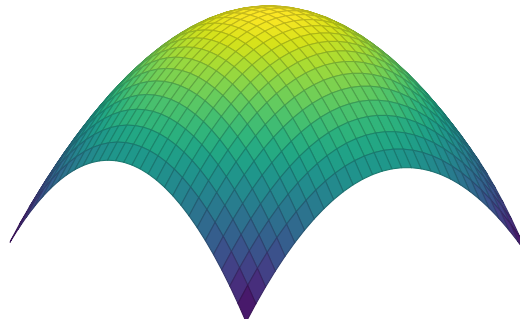
Os pontos de mínimos, sela e máximos são dados pelas figuras ??, ?? e ??, respectivamente.

Figura 5 – Mínimo.

Fonte: Próprio Autor (2024).

Figura 6 – Sela.

Fonte: Próprio Autor (2024).

Figura 7 – Máximo.

Fonte: Próprio Autor (2024).

Teorema 3.2. *Uma função diferenciável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função de Morse se todos os seus pontos críticos são não degenerados.*

Exemplo 3.1. Seja S um toro em $\mathbb{R}^3$ obtido pela rotação de um círculo de raio $r = 1$ e centro $(4, 0, 0)$ em torno do eixo y . Vamos determinar seus pontos críticos, mostrando que são todos não degenerados e ainda faremos a classificação de cada um deles.

Solução: Sendo $S(u, v) = ((4 + \cos u) \cdot \sin v, \sin u, (4 + \cos u) \cdot \cos v)$ a superfície parametrizada do toro S . Os pontos críticos de S serão obtidos pela função

$$z(u, v) = 4 \cos v + \cos u \cdot \cos v.$$

Temos,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\sin u \cdot \cos v \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -4 \sin v - \sin v \cdot \cos u,$$

e então devemos ter,

$$-\sin u \cdot \cos v = 0 \quad \text{e} \quad -4 \sin v - \sin v \cdot \cos u = 0.$$

Isso ocorrerá se $(u, v) = (0, 0)$, $(u, v) = (\pi, 0)$, $(u, v) = (\pi, \pi)$ ou $(u, v) = (0, \pi)$. Determinando as derivadas parciais de segunda ordem, temos:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = -\cos u \cdot \cos v, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -4 \cos v - \cos v \cdot \cos u \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \sin u \cdot \sin v.$$

Teremos quatro casos para analisar.

1º caso: $(u, v) = (0, 0)$

$$H(0, 0) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5.$$

Nesse caso, como $H(0, 0) = 5 > 0$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = -1 < 0$,

Logo $z(u, v) = 4 \cos 0 + \cos 0 \cdot \cos 0 = 5$.

então, $(u, v) = (0, 0)$ nos fornece um ponto de máximo e substituindo em z , obtemos o ponto $A = (0, 0, 5)$ que é um ponto de máximo da superfície S .

2º caso: $(u, v) = (\pi, 0)$

$$H(\pi, 0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3.$$

Logo $z(\pi, 0) = 4 \cos 0 + \cos \pi \cdot \cos 0 = 3$.

Como $H(\pi, 0) < 0$, então o ponto $B = (0, 0, 3)$ é um ponto de sela.

3º caso: $(u, v) = (\pi, \pi)$

$$H(\pi, \pi) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Logo $z(\pi, \pi) = 4 \cos \pi + \cos \pi \cdot \cos \pi = -3$.

Como $H(\pi, \pi) < 0$, então o ponto $C = (0, 0, -3)$ é um ponto de sela.

4º caso: $(u, v) = (0, \pi)$

$$H(0, \pi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

Sendo $z(0, \pi) = 4 \cos \pi + \cos 0 \cdot \cos \pi = -5$.

Como $H(0, \pi) > 0$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} > 0$, então obtemos o ponto de mínimo $D = (0, 0, -5)$.

Podemos fazer em cada caso uma mudança de coordenadas e obter um polinômio quadrático. Para o 1º caso, temos $z \circ \phi - z(0, 0) = -u^2 - 5v^2$ e fazendo $X^2 = u^2$, $Y^2 = 5v^2$, então a forma quadrática fica $z \circ \phi - z(0, 0) = -X^2 - Y^2$, sendo portanto de índice 2. Para o 2º e 3º casos, as formas quadráticas são de índice 1 e para o 4º caso a forma quadrática é de índice 0.

Portanto, podemos concluir também que a função $z : S \rightarrow \mathbb{R}$ é de Morse, pois todos os seus pontos críticos são não degenerados. ■

Exemplo 3.2. Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, tal que $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 2y + 3xy$, e sendo $z = f(x, y)$, vamos mostrar que a função é de Morse e classificar o ponto crítico.

Solução: Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 + 3y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 + 3x.$$

As derivadas parciais se anulam para $x = 0$ e $y = 1$.

As derivadas de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3.$$

Logo,

$$H(0, 1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5.$$

Como $H(0, 1) = -5$, temos um ponto de sela. Substituindo $(x, y) = (0, 1)$ em $z = f(x, y)$, obtemos o ponto $P = (0, 1, -1)$, que é ponto de sela da superfície S .

Escrevendo o polinômio h referente à matriz Hessiana, tal que:

$$h = 2x^2 + 2 \cdot 3xy + 2y^2,$$

e fazendo o completamento de quadrados, temos:

$$h = 2x^2 + 2 \cdot 3xy + 2y^2 = 2 \left(x + \frac{3}{2}y \right)^2 - \frac{5}{2}y^2.$$

Assim,

$$f \circ \phi - f(0, 1) = 2 \left(x + \frac{3}{2}y \right)^2 - \frac{5}{2}y^2.$$

Fazendo $X^2 = 2 \left(x + \frac{3}{2}y \right)^2$ e $Y^2 = \frac{5}{2}y^2$, a forma quadrática fica:

$$f \circ \phi - f(0, 1) = X^2 - Y^2,$$

e logo esta forma quadrática é de índice 1.

Portanto, a função f é de Morse, tendo apenas um ponto crítico não degenerado, que é o ponto de sela $P = (0, 1, -1)$. ■

Observação 3.2. *Os índices citados nos exercícios anteriores é uma maneira de descrever os pontos críticos e está relacionado a quantos sinais de menos aparecem na fórmula após as mudanças de coordenadas. Se o sinal não aparece, temos que a função tem índice 0 e é ponto de mínimo, se a função tem índice 1 o ponto é de sela e se a função tem índice 2 o ponto é de máximo.*

Assim como existe o Lema de Morse para pontos críticos não degenerados, também se tem um resultado para os pontos críticos degenerados, que permite encontrar formas normais para uma função em uma vizinhança de tal ponto em dimensões maiores que 1. Este resultado é conhecido como “*Splitting Lemma*” e será alvo de nossos estudos no decorrer do trabalho.

3.3 GERMES DE APLICAÇÕES SUAVES

Um dos assuntos importantes deste trabalho é o comportamento de uma aplicação suave $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ próxima de um ponto em seu domínio. Podemos tornar isso mais preciso da seguinte forma. Suponha que temos um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e consideremos o conjunto de todas as aplicações suaves $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ cujo domínio U é uma vizinhança de x em $\mathbb{R}^n$. Neste conjunto, introduzimos uma relação de equivalência $\sim$. Dadas duas dessas aplicações $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$, escrevemos $f_1 \sim f_2$ quando existe uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^n$, dependendo de f_1 e f_2 , para a qual as restrições $f_1|_U$ e $f_2|_U$ coincidem.

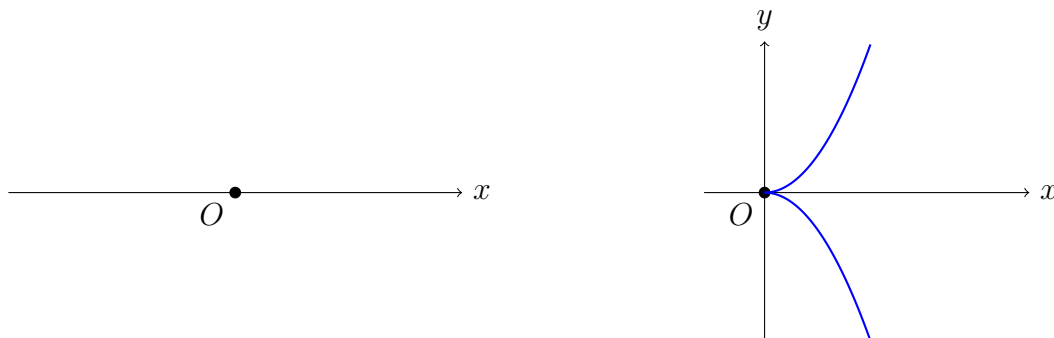
As classes de equivalência sob essa relação são chamadas de germes suaves de

aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em x , e os elementos da classe de equivalência são chamados de representantes do germe. Observe que se f_1 e f_2 são representantes do mesmo germe, então $f_1(x) = f_2(x)$, de modo que todos os representantes do germe assumem o mesmo valor y , digamos, em x : em vista disso, é usual adotar a notação $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ para o germe, e chamar x e y , respectivamente, de origem e alvo do germe. No caso particular em que $n = p$, usamos a notação $1_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x)$ para o germe em x da aplicação identidade $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pode-se tratar germes de maneira muito similar ao tratamento dado às aplicações das quais eles derivam.

