



UNILAB

UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA

AFRO-BRASILEIRA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

CLARISSA PINHEIRO DE SOUSA

FORMALISMO DO OPERADOR TRANSLAÇÃO DEPENDENTE DA POSIÇÃO

UNIDIMENSIONAL

REDENÇÃO - CE

2025

CLARISSA PINHEIRO DE SOUSA

FORMALISMO DO OPERADOR TRANSLAÇÃO DEPENDENTE DA POSIÇÃO
UNIDIMENSIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Física do Instituto de
Ciências Exatas e da Natureza da Universidade
da Integração Internacional da Lusofonia Afro-
Brasileira, como requisito parcial à obtenção do
grau de licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Ma-
cedo Braga.

REDENÇÃO - CE

2025

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Sousa, Clarissa Pinheiro de.

S725f

Formalismo do operador translação dependente da posição
unidimensional / Clarissa Pinheiro de Sousa. - Redenção, 2025.
42f: il.

Monografia - Curso de Física, Instituto de Ciências Exatas e da
Natureza, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia
Afro-Brasileira, Redenção, 2025.

Orientador: Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga.

1. Mecânica quântica. 2. Operador translação. 3. Massa
dependente da posição. 4. Geometria de riemann. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 530.12

CLARISSA PINHEIRO DE SOUSA

FORMALISMO DO OPERADOR TRANSLAÇÃO DEPENDENTE DA POSIÇÃO
UNIDIMENSIONAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Graduação em Física do Instituto de
Ciências Exatas e da Natureza da Universidade
da Integração Internacional da Lusofonia Afro-
Brasileira, como requisito parcial à obtenção do
grau de licenciado em Física.

Aprovada em: 04/06/2025.

BANCA EXAMINADORA



Documento assinado digitalmente
JOAO PHILIPPE MACEDO BRAGA
Data: 10/06/2025 15:39:32-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. João Philipe Macedo Braga (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)



Documento assinado digitalmente
ANTONIO ISABEL PAZ PIRES
Data: 10/06/2025 13:34:11-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Me. Antônio Isael Paz Pires
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Documento assinado digitalmente
PEDRO HENRIQUE FERREIRA DE OLIVEIRA
Data: 10/06/2025 12:54:03-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Pedro Henrique Ferreira de Oliveira
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

À minha avó, minha verdadeira mãe, ao meu
namorado, sempre presente e paciente e à minha
irmã Valentina e meu pai, por encherem meus
dias de amor, alegria e presença.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), ao Projeto Pulsar e ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), pelas bolsas concedidas pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) e Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB), que contribuíram imensamente para a minha formação acadêmica e profissional.

Agradeço ao professor João Philipe Macedo Braga, meu orientador, por toda a orientação, paciência e apoio constante durante a realização deste trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora, Antônio Isael Paz Pires e Pedro Henrique Ferreira de Oliveira, pelo tempo, pelas valiosas colaborações, ensinamentos e sugestões que enriqueceram esta pesquisa.

A minha avó, cuja dedicação foi essencial. Seu amor, dedicação e almoços deliciosos foram fundamentais ao longo de toda a minha trajetória.

Ao meu namorado, meu parceiro de graduação e de vida, por todo o apoio, paciência e incentivo. A sua presença constante foi essencial para a realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"O espaço nos diz como se mover, a matéria nos
diz como curvar o espaço." (Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar e discutir o formalismo do operador de translação dependente da posição (PDTO) em uma dimensão, uma abordagem alternativa à mecânica quântica tradicional que incorpora explicitamente a estrutura geométrica do espaço de posições. A introdução de uma métrica variável $g(x)$ leva à redefinição dos operadores fundamentais, como o momento linear, e modifica a estrutura do espaço de Hilbert, resultando em modificações nas relações de incerteza. A equação de Schrödinger, nesse contexto, assume a forma de um problema de Sturm-Liouville com peso, preservando a hermiticidade dos operadores e a ortonormalidade dos autoestados. Como aplicação, estuda-se o comportamento de uma partícula confinada em um poço de potencial infinito, evidenciando as deformações nas funções de onda e nos espectros de energia induzidas pelo parâmetro de deformação γ . O formalismo demonstra consistência com a teoria quântica tradicional no limite $\gamma \rightarrow 0$ e revela potencial para descrever sistemas com massa efetiva variável ou definidos em espaços com curvatura. As contribuições geométricas discutidas neste trabalho reforçam o papel da estrutura espacial na formulação da Mecânica Quântica e abrem perspectivas para estudos em contextos mais gerais.

Palavras-chave: Mecânica Quântica. Operador de Translação. Massa Dependente da Posição. Geometria de Riemann.

ABSTRACT

This work aims to present and discuss the formalism of the position-dependent translation operator (PDTO) in one dimension, an alternative approach to traditional quantum mechanics that explicitly incorporates the geometric structure of the position space. The introduction of a variable metric $g(x)$ leads to the redefinition of fundamental operators, such as linear momentum, and modifies the structure of the Hilbert space, resulting in changes to the uncertainty relations. In this context, the Schrödinger equation takes the form of a weighted Sturm–Liouville problem, preserving the hermiticity of the operators and the orthonormality of the eigenstates. As an application, the behavior of a particle confined in an infinite potential well is studied, highlighting the deformations in the wavefunctions and energy spectra induced by the deformation parameter γ . The formalism shows consistency with standard quantum theory in the limit $\gamma \rightarrow 0$, and reveals potential for describing systems with position-dependent effective mass or defined in curved spaces. The geometric contributions discussed in this work reinforce the role of spatial structure in the formulation of quantum mechanics and open perspectives for further studies in more general contexts.

Keywords: Quantum Mechanics. Translation Operator. Position-Dependent Mass. Riemannian Geometry.

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Representação gráfica de diferentes funções métricas $g(x)$, destacando a influência da curvatura sobre a distância infinitesimal no espaço unidimensional. 25
- Figura 2 – Densidade de probabilidade $|\phi_n(x)|^2$ no poço infinito com o formalismo PDTO para os estados $n = 1, n = 2$ e $n = 3$ 29
- Figura 3 – Comparação dos níveis de energia E_n para o poço infinito nos formalismos da MQT e PDTO. Os pontos marcados representam os valores efetivamente calculados; as linhas tracejadas apenas conectam os pontos. 32

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
FUNCAP	Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico
MQNA	Mecânica Quântica Não-Aditiva
MQT	Mecânica Quântica Tradicional
PDTO	<i>Position Dependent Translation Operator</i> (Operador Translação Dependente da Posição)
UNILAB	Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira

LISTA DE SÍMBOLOS

δ_{mn}	Delta de Kronecker
η	Coordenada transformada
γ	Parâmetro de deformação
$\hbar$	Constante de Planck reduzida
$\hat{P}_g$	Operador de momento no formalismo PDT0
$\hat{X}$	Operador posição
I	Operador identidade
k	Constante associada ao número de onda
L	Comprimento físico do sistema (ex: poço de potencial)
L_{efetivo}	Largura efetiva após mudança de variável
m	Massa da partícula
$m(x)$	Massa efetiva dependente da posição
D_g	Operador de derivada ponderada
ds	Elemento de comprimento físico infinitesimal
dx	Elemento de coordenada infinitesimal
E	Energia do sistema
E_n	Níveis de energia quantizados
$g(x)$	Função métrica (escala local do espaço)
$\langle \phi \psi \rangle$	Produto interno com peso no espaço de Hilbert
$\phi_n(x)$	Solução estacionária da equação de Schrödinger no formalismo PDT0
$\psi(x)$	Função de onda espacial
$\Psi(x, t)$	Função de onda dependente do tempo

$T_g(dx)$	Operador de translação dependente da posição
t	Tempo
$V(x)$	Potencial escalar
$V_{\text{eff}}(\eta)$	Potencial efetivo na coordenada η
x	Coordenada de posição

