

Relatório do Estágio Pós Doutoral

Igor Rochaid Oliveira Ramos
E-mail:igor_rochaid@uvanet.br

Supervisor: Dr. João Philipe Macedo Braga

26 de janeiro de 2024

1 Identificação

Nome: Igor Rochaid Oliveira Ramos

CPF: 961.548.023-15

matrícula: 300165-1-3

Lotação: Coordenação do Curso de Física

Cargo: Professor Adjunto L

2 Instituição de Realização do Pós Doutorado

Instituição: Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Programa de Pós-Graduação: PROFMAT - Instituto de Ciências Exatas e da Natureza - Campus das Auroras, Redenção-CE

Coordenador: Dr. Joserlan Perote da Silva

Supervisor: Dr. João Philipe Macedo Braga

3 Sobre o Projeto de Pesquisa

Vamos inicialmente descrever o projeto de pesquisa, fazendo um breve resumo sobre os modelos que abordam a dinâmica dos preços das ações no mercado financeiro, as razões que motivaram o trabalho, bem como as justificativas, os objetivos iniciais, as etapas realizadas, os resultados obtidos, as dificuldades encontradas e as considerações finais do estágio de pós doutorado.

Título do Projeto: Estatística Aplicada no Mercado Financeiro

4 Resumo

No projeto de pesquisa pretendíamos realizar uma aplicação da estatística no mercado financeiro cujo intuito era fornecer aos alunos de graduação dos cursos onde essa disciplina é ensinada um material didático complementar que possibilitasse uma visão mais ampla dos conceitos estudados em sala através de uma aplicação direta da teoria. Para isso, pretendíamos realizar uma análise estatística dos preços de fechamento das ações da Petrobrás e da Eletrobrás em 2019 e 2020 (portanto, antes e durante a pandemia do

coronavírus) para obter, por exemplo, a fronteira eficiente de Markowitz e a carteira de mínima variância.

5 Introdução

Nos anos recentes tem crescido o interesse por parte dos pesquisadores de diversas áreas como a física e a matemática, no estudo da dinâmica dos mercados financeiros [1, 9, 3]. Na física, por exemplo, modelos utilizados no estudo de sistemas complexos, têm sido aplicados ao estudo das finanças dando origem a um novo ramo chamado Econofísica [11].

Em 2019, Santos *et. al.* [1], utilizaram o modelo físico denominado passeio aleatório, introduzido a partir da probabilidade binomial, para avaliar o comportamento do índice BOVESPA e de algumas ações que tiveram forte influência na composição desse índice em 2018. Os autores verificaram, por exemplo, algumas hipóteses da Teoria de Dow, como a ideia de que todos os fatores que podem afetar um preço de um ativo são rapidamente refletidos no preço do mesmo.

Além da dinâmica dos preços das ações, o estudo das opções de ações (opção é um contrato que confere o direito de negociar uma determinada ação a um preço estabelecido até uma data predeterminada) também desperta muito interesse por parte da comunidade científica. Em 2020, Lima *et. al.* [9], estudaram a dinâmica das opções no mercado financeiro utilizando processos estocásticos, apresentando e discutindo duas formas de gerenciar os riscos, muito aplicadas pelos operadores das opções (*traders*).

Em 2021, ainda no intuito de capturar a dinâmica dos mercados financeiros, Nascimento *et. al.* [3], utilizaram simulação computacional para estudar o mercado financeiro brasileiro e a a dinâmica da interação de compra e venda entre agentes financeiros. Os pesquisadores mostraram que as simulações foram capazes de obter informação sobre os melhores e piores agentes de acordo com a estratégia adotada na escolha dos limiares de venda e de compra.

Apesar dos avanços das tentativas dos estudiosos da física e da matemática de entenderem os mercados financeiros, pouco se tem feito utilizando a estatística na análise dos preços das ações, o que não faz muito sentido devido à grande quantidade de dados disponíveis atualmente no mercado financeiro, e sendo a estatística a principal ferramenta utilizada na análise de dados.

6 Justificativa

A estatística pode ser entendida como um conjunto de técnicas que permite, de forma sistemática, organizar, descrever, analisar e interpretar dados oriundos de estudos ou experimentos, tendo, portanto, um papel fundamental nas diversas áreas do conhecimento [12, 13, 14]. Além disso, devido à grande quantidade de dados disponíveis atualmente, a estatística tem muita aplicação em ciência de dados, inteligência artificial, aprendizado de máquina [15, 16] e também no mercado de capitais, pois o uso de técnicas estatísticas apropriadas fornece informações que auxiliam no processo de tomada de decisões [27].

Todavia, o estudo dessa disciplina é feito, em geral, de forma separada, onde primeiro os alunos são apresentados à estatística descritiva e em seguida à inferência estatística. Ao longo desse processo, os alunos estudam, por exemplo, os conceitos de média, desvio padrão, probabilidade e testes de hipóteses, sendo a regressão linear simples o último assunto a ser abordado.

Nesse sentido, no mesmo espírito da Ref. [5], pretendíamos nesse projeto realizar uma aplicação da estatística no mercado financeiro cujo intuito era fornecer aos alunos de graduação dos diversos cursos onde essa disciplina é ministrada, um material didático complementar que possibilite uma visão mais ampla dos conceitos estudados em sala através de uma aplicação direta da teoria.