Exemplo 3.3. Dados os germes $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ e $g : (\mathbb{R}^p, y) \rightarrow (\mathbb{R}^m, z)$, podemos compor esses germes para obter um germe $g \circ f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^m, z)$: basta escolher representantes $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $f(U) \subset V$, o que é evidentemente possível, e então o germe de sua composição $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em x pode ser definido como o germe composto. É uma questão trivial verificar que essa definição não depende das escolhas específicas dos representantes. Da mesma forma, pode-se prosseguir com a analogia com as aplicações para introduzir inversos. Um germe $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ é invertível quando existe um germe $g : (\mathbb{R}^p, y) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x)$ para o qual $f \circ g = 1_{\mathbb{R}^p}$ e $g \circ f = 1_{\mathbb{R}^n}$; nesse caso, g é chamado de inverso de f .

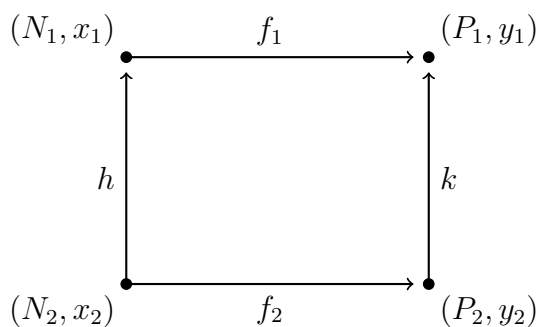
Além disso, a um germe $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ associamos um diferencial, denotado como seria de se esperar por $T_x f : T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_y \mathbb{R}^p$, e definido como o diferencial em x de qualquer representante: novamente, a definição não depende da escolha do representante. Para os germes, a regra da cadeia funciona de forma usual. Vale a pena apontar que o Teorema da Função Inversa admite uma formulação clara na linguagem dos germes: um germe é invertível se, e somente se, o seu diferencial é invertível. O posto (ou rank) de um germe $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ é definido como o posto de seu diferencial: quando o posto é igual a $\dim \mathbb{R}^n = n$, o germe é imersivo, e quando é igual a $\dim \mathbb{R}^p = p$, o germe é submersivo. Assim, um germe será invertível se, e somente se, for simultaneamente imersivo e submersivo. Um germe que não é nem imersivo nem submersivo é chamado singular.

Exemplo 3.4. Considere a curva plana $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $t \mapsto (t^2, t^3)$. Sua imagem é a cúbica cuspidéa $x^3 = y^2$ ilustrada abaixo. Claramente, o germe em qualquer ponto $t \neq 0$ é imersivo, enquanto o germe em $t = 0$ é singular. Assim, o único valor de t para o qual obtemos um germe singular corresponde ao único ponto excepcional na curva, nomeadamente o ponto de cúspide.

Figura 8 – Cúbica cuspidéa.

Fonte: Próprio Autor (2024).

Existem várias relações de equivalência sob as quais é sensato estudar germes suaves. Um bom ponto de partida para desenvolver essas relações é o seguinte. Por analogia com a definição de equivalência dada anteriormente, chamamos dois germes f_1, f_2 equivalentes quando existem germes invertíveis h e k para os quais o diagrama a seguir comuta.

Figura 9 – Relação de equivalência.

Fonte: Próprio Autor (2024).

Exemplo 3.5. Considere os germes $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dados pelas fórmulas:

$$f_1(x, y) = (x^2 + y^2, xy) \quad \text{e} \quad f_2(x, y) = (x^2, y^2).$$

Esses germes são equivalentes porque, no diagrama acima, podemos tomar:

$$h(x, y) = (x + y, x - y) \quad \text{e} \quad k(x, y) = (2x + 2y, x - y),$$

os quais são invertíveis porque as fórmulas representam isomorfismos de espaços vetoriais e, portanto, difeomorfismos.

Exemplo 3.6. A proposição 2.16 nos diz que qualquer germe submersivo $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é equivalente ao germe na origem da projeção:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_p).$$

E a definição 2.24 nos diz que qualquer germe imersivo $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r, 0)$ é equivalente ao germe na origem da inclusão natural

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Finalmente, queremos introduzir os “jatos” de aplicações suaves, que podem ser vistos como aproximações finitas de germes de aplicações suaves, no seguinte sentido: dado

um germe, podemos escrever uma série de Taylor correspondente (de algum representante com respeito às coordenadas locais apropriadas na origem e no alvo), e os jatos do germe correspondem aos segmentos iniciais finitos da série de Taylor. Vamos tornar isso mais preciso.

Definição 3.3. *Por espaço de jatos $J^k(n, p)$ entendemos o espaço vetorial real de todas as aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, cujos componentes são polinômios de grau $\leq k$ nas coordenadas padrão $x_1, \dots, x_n$ em $\mathbb{R}^n$ e com termo constante zero: os elementos de $J^k(n, p)$ serão chamados de k -jatos.*

Suponha agora que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ seja uma aplicação suave e que $a \in \mathbb{R}^n$. Se na série de Taylor de $f(x) - f(a)$ na origem (expressa em termos das coordenadas padrão em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$) deletarmos todos os termos de grau $> k$, o resultado pode ser interpretado como um k -jato, que denotamos por $j^k f(a)$ e chamamos de k -jato de (o germe de) f em a . Dessa forma, chegamos a uma aplicação suave $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J^k(n, p)$, dado por $a \mapsto j^k f(a)$, chamado de extensão k -jato de f .

3.4 GRUPOS AGINDO EM CONJUNTOS

Por uma ação de um grupo G em um conjunto M , entendemos uma aplicação $\Phi : G \times M \rightarrow M$, normalmente escrita como $(g, x) \mapsto g \cdot x$, para a qual, para todo $x \in M$ e $g, h \in G$, valem as seguintes propriedades:

- (i) $1 \cdot x = x$,
- (ii) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$,

onde 1 denota o elemento identidade de G . Dada tal ação, podemos definir uma relação de equivalência $\sim$ em M concordando que $x \sim y$ se existe um elemento $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$.

As classes de equivalência são chamadas de órbitas sob a ação. Dado $x \in M$, a órbita através de x é, por definição, a classe de equivalência que contém x , ou seja, o conjunto:

$$G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Antes de passarmos para exemplos, observemos um pequeno ponto geométrico. Sejam x_1, x_2 pontos de M pertencentes à mesma órbita; então existe um $g \in G$ tal que $x_2 = g \cdot x_1$. Observe que a aplicação $M \rightarrow M$ definida por $x \mapsto g \cdot x$ é uma transformação de M (ou seja, uma bijeção de M sobre si mesma) que preserva órbitas — no sentido de que um ponto é sempre mapeado para outro ponto na mesma órbita — e que mapeia x_1 para x_2 . Isso significa que um ponto em uma órbita se parece com qualquer outro; essa é a propriedade conhecida como homogeneidade de uma órbita.