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FORMALISMO PDTO EM 1 DIMENSÃO	16
2.1	Geometria do Espaço Unidimensional	16
2.1.1	<i>Comprimento de Arco</i>	17
2.2	Definição do operador de translação dependente da posição	18
2.3	Espaço de Hilbert com peso e operadores fundamentais	19
2.3.1	<i>Operadores de Posição e Momento Generalizados</i>	19
2.4	Equação de Schrödinger e Relações de Comutação	20
3	ANÁLISE E DISCUSSÃO DO FORMALISMO	22
3.1	Momento Modificado e Equação de Schrödinger Generalizada	22
3.2	Mudança de Coordenadas e Espaço Efetivo	22
3.3	Interpretação como Massa Efetiva Variável	23
3.4	Interpretação Geométrica	23
4	POÇO INFINITO NO FORMALISMO PDTO	27
4.1	O poço infinito no formalismo PDTO	27
4.2	Densidade de probabilidade e interpretação geométrica	28
4.3	Comparação com a Mecânica Quântica Tradicional	30
5	CONCLUSÃO	33
	REFERÊNCIAS	35
	APÊNDICE A – Cálculos Detalhados no Formalismo PDTO	37

1 INTRODUÇÃO

A Mecânica Quântica, desde sua formulação no início do século XX, revolucionou a forma como compreendemos os fenômenos físicos em escalas microscópicas. Através de um formalismo matemático sólido e repleto de previsões bem-sucedidas, essa teoria se tornou uma das bases fundamentais da física contemporânea. Contudo, apesar de seu sucesso incontestável, a mecânica quântica tradicional ainda se apoia em certas suposições estruturais que raramente são questionadas — entre elas, a escolha de um espaço euclidiano como o palco onde os fenômenos quânticos ocorrem, e o uso de operadores que representam simetrias globais, como a translação usual [griffiths 2005, Cohen-Tannoudji *et al.* 1977, Sakurai 1994].

Nos últimos anos, cresceu o interesse em formulações mais gerais que incorporam efeitos geométricos locais, permitindo que os operadores fundamentais da teoria dependam de estruturas não uniformes do espaço [Filho *et al.* 2011]. É nesse contexto que surge o Operador Translação Dependente da Posição (PDTO) [Braga 2015], uma proposta que amplia a noção convencional de simetria translacional ao considerar uma função métrica $g(x)$ que modula a estrutura geométrica local. Tal abordagem exige o abandono do espaço plano tradicional e a adoção de um espaço riemanniano, com consequências profundas para a formulação dos operadores e das equações de movimento.

O formalismo PDTO representa, portanto, uma tentativa de construir uma mecânica quântica generalizada, onde os operadores de posição e momento, bem como o próprio espaço de Hilbert, devem ser redefinidos de modo coerente com a nova geometria subjacente. Essa abordagem teve início com o trabalho seminal de [Filho *et al.* 2011], no qual se propôs um operador de translação cuja ação depende da posição da partícula, levando a uma nova relação de comutação e a uma equação de Schrödinger modificada. Posteriormente [Braga 2015, Filho *et al.* 2016, Braga e Filho 2016] generalizaram esse formalismo, mostrando sua natural aplicação em cenários com espaços curvos, massas efetivas dependentes da posição e relações de comutação deformadas. Tal proposta se mostra particularmente útil para descrever sistemas em meios não homogêneos, com variações espaciais sutis, e pode oferecer pistas importantes para áreas como a gravidade quântica e a física de semicondutores, nas quais a estrutura do espaço ou do substrato não é trivial [Filho *et al.* 2013].

Além disso, o estudo de simetrias locais e deformações da álgebra de operadores tradicionais encontra ressonância em pesquisas atuais que buscam ir além do formalismo canônico da mecânica quântica.

Neste trabalho, investigamos o formalismo PDTO em uma dimensão espacial, concentrando-nos nas modificações conceituais e operacionais que emergem ao se considerar uma função métrica $g(x)$. A análise parte da construção geométrica do espaço, passando pela reformulação do espaço de Hilbert e dos operadores fundamentais, até a obtenção de uma equação de Schrödinger modificada. Ao longo do desenvolvimento, buscamos não apenas apresentar os resultados técnicos, mas também discutir suas implicações físicas e matemáticas de forma crítica e estruturada.

Além de seu valor conceitual, o formalismo PDTO dialoga com diversas linhas de pesquisa contemporâneas. Em contextos como a gravidade quântica, onde a estrutura do espaço-tempo pode variar localmente [Petruzziello e Wagner 2021, Das *et al.* 2022], ou em materiais com propriedades eletrônicas espacialmente moduladas [Benkrane e Benhadjira 2024], a ideia de uma translação que depende da posição adquire um significado físico concreto [Hamil e Lutfuoglu 2021, Pantig *et al.* 2022]. Isso mostra que as implicações desse formalismo vão além do interesse puramente teórico e podem abrir caminhos para investigações aplicadas em física da matéria condensada [Oubagha *et al.* 2023] e em fundamentos da teoria quântica [Wagner 2021, Wagner 2022].

Este trabalho não se limita a reproduzir resultados já estabelecidos, mas busca adotar uma postura crítica e investigativa diante da literatura existente. A partir de uma leitura cuidadosa e fundamentada das fontes, o desenvolvimento aqui proposto visa destacar os aspectos estruturais do formalismo PDTO, confrontando-os com a base tradicional da mecânica quântica e refletindo sobre suas implicações teóricas e práticas.

O trabalho está organizado em quatro capítulos principais e nas Considerações Finais. No Capítulo 2, desenvolve-se o Formalismo PDTO em 1D: começa-se pela geometria do espaço unidimensional (função métrica), segue-se com a definição do operador de translação dependente da posição, a construção do espaço de Hilbert ponderado e das funções de onda, a derivação dos operadores de posição e momento, e, finalmente, as relações de comutação e a forma modificada da equação de Schrödinger. O Capítulo 3 é dedicado à Análise e Discussão do Formalismo, contemplando a interpretação física das modificações, a comparação com o formalismo quântico tradicional e os limites nos quais o caso padrão é recuperado. No Capítulo 4 apresentam-se Aplicação em um Sistemas Unidimensional, com estudo do poço de potencial infinito e discussão dos resultados obtidos. Por fim, o Capítulo 5 traz as Considerações Finais, englobando a conclusão do trabalho e as perspectivas futuras de pesquisa.

Com esse percurso, esperamos contribuir para uma compreensão mais profunda das possibilidades de generalização da mecânica quântica e para a valorização de abordagens geométricas e estruturais no tratamento de sistemas físicos.

2 FORMALISMO PDTO EM 1 DIMENSÃO

2.1 Geometria do Espaço Unidimensional

Em Mecânica Quântica, os estados físicos são representados por funções chamadas funções de onda, que vivem em um espaço matemático chamado espaço de Hilbert. Esse espaço é como uma versão “infinito-dimensional” do espaço vetorial comum, com a diferença de que nele podemos definir comprimentos e ângulos entre funções usando o produto interno. A estrutura métrica do espaço determina como distâncias são calculadas entre pontos, sendo no caso euclidiano equivalente à simples diferença entre posições. A fórmula:

$$ds^2 = dx^2, \quad (2.1)$$

indica que um pequeno deslocamento dx no espaço tem comprimento igual a ele mesmo, o que implica que o espaço é plano e uniforme, onde ds representa um elemento infinitesimal de comprimento e dx é o incremento infinitesimal da coordenada de posição. Essa suposição implica que a distância entre dois pontos no espaço físico é uniforme e independe da posição: mover-se de $x = 0$ para $x = 1$ é equivalente, geometricamente, a mover-se de $x = 10$ para $x = 11$.