7 Objetivos

- Aplicar a estatística na análise dos preços de fechamento das ações preferenciais da Petrobrás e da Eletrobrás em 2019 e 2020, e investigar as correlações existentes entre esses ativos antes e durante a pandemia do coronavírus;
- Aplicar os conceitos fundamentais da estatística no estudo da diversificação de portfólios de Markowitz, na obtenção da fronteira eficiente e da carteira de mínima variância;

8 Cronograma do Projeto

Com a ideia de atingir os objetivos o trabalho foi realizado nas seguintes etapas:

Cronograma	
2023.1	Leituras de artigos e construção do software. Obtenção de resultados
2023.2	Análise dos resultados. Preparação de trabalhos para apresentação em encontros e de resultados para publicação. Relatório Final.

9 Caracterização do Problema

O mercado de capitais é um dos mais relevantes para o desenvolvimento econômico de um país pois efetua a ligação entre os investidores e aqueles desprovidos de recursos de longo prazo para realizarem os seus investimentos, sendo as ações um dos principais papéis negociados neste mercado [27].

O termo ação significa a menor fração do capital social de uma empresa. Além do seus próprios recursos, toda empresa financia suas atividades com dinheiro de seus proprietários (acionistas) por meio de ações, ou de terceiros por meio de empréstimos. Quando uma empresa é de capital aberto, suas ações podem ser negociadas numa bolsa de valores e qualquer indivíduo pode adquirir suas ações. Geralmente, as ações possuem um código formado por quatro letras e um número, podendo ser de dois tipos: ordinárias (ON) que possuem o número 3 no final do código e dão direito a voto e à participação nas decisões da empresa; ou preferenciais (PN), com código terminado em 4, 5, ou 6, e que não dão direito a voto, mas dão prioridade no recebimento da distribuição dos lucros aos acionistas. Por exemplo, a Petrobrás possui tanto ações ordinárias como preferenciais, cujos códigos são PETR3 e PETR4, respectivamente.

Os preços das ações, de forma geral, variam bastante, principalmente em períodos mais turbulentos e incertos da situação econômica e política de um país ou global, fazendo com que o investimento em ações seja considerado de alto risco. Um exemplo marcante disso, foi a chegada da pandemia do coronavírus em 2020 que ocasionou um estrago na economia e nas bolsas de valores do mundo todo [10, 11].

Para ilustrar o comportamento dos preços das ações, apresentamos na figura 1, os gráficos dos preços de fechamento das ações preferenciais da Petrobrás (PETR4) e da Eletrobrás (ELET6) em função do tempo nos anos de 2019 e 2020, portanto, antes e durante a pandemia do coronavírus.

Podemos observar no gráfico que, em 2019, cada empresa apresentava uma série histórica de preços com uma dinâmica própria, com, por exemplo, subidas e descidas dos preços independentes uma da outra, o que faz um certo sentido pois são empresas que atuam em setores diferentes da econo-

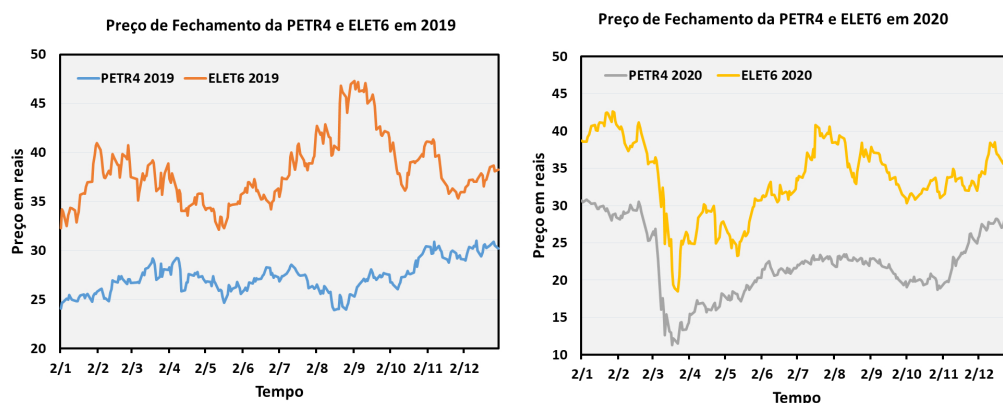


Figura 1: Preços de fechamento das ações da PETR4 e da ELET6 em 2019 e 2020.

mia. Por outro lado, com a chegada da pandemia do coronavírus em 2020, os movimentos dos preços de fechamento dessas ações apresentavam um comportamento muito semelhante, subindo e descendo concomitantemente, apresentando maior correlação.

O que pretendíamos neste projeto era a partir de dados reais dos preços de fechamento das ações mencionadas, fazer uma análise estatística mais profunda desses dados antes e durante a pandemia do coronavírus, pois acreditamos que a discussão da estatística do ponto de vista de uma aplicação em dados reais possa fornecer ao aluno uma maior compreensão do conteúdo ministrado e, conseqüentemente, uma melhor fixação do assunto.

10 Resultados e Discussões

Nesta seção vamos aplicar a estatística na análise das ações preferenciais tanto da Petrobras (PETR4) como da Eletrobras (ELET6) em dois períodos, a saber: em 2019 e 2020, portanto, antes e durante a pandemia do coronavírus, respectivamente.