Lembramos que dado o conjunto de todos os germes $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, dizemos que dois desses germes f, g são equivalentes quando existem germes invertíveis h, k tais que:

$$f \circ h = k \circ g. \quad (4)$$

De outra forma, dizemos que f, g têm d -jatos equivalentes quando existem

germes invertíveis h, k tais que:

$$j^d(f \circ h) = j^d(k \circ g). \quad (5)$$

Em particular, podemos tomar f, g como (germes em 0 de) d -jatos, assim induzindo uma relação de equivalência no espaço de jatos $J^d(n, p)$. Os exemplos geométricos que temos em mente surgem do estudo dessa relação de equivalência, não no espaço de jatos completo $J^d(n, p)$, mas sim no subespaço vetorial $H^d(n, p)$ de todas as aplicações $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ cujos componentes (em relação às coordenadas padrão em $\mathbb{R}^p$) são polinômios homogêneos de grau d nas coordenadas padrão $x_1, \dots, x_n$ em $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.4. *Dois d -jatos f, g em $H^d(n, p)$ são equivalentes se, e somente se, existem aplicações lineares invertíveis H e K para os quais:*

$$f \circ H = K \circ g.$$

Demonstração: A condição é certamente suficiente. Para estabelecer a necessidade, suponha que existam germes invertíveis h, k para os quais a Equação 5 seja satisfeita. Escrevemos φ para a série de Taylor de um germe $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, então temos:

$$\bar{h} = H + \text{termos de grau} > 1 \quad \text{e} \quad \bar{k} = K + \text{termos de grau} > 1,$$

onde H e K são aplicações lineares invertíveis. Assim, tendo em mente que os componentes de f e g são polinômios homogêneos de grau d , obtemos:

$$j^d(f \circ h) = f \circ H + \text{termos de grau} > d,$$

e,

$$j^d(k \circ g) = K \circ g + \text{termos de grau} > d,$$

de modo que,

$$f \circ H = j^d(f \circ h) = j^d(k \circ g) = K \circ g. \quad \blacksquare$$

Podemos reformular o que foi dito acima da seguinte forma. Seja $GL(s)$ o grupo linear geral de todas as transformações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ sob a operação de composição.

O leitor verificará facilmente que temos uma ação do grupo $GL(n) \times GL(p)$ no espaço vetorial $H_d(n, p)$ dada por:

$$(H, K) \cdot f = K \circ f \circ H^{-1}.$$

A condição para que dois d -jatos f e g em $H_d(n, p)$ estejam na mesma órbita sob esta ação é que existam transformações lineares invertíveis H e K para as quais $(H, K) \cdot g = f$, ou seja,

$$f \circ H = K \circ g.$$

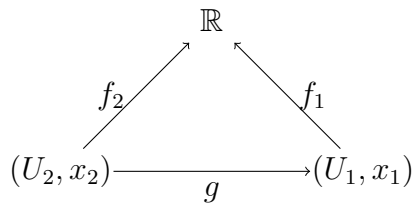
Segue imediatamente da definição 3.4 que as órbitas em $H_d(n, p)$ sob a ação de $GL(n) \times GL(p)$ são precisamente as classes de equivalência descritas acima.

4 SINGULARIDADES DE FUNÇÕES SUAVES

Neste capítulo apresentamos as singularidades de funções suaves. O leitor que tem interesse em se aprofundar nesse assunto pode consultar Gibson (1979) e Saia (2011).

Dizemos que dois germes de funções f_1, f_2 são equivalentes à direita (ou R -equivalentes) quando existe um germe invertível g para o qual o seguinte diagrama de germes na Figura (??) comuta. Para evitar simbolismo desnecessário, escrevemos $f_1 \sim f_2$ para significar que dois germes f_1, f_2 de funções são equivalentes.

Figura 10 – Funções equivalentes.



Fonte: Próprio Autor (2024).

Assim, o conjunto de objetos que desejamos estudar é o conjunto ε_n de todos os germes $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, y)$.

Claro, ε_n é um espaço vetorial real sob as operações naturais de adição e multiplicação escalar. De fato, ε_n tem mais estrutura algébrica do que isso; a operação de multiplicação em $\mathbb{R}$ induz uma operação de multiplicação em ε_n , sob a qual S_n se torna uma álgebra real.

Em seguida, denotemos por R_n o conjunto de germes invertíveis $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, e observe que R_n é um grupo sob a operação de composição. Agora, R_n atua em ε_n por composição, ou seja, temos uma ação $R_n \times \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n$ dada por $(g, f) \mapsto f \circ g^{-1}$. Além disso, dois germes em ε_n serão equivalentes se, e somente se, estiverem na mesma órbita sob essa ação.

Definição 4.1. *Seja $f \in \varepsilon_n$. Definimos a codimensão $\text{cod } f$ de f como a codimensão do espaço tangente J_f em ε_n , isto é,*

$$\text{cod } f = \dim \varepsilon_n / J_f.$$

Se $\text{cod } f$ é finita, dizemos que f é de codimensão finita; caso contrário, f é de codimensão infinita. Na prática, precisaremos saber como decidir se um dado germe f é de codimensão finita e, se for, como calcular a codimensão. Existem algumas sutilezas aqui que merecem explicação e exigem uma discussão detalhada da álgebra ε_n : este, então, é o objeto da próxima seção.

4.1 A ÁLGEBRA NO ε_n

Nesta seção, abordaremos questões algébricas para auxiliar as seções subseqüentes. Observe, antes de tudo, o seguinte fato elementar.

Proposição 4.1. *Uma condição necessária e suficiente para que um germe $f \in \varepsilon_n$ seja invertível (como um elemento do anel ε_n) é que $f(0) \neq 0$.*

Necessidade: Suponha que f seja invertível, então podemos encontrar um germe $g \in \varepsilon_n$ com $fg = 1$: então $f(0)g(0) = 1$, de modo que $f(0) \neq 0$.

Suficiência: Suponha que $f \in \varepsilon_n$ satisfaça $f(0) \neq 0$: então $g = \frac{1}{f}$ é um inverso para f . Isso nos diz que o ideal de todos os germes em ε_n com alvo 0 tem uma propriedade algébrica bastante especial.

Proposição 4.2. $\mathfrak{M}_n$ é o único ideal maximal em ε_n .

Demonstração: Suponha $I \subseteq \varepsilon_n$ um ideal com $\mathfrak{M}_n \subseteq I \subseteq \varepsilon_n$, de modo que podemos encontrar um $f \in I$ com $f(0) \neq 0$. f é invertível pela definição 4.1 e, portanto, $I = \varepsilon_n$. Segue-se que $\mathfrak{M}_n$ é maximal. E o mesmo argumento estabelece a unicidade. ■

Até certo ponto, a importância do ideal $\mathfrak{M}_n$ reside no fato de que ele permite uma descrição algébrica conveniente de certos ideais em ε_n que frequentemente vêm à consideração. Temos em mente a ideia de $\mathbf{f}_{k+1}$ de todos $f \in \varepsilon_n$ cujo k -jato é zero (ou seja, todas as derivadas parciais de f de ordem $\leq k$ se anulam em 0).

Proposição 4.3. *Seja U um vizinho convexo de 0 em $\mathbb{R}^n$, e seja f uma função suave definida em $U \times \mathbb{R}^q$ que se anula em $0 \times \mathbb{R}^q$: Existem funções suaves $f_1, \dots, f_n$ em $U \times \mathbb{R}^q$ com $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$, onde $x_1, \dots, x_n$ são as funções de coordenadas padrão em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) &= \int_0^1 \frac{df}{dt}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q), \end{aligned}$$

onde tomamos:

$$f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) dt.$$

Dessa forma concluímos a demonstração. ■

Agora nós podemos caracterizar o ideal por $\mathbf{f}_{k+1}$.

Proposição 4.4. $\mathbf{f}_k = \mathfrak{M}_n^k$ e é gerado (os germes em 0) os monômios em $x_1, \dots, x_n$ de grau $\leq k$.

Demonstração: Primeiro, estabelecemos que $\mathbf{f}_k = \mathfrak{M}_n^k$. O caso $k = 1$ é trivial. É claro que $\mathfrak{M}_n^k \subseteq \mathbf{f}_k$, de modo que basta mostrar que $\mathbf{f}_k \subseteq \mathfrak{M}_n^k$, o que seguirá por indução de $\mathbf{f} \subseteq \mathfrak{M}_n \mathbf{f}_{k-1}$. De fato, se $f \in \mathbf{f}_k$, então $f(0) = 0$, de modo que $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$, e é claro pela construção dos f_i que eles estão em $\mathbf{f}_{k-1}$, assim $f \in \mathfrak{M}_n \mathbf{f}_{k-1}$. Esse argumento mostra, em particular, que $\mathbf{f}_1 = \mathfrak{M}_n$ é gerado (os germes em 0) por $x_1, \dots, x_n$. Segue-se que $\mathbf{f}_k = \mathfrak{M}_n^k$ é gerado (os germes em 0) pelos monômios de grau k em $x_1, \dots, x_n$. ■

Em particular, a proposição 4.4 mostra que os ideais $\mathbf{f}_k$ são todos finitamente

gerados. Isso vale a pena notar, pois o anel ε_n não é Noetheriano, ou seja, nem todo ideal é finitamente gerado.