Entretanto, ao introduzir o operador de translação dependente da posição (PDTO, do inglês, *Position-Dependent Translation Operator*), a suposição de um espaço plano com métrica constante $ds^2 = dx^2$ torna-se insuficiente. Isso ocorre porque esse operador, por definição, implementa deslocamentos que variam com a posição, o que sugere uma estrutura geométrica não trivial do espaço. Em outras palavras, se a métrica depende da posição, isso significa que as densidades de pontos mudam de lugar para lugar. Por isso, até mesmo o cálculo de distâncias ou taxas de variação (como derivadas) precisa ser adaptado a essa estrutura. Para incorporar essa ideia, assume-se que o espaço físico possui uma métrica de Riemann em uma dimensão, expressa como:

$$ds^2 = g(x) dx^2, \quad (2.2)$$

onde $g(x)$ é uma função suave (isto é, $g(x) \in C^2$) e estritamente positiva: $g(x) > 0$ para todo x no domínio considerado. Essa função define a escala local do espaço, atuando como um fator de deformação da geometria.

Fisicamente, a função $g(x)$ modifica a maneira como medidas de comprimento e densidade são feitas localmente. Em regiões onde $g(x) > 1$, o espaço se comporta como se estivesse "esticado", o que significa que uma mesma variação de coordenada dx corresponde a um maior deslocamento físico real. Isso afeta diretamente a normalização da função de onda e a forma dos operadores dinâmicos — como o momento linear —, alterando o comportamento da densidade de probabilidade e da energia local da partícula. Em regiões com $0 < g(x) < 1$, ocorre o efeito oposto: o espaço é efetivamente comprimido. Essa modificação espacial torna-se essencial para garantir a coerência entre a geometria subjacente e a formulação dos operadores quânticos, como será discutido nas seções seguintes.

Diferentemente do caso euclidiano (em que $g(x) = 1$), aqui a função $g(x)$ pode variar com a posição, fazendo com que a “distância real” entre dois pontos dependa da região do espaço considerada. Essa abordagem se inspira na geometria de Riemann, uma generalização da geometria euclidiana que permite a introdução de uma função de escala variável — interpretável, em uma dimensão, como uma distribuição não uniforme de pontos — ao longo do espaço [Braga 2015]. Essa formulação também fundamenta a descrição geométrica do espaço-tempo na teoria da Relatividade Geral, proposta por Einstein em 1915 [Carroll 2004].

2.1.1 Comprimento de Arco

Sejam a e b dois pontos no espaço unidimensional. O comprimento de arco L entre esses pontos, levando em conta a nova métrica $g(x)$, é dado por:

$$L = \int_a^b \sqrt{g(x)} dx. \quad (2.3)$$

O comprimento de arco foi calculado conforme [Barbosa 2021], onde é mostrado que o tamanho de um intervalo entre dois pontos não é simplesmente $b - a$, mas depende da forma da função $g(x)$ ao longo do intervalo.

Essa modificação geométrica tem consequências fundamentais para a estrutura da teoria da mecânica quântica. Os operadores de derivada, o momento linear e até a própria interpretação probabilística da função de onda devem ser redefinidos de forma a respeitar a métrica subjacente. Por exemplo, o operador momento $\hat{p}$, usualmente associado à derivada $-i\hbar \frac{d}{dx}$, em um espaço com métrica não trivial, deve usar uma derivada compatível com a geometria de Riemann, respeitando o comprimento de arco local. Como o espaço agora é “esticado

ou comprimido” de acordo com $g(x)$, a derivada comum $\frac{d}{dx}$ não mede mais corretamente as variações físicas reais. Precisamos usar operadores que levem em conta a nova forma de medir distâncias — ou seja, que dependem da métrica.

Portanto, ao se adotar o PDTTO, a geometria do espaço unidimensional deixa de ser um pano de fundo neutro, passando a ser uma entidade dinâmica que influencia as propriedades físicas do sistema. Esse é um dos pilares conceituais da mecânica quântica não aditiva estudada neste trabalho.[Braga 2015]

2.2 Definição do operador de translação dependente da posição

Em uma geometria não-euclidiana unidimensional, caracterizada pela métrica abordada na 2.2, uma translação de comprimento coordenado não representa mais o deslocamento físico real. Este último é fornecido pelo comprimento de arco infinitesimal:

$$ds = \sqrt{g(x)} dx. \quad (2.4)$$

Segundo [Barbosa 2021], a métrica unidimensional deformada é definida por:

$$ds = \frac{dx}{\sqrt{1 + \gamma x + \beta^2 x^2}}. \quad (2.5)$$

Por isso, definimos um operador de translação generalizado, T_g , que transporta o estado $|x\rangle$ de acordo com a métrica local do espaço:

$$T_g(ds) |x\rangle = |x + dx\rangle, \quad (2.6)$$

de modo que uma translação de comprimento físico ds implica um deslocamento coordenado dx .

Note que, em geral, $dx \neq ds$ se $g(x) \neq 1$. Como consequência, o operador T_g não é aditivo:

$$T_g(dx') T_g(dx'') \neq T_g(dx' + dx''). \quad (2.7)$$

Essa não aditividade reflete o caráter não-euclidiano do espaço: dois deslocamentos sucessivos dependem da métrica local em cada etapa. No entanto, quando consideramos uma nova coordenada X tal que

$$d\eta = \sqrt{g(x)} dx, \quad (2.8)$$

a composição de deslocamentos tende à aditividade no limite infinitesimal.

Além disso, requeremos que o operador reduza-se à identidade quando o deslocamento for nulo:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} T_g(dx) = \mathbb{I}. \quad (2.9)$$

Essa definição conceitual evita o uso da expansão de Taylor e está fundamentada em princípios geométricos. Como analogia, podemos pensar em deslocar um objeto sobre uma superfície curva: o que importa fisicamente é o comprimento de arco traçado, e não apenas a mudança linear na coordenada. Nesse contexto, o operador T_g generaliza o deslocamento espacial de maneira compatível com a geometria subjacente, conforme discutido em [Braga 2015].

2.3 Espaço de Hilbert com peso e operadores fundamentais

A presença de uma métrica não trivial modifica a estrutura do espaço de estados da Mecânica Quântica. Em vez do espaço de Hilbert usual, considera-se o *espaço de Hilbert com peso*, no qual o produto interno entre duas funções de onda $\phi(x)$ e $\psi(x)$ é definido por:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_a^b \phi^*(x) \psi(x) \sqrt{g(x)} dx. \quad (2.10)$$

As funções $\psi(x)$ que satisfazem:

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 \sqrt{g(x)} dx < \infty, \quad (2.11)$$

pertencem ao espaço de Hilbert com peso, sendo este o novo domínio dos estados físicos.

Ademais, o operador posição continua atuando como:

$$X |x\rangle = x |x\rangle, \quad (2.12)$$

e a resolução da identidade nesse espaço torna-se:

$$\mathbb{I} = \int_a^b |x\rangle \langle x| \sqrt{g(x)} dx, \quad (2.13)$$

essa construção é demonstrada de forma detalhada em [Braga 2015].

2.3.1 Operadores de Posição e Momento Generalizados

O operador momento generalizado P^g deve ser definido de forma a ser autoadjunto no espaço de Hilbert com peso. Partindo da hipótese de que P^g é o gerador das translações infinitesimais, impomos:

$$T_g(d\eta) = \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} P^g d\eta + \mathcal{O}(d\eta^2). \quad (2.14)$$

que é inspirada na estrutura dos operadores de translação usuais, onde $\hat{P}_g$ é assumido como gerador infinitesimal das translações físicas. No entanto, aqui a translação é definida a partir da métrica $g(x)$, ou seja, $d\eta = \sqrt{g(x)} dx$. Portanto, essa expressão só faz sentido se entendermos dX como o deslocamento físico real, e não apenas como incremento de coordenada. Assim, a expansão acima deve ser vista como uma aproximação local compatível com a geometria riemanniana subjacente — uma generalização da ideia de que o operador de momento gera deslocamentos no espaço.

Para que essa expansão seja válida no contexto da métrica variável, o operador $\hat{P}_g$ deve ser construído de forma a preservar a autoadjunticidade no espaço de Hilbert ponderado, como mostrado no Apêndice E. Isso significa que ele deve ser simétrico com respeito ao produto interno definido anteriormente na equação (2.10), o qual incorpora o fator de peso $\sqrt{g(x)}$.