Inicialmente, apresentamos na figura 2 o *box plot* dos preços de fechamento e as medidas na tabela 1. Podemos observar que ambas as empresas apresentaram uma redução no preço mediano durante a pandemia do coronavírus. No caso da PETR4, a redução foi de 18,36% enquanto a ELET6 teve uma redução de 10,20%. Outra mudança que pode ser facilmente percebida foi um aumento na variabilidade ou dispersão dos preços das empresas que pode ser quantificado pela distância interquartil. Na PETR4, a distância interquartil passou de 2,18 em 2019 para 6,25 em 2020, ao passo que, para a ELET6, foi de 4,03 em 2019 para 6,49 em 2020.

Tabela 1: Dados do *box plot* dos preços de fechamento (em reais) das ações preferenciais da Petrobras e da Eletrobras em 2019 e 2020.

	PETR4 (2019)	PETR4 (2020)
Mínimo	23,91	11,29
Q_1	26,06	19,64
Mediana	27,12	22,14
Q_3	28,24	25,89
Máximo	30,97	30,81
Média	27,25	22,31
<i>Outliers</i>	Nenhum	Nenhum

	ELET6 (2019)	ELET6 (2020)
Mínimo	32,14	21,36
Q_1	35,80	30,98
Mediana	37,56	33,73
Q_3	39,83	37,47
Máximo	45,61	42,66
Média	38,17	33,56
<i>Outliers</i>	14	4

Além das medidas de localização e variabilidade, o *box plot* também é útil para analisar diferenças de simetria [12]. Em geral, a assimetria leva ao surgimento de valores extremos e podemos avaliá-la através da relação entre os quartis e a mediana. Para distribuições simétricas, a distância entre Q_1 e md é aproximadamente igual à distância entre md e Q_3 [12].

Para quantificar a assimetria, podemos utilizar o coeficiente de assimetria de Bowley definido por [12]

$$g_b = \frac{(Q_3 - md) - (md - Q_1)}{Q_3 - Q_1} \quad (1)$$

No caso da PETR4, esse coeficiente passou de 0,03 em 2019 para 0,20 em 2020. Isso significa que, em 2019, a distribuição de preços era praticamente simétrica, ou seja, preços de fechamento abaixo e acima da média ocorriam com frequências semelhantes. Por outro lado, em 2020, a distribuição passou a ser assimétrica positiva, indicando que valores do preço de fechamento abaixo da média ocorreram com frequência maior.

Para a ELET6, o coeficiente de assimetria de Bowley manteve-se praticamente constante, indo de 0,13 em 2019 para 0,15 em 2020, e, portanto, a

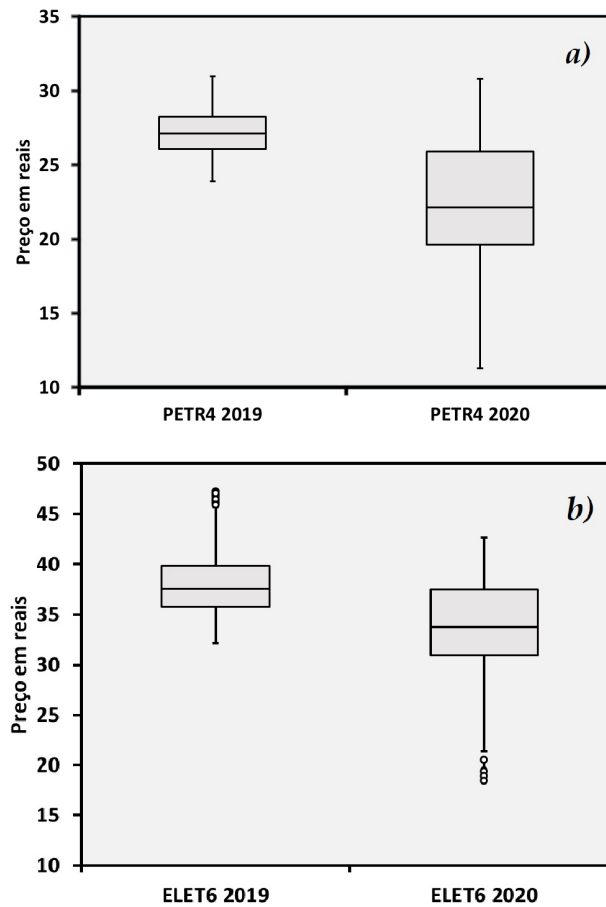


Figura 2: *Box plot* dos preços de fechamento das ações da Petrobras e da Eletrobras. As figuras a) e b) apresentam, respectivamente, os dados para a PETR4 e para a ELET6 nos anos de 2019 e 2020.

distribuição dos preços de fechamento é assimétrica positiva. Ao contrário da PETR4, a ELET6 apresentou valores extremos tanto em 2019 quanto em 2020. No entanto, com a pandemia do coronavírus, os valores extremos passaram a surgir abaixo do limite inferior, sendo resultado, provavelmente, de uma maior desvalorização das ações nesse período.