Agora faremos sobre a relação entre os germes e suas séries de Taylor. É claro que uma série de Taylor é apenas uma série de potências formal em várias variáveis. Dado um germe f em ε_n , escreveremos sua série de Taylor como

$$\hat{f} = f(0) + \frac{1}{1!} \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)x_i + \frac{1}{2!} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j + \cdots.$$

Assim, $\hat{f}$ está em $\hat{\varepsilon}_n$, a álgebra de séries de potências formais reais em n indeterminadas $x_1, \dots, x_n$. Dessa forma, obtemos um aplicação natural $\varepsilon_n \longrightarrow \hat{\varepsilon}_n$ dado por $f \mapsto \hat{f}$, e pode-se verificar facilmente que é um homomorfismo de álgebras. O que não é de forma alguma tão claro é o Lema de Borel.

Proposição 4.5. *O homomorfismo de álgebras $\varepsilon_n \longrightarrow \hat{\varepsilon}_n$ dado por $f \mapsto \hat{f}$ é sobrejetivo.*

Observe que o núcleo do homomorfismo $\varepsilon_n \longrightarrow \hat{\varepsilon}_n$ é precisamente $\mathfrak{M}_n^\infty = \prod_{k=1}^\infty \mathfrak{M}_n^k$, conforme a proposição 4.4. Segue-se que

$$\frac{\varepsilon_n}{\mathfrak{M}_n^\infty} \cong \hat{\varepsilon}_n.$$

Podemos obter uma versão mais finita disso, da seguinte forma. Sob o epimorfismo $\varepsilon_n \longrightarrow \hat{\varepsilon}_n$, o ideal maximal $\mathfrak{M}_n$ em ε_n mapeia-se para o ideal maximal $\widehat{\mathfrak{M}}_n$ em $\hat{\varepsilon}_n$, que compreende todas as séries de potência formais com termo constante zero, e, portanto, qualquer potência $\mathfrak{M}_n^k$ mapeia-se para a potência $\widehat{\mathfrak{M}}_n^k$. O resultado final é que

$$\frac{\varepsilon_n}{\mathfrak{M}_n^k} \cong \frac{\hat{\varepsilon}_n}{\widehat{\mathfrak{M}}_n^k}.$$

A virtude particular dessa relação é que ela nos diz que o espaço quociente à esquerda é de dimensão finita. De fato, $\widehat{\mathfrak{M}}_n$ é gerado pelos indeterminados $x_1, \dots, x_n$, de modo que $\widehat{\mathfrak{M}}_n^k$ é gerado pelos monômios de grau k em $x_1, \dots, x_n$, e o espaço quociente à direita pode ser identificado com o espaço vetorial real de polinômios de grau $< k$ em $x_1, \dots, x_n$, que certamente é de dimensão finita.

Para fazer mais progressos, precisaremos de um resultado bastante interessante da álgebra, chamado Lema de Nakayama.

Proposição 4.6. *Seja ε um anel comutativo com um elemento identidade 1, e seja $\mathfrak{M}$ um ideal em ε com a propriedade de que $1+x$ é invertível em ε para qualquer $x \in \mathfrak{M}$. Seja M um ε -módulo, e sejam A e B ε -submódulos com A finitamente gerado. Se $A \subseteq B + \mathfrak{M} \cdot A$, então $A \subseteq B$.*

Demonstração: Sejam $a_1, \dots, a_t$ geradores de A . Por hipótese, podemos encontrar $b_1, \dots, b_t \in B$ e elementos λ_{ij} em $\mathfrak{M}$ para os quais, para $1 \leq i \leq t$, podemos escrever:

$$a_i = b_i + \lambda_{i1}a_1 + \cdots + \lambda_{it}a_t. \quad (6)$$

Introduzimos uma matriz $t \times t$ sobre o anel ε por $\Lambda = (\lambda_{ij})$ e tomamos $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_t)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_t)$ como elementos do ε -módulo $M \times \cdots \times M$, com t fatores. Então, pela equação 6 podemos escrever:

$$(I - \Lambda)\mathbf{a} = \mathbf{b},$$

onde I é a matriz identidade $t \times t$ sobre o anel ε . Será suficiente mostrar que $I - A$ é uma matriz invertível, pois então poderemos resolver esse sistema de equações lineares para $a_1, \dots, a_t$ em termos de $b_1, \dots, b_t$, o que mostrará que $a_1, \dots, a_t$ pertencem a B , como requerido. Para esse fim, lembre-se da álgebra linear que uma matriz quadrada (sobre um anel comutativo com identidade) é invertível se e somente se seu determinante for um elemento invertível no anel. Então, basta mostrar que $\det(I - \Lambda)$ é invertível em ε .

Observe que:

$$\det(I - \Lambda) = 1 - \lambda,$$

com $\lambda \in \mathfrak{M}$ e, pela hipótese, $I - \lambda$ é invertível em ε . ■

Na prática, os anéis ε que temos em mente são ε , $\hat{\varepsilon}$ e os ideais são $\mathfrak{M}_n$, $\hat{\mathfrak{M}}_n$ ambos dos quais satisfazem a hipótese inicial da proposição 4.6.

Exemplo 4.1. O Lema de Nakayama permite uma prova muito simples de que ε_n não é um anel Noetheriano. Tomamos M como o módulo ε_n -módulo ε_n . E tomamos $A = \mathfrak{M}_n^\infty = \bigcap_{k=1}^\infty \mathfrak{M}_n^k$, B como o ideal trivial. Claramente, $A \subseteq B + \mathfrak{M}_n \cdot A$. Se ε_n fosse Noetheriano, então A seria finitamente gerado, e o Lema de Nakayama nos diria que $A \subseteq B$, ou seja, que A é trivial. No entanto, isso é falso, pois há exemplos padrão em cálculo de germes não-nulos com série de Taylor zero. Portanto, segue-se que ε_n não pode ser Noetheriano.

Enunciaremos nesse momento algumas proposições que nos ajudam a entender melhor a Álgebra no anel ε_n .

Proposição 4.7. *Seja M um ε -módulo com uma base finita, e seja $I \subset M$ um ε -submódulo. Uma condição necessária e suficiente para que I tenha codimensão finita em M é que exista um inteiro $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{M}^k \cdot M \subseteq I$.*

Demonstração: Ver (GIBSON (1979), p. 104). ■

Proposição 4.8. *Sob as hipóteses da proposição 4.7, uma condição necessária e suficiente para que $I \subset M$ tenha codimensão finita em M é que todos os $\text{cod}_k I$ com exceção de um número finito sejam nulos. Nesse caso, temos:*

$$\text{cod } I = \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \dots$$

Demonstração: Ver (GIBSON (1979), p. 106). ■

Proposição 4.9. *Suponha que o germe $f \in \varepsilon_n$ tenha codimensão finita e positiva. Então a origem em $\mathbb{R}^n$ é um ponto singular isolado de qualquer representante de f , isto é, existe uma vizinhança da origem na qual a origem é o único ponto singular do representante.*

Demonstração: Ver (GIBSON (1979), p. 108). ■

Proposição 4.10. *Seja $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ um germe. Uma condição necessária e suficiente para que o homomorfismo de álgebras induzido $f^* : \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n$ seja um isomorfismo é que f seja invertível.*

Demonstração: Ver (GIBSON (1979), p. 113). ■

Proposição 4.11. *Se os germes f e g em ε_n são equivalentes, então $\text{cod } f = \text{cod } g$.*

Demonstração: Ver (GIBSON (1979), p. 114). ■

Essas proposições serão úteis nos próximos capítulos.

4.2 DETERMINANCIA DE GERMES

Considere um germe $f \in \varepsilon_n$, f dado por uma série de Taylor

$$f(0) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \cdots$$

Espera-se que um f suficientemente bom seja equivalente a um de seus polinômios de Taylor, e então o problema de classificação se reduz a um problema em um espaço vetorial de dimensão finita de polinômios.

Portanto, introduzimos a seguinte definição. Seja $k \geq 0$ um inteiro. Um germe $f \in \varepsilon_n$ é dito ser k -determinado quando qualquer germe $g \in \varepsilon_n$ com o mesmo k -jato satisfaz $f \sim g$: em outras palavras, o conhecimento de todas as derivadas parciais de ordem $\leq k$ determina completamente o germe, até equivalência. Note que a propriedade de k -determinância será invariante sob equivalência.

Exemplo 4.2. Qualquer germe não singular $f \in \varepsilon_0$ é 1-determinado. De fato, sabemos que f é equivalente ao germe $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$. O mesmo se aplica a qualquer germe $g \in \varepsilon_n$ tendo o mesmo 1-jato que f . Assim, temos o resultado.

O resultado principal desta seção é a seguinte condição suficiente para k -determinância.