Dessa forma, o operador $\hat{P}_g$ deve satisfazer a condição:

$$\langle \phi | \hat{P}_g \psi \rangle = \langle \hat{P}_g \phi | \psi \rangle, \quad (2.15)$$

o que impõe restrições à sua forma funcional. A escolha

$$\hat{P}_g = -i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx} \quad (2.16)$$

é tal que essa simetria é preservada. Essa propriedade é fundamental para garantir que o operador momento esteja bem definido e para assegurar a unitariedade da evolução temporal no formalismo.

2.4 Equação de Schrödinger e Relações de Comutação

A equação de Schrödinger dependente do tempo no contexto da Mecânica Quântica Não-Aditiva (MQNA) pode ser escrita como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} D_g^2 + V(x, t) \right] \Psi(x, t), \quad (2.17)$$

onde definimos o operador derivada ponderada D_g como:

$$D_g \equiv g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx}. \quad (2.18)$$

No caso estacionário, $\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$, a equação (2.17) conduz à equação de autovalores:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d\psi}{dx} \right) \right] + V(x) \psi(x) = E \psi(x). \quad (2.19)$$

Essa equação é da forma de um problema de Sturm-Liouville, como discutido em [Braga 2015], assim, o conjunto $\{\psi_n(x)\}$ forma uma base no espaço de estados o que garante que os autovalores E são reais, os autoestados $\psi_n(x)$ são ortonormais com respeito ao peso $\sqrt{g(x)}$:

$$\int_a^b \psi_m^*(x) \psi_n(x) \sqrt{g(x)} dx = \delta_{mn}. \quad (2.20)$$

O formalismo conserva os pilares da Mecânica Quântica: linearidade, unitariedade da evolução temporal e conservação da probabilidade. Finalmente, ao expressar os operadores nas coordenadas físicas, a relação de comutação assume a forma canônica:

$$[X, P^g] = i\hbar, \quad (2.21)$$

garantindo consistência algébrica com a estrutura usual da teoria.

Além disso, a dependência local introduzida por $g(x)$ leva à existência de uma incerteza mínima no momento [Braga 2015], uma característica importante da MQNA, mesmo na ausência de potenciais externos.

3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DO FORMALISMO

3.1 Momento Modificado e Equação de Schrödinger Generalizada

Como introduzido anteriormente, o operador de momento no formalismo PDTO deve ser compatível com a geometria do espaço definida pela função métrica $g(x)$. Uma escolha apropriada para garantir a autoadjunticidade no espaço de Hilbert com peso é:

$$\hat{P}^g = -i\hbar D_g = -i\hbar \left(\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \right), \quad (3.1)$$

em que $g(x)$ é uma função métrica positiva associada à deformação do espaço. No caso do formalismo PDTO, adota-se a métrica específica:

$$g(x) = \frac{1}{(1 + \gamma x)^2}, \quad (3.2)$$

onde γ é o parâmetro de deformação. Como consequência, a equação de Schrödinger generalizada assume a forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\hat{P}^g)^2 \psi + V(x) \psi. \quad (3.3)$$

Expandindo o termo cinético usando a definição do operador D_g :

$$\begin{aligned} (\hat{P}^g)^2 \psi &= -\hbar^2 D_g^2 \psi \\ &= -\hbar^2 \left[\frac{1}{g(x)} \psi''(x) - \frac{g'(x)}{2g(x)^2} \psi'(x) \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Esse desenvolvimento evidencia que o termo cinético adquire correções proporcionais às derivadas da métrica $g(x)$, refletindo a distorção espacial incorporada pelo formalismo.

3.2 Mudança de Coordenadas e Espaço Efetivo

A fim de simplificar a equação e restaurar a forma canônica da derivada, propomos uma mudança de variável:

$$\eta = \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma x), \quad (3.5)$$

cuja derivada é:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{1 + \gamma x} \Rightarrow \frac{dx}{d\eta} = 1 + \gamma x = e^{\gamma \eta}. \quad (3.6)$$

Essa transformação permite que o operador cinético atue como uma derivada convencional em η , enquanto o potencial passa a ser função composta:

$$V_{\text{eff}}(\eta) = V(x(\eta)). \quad (3.7)$$

3.3 Interpretação como Massa Efetiva Variável

O operador de momento modificado também pode ser interpretado como surgindo de um sistema com massa efetiva dependente da posição. De fato, a presença da métrica $g(x)$ nos leva a reescrever o termo cinético como:

$$T = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\sqrt{g(x)} \frac{d}{dx} \right)^2 \psi = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{m(x)} \frac{d\psi}{dx} \right), \quad (3.8)$$

com uma massa efetiva:

$$m(x) = \frac{m}{g(x)} = m(1 + \gamma x)^2. \quad (3.9)$$

Esse tipo de modificação é bem conhecido em equações de Schrödinger com massa dependente da posição, como discutido em [Filho *et al.* 2011].

3.4 Interpretação Geométrica

Sob o ponto de vista geométrico, o formalismo PDTO unidimensional pode ser visto como uma quantização sobre uma variedade riemanniana unidimensional com métrica $g(x)$. Em tais espaços, a presença de termos adicionais na equação de Schrödinger pode ser interpretada como forças de origem puramente geométrica — semelhantes a forças inerciais que surgem em referenciais não-inerciais, embora aqui não haja aceleração real envolvida.

Tais forças emergem devido à curvatura escalar prescrita do espaço. De fato, em uma dimensão, a curvatura pode ser diretamente associada ao fator métrico $g(x)$. Para $g(x) = 1$, recuperamos o espaço euclidiano padrão, com equações de movimento convencionais. No limite $\gamma \rightarrow 0$, tem-se:

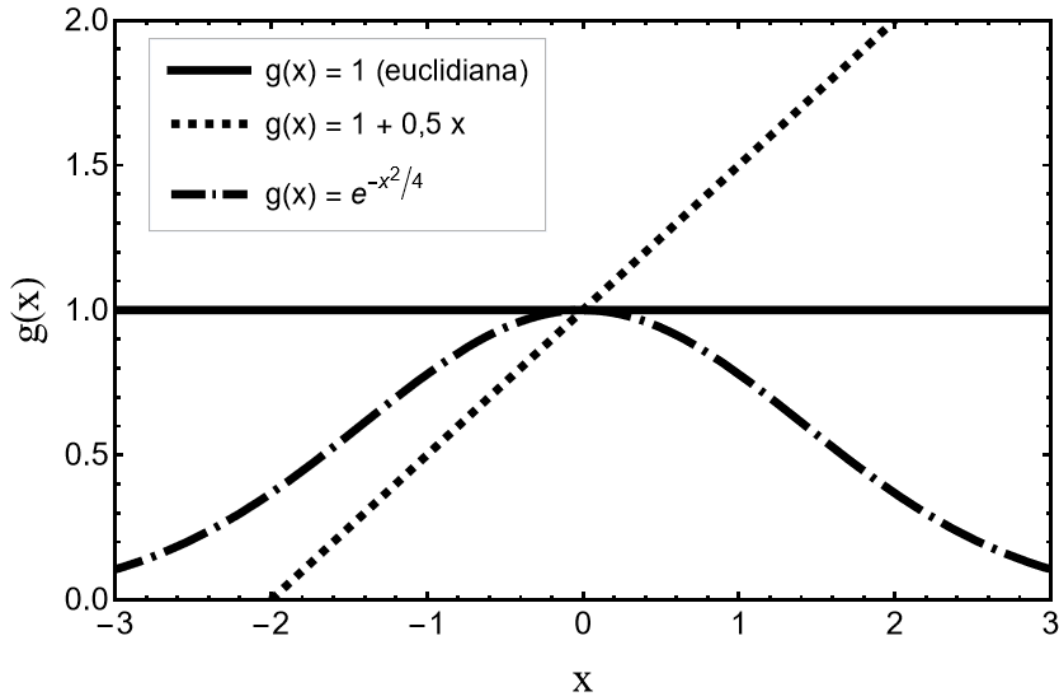
$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} g(x) = 1, \quad \text{e portanto} \quad \hat{P}^g \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad L_{\text{eff}} \rightarrow L, \quad (3.10)$$

confirmando a consistência do formalismo como uma generalização da mecânica quântica tradicional.