Conforme já mencionamos, é interessante fazer uma análise do comportamento conjunto de duas variáveis aleatórias numéricas distintas. Dessa forma, apresentamos na figura 3 o diagrama de dispersão dos preços de fechamento das ações da Petrobras (PETR4) e da Eletrobras (ELET6) nos anos de 2019 e 2020. Podemos observar de uma forma bastante clara que em 2019, portanto, antes da pandemia do coronavírus, os preços das ações dessas empresas eram consideravelmente dispersos e, portanto, não apresen-

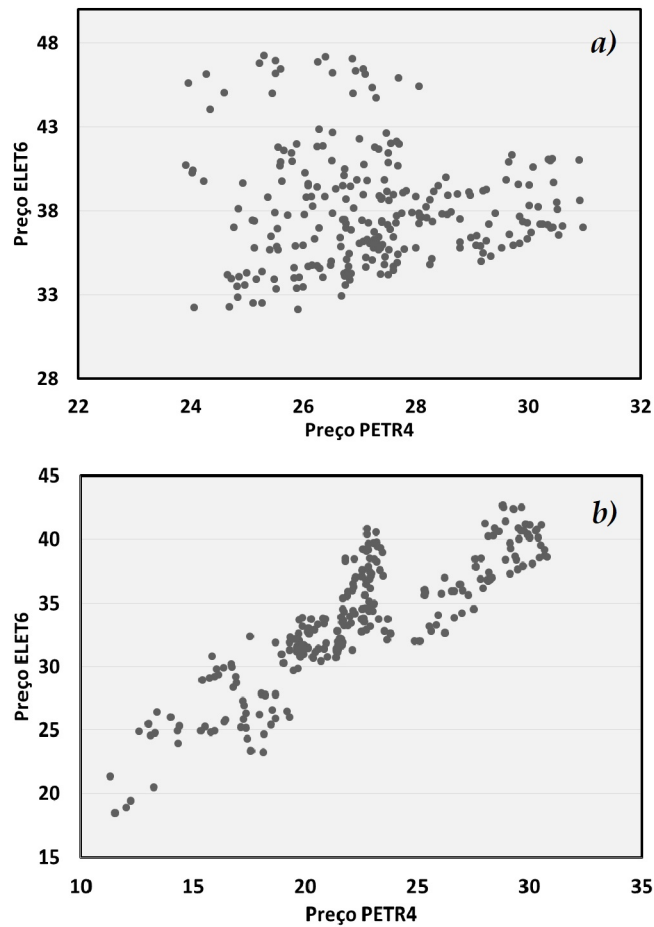


Figura 3: Gráfico de dispersão mostrando os preços de fechamento das ações da PETR4 (eixo horizontal) e da ELET6 (eixo vertical). As figuras a) e b) representam as dispersões para os anos de 2019 e 2020, respectivamente.

tavam nenhuma correlação linear. Por outro lado, no ano de 2020, durante a pandemia do coronavírus, ocorreu uma diminuição na dispersão dos preços, passando a apresentar uma correlação linear positiva, ou seja, se o preço das ações de uma delas aumentasse (diminísse) o preço da outra também aumentava (diminuía). Do ponto de vista quantitativo, o coeficiente de correlação linear entre os preços em 2019 era -0,03, portanto, praticamente zero, indicando ausência de correlação. Por outro lado, em 2020, ρ passou a ser 0,86, indicando uma correlação linear positiva muito forte.

10.1 Retorno e Risco um Ativo

Sejam P_t e P_{t-1} os preços de um ativo nos instantes t e $t - 1$, respectivamente. Dessa forma, o *retorno relativo discreto* de um ativo é dado por [27]

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (2)$$

O risco de um ativo, por sua vez, é dado pelo desvio padrão dos retornos relativos discretos em um determinado período, de acordo com a equação [27]

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} \quad (3)$$

Para calcular o risco anual (σ_{anual}) a partir do risco diário (σ_{diario}) utilizamos a equação

$$\sigma_{anual} = \sqrt{252} \times \sigma_{diario} \quad (4)$$

uma vez que no mercado financeiro considera-se que o ano tem aproximadamente 252 dias úteis.

Nas tabelas 2 e 3, apresentamos os retornos e os riscos da PETR4 e da ELET6 nos anos de 2019 e 2020. Podemos observar que, ambas as empresas proporcionaram, em termos de valorização das ações, retornos consideráveis aos acionistas que mantiveram suas ações durante todo o ano de 2019, ao passo que, em 2020, ocorreu uma desvalorização acentuada das ações gerando prejuízo aos acionistas. Além disso, os riscos aumentaram consideravelmente como resultado das incertezas causadas pela pandemia do coronavírus.

Tabela 2: Risco e retorno das ações PETR4 e ELET6 em 2019.

Ano - 2019	R_{anual}	σ_{anual}
PETR4	25,44%	28,43%
ELET6	18,54%	37,36%

10.2 Diversificação de Portfólios

Um investimento pode ser feito em apenas um ativo ou em uma carteira (portfólio) com vários ativos. Racionalmente, um investidor sempre quer selecionar ativos que ofereçam menor risco e maior retorno possível. Nesse

Tabela 3: Risco e retorno das ações PETR4 e ELET6 em 2020.