Proposição 4.12. *Seja $f \in \varepsilon_n$ tal que $\mathfrak{M}^k \subseteq \mathfrak{M}J_f$ então f é k -determinado.*

Demonstração: Seja $g \in \varepsilon_n$ com o mesmo k -jato que f . Precisamos provar $f \sim g$. Agora, f e g são pontos no espaço vetorial real ε_n , então podem ser unidos por uma linha reta. Definimos mais formalmente

$$F(x, t) = f_t(x) = (1 - t)f(x) + tg(x), \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$

Assim, (f_t) é uma família 1-paramétrica de germes com $f_0 = f$ e $f_1 = g$. Pretendemos mostrar que quaisquer dois germes nesta família são equivalentes, o que provará o resultado. Como a reta real é conexa, bastará mostrar que dado qualquer $s \in \mathbb{R}$ temos $f_t \sim f_s$ para t próximo de s . Afirmamos que, para isso, será suficiente mostrar que existe um germe em $(0, s)$ de uma aplicação suave $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ para o qual:

- (a) : $H(x, s) = x$,
- (b) : $H(0, t) = 0$,
- (c) : $F(H(x, t), t) = F(x, s)$.

Para ver isso, escrevemos $h_t(x) = H(x, t)$. Agora, (a) nos diz que h_s é a identidade. Segue-se que, para t próximo de s , o germe h_t deve ser invertível, pois o determinante da matriz jacobiana de h_t em 0 depende continuamente de t . Além disso, a condição (b) garante que h_t mapeia a origem em $\mathbb{R}^n$ para ela mesma.

Finalmente, a condição (c) pode ser reescrita como $f_t \circ h_t = f_s$, então $f_t \sim f_s$ para t próximo de s , como requerido. Note, incidentalmente, que (c) é automaticamente satisfeita para $t = s$, em vista de (a). Assim, será suficiente substituir (c) pela condição de que o lado esquerdo não depende de t , ou seja, possui derivada zero em relação a t . Escrito em detalhes, isso resulta na condição:

$$(c') : \sum_{i=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial t_i}(x, t) \frac{\partial F}{\partial x_i}(H(x, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = 0.$$

Nosso problema, então, é construir uma aplicação suave H que satisfaça as condições (a), (b), e (c'). Afirmamos que será suficiente construir um germe em $(0, s)$ de uma aplicação suave $\xi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ para a qual,

$$(d) : \sum \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial t},$$

$$(e) : \xi_i(0, t) = 0.$$

Suponha que tal aplicação ξ exista. Podemos pensar em ξ como um campo vetorial dependente do tempo em $\mathbb{R}^n$. Ele possui, portanto, um fluxo, isto é, uma aplicação H do tipo requerido, para a qual,

$$(f) : \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \xi(H(x, t), t),$$

e que pode ser suposta a satisfazer a “condição inicial” (a). Um cálculo simples mostra que (c') segue de (d) e (f) e que (b) segue de (a), (e) e (f). Resta estabelecer a existência de uma aplicação ξ com as propriedades (d) e (e). O argumento é algébrico e não depende do valor particular de s escolhido: portanto, assumiremos $s = 0$. Além disso, como desejamos trabalhar simultaneamente com funções de n variáveis $x_1, \dots, x_n$ e funções de $(n+1)$ variáveis $x_1, \dots, x_n, t$ consideraremos um elemento de ε_n como um elemento de ε_{n+1} que não depende de t . A condição (e) é simplesmente o requisito de que $\xi_1, \dots, \xi_n$ deve pertencer a $\mathfrak{M}_n$. Como preliminar, note que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}((1-t)f + tg) = g - f \in \mathfrak{M}_n^{k+1},$$

usando o fato de que $g - f$ possui k -jato zero. Assim, (d) seguirá de

$$\mathfrak{M}_n^{k+1} \subseteq \mathfrak{M}_n < \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} >, \quad (7)$$

depois teremos,

$$\mathfrak{M}_n^{k+1} \subseteq \mathfrak{M}_n^k \subseteq \mathfrak{M}_n < \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} > ,$$

e,

$$\mathfrak{M}_n^{k+1} \subseteq \mathfrak{M}_n < \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} > + \mathfrak{M}_{n+1} \mathfrak{M}_n^{k+1}. \quad (8)$$

A primeira inclusão é trivial, a segunda é a hipótese do teorema, e a terceira decorre do fato de que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{t \partial (g - f)}{\partial x_i} \in \mathfrak{M}_{n+1} \mathfrak{M}_n^{k+1}.$$

A equação 7 agora segue imediatamente da equação 8 utilizando o Lema de Nakayama, e o resultado é então provado. $\blacksquare$

O Lema de Nakayama nos diz que a condição $\mathfrak{M}^k \subseteq \mathfrak{M}_{J_f}$ é equivalente à condição aparentemente mais complicada $\mathfrak{M}^k \subseteq \mathfrak{M}_{J_f} + \mathfrak{M}^{k+1}$. Escolhemos a primeira condição porque é mais simples de lembrar, embora na prática seja mais fácil estabelecer a segunda condição.

É conveniente chamar $f \in \varepsilon_n$ de finitamente determinado quando f é k -determinado para algum $k \geq 1$. Segue-se então das proposições 4.7 e 4.12) que, se f é de codimensão finita, então automaticamente f é finitamente determinado. A prática

de mostrar que um germe $f \in \varepsilon_n$ é k -determinado é muito semelhante àquela envolvida no cálculo da codimensão, discutida anteriormente. Verifica-se sucessivamente se $\mathfrak{M}^k \subseteq \mathfrak{M}J_f + \mathfrak{M}^{k+1}$ para $k = 1, 2, \dots$, e para um dado k isso é equivalente a mostrar que cada monômio de grau $k + 1$ em $x_1, \dots, x_n$ pertence ao ideal $\mathfrak{M}J_f + \mathfrak{M}^{k+1}$.

Proposição 4.13. *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^j$, $N \subseteq \mathbb{R}^k$ variedades suaves de dimensões m e n , respectivamente. Então $M \times N \subseteq \mathbb{R}^{j+k}$ é uma variedade suave de dimensões $m + n$.*

Exemplo 4.3. Considere um germe $f \in \varepsilon_1$ para o qual as seguintes condições são satisfeitas:

$$f(0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0, \dots, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(0) = 0, \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(0) \neq 0.$$

Claramente, $f \in J_{k+1}$, $f \notin \mathfrak{M}_1^{k+1}$. Segue-se do Lema de Hadamard que podemos escrever $f = x^{k+1}g$ para algum $g \in \varepsilon_1$ com $g(0) \neq 0$. Então, $\frac{\partial f}{\partial x} = x^k\{(k+1)g+x\}$, a expressão entre chaves é $\neq 0$, então invertível pela proposição 4.13 e isso conclui que $J_f = \langle x^k \rangle = \mathfrak{M}^k$ então $\mathfrak{M}J_f = \mathfrak{M}^{k+1}$. A proposição 4.12 nos diz que f é $(k + 1)$ -determinado, então $f = cx^{k+1}$ onde $c \neq 0$. Uma mudança óbvia de coordenadas nos dá $f \sim x^{k+1}$.

Exemplo 4.4. O germe $f(x, y) = x^3 + y^3$ é 3-determinado. Aqui $J_f = \langle x^2, y^2 \rangle$, então $\mathfrak{M}J_f = \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle = \mathfrak{M}^3$, como segue de 4.12, e o resultado é concluído.

Observação 4.1. *Outra condição suficiente para que $f \in \varepsilon_n$ seja k -determinado é que $\mathfrak{M}^{k+1} \subset \mathfrak{M}^2J_f$. A prova disso é exatamente a mesma que a de 4.12; basta verificar que as últimas linhas daquela prova também são válidas com esta hipótese. É claro que esta é uma ligeira melhoria em relação a proposição 4.12, pois $\mathfrak{M}^{k+1} \subset \mathfrak{M}^2J_f$ é uma condição mais fraca que $\mathfrak{M}^k \subset \mathfrak{M}J_f$.*

Exemplo 4.5. O germe $f(x, y) = x^4 + y^4$ é 4-determinado. Aqui $J_f = \langle x^3, y^3 \rangle$, então $\mathfrak{M}J_f = \langle x^4, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 \rangle$ e a condição $\mathfrak{M}^4 \subset \mathfrak{M}J_f$ não é satisfeita e, portanto, 4.12 não nos permite concluir que f é 4-determinado. Por outro lado, $\mathfrak{M}^2J_f = \langle x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5 \rangle = \mathfrak{M}^3$ usando a melhoria de 4.12, conclui-se que f é 4-determinado.