O formalismo PDTTO unidimensional modifica de maneira sistemática e consistente a equação de Schrödinger por meio de alterações no operador de translação e na geometria do espaço. Essa abordagem permite descrever sistemas com massa variável e estruturas espaciais não-homogêneas a partir de princípios fundamentais, sem postular tais características a priori.

Apesar de preservar a linearidade da equação e outras simetrias globais, o formalismo introduz novas estruturas locais derivadas da métrica. Assim, abre caminho para extensões da teoria quântica convencional em contextos geométricos mais ricos e potencialmente conectados a abordagens semi-clássicas, gravitação quântica e sistemas efetivos em materiais com estrutura espacial variável.

Figura 1 – Representação gráfica de diferentes funções métricas $g(x)$, destacando a influência da curvatura sobre a distância infinitesimal no espaço unidimensional.



Fonte: Elaborado pela autora.

A Figura 1 apresenta três diferentes escolhas para a função métrica $g(x)$, que define a geometria do espaço unidimensional no formalismo do operador de translação dependente da posição (PDTO). Cada curva representa uma forma distinta de deformação espacial, refletindo diferentes estruturas geométricas possíveis no modelo.

A curva vermelha representa o caso $g(x) = 1$, correspondente ao espaço euclidiano tradicional. Nesse caso, o espaço é homogêneo e isotrópico, sem nenhuma deformação: a distância entre dois pontos é simplesmente a diferença entre suas coordenadas, e os operadores quânticos assumem as formas usuais da mecânica quântica padrão. É o cenário base, em que não há modificação da geometria.

A curva azul representa a métrica linear $g(x) = 1 + 0,5x$, a qual introduz uma deformação crescente no espaço à medida que x aumenta. Esse perfil modela um espaço assimétrico, no qual a densidade métrica cresce em regiões mais afastadas da origem no lado positivo. Consequentemente, o operador de momento $\hat{P}^g$ e a equação de Schrödinger assumem formas modificadas que refletem essa assimetria geométrica.

Por fim, a curva verde corresponde a uma função métrica do tipo gaussiana, $g(x) = e^{-x^2/4}$, centrada na origem. Essa métrica decresce rapidamente à medida que $|x|$ aumenta, o que

indica uma deformação localizada: o espaço é mais "denso" próximo da origem e se torna "menos denso" nas extremidades. Tal perfil é interessante para descrever sistemas com confinamento espacial ou efeitos localizados.

Esses exemplos ilustram como a escolha da função $g(x)$ permite modificar a geometria subjacente ao espaço quântico, afetando diretamente as propriedades físicas do sistema, incluindo a definição de norma, os operadores e a dinâmica das partículas. O estudo de tais métricas é fundamental para entender como o formalismo PDTO pode ser aplicado a diferentes cenários físicos e para investigar os efeitos quânticos induzidos pela geometria.

4 POÇO INFINITO NO FORMALISMO PDO

Neste capítulo, aplicamos o formalismo PDO a um problema bem conhecido da mecânica quântica: a partícula confinada em um poço de potencial infinito.

4.1 O poço infinito no formalismo PDO

Considerando o poço de potencial infinito definido no intervalo $0 < x < L$, temos $V(x) = 0$ dentro do poço e $V(x) = \infty$ nas bordas. A equação de Schrödinger no formalismo PDO assume a forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[(1 + \gamma x)^2 \frac{d^2}{dx^2} + \gamma(1 + \gamma x) \frac{d}{dx} \right] \phi(x) = E\phi(x), \quad (4.1)$$

que pode ser reescrita usando a massa efetiva dependente da posição:

$$m_e(x) = \frac{m}{(1 + \gamma x)^2}. \quad (4.2)$$

Fazendo a mudança de variável $u = \ln(1 + \gamma x)$, a equação se reduz a uma equação de Helmholtz na variável u [Barbosa 2021]:

$$\frac{d^2\phi}{du^2} + k^2\phi(u) = 0, \quad (4.3)$$

cujas soluções gerais são combinações de senos e cossenos. Impomos as condições de contorno $\phi(0) = \phi(L) = 0$ para obter a solução da equação de Schrödinger no formalismo PDO para o caso de um poço de potencial infinito, que pode ser obtida aplicando-se a mudança de variável:

$$\eta(x) = \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma x), \quad (4.4)$$

a qual transforma o domínio $x \in [0, L]$ no intervalo $\eta \in [0, L_{\text{efetivo}}]$, com:

$$L_{\text{efetivo}} = \eta(L) = \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma L). \quad (4.5)$$

Neste novo sistema de coordenadas, a equação de Schrödinger assume sua forma usual, e a solução para uma partícula em um poço infinito de largura L_{efetivo} é dada por:

$$\phi_n(\eta) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L_{\text{efetivo}}} \eta\right). \quad (4.6)$$

Revertendo a variável $\eta \rightarrow x$, obtemos a função de onda expressa em termos da coordenada original:

$$\phi_n(x) = A_n \sin \left(\frac{n\pi \ln(1 + \gamma x)}{\ln(1 + \gamma L)} \right). \quad (4.7)$$

Essa forma garante que $\phi_n(0) = 0$ e $\phi_n(L) = 0$, respeitando as condições de contorno do poço infinito no espaço deformado.

4.2 Densidade de probabilidade e interpretação geométrica

Os autovalores de energia no formalismo PDTO são dados por:

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2 \gamma^2}{2m \ln^2(1 + \gamma L)}. \quad (4.8)$$

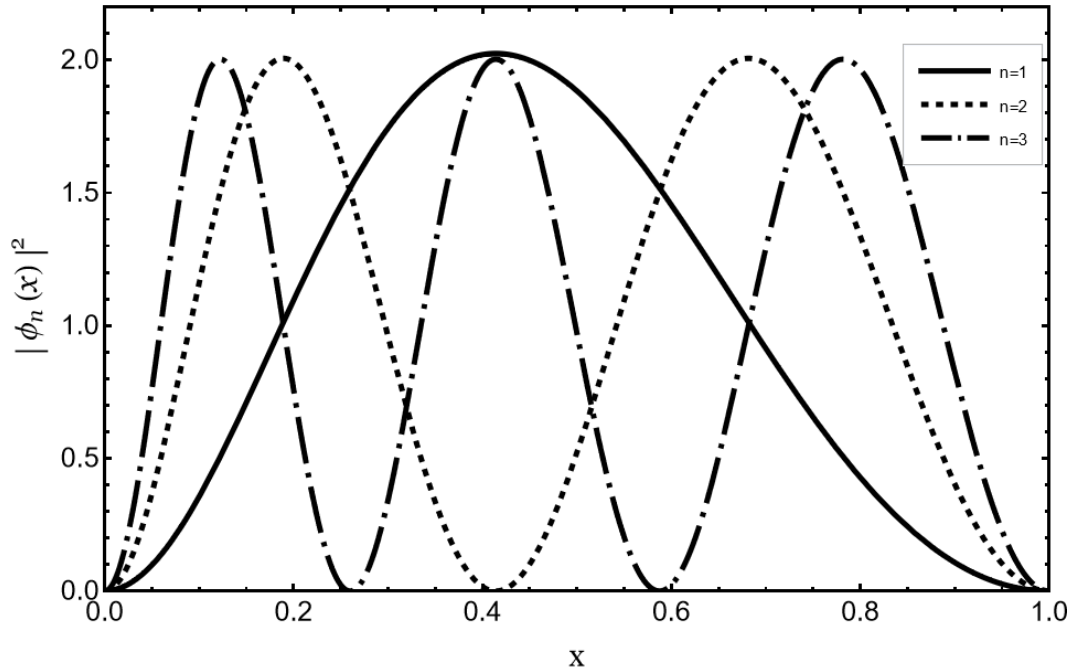
O parâmetro γ atua como um fator de deformação geométrica, alterando a largura efetiva do sistema:

$$L_{\text{efetivo}} = \frac{\ln(1 + \gamma L)}{\gamma}, \quad (4.9)$$

com o limite $\lim_{\gamma \rightarrow 0} L_{\text{efetivo}} = L$, que recupera o caso usual da mecânica quântica tradicional.