Ano - 2020	R_{anual}	σ_{anual}
PETR4	-7,69%	68,45%
ELET6	-4,42%	62,77%

sentido, o estudo de carteiras de ativos é muito relevante pois elas permitem a redução do risco através da diversificação dos ativos que as compõem. Em outras palavras, o objetivo do estudo de carteiras de ativos é selecionar a carteira com o maior retorno possível para um determinado grau de risco ou selecionar a carteira que ofereça o menor risco possível para um determinado retorno esperado [27, 28, 18].

10.2.1 Retorno Esperado e Risco de um Portfólio

Sejam R_A e R_B os retornos esperados dos ativos A e B , respectivamente. Se os percentuais da carteira aplicados em A e B são w_A e w_B , respectivamente, o retorno esperado dessa carteira é dado pela média ponderada do retorno esperado de cada ativo em relação a sua participação no total do portfólio, conforme a equação abaixo [27, 28, 18]:

$$E(R_c) = w_A R_A + w_B R_B \quad (5)$$

Além disso, sejam σ_A e σ_B os riscos dos ativos A e B , respectivamente, e $\rho(A, B)$ o coeficiente de correlação linear entre os retornos dos ativos. O risco de uma carteira composto por esse dois ativos, de acordo com o modelo de Markowitz [27, 28, 18], é dado por:

$$\sigma_c = \sqrt{w_A^2 \sigma_A^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + 2w_A w_B \rho(A, B) \sigma_A \sigma_B} \quad (6)$$

Da equação acima, podemos observar que o risco de uma carteira depende não somente do risco de cada ativo que a compõe e de sua participação no investimento total, mas também da forma como esses ativos estão relacionados entre si. Dessa forma, a diversificação deve sempre ser elaborada observando-se as correlações dos retornos dos ativos, de maneira a se estabelecer a melhor composição de uma carteira. Uma consequência imediata da equação acima é que relacionando-se ativos com baixa correlação é possível reduzir-se o risco total de uma carteira [27, 28, 18].

10.2.2 Hipérbole de Markowitz e Fronteira Eficiente

Para obter o retorno esperado e o risco de um determinado ativo, é interessante considerar os possíveis cenários econômicos. Dessa forma, os profissionais do mercado financeiro atribuem probabilidades de que determinados retornos ocorram para cada situação econômica (crescimento, estabilidade e recessão), com o intuito de fazer uma estimativa do retorno esperado e do risco de um ativo [27, 28]. No entanto, como o nosso propósito aqui é mostrar como a estatística pode ser útil no estudo da diversificação de carteiras, vamos assumir que R_A (σ_A) e R_B (σ_B) sejam os retornos (riscos) anuais das ações da Petrobras e Eletrobras, respectivamente, em 2019, antes da pandemia do coronavírus. Com isso, de acordo com a tabela 2, $R_A = 25,44\%$, $R_B = 18,54\%$, $\sigma_A = 28,43\%$ e $\sigma_B = 37,36\%$. Considerando-se os retornos diários da Petrobras e da Eletrobras em 2019, o coeficiente de correlação linear é dado por $\rho(A, B) = 0,471$. Através das possíveis combinações das participações da PETR4 e da ELET6 na carteira, obtemos diferentes retornos e riscos, conforme a tabela 4 e a figura 4.

Tabela 4: Retorno esperado e risco de carteiras com diferentes composições.

Carteira	w_A	w_B	Retorno	Risco
1	100,00%	0,00%	25,44%	28,43%
2	95,00%	5,00%	25,10%	27,94%
3	90,00%	10,00%	24,75%	27,54%
...
...
...
19	10,00%	90,00%	19,23%	35,05%
20	5,00%	95,00%	18,89%	36,18%
21	0,00%	100,00%	18,54%	37,36%

A carteira 1 (ponto A do gráfico), composta apenas pelas ações da Petrobras, apresenta o maior retorno esperado, porém, não é a carteira de menor risco. Por outro lado, a carteira 21 (ponto B do gráfico), constituída unicamente pelas ações da Eletrobras, apresenta o menor retorno esperado e ainda o maior risco.

Partindo do ponto B, conforme vamos aumentando a participação da Petrobras na carteira, obtemos uma diminuição do risco e um aumento do retorno esperado. Entretanto, isto ocorre até o ponto M, onde temos a carteira de menor risco, chamada *carteira de mínima variância*, dada por $w_A = 74,40\%$, $w_B = 25,60\%$, $E(R_c) = 23,67\%$ e $\sigma_c = 27,01\%$. A partir do

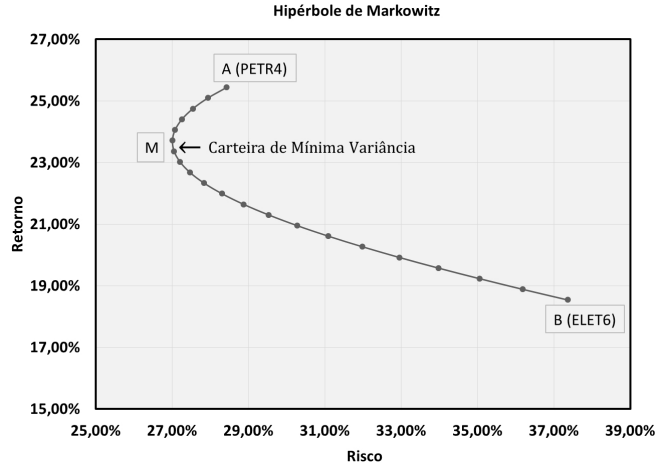


Figura 4: Neste gráfico vemos a hipérbole de Markowitz, com o eixo horizontal representando o risco (medido pelo desvio padrão) e o eixo vertical representando o retorno esperado, para diferentes composições.