Note que, se $f \in \varepsilon_n$ é k -determinado, então ele é, em particular, equivalente ao seu polinômio de Taylor de ordem k . Assim, o estudo de germes em ε_n de codimensão finita se reduz ao estudo de germes polinomiais. A propósito, é importante lembrar que um germe polinomial de grau k que é finitamente determinado não é necessariamente k -determinado.

Exemplo 4.6. O germe $f(x, y) = x^5 + y^5$ é facilmente verificado como 6-determinado, mas pode-se mostrar que ele não é 5-determinado.

4.3 CLASSIFICAÇÃO DE GERMES DE CODIMENSÃO MENOR OU IGUAL A CINCO

Agora vamos a classificação de germes de baixa codimensão. Começaremos com germes de codimensão 0.

Proposição 4.14. *Uma condição necessária e suficiente para que um germe $f \in \varepsilon_n$ tenha codimensão 0 é que ele seja não singular; e nesse caso, ele é equivalente ao germe*

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_1.$$

Necessidade

Suponha que f tenha codimensão 0, de modo que $J_f = \varepsilon_n$ e o elemento identidade 1 pertença a J_f , isto é, podemos encontrar germes $\xi_1, \dots, \xi_n$ em ε_n para os quais $1 = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$. Ao avaliar em 0, vemos que pelo menos uma derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \neq 0$, e portanto f é não singular.

Suficiência

Suponha que f seja não singular, então pelo menos uma derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \neq 0$. Pela proposição 4.13, isso significa que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é um elemento invertível de ε_n , e portanto $J_f = \mathfrak{m}_n$, então f tem codimensão 0.

Finalmente, um germe não singular em ε_n é equivalente a $(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow x_1$.

4.3.1 Germes de codimensão 1

Lembrando nossa discussão sobre funções nas seções anteriores deste trabalho, dizemos que um germe $f \in \mathfrak{M}_n^2$, isto é, um germe singular, é não degenerado quando a matriz Hessiana,

$$H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right),$$

é não singular.

A próxima proposição, que classifica germes de codimensão 1, é um resultado clássico no cálculo de variações, chamado Lema de Morse.

Proposição 4.15. *Uma condição necessária e suficiente para que um germe $f \in \mathfrak{M}_n^2$ seja de codimensão 1 é que ele seja não degenerado; e, nesse caso, f será equivalente a um germe da forma $x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2$.*

Demonstração: A principal parte da prova consiste em estabelecer que $f \in \mathfrak{M}_n^2$ é não degenerado se, e somente se, $J_f = \mathfrak{M}$. (Nota: $\mathfrak{M} \supseteq J_f$ automaticamente, uma vez que todas as $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ se anulam em 0.) Para esse fim, seja Q o segundo polinômio de Taylor de f , que é apenas uma forma quadrática em $x_1, \dots, x_n$. A não degenerescência de f é equivalente à não degenerescência (no sentido usual) da forma quadrática Q , o que por sua vez é equivalente a dizer que os $\frac{\partial Q}{\partial x_i}$ geram o espaço vetorial de todos os polinômios lineares em $x_1, \dots, x_n$ (por álgebra linear elementar). Como temos $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, modulo de $\mathfrak{M}^2$ essa última condição é equivalente a $J_f + \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}$, o que por sua vez é equivalente a $J_f = \mathfrak{M}$, usando uma aplicação óbvia do Lema de Nakayama. O restante da prova agora é fácil.

Suficiência

Suponha f não degenerado, então $J_f = \mathfrak{M}$ pelo que foi demonstrado acima. Então $\text{codim } f = \dim(\varepsilon/J_f) = \dim(\varepsilon/\mathfrak{M}) = 1$.

Necessidade

Suponha que f tenha codimensão 1. Certamente então $\dim(\varepsilon/\mathfrak{M}) = 1$. E se $J_f \subset \mathfrak{M}$, então $\dim(\varepsilon/J_f) > 1$, isto é, $\text{codim } f > 1$, o que é impossível. Assim, $J_f = \mathfrak{M}$, e f é não degenerado, pela discussão anterior.

Finalmente, precisamos verificar que f tem a forma normal citada. Como vimos acima, a não degenerescência de f é equivalente a $J_f = \mathfrak{M}$, o que implica $\mathfrak{M}^2 \subseteq \mathfrak{M}J_f$. Isso segue imediatamente do resultado 4.12, que diz que f é 2-determinado, então equivalente ao seu segundo polinômio de Taylor Q . Recordando da álgebra quadrática, sabemos que Q , sendo uma forma quadrática não degenerada, é equivalente (sob uma mudança linear de coordenadas) à forma normal $x_1^2 + \cdots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \cdots - x_n^2$, onde s é o índice de Q . Isso conclui a prova. ■

Lembramos que qualquer função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser aproximada tão de perto quanto quisermos por uma função $f_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que admite apenas pontos críticos não degenerados; e, de fato, que f_t pode ser obtida a partir de f por uma deformação linear. Um dos nossos exemplos foi o “sela de macaco” com a função:

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2,$$

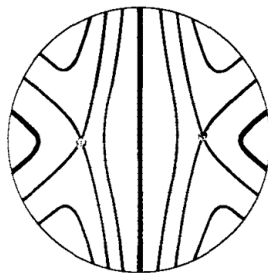
que admite um ponto crítico degenerado em 0.

Neste caso, poderíamos considerar:

$$f_t(x, y) = x^3 - 3xy^2 - tx,$$

como a função aproximada, para $t > 0$ tão pequeno quanto quisermos. O ponto crítico degenerado de f em 0 “se divide” em dois pontos críticos não degenerados nos pontos $(\pm\sqrt{t/3}, 0)$. O diagrama de curvas de nível $f^{-1}(\varepsilon)$ é como mostrado abaixo: o leitor notará que próximo aos pontos críticos temos precisamente a situação descrita acima.

Figura 11 – Difeomorfismo.



Fonte: Gibson (1979).

4.3.2 Classificação para germes de codimensão ≥ 2

Para avançar a classificação de germes de codimensão > 2 , precisaremos de mais uma ferramenta. Suponha que f em $\mathfrak{M}_n^2$ tenha codimensão 2. Certamente então a matriz Hessiana H_f é singular, então possui posto $r < n$; o inteiro não-negativo $c = n - r$ é chamado de *coposto* de g . (Pode-se facilmente verificar que ele é invariante sob equivalência.)

A ferramenta extra de que precisamos é o seguinte resultado, conhecido como

o “Splitting Lemma” (Lema da Divisão), provado originalmente sob hipóteses menos restritivas.

4.4 SPLITTING LEMMA

Proposição 4.16. *Seja $f \in \mathcal{E}_2^n$ um germe de coposto c finitamente-determinado; f é equivalente a um germe:*

$$g(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2,$$

onde $g \in \mathfrak{M}_c^3$ e cada $\delta_i = \pm 1$.

Demonstração: Usaremos a seguinte notação. Dados dois germes ϕ, ψ em $\mathcal{E}_n$, escrevemos $\phi \tilde{k} \psi$ quando existe um germe invertível $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ para o qual $\phi \circ h, \psi$ têm o mesmo k -jato. Note que $\tilde{k}$ é uma relação de equivalência. Queremos mostrar, por indução sobre k , que existe um germe $g_k \in \mathfrak{M}_c^3$, que é polinomial de grau $\leq k$, para o qual

$$f(x_1, \dots, x_n) \tilde{k} g_k(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2. \quad (9)$$

Isto será suficiente para provar o resultado, pois existe um k para o qual f é equivalente ao seu k -jato.

A indução começa com $k = 2$. O 2-jato de f é uma forma quadrática em n variáveis de posto $r = n - c$, então é equivalente (sob uma mudança linear de coordenadas) a uma forma quadrática $\delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2$ com cada $\delta_i = \pm 1$, pela álgebra quadrática padrão; e podemos tomar $g_2 = 0$.