As funções de onda associadas $\phi_n(x)$, obtidas para um poço infinito no formalismo PDTO, são assimétricas devido à métrica $g(x)$. Consequentemente, a densidade de probabilidade $|\phi_n(x)|^2$ não é distribuída uniformemente ao longo do poço. Em vez disso, ela se adapta à geometria do espaço, refletindo a influência da curvatura local sobre a dinâmica quântica.

Figura 2 – Densidade de probabilidade $|\phi_n(x)|^2$ no poço infinito com o formalismo PDT0 para os estados $n = 1, n = 2$ e $n = 3$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 2, observa-se que, para $\gamma > 0$, os picos da densidade de probabilidade se deslocam para regiões de menor x . Esse comportamento é uma consequência direta da estrutura do operador momento generalizado, que incorpora a função métrica $g(x)$ no espaço de Hilbert com peso.

Fisicamente, isso pode ser interpretado como uma contração efetiva do espaço na região de $x \approx 0$, o que torna a partícula mais "confinada" nesse setor. A curvatura introduzida por $g(x)$ modifica a distribuição espacial da partícula, resultando em funções de onda mais concentradas em determinadas regiões do poço.

Esse efeito se reduz com o aumento do número quântico n , pois estados mais energéticos apresentam oscilações mais rápidas que "diluem" a influência da métrica local.

Esse comportamento evidencia a sensibilidade da densidade de probabilidade à geometria do espaço físico, reforçando o caráter geométrico do formalismo PDT0. Mesmo em sistemas simples, como o poço de potencial infinito, a deformação espacial induzida pela métrica resulta em modificações qualitativas na distribuição de probabilidade. Isso mostra que o PDT0 pode ser uma ferramenta poderosa para modelar sistemas com propriedades espaciais não homogêneas ou com massa efetiva variável, como estruturas semicondutoras, poços

quânticos assimétricos e materiais com curvatura efetiva local [Filho *et al.* 2011, Braga 2015, Filho *et al.* 2016, Petruzziello e Wagner 2021].

4.3 Comparação com a Mecânica Quântica Tradicional

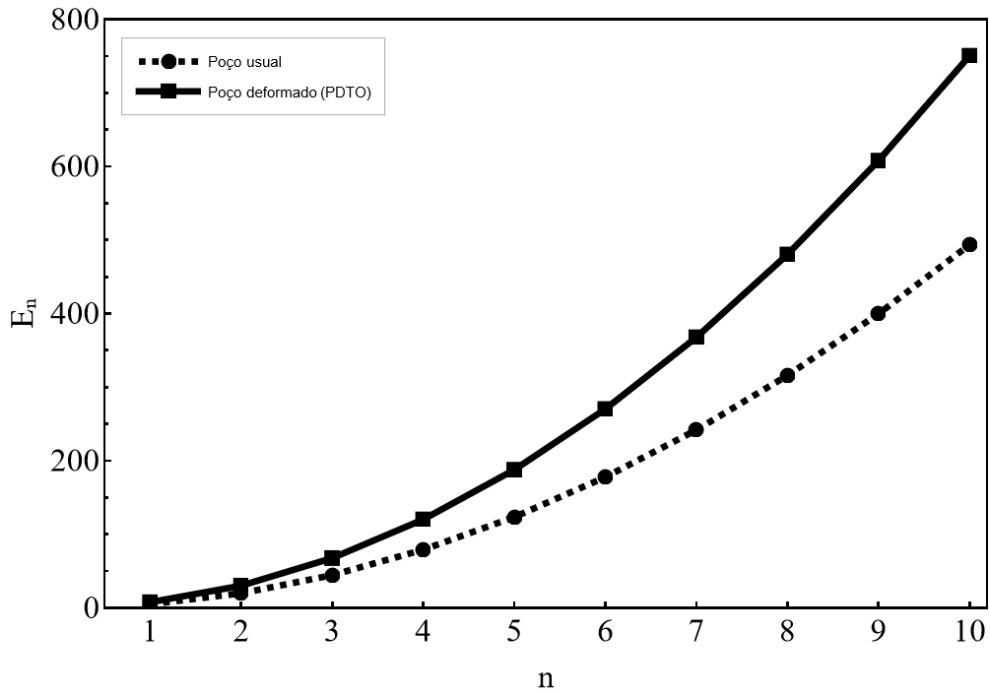
Para sintetizar as diferenças estruturais entre a mecânica quântica tradicional (MQT) e o formalismo do operador de translação dependente da posição (PDTO), apresentamos a seguir uma tabela comparativa. Esta comparação retoma os principais aspectos geométricos, matemáticos e físicos discutidos ao longo deste trabalho, com ênfase na modificação conceitual introduzida pela métrica posicional $g(x)$, característica central do formalismo PDTO.

A tabela da próxima página evidencia como o formalismo PDTO generaliza a estrutura da mecânica quântica ao incorporar uma métrica local variável $g(x)$, resultando em modificações profundas na definição dos operadores, no produto interno do espaço de Hilbert e na forma da equação de Schrödinger. Em vez de postular massas efetivas ou potenciais geométricos, o PDTO deriva tais efeitos diretamente da geometria do espaço. Isso permite descrever sistemas com inércia espacial variável de maneira natural e fundamentada. Assim, o formalismo oferece um arcabouço conceitual mais abrangente, mantendo a estrutura linear e unitária da teoria quântica, mas permitindo explorar contextos físicos onde a homogeneidade espacial não é válida.

Aspecto	Mecânica Quântica Tradicional	Formalismo PDTTO
Geometria do espaço	Espaço euclidiano: $g(x) = 1$; métrica plana e constante.	Espaço riemanniano 1D com $g(x) \neq 1$; curvatura local variável.
Operador de translação	Aditivo: $T(a)T(b) = T(a+b)$.	Não aditivo: $T_g(dx')T_g(dx'') \neq T_g(dx' + dx'')$.
Operador de momento	$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$, autoadjunto no espaço usual.	$\hat{P}_g = -i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx}$, autoadjunto no espaço com peso.
Espaço de Hilbert	Produto interno usual: $\langle \psi \phi \rangle = \int \psi^* \phi dx$.	Produto interno com peso: $\langle \psi \phi \rangle = \int \psi^* \phi \sqrt{g(x)} dx$.
Equação de Schrödinger	Forma padrão: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi$	Forma de Sturm–Liouville com peso: $-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d\psi}{dx} \right) \right] + V(x) \psi = E \psi$
Funções de onda	Simétricas, geralmente senoidais.	Assimétricas, deformadas pela métrica $g(x)$.
Níveis de energia (poço infinito)	$E_n \propto \frac{1}{L^2}$.	$E_n \propto \frac{\gamma^2}{\ln^2(1 + \gamma L)}$.
Comutador $[\hat{X}, \hat{P}]$	Constante: $[\hat{X}, \hat{p}] = i\hbar$.	Posição-dependente: $[\hat{X}, \hat{P}_g] = i\hbar g(x)^{-1/2}$.
Interpretação geométrica	Espaço fixo e homogêneo.	A curvatura local do espaço influencia diretamente a dinâmica da partícula.
Aplicações físicas	Sistemas homogêneos, partículas livres.	Sistemas com massa efetiva variável, substratos não homogêneos, grafeno, nanocamadas.

Tabela 1 – Comparação entre a mecânica quântica tradicional e o formalismo PDTTO.