ponto M, tanto o retorno esperado como o risco aumentam indo em direção ao ponto A. Nesse contexto, um investimento só faz sentido e deve ser considerado se estiver localizado na curva MA, conhecida por *fronteira eficiente* [27, 28, 18]. Qualquer investimento na curva MB deve ser descartado pois além de um maior risco, obtemos também um menor retorno esperado.

Analiticamente, podemos obter a participação de cada ativo na carteira de mínima variância, substituindo $w_B = 1 - w_A$ na equação 11, derivando a variância com relação a w_A e igualando o resultado a zero [27, 28]:

$$\frac{d\sigma_c^2}{dw_A} = 0 \quad (7)$$

nos dá

$$w_A = \frac{\sigma_B^2 - \rho(A, B)\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho(A, B)\sigma_A\sigma_B} \quad (8)$$

lembrando que $w_B = 1 - w_A$.

11 Conclusão

Em resumo, este trabalho apresentou uma aplicação prática de grande relevância da estatística no mercado financeiro, abordando conceitos fundamentais como risco, retorno esperado, fronteira eficiente e carteira de mínimo

risco. Esperamos que este trabalho seja útil para os estudantes de estatística, permitindo-lhes compreender de forma mais clara e tangível os conceitos teóricos por meio de uma aplicação real. Em última análise, acreditamos que a utilização deste material didático complementar possa ajudar a preparar os futuros profissionais do mercado financeiro para lidar com as complexidades e desafios que enfrentarão em sua carreira.

Referências

- [1] D.S. Santos, A.T.B Celeste e A.S. Magalhães, *Revista do Professor de Física*, **3**, p. 1-13 (2019).
- [2] J.S. Lima, T.C Abdias, I.M. Miranda e G.M. Viswanathan, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20200002 (2020).
- [3] K.K.F. Nascimento, J.S. Jale e T.A.E. Ferreira, *Ciência e Natura*, Santa Maria, **43**, p. 1-27 (2021).
- [4] R.N. Mantegna, H.E. Stanley, *An introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, New York, 2000).
- [5] I.R.O. Ramos, J.P.M. Braga, J.V.A. Ataíde, A.P. Lima e L. M. Holanda, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **40**, e5408 (2018).
- [6] Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Petrobras>. Acesso em 01/02/2023.
- [7] Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Eletronbras>. Acesso em 01/02/2023.
- [8] A.A. Neto, *Mercado Financeiro* (Editora Atlas, 2021), 14^a ed.
- [9] A.A. Neto, *Mercado Financeiro: Exercícios e Prática* (Editora Atlas, 2019), 2^a ed.
- [10] CNN Brasil. Disponível em: <https://www.cnnbrasil.com.br/business/bolsa-despenca-no-ano-em-meio-a-pandemia-e-hora-de-entrar/>. Acesso em 18/05/2022.
- [11] InfoMoney. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/mercados/um-ano-dos-63-mil-pontos-a-trajetoria-do-ibovespa-desde-a-minima-durante-a-pandemia-e-o-que-esperar-daqui-para-frente/>. Acesso em 18/05/2022.

- [12] M. N. Magalhães e A. C. P. de Lima, *Noções de Probabilidade e Estatística* (Editora da Universidade de São Paulo, 2017), 7ª ed.
- [13] W. O. Bussab e P. A. Morettin, *Estatística Básica* (Editora Saraiva, 2017), 9ª ed.
- [14] M. F. Triola, *Introdução à Estatística* (LTC Editora, 2008), 10ª ed.
- [15] P. Bruce e A. Bruce, *Estatística Prática para Cientistas de Dados* (Alta Books Editora, 2019), 1ª ed.
- [16] J. Grus, *Data Science do Zero* (Alta Books Editora, 2016), 1ª ed.
- [17] TWD Calculadora de Estatística. Disponível em: <https://www.calculadoradeestatistica.com/>. Site criado pelo autor I.R.O. Ramos. Acesso em 31/01/2023.
- [18] H. Markowitz, *Portfolio Selection*. New York: John Wiley, 1959.

12 Participação em Eventos

Durante o estágio de Pós doutorado participamos do seguintes eventos:

1. Participação no II International Multidisciplinary Congress, promovido pela Seven Publicações LTDA. em parceria com Home Publishing Brazil, nos dias 1 e 2 de junho de 2023.
2. Participação no I Seven International Education Congress, promovido pela Seven Publicações LTDA. em parceria com Home Publishing Brazil, nos dias 18 e 19 de setembro de 2023.
3. Participação no I Seminário Institucional de Pesquisa e Pós-Graduação, realizado na Universidade Estadual Vale do Acaraú-UVA, no período de 22 a 24 de agosto de 2023, com carga horária de 20 horas.
4. Participação na IX Semana Universitária da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro Brasileira-UNILAB, no período de 21 a 24 de novembro de 2023.