Para o passo da indução, assumimos 9. Então:

$$f(x_1, \dots, x_n) \tilde{k} + 1 g_k(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2 + H(x_1, \dots, x_n), \quad (10)$$

onde H é um polinômio homogêneo de grau $k + 1$. Agora escrevemos,

$$H(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_c) + x_{c+1}H_{c+1}(x_1, \dots, x_n) + \dots + x_n H_n(x_1, \dots, x_n),$$

onde h é um polinômio homogêneo de grau $k+1$ e $H_{c+1}, \dots, H_n$ são polinômios homogêneos de grau k . Usamos esses últimos polinômios para definir $\phi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$, definindo seus componentes como:

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1, \\ &\vdots \\ \phi_c(x_1, \dots, x_n) &= x_c, \\ &\vdots \\ \phi_{c+1}(x_1, \dots, x_n) &= x_{c+1} - \frac{1}{2\delta_{c+1}}H_{c+1}(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \phi_n(x_1, \dots, x_n) &= x_n - \frac{1}{2\delta_n}H_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Note que a matriz Jacobiana de ϕ é a matriz identidade $n \times n$, então ϕ é invertível. Substituindo $\phi_1, \dots, \phi_n$ por $x_1, \dots, x_n$ obtemos em 10, que

$$f(x_1, \dots, x_n) \tilde{k} + 1 g_{k+1}(x_1, \dots, x_c) + \delta_{c+1}x_{c+1}^2 + \dots + \delta_n x_n^2,$$

onde $g_{k+1} = g_k + h$. Isso completa o passo da indução e estabelece o resultado. ■

É importante observar que os germes f e g que aparecem na formulação do “splitting lemma” têm necessariamente a mesma codimensão. Nossa primeira aplicação do “splitting lemma” é estabelecer uma conexão ampla entre o coposto e a codimensão de

um germe, o que será essencial para o restante da classificação. De forma geral, à medida que o coposto aumenta, a codimensão também aumenta, e mais rapidamente. De forma mais precisa, temos:

Proposição 4.17. *Seja $f \in \mathfrak{M}_n^2$ um germe de codimensão finita e coposto c : a codimensão de f é $\geq \frac{c(c+1)}{2} + 1$.*

Demonstração: Já observamos anteriormente que um germe de codimensão finita é automaticamente finitamente-determinado, então o Lema de Divisão se aplica, e nos diz que f é equivalente a um germe $g(x_1, \dots, x_c) \pm x_{c+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2$ com $g \in \mathfrak{M}_c^3$; e (vide a observação acima) f tem a mesma codimensão que g .

Note que $I = \mathfrak{M} + c_g^J \subset \mathfrak{M}_c^3$.

Logo,

$$\text{cod} I = \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \text{cod}_2 I + \text{cod}_3 I + \dots \quad (11)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \text{cod}_0 I &= \dim \frac{I + \varepsilon_c}{I + \mathfrak{M}_c} = \dim \frac{\varepsilon_c}{\mathfrak{M}_c} = 1 \\ \text{cod}_1 I &= \dim \frac{I + \mathfrak{M}_c}{I + \mathfrak{M}_c^2} = \dim \frac{\mathfrak{M}_c}{\mathfrak{M}_c^2} = c \\ \text{cod}_2 I &= \dim \frac{I + \mathfrak{M}_c^2}{I + \mathfrak{M}_c^3} = \dim \frac{\mathfrak{M}_c^2}{\mathfrak{M}_c^3} = \frac{c(c+1)}{2} \end{aligned}$$

então,

$$1 + c + \frac{c(c+1)}{2} \leq \text{cod} I = c + \text{cod} J_g.$$

■

Para ilustrar, temos as seguintes estimativas aproximadas:

$$c = 1 : \text{cod } f \geq 2; c = 2 : \text{cod } f \geq 4; c = 3 : \text{cod } f \geq 7; \dots$$

A consequência da proposição 4.12 que precisamos isolar é que se $\text{cod } f \leq 5$, então o coposto de $f \leq 2$. Portanto, será suficiente analisar germes de coposto 1 e coposto 2. O próximo resultado é devido a R. Thom.

Proposição 4.18. *Seja $f \in \mathfrak{M}_n^2$ um germe de codimensão ≥ 2 e ≤ 5 : então (até adição de uma forma quadrática não degenerada em variáveis adicionais e multiplicação por ± 1), f é equivalente a um dos sete germes na lista a seguir:*

Tabela 1 – Classificação de germes

Coposto	Codimensão	Germes	Nome
1	2	x^3	Dobra
1	3	x^4	Cúspide
1	4	x^5	Rabo de andorinha
1	5	x^6	Borboleta
2	4	$x^3 - xy^2$	Umbílico elíptico
2	4	$x^3 + y^3$	Umbílico hiperbólico
2	5	$x^2y + y^4$	Umbílico parabólico

Fonte: PRÓPRIO AUTOR (2024).

O significado exato dessa afirmação ficará claro conforme avançamos. O Lema de Morse nos dá uma classificação completa de germes de coposto 0. Agora vamos classificar todos os germes de coposto 1 com codimensão finita.

Proposição 4.19. *Seja $f \in \mathfrak{M}_n^2$ um germe de coposto 1 e codimensão finita $k - 1$, então:*

$$f(x_1, \dots, x_n) \sim g(x_1) \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

Demonstração: Sabemos que um germe de codimensão finita é finitamente determinado, então o “splitting lemma” se aplica e nos diz que:

$$f(x_1, \dots, x_n) \sim g(x_1) + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$

onde $g \in \mathfrak{M}_1^3$ também tem codimensão k . Escreva $x = x_1$. É suficiente agora mostrar que $g \sim \pm x^k$. Observe que deve existir um menor inteiro j tal que $g \in \mathfrak{M}_1^j$, $g \notin \mathfrak{M}_1^{j+1}$; caso contrário, $J_g \subseteq \mathfrak{M}_1^j$ para todo j então $\text{cod } j \geq \text{cod } \mathfrak{M}_1^j = j$, isto é, g teria codimensão infinita. O Lema de Hadamard nos diz que $g(x) = x^j h(x)$ com $h(0) \neq 0$: um cálculo mostra que g tem codimensão $(j - 1)$, logo $j = k$. Suponha k ímpar. Nesse caso, tome $\phi : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ o germe dado por $\phi(x) = xh(x)^{\frac{1}{k}}$; claramente, $\phi'(0) \neq 0$ então ϕ é invertível. Além disso, $g(x) = \phi^k(x)$, então $g \sim x^k$. O mesmo raciocínio se aplica quando k é par e $h(0) > 0$, e resulta em $g \sim x^k$. Mas quando k é par e $h(0) < 0$, tomamos $\phi(x) = x - h(x)^{\frac{1}{k}}$ para deduzir $g \sim -x^k$. ■

Proposição 4.20. *Seja $f \in \mathfrak{M}^2$ de coposto 2 e codimensão ≤ 5 : então f é equivalente a um dos seguintes germes:*

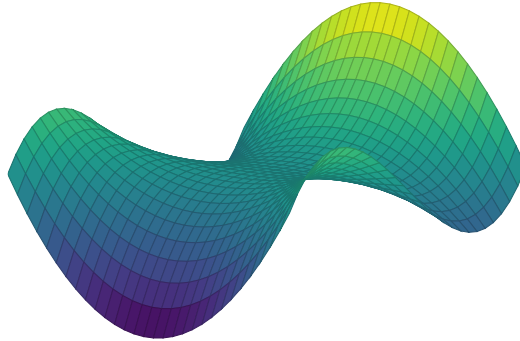
$$\begin{aligned} &\pm(x_1^3 - x_1x_2^2) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2, \\ &\pm(x_1^3 + x_2^3) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2, \\ &\pm(x_1^2x_2 + x_2^4) \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2. \end{aligned}$$

Demonstração: Novamente, é o “splitting lemma” que fornece o primeiro passo. Ele nos diz que f é equivalente a um germe $g(x_1, x_2) + x_3^2 + \dots + x_n^2$ com $g \in \mathfrak{M}_2^3$ de mesma codimensão que f , a saber, ≤ 5 . O terceiro polinômio de Taylor de g é uma forma cúbica binária em x_1, x_2 , e pode ser assumido como 0, $x_1^3 - x_1x_2^2$, $x_1^3 + x_2^3$ ou $x_1^2x_2$ conforme seja identicamente zero, simbólico, elíptico, hiperbólico ou parabólico. Precisamos decidir

quais possibilidades podem ocorrer. Para isso, lembre-se de que um germe de coposto 2 tem codimensão ≥ 4 . Em particular, f (e, portanto, g) possui codimensão 4 ou 5. Vamos considerar as possibilidades separadamente.

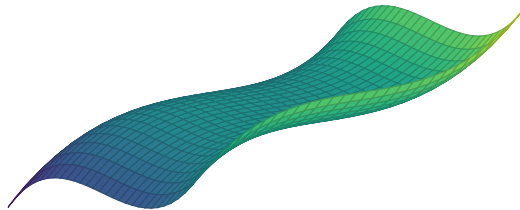
Para estes casos temos as figuras a seguir:

Figura 12 – Umbílico elíptico.