Figura 3 – Comparação dos níveis de energia E_n para o poço infinito nos formalismos da MQT e PDTTO. Os pontos marcados representam os valores efetivamente calculados; as linhas tracejadas apenas conectam os pontos.



Fonte: Elaborado pela autora.

A Figura 3 mostra a diferença qualitativa entre os espectros de energia obtidos pela MQT usual e pelo formalismo PDTTO, com unidades naturais ($L = \hbar = m = 1$) para destacar os efeitos do parâmetro de deformação γ . Ambos os espectros crescem quadraticamente com o número quântico n , mas a inclinação é maior no PDTTO devido à contração da largura efetiva do poço associada à métrica $g(x) = (1 + \gamma x)^{-2}$. Isso evidencia como a densidade de pontos do espaço, incorporada por γ , afeta os autovalores e a densidade espectral. No limite $\gamma \rightarrow 0$, recupera-se o espectro da MQT. A visualização reforça a interpretação geométrica do PDTTO e seu potencial para descrever sistemas com propriedades espaciais não uniformes, como poços quânticos assimétricos ou semicondutores com massa efetiva variável.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, demonstramos que o formalismo PDTO amplia a mecânica quântica incorporando variações espaciais intrínsecas no operador de translação. Derivamos explicitamente a forma do operador momento modificado e da equação de Schrödinger resultante, evidenciando como a função métrica $g(x)$ gera um termo de massa efetiva dependente da posição. Mostramos que esse cenário é coerente (recupera a teoria quântica tradicional para $\gamma \rightarrow 0$) e que a estrutura espectral dos sistemas muda quantitativamente (por exemplo, o espaçamento de níveis em poços quânticos é alterado). A análise do espaço de Hilbert com peso métrico e das novas relações de comutação foi fundamental para garantir a validade matemática do formalismo. Em síntese, o principal resultado é um quadro teórico completo que descreve partículas com massa espacialmente variável e relações canônicas deformadas, tudo a partir de princípios primeiros.

A relevância física do formalismo PDTO se manifesta em sistemas de massa efetiva variável e meios não homogêneos. Muitos materiais de interesse — em particular semicondutores heteroestruturados, como camadas nanométricas de silício e germânio (os chamados poços quânticos Si/Ge, nos quais diferenças no band-gap e na massa efetiva confinam os portadores em níveis discretos) — apresentam massa efetiva que varia em função da posição. O PDTO permite tratá-los incluindo essa variação na própria equação de movimento. De fato, estudos anteriores aplicaram o formalismo a poços quânticos Si/Ge, bem como a potenciais de interface em nanocamadas, demonstrando que o método capta com precisão as correções espectrais induzidas pela geometria e composição do material [Barbagiovanni e Filha 2013]. Ademais, a construção do operador de translação deformado é aplicável a partículas relativísticas: por exemplo, [Aguilar *et al.* 2020] usaram PDTO para férmions de Dirac em grafeno, tratando como a métrica efetiva afeta os níveis de Landau e elétrons confinados. Tais aplicações reforçam que o PDTO é uma ferramenta poderosa para estudar fenômenos quânticos emergentes em materiais de geometria complexa.

A generalização do formalismo para 2D (e 3D) amplia seu alcance. Já foi demonstrado que o PDTO funciona em sistemas 2D, por exemplo em gases eletrônicos bidimensionais não-euclidianos [Silva 2024]. Em 3D, um operador de translação dependente de (x, y, z) permitiria modelar massas efetivas anisotrópicas e heterogêneas em materiais volumétricos. Isso pode ser relevante em cristais com anisotropias espaciais e em heteroestruturas tridimensionais (poços quânticos duplos, filmes finos complexos etc.).

Um exemplo representativo relevante dessa possibilidade pode ser encontrado em

[Ahmed e Bouzenada], onde se analisa um oscilador quântico relativístico com massa dependente em um espaço-tempo de Einstein–Maxwell–Dilaton com simetria axial. Investigações dessa natureza reforçam a viabilidade de conectar o formalismo PDTO a contextos relativísticos e à gravitação quântica, estabelecendo pontes com teorias que consideram deformações da estrutura do espaço-tempo.

A interpretação geométrica do formalismo pode ser explorada pedagogicamente, introduzindo alunos ao conceito de quantização em variedades curvas através de uma abordagem elementar (1D). Isso abre espaço para discussões sobre o papel da geometria na física quântica, conectando disciplinas como geometria diferencial, análise funcional e física de partículas.

Concluimos que o formalismo PDTO fornece um arcabouço robusto e coerente para descrever partículas com massa efetiva variável, em espaços de métrica não-euclidiana. A análise realizada ao longo deste trabalho mostra que o operador de translação dependente da posição impõe uma nova estrutura geométrica à mecânica quântica, promovendo uma extensão natural da teoria padrão. As perspectivas para pesquisa são amplas, envolvendo desde materiais avançados até fundamentos da teoria quântica, reforçando o caráter promissor do formalismo aqui estudado.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, V.; CUNHA, S. M.; COSTA, D. R.; FILHO, R. N. C. Dirac fermions in graphene using the position-dependent translation operator formalism. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 102, n. 23, p. 235404, 2020.
- AHMED, F.; BOUZENADA, A. **PDM relativistic quantum oscillator in Einstein-Maxwell-Lambda space-time**. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2402.10916v2>.
- BARBAGIOVANNI, E. G.; FILHA, R. N. C. Quantum confinement in nonadditive space with a spatially dependent effective mass for si and ge quantum wells. **arXiv preprint arXiv:1311.5335**, 2013.
- BARBOSA, I. R. **Formalismo do operador translação dependente da posição: problemas unidimensionais**. 55 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Física)) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021. Centro de Ciências, Departamento de Física. Disponível em: <http://repositorio.ufc.br/handle/riufc/60129>.
- BENKRANE, A.; BENHADJIRA, A. Study of bose–einstein condensate in the presence of the extended uncertainty principle: infinite potential well. **Physica Scripta**, v. 99, n. 7, p. 075242, 2024.
- BRAGA, J. P.; FILHO, R. N. C. Nonadditive quantum mechanics as a sturm-liouville problem. **International Journal of Modern Physics C**, v. 27, p. 1650047, 2016.
- BRAGA, J. P. M. **Mecânica quântica não-aditiva**. Tese ((Doutorado em Física)) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Fortaleza, 2015. 62 f.
- CARROLL, S. M. **Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity**. [S. l.]: Addison-Wesley, 2004. ISBN 978-0805387322.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALÔE, F. **Quantum Mechanics**. Paris: Hermann & John Wiley & Sons, 1977. v. 1.
- DAS, S.; SHANKARANARAYANAN, S.; TODORINOV, V. Quantum gravitational signatures in next-generation gravitational wave detectors. **Physics Letters B**, v. 835, p. 137511, 2022.
- FILHO, R. N. C.; ALENCAR, G.; SKAGERSTAM, B. S.; ANDRADE, J. S. Quantum potential from first principles: the morse case. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 101, p. 10009, 2013.
- FILHO, R. N. C.; ALMEIDA, M. P.; FARIAS, G. A.; JÚNIOR, J. S. A. Displacement operator for quantum systems with position-dependent mass. **Physical Review A**, v. 84, p. 050102, 2011.
- FILHO, R. N. C.; BRAGA, J. P. M.; LIRA, J. H. S.; JÚNIOR, J. S. A. Extended uncertainty from first principles. **Physics Letters B**, v. 755, p. 367–370, 2016.
- GRIFFITHS, D. J. **Mecânica Quântica**. 2ª edição. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.
- HAMIL, B.; LUTFUOGLU, B. C. Exact solutions for quantum systems with position-dependent mass. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 134, p. 50007, 2021.
- OUBAGHA, R.; HAMIL, B.; LUTFUOGLU, B. C.; MERAD, M. Position-dependent mass and nonadditive translation in two-dimensional systems. **International Journal of Modern Physics A**, v. 38, p. 2350107, 2023.