13 Cursos de Complementação Realizados

1. Participação no Curso de Bioestatística, realizado no Centro de Ciências da Saúde- CCS da Universidade Estadual Vale do Acaraú- UVA, no período de 01/02/2023 a 03/02/2023, com carga horária de 40 horas. Ver documentação em anexo.
2. Participação no Curso de Metodologia do Ensino de Física, realizado pela Faculdade Unina, no período de 17/03/2023 a 31/05/2023, com carga horária de 40 horas. Ver documentação em anexo.
3. Participação no Curso de Metodologia do Ensino de Matemática, realizado pela Faculdade Unina, no período de 14/06/2023 a 25/08/2023, com carga horária de 20 horas. Ver documentação em anexo.

14 Artigo Aprovado com Qualis B1

1. Artigo aprovado na revista Exatas Online. Ver documentação em anexo.

15 Trabalhos Apresentados em Eventos

1. M.M Landa, R. N. D. Maia, I.R.O. Ramos e J.P.M. Braga, Incerteza Mínima no Momento, IX Semana Universitária da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro Brasileira-UNILAB, 2023. Ver documentação em anexo.
2. L.N.L. Rodrigues, I.R.O. Ramos e J.P.M. Braga, O Papel da Termodinâmica na Revolução Industrial, IX Semana Universitária da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro Brasileira-UNILAB, 2023. Ver documentação em anexo.
3. R. N. D. Maia, M.M Landa, I.R.O. Ramos e J.P.M. Braga, Teorema de Ehrenfest, IX Semana Universitária da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro Brasileira-UNILAB, 2023. Ver documentação em anexo.
4. P.C.S. Castro, I.R.O. Ramos e J.P.M. Braga, Condutores, Isolantes, Semicondutores e suas Aplicações, IX Semana Universitária da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro Brasileira-UNILAB, 2023. Ver documentação em anexo.

5. R. N. D. Maia, I.R.O. Ramos, M.V.C. Nascimento, M.M Landa e J.P.M. Braga, Dinâmica Clássica em um Espaço Curvo, IX Semana Universitária da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro Brasileira-UNILAB, 2023. Ver documentação em anexo.
6. M.M Landa, R. N. D. Maia, I.R.O. Ramos e J.P.M. Braga, Lagrangiana para Partículas Carregadas, IX Semana Universitária da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro Brasileira-UNILAB, 2023. Ver documentação em anexo.

16 Outro Trabalho Realizado Durante o Pós Doutorado

Título: Modelo de Black-Scholes como caso particular da equação de Langevin

17 Resumo

Neste trabalho mostramos que o modelo de Black-Scholes pode ser visto como um caso particular da equação de Langevin. Para isso, consideramos o movimento browniano de uma partícula em um meio não homogêneo e no regime superamortecido. Obtivemos as soluções analítica e numérica e as comparamos para diferentes volatilidades.

Palavras-chave: Equação de Langevin, Modelo de Black-Scholes, Eco-nofísica.

18 Introdução

O botânico inglês Robert Brown publicou em 1828 um trabalho no qual apresentou os resultados de suas observações, feitas com o auxílio de um microscópio, sobre o movimento irregular e incessante de partículas de pólen em suspensão em água [1, 2, 4]. Brown notou que as partículas se moviam de maneira errática, sem um padrão aparente. De início, imaginou que o movimento fosse causado por algum tipo de organismo vivo, no entanto, essa hipótese foi posteriormente refutada logo após a observação do mesmo tipo de movimento em partículas inorgânicas de cinza [1, 7, 8]. A partir das observações de Brown, foi possível mostrar que esse tipo de movimento, que foi batizado em sua homenagem de *movimento browniano*, é um fenômeno

bem mais abrangente, ocorrendo com partículas macroscopicamente pequenas em suspensão em fluidos não muito viscosos, porém muito maiores que as moléculas do fluido [1, 2, 4]. Uma vez constatada a natureza física do movimento browniano, vários cientistas propuseram teorias, como agitação térmica, correntes de convecção e até mesmo forças vitais. No entanto, nenhuma dessas teorias era capaz de explicar completamente o comportamento observado.

Uma das contribuições mais significativas veio do matemático francês Louis Bachelier, o qual fora orientado por Henri Poincaré. Em sua tese de doutorado, desenvolveu a primeira teoria formal para o movimento browniano aplicada em finanças no ano de 1900. Bachelier, além de ser o primeiro a inferir o uso da distribuição normal no mercado financeiro, estruturando toda a parte de cálculo de risco [6], também investigou a dinâmica da cotação de ações na bolsa de Paris e a precificação de opções introduzindo aspectos aleatórios, propondo que o preço de um ativo financeiro fosse descrito por um movimento browniano contínuo [9, 10, 11, 14, 15].

Foi somente em 1905 que Albert Einstein publicou um artigo intitulado "Sobre o Movimento Requerido por um Pequeno Elemento de Matéria de um Líquido em Repouso", no qual finalmente resolveu o enigma do movimento browniano. Nesse artigo, Einstein propôs uma explicação baseada na teoria cinética dos gases e no conceito de átomos que além de fornecer uma dedução probabilística para a equação da difusão, ainda possibilitou uma estimativa do número de Avogadro, o qual teve confirmação experimental realizada pelo físico francês Jean Perrin poucos anos depois, facilitando a aceitação da teoria atômica por parte dos físicos e químicos [1, 2, 4, 7, 5].