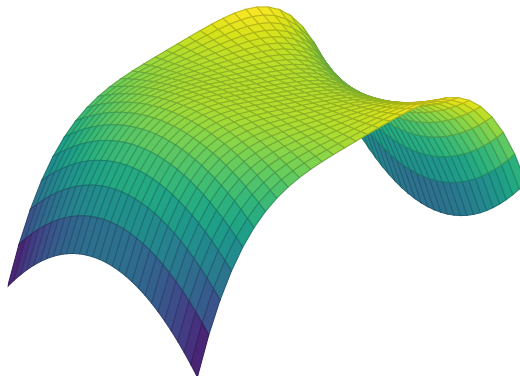
Fonte: Próprio Autor (2024).

Figura 13 – Umbílico hiperbólico.



Fonte: Próprio Autor (2024).

Figura 14 – Umbílico parabólico.



Fonte: Próprio Autor (2024).

4.4.1 O germe g tem codimensão 4

Usaremos a seguinte proposição:

Proposição 4.21. *Seja $f \in \varepsilon_n$, e suponha que um dos ideais J_f e $\mathfrak{M}J_f$ tenha codimensão finita e positiva. Então temos: $\text{cod } \mathfrak{M}J_f = n + \text{cod } J_f$.*

Como $g \in \mathfrak{M}^3$, temos $J_g \subset \mathfrak{M}^2$, então $\mathfrak{M}J_g \subset \mathfrak{M}^3$. Na verdade, $\mathfrak{M}J_g = \mathfrak{M}^3$. Para ver isso, argumentamos da seguinte forma. Definimos $I = \mathfrak{M}J_g$. Sabemos que J_g

possui codimensão 4, e, portanto, pela proposição 4.21, I tem codimensão 6. Pela equação 11, sabemos que:

$$\text{cod } I = \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \text{cod}_2 I + \cdots.$$

Mas $I \subset \mathfrak{M}^j$ e, assim, $I + \mathfrak{M}^j = \mathfrak{M}^j$ para $j \leq 3$, de modo que,

$$\text{cod}_0 I = 1, \quad \text{cod}_1 I = 2, \quad \text{cod}_2 I = 3.$$

Deduzimos então que,

$$\text{cod}_3 I = 0,$$

o que implica que $\mathfrak{M}^3 \subset I = \mathfrak{M}J_g$, como desejado.

Segue agora de 4.12 que g é 3-determinado, logo equivalente ao seu terceiro polinômio de Taylor. Verificando as cinco formas normais possíveis uma a uma, vemos que as únicas de codimensão 4 são o tipo elíptico e tipos hiperbólicos. E estes nos dão os dois primeiros germes da lista.

4.4.2 O germe g tem codimensão 5

Novamente, como $g \in \mathfrak{M}^3$, temos $J_g \subseteq \mathfrak{M}^2$, de modo que $\mathfrak{M}J_g \subseteq \mathfrak{M}^3$. Novamente definimos $I = \mathfrak{M}J_g$. Desta vez, J_g possui codimensão 5, então, pela proposição 4.21, a codimensão de I é 7. Além disso, sabemos que

$$\text{cod } I = \text{cod}_0 I + \text{cod}_1 I + \text{cod}_2 I + \text{cod}_3 I + \cdots.$$

Como antes,

$$\text{cod}_0 I = 1, \quad \text{cod}_1 I = 2, \quad \text{cod}_2 I = 3,$$

então devemos ter:

$$\text{cod}_3 I = 1 \quad \text{e} \quad \text{cod}_4 I = 0.$$

Verificando as cinco formas normais para o terceiro polinômio de Taylor uma a uma, vemos que a única para a qual $\text{cod}_3 I = 1$ é o tipo parabólico $x_1^2 x_2$. Além disso, o fato de que $\text{cod}_4 I = 0$ nos diz que $\mathfrak{M}^4 \subseteq \mathfrak{M}J_g$, então g é 4-determinado pela proposição 4.17, sendo assim equivalente ao seu quarto polinômio de Taylor. Esse polinômio tem a forma:

$$x_1^2 x_2 + \Phi(x_1, x_2),$$

onde Φ é um polinômio homogêneo de grau 4 em x_1 e x_2 . Podemos escrever isso como:

$$x_1^2 x_2 + \{ax_2^4 + bx_2^3 x_1 + x_2^2 \Phi(x_1, x_2)\},$$

onde $\phi(x_1, x_2)$ é uma forma quadrática em x_1 e x_2 . Note que, se alterarmos as coordenadas e tomarmos o quarto polinômio de Taylor do resultado, obtemos um germe equivalente, pois a 4-determinação é invariante sob equivalência. Em particular, se substituirmos x_1 por $x_1 - \frac{b}{2}x_2^2$ e x_2 por $x_2 - \phi(x_1, x_2)$, e tomarmos o quarto polinômio de Taylor do resultado, obtemos o germe equivalente a:

$$x_1^2 x_2 + ax_2^4.$$

Note que necessariamente $a \neq 0$ (pois, caso contrário, o germe teria codimensão infinita).

Finalmente, se substituirmos x_1 por px_1 e x_2 por qx_2 , e escolhermos p e q de forma adequada, vemos que nosso germe é equivalente a:

$$x_1^2 x_2 \pm x_2^4,$$

dependendo do sinal de a . Isso nos fornece o último germe da lista. ■

Naturalmente, combinando os resultados 4.19 e 4.20, provamos 4.18 e, por-

tanto, obtemos a classificação completa dos germes de codimensão menor ou igual a 5.

5 CONCLUSÃO

Nesse trabalho fizemos uma análise abrangente sobre a classificação de pontos críticos, ressaltando a distinção fundamental entre pontos degenerados e não degenerados. A aplicação do Lema de Morse foi essencial para a classificação precisa dos pontos não degenerados, utilizando as propriedades locais da função quando o determinante Hessiano é não-nulo. Para os pontos degenerados, o uso do “Splitting Lemma” permitiu abordar com clareza a estrutura mais complexa desses pontos, oferecendo um caminho robusto para sua análise e compreensão.

O estudo dos germes de funções, focado em codimensões de até cinco, proporcionou uma visão detalhada das singularidades de baixa a média complexidade, que possuem relevância em áreas como física, geometria e robótica. Ao restringir o escopo a essa faixa de codimensão, foi possível obter uma análise rica das singularidades, aprofundando a compreensão de sua estrutura e suas aplicações.

Esperamos que essas contribuições sejam importantes para a análise de singularidades em funções definidas em espaços de múltiplas dimensões, beneficiando o estudo de modelagens geométricas e outras áreas que exigem a compreensão detalhada de superfícies e espaços multidimensionais.

Por fim, esperamos que este trabalho inspire mais estudantes de graduação a explorar o campo das singularidades, um dos ramos mais ricos e desafiadores da matemática moderna. A Teoria das Singularidades oferece não apenas uma compreensão aprofundada de pontos críticos e estruturas locais de funções, mas também uma ampla aplicabilidade em diferentes áreas do conhecimento.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, Tom M. **Calculos**, Vol. 1. John Wiley & Sons, 1991.

FREITAS, Antonio dos Santos. **Uma abordagem de pontos críticos e as funções de Morse** 2008. 186 f. Dissertação (Mestrado em Desenvolvimento e Meio Ambiente) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2017.

GIBSON, C. G. **Singular points of smooth mappings**. Pitman publishing limited, 1979.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, vol. 2 . Grupo Gen-LTC, 2000.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**: vol. 1. Rio de Janeiro. LTC - Livros Técnicos e Científicos. 5 edição, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Rio de Janeiro: instituto de matemática pura e aplicada, 2014a.

LIMA, Elon Lages. **Um curso de análise** vol. 1. Rio de Janeiro: instituto de matemática pura e aplicada, 2014b.

LIMA, Elon Lages. **Um curso de análise** vol. 2. Rio de Janeiro: instituto de matemática pura e aplicada, 2014c.

SAIA, Marcelo José. Uma introdução à teoria das singularidades. **ICMC-USP**, São Paulo, 2011.

STEWART, James. **Cálculo**, vol. 1. São Paulo: Saraiva, 2022a.

STEWART, James. **Cálculo**, vol. 2. São Paulo: Saraiva, 2022b.

TENENBLAT, Ketí. **Introdução à geometria diferencial**. Editora Blucher, 2008.

TOGNON, Carlos Henrique; NOGUEIRA, Antônio Carlos. Uma introdução à teoria dos pontos críticos. **FAMAT em Revista**, Belo Horizonte, v. 1, n. 09, p. 13–24, 2007.