PANTIG, R. C.; YU, P. K.; RODULFO, E. T.; ÖVGUN, A. Shadow and weak deflection angle of extended uncertainty principle black hole surrounded with dark matter. **Annals of Physics**, v. 436, p. 168722, 2022.

PETRUZZIELLO, L.; WAGNER, F. Quantum mechanics with position-dependent mass in curved spaces. **Physical Review D**, v. 103, p. 104061, 2021.

SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. Massachusetts: Addison–Wesley Publishing Company, 1994.

SILVA, W. W. R. A. **Solução do rotor quântico rígido com o formalismo do PDTO**. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Física)) – Universidade Federal do Ceará (UFC), Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, CE, 2024. Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

WAGNER, F. Extensions of the position-dependent mass formalism in quantum gravity. **Physical Review D**, v. 104, p. 126010, 2021.

WAGNER, F. Higher-order effects in deformed commutation relations. **Physical Review D**, v. 105, p. 025005, 2022.

APÊNDICE A – CÁLCULOS DETALHADOS NO FORMALISMO PDTTO

A seguir, apresentamos os principais cálculos realizados no formalismo do operador de translação dependente da posição (PDTTO), com foco na análise do poço quadrado infinito.

A. Normalização da Função de Onda

A função de onda no formalismo PDTTO é dada por:

$$\phi_n(x) = A_n \sin \left(\frac{n\pi \ln(1 + \gamma x)}{\ln(1 + \gamma L)} \right). \quad (\text{A.1})$$

Para normalizá-la, utiliza-se o produto interno com peso:

$$\int_0^L |\phi_n(x)|^2 \frac{1}{1 + \gamma x} dx = 1. \quad (\text{A.2})$$

Fazendo a substituição de variável $u = \ln(1 + \gamma x)$, obtemos $dx = \frac{e^u}{\gamma} du$ e $\frac{1}{1 + \gamma x} dx = \frac{1}{\gamma} du$. A integral torna-se:

$$\int_0^{\ln(1 + \gamma L)} \left| A_n \sin \left(\frac{n\pi u}{\ln(1 + \gamma L)} \right) \right|^2 \cdot \frac{1}{\gamma} du. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo $z = \frac{n\pi u}{\ln(1 + \gamma L)}$, temos:

$$\frac{|A_n|^2}{\gamma} \cdot \frac{\ln(1 + \gamma L)}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2(z) dz = \frac{|A_n|^2}{2\gamma} \ln(1 + \gamma L). \quad (\text{A.4})$$

Impondo a normalização, obtemos:

$$A_n = \sqrt{\frac{2\gamma}{\ln(1 + \gamma L)}}. \quad (\text{A.5})$$

B. Equação de Schrödinger Modificada

No formalismo PDTTO, o operador momento é:

$$\hat{P}_g = -i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx}, \quad (\text{A.6})$$

e o Hamiltoniano associado:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}_g^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{d}{dx} \right) \right]. \quad (\text{A.7})$$

Expandindo essa expressão, temos:

$$\hat{H}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{g(x)} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{1}{g(x)^2} \frac{dg(x)}{dx} \frac{d\psi}{dx} \right. \quad (\text{A.8})$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4g(x)^3} \left(\frac{dg(x)}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2g(x)^2} \frac{d^2g(x)}{dx^2} \right) \psi(x) \right]. \quad (\text{A.9})$$

Essa forma evidencia a presença de termos adicionais interpretáveis como potenciais geométricos efetivos.

C. Relação de Comutação entre os Operadores de Posição e Momento Generalizado

No formalismo PDTO, os operadores de posição e momento generalizado são definidos como:

$$\hat{X} = x, \quad \hat{P}_g = -i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx}, \quad (\text{A.10})$$

onde $g(x)$ é a função métrica que caracteriza a geometria do espaço.

A relação de comutação entre esses operadores é dada por:

$$[\hat{X}, \hat{P}_g] = \hat{X}\hat{P}_g - \hat{P}_g\hat{X}. \quad (\text{A.11})$$

Para calcular essa relação, aplicamos o comutador a uma função arbitrária $\psi(x)$:

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{P}_g]\psi(x) &= \hat{X}(\hat{P}_g\psi(x)) - \hat{P}_g(\hat{X}\psi(x)) \\ &= x \left(-i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d\psi}{dx} \right) - \left(-i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx} (x\psi(x)) \right) \\ &= -i\hbar x g(x)^{-1/2} \frac{d\psi}{dx} + i\hbar g(x)^{-1/2} \left(\psi(x) + x \frac{d\psi}{dx} \right) \\ &= i\hbar g(x)^{-1/2} \psi(x). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Portanto, a relação de comutação entre $\hat{X}$ e $\hat{P}_g$ é:

$$[\hat{X}, \hat{P}_g] = i\hbar g(x)^{-1/2}. \quad (\text{A.13})$$

Essa relação mostra que, diferentemente da mecânica quântica convencional onde o comutador entre posição e momento é constante ($[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$), no formalismo PDTO o comutador

depende da posição através da função métrica $g(x)$. Isso implica que a incerteza mínima entre posição e momento também é dependente da posição, refletindo a influência da geometria do espaço na estrutura fundamental da mecânica quântica.

Exemplo: Para uma métrica específica $g(x) = (1 + \gamma x)^{-2}$, temos:

$$g(x)^{-1/2} = 1 + \gamma x, \quad (\text{A.14})$$

e, portanto, a relação de comutação torna-se:

$$[\hat{X}, \hat{P}_g] = i\hbar(1 + \gamma x). \quad (\text{A.15})$$

Neste caso, o comutador cresce linearmente com x , indicando que a não comutatividade entre posição e momento aumenta com a posição, o que pode ter implicações significativas na análise de sistemas quânticos em espaços com geometria não euclidiana.

D. Mudança para a Coordenada Física

A coordenada física é definida por:

$$\eta(x) = \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma x), \quad (\text{A.16})$$

com derivadas:

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{1 + \gamma x}, \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{\gamma}{(1 + \gamma x)^2}.$$

Na nova coordenada η , a equação de Schrödinger assume a forma usual:

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + k^2\psi = 0. \quad (\text{A.17})$$

A constante k representa o número de onda do sistema nesta coordenada e está relacionada com a energia da partícula por:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (\text{A.18})$$

No caso específico de uma partícula confinada em um poço de potencial infinito transformado para a coordenada η , com comprimento efetivo

$$L_{\text{efetivo}} = \frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma L), \quad (\text{A.19})$$

as soluções normais são senoidais, com condições de contorno $\psi(0) = \psi(L_{\text{efetivo}}) = 0$, levando a:

$$k_n = \frac{n\pi}{L_{\text{efetivo}}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.20})$$

Dessa forma, os autovalores de energia ficam:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2 \gamma^2}{2m \ln^2(1 + \gamma L)}. \quad (\text{A.21})$$

Esse resultado evidencia como a deformação geométrica introduzida pela métrica $g(x)$ modifica os níveis de energia e o comportamento oscilatório das soluções.

No limite $\gamma \rightarrow 0$, recupera-se a mecânica quântica usual:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}. \quad (\text{A.22})$$

E. Verificação da Autoadjunticidade de $\hat{P}_g$

Seja o produto interno:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_a^b \phi^*(x) \psi(x) \sqrt{g(x)} dx, \quad (\text{A.23})$$

e o operador:

$$\hat{P}_g = -i\hbar g(x)^{-1/2} \frac{d}{dx}. \quad (\text{A.24})$$

Temos:

$$\begin{aligned} \langle \phi | \hat{P}_g \psi \rangle &= -i\hbar \int_a^b \phi^*(x) \frac{d\psi}{dx} dx \\ &= i\hbar \int_a^b \frac{d\phi^*}{dx} \psi(x) dx = \langle \hat{P}_g \phi | \psi \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Assumindo que as funções se anulam nas bordas, $\hat{P}_g$ é autoadjunto no espaço com peso definido.