Em 1908, o físico francês Paul Langevin realizou estudos independentes sobre o movimento browniano, obtendo resultados consistentes com a teoria proposta por Albert Einstein. Langevin desenvolveu uma equação diferencial para descrever o movimento de uma partícula em suspensão em um fluido [1, 4, 16]. Ao considerar uma situação unidimensional, a versão moderna da equação de Langevin é expressa como

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F - \gamma \frac{dx}{dt} + F_a \quad (9)$$

onde x é a posição de uma partícula de massa m sujeita a uma força de atrito proporcional à velocidade e com coeficiente de atrito γ relacionado à viscosidade do fluido, a uma força externa F e a uma força aleatória F_a devida ao bombardeio contínuo das partículas em suspensão pelas moléculas do fluido circundante que estão em constante movimento térmico [1, 2, 3, 8]. A equação de Langevin é uma equação diferencial estocástica (EDE) que

descreve o movimento browniano levando em consideração a influência do atrito viscoso e as forças aleatórias presentes no sistema.

Outra importante contribuição para o entendimento do movimento dos preços das ações no mercado financeiro, foi publicada em 1959 pelo físico M. F. M Osborne. Em seu artigo, intitulado *Brownian Motion in the Stock Market*, Osborne se apoiou em métodos da mecânica estatística utilizados no estudo de um conjunto com número grande de partículas para investigar, de forma análoga, um conjunto grande de preços de ações. Na verdade, diferente de Bachelier, ele considerou um conjunto de valores dos logaritmos dos preços, cada um variando em função tempo, e obteve como resultado uma distribuição lognormal para os preços das ações [17]. Em 1973, Fischer Black e Myron Scholes, também assumindo que o logaritmo dos preços são normalmente distribuídos, modelaram a dinâmica do preço de uma ação $S(t)$ como um processo de Itô [11], definido pela EDE

$$dS = a(S, t)dt + b(S, t)dW \quad (10)$$

onde $a(S, t)$ e $b(S, t)$ são funções reais conhecidas, e W é o processo de Wiener. Conforme veremos posteriormente, sob certas condições das funções $a(S, t)$ e $b(S, t)$, a equação 10 tem uma única solução $S(t)$, que é um processo estocástico de grande importância em finanças conhecido como *movimento browniano geométrico* [11, 13, 14, 15]. No artigo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* [18], Black e Scholes determinaram uma equação diferencial parcial muito usada no mercado financeiro na precificação de opções [11, 13, 14, 15]. No entanto, foi com Robert Merton que a equação de Black-Scholes se tornou mais compreendida e recebeu o nome de modelo de precificação de opções [6]. Por essa contribuição, Myron Scholes e Robert Merton receberam o prêmio Nobel de economia em 1997, pois Fischer Black já havia falecido [9, 6].

A busca por uma melhor compreensão do movimento browniano impulsionou, de certa maneira, o estreitamento da relação entre física e finanças, o que contribuiu para o surgimento de um novo ramo de pesquisa multidisciplinar chamado de *Econofísica* [9, 11, 13]. Esse neologismo foi criado pelo físico H. Eugene Stanley para se referir a estudos realizados por físicos em problemas na área de economia [11]. Mesmo com as grandes possibilidades de contribuição dos físicos em problemas econômicos, são raros os cursos de física onde a econofísica é estudada na graduação ou até mesmo na pós-graduação. Nesse sentido, pretendemos fornecer aos estudantes de física um material que lhes permita explorar e compreender os fundamentos da econofísica e abrir novas perspectivas e oportunidades de pesquisa àqueles interessados em aplicar os princípios da física em problemas econômicos e

financeiros. Ao abordarem assuntos sobre econofísica, os estudantes podem desenvolver habilidades analíticas e de modelagem, bem como aprender a aplicar métodos quantitativos e estatísticos para analisar e interpretar dados financeiros. Tal conteúdo pode ser de grande relevância em um mundo cada vez mais orientado por dados, no qual a compreensão dos fenômenos econômicos a partir de uma abordagem científica pode oferecer vantagens competitivas.

19 Modelo

Consideremos o movimento em uma dimensão de uma partícula de massa m em suspensão num fluido. Conforme vimos na equação 9, a partícula está sujeita a uma força de atrito viscoso proporcional à sua velocidade, a uma força externa F , e a uma força aleatória F_a atribuída às colisões com as moléculas do fluido e que varia rapidamente em comparação com os tempos de observação. Aqui, vamos considerar que F_a é modelada pelo ruído branco $\xi(t)$ com intensidade $\alpha(x(t))$ que, de forma geral, pode depender do estado do sistema [12, 19].

Considerando-se um conjunto de muitos sistemas semelhantes onde cada um deles é constituído por uma partícula em suspensão em um fluido e uma força aleatória é aplicada a cada sistema individualmente, é igualmente provável que $\xi(t) > 0$ ou $\xi(t) < 0$ a cada instante, tal que

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (11)$$

onde $\langle \rangle$ indica a média sobre um grande número de realizações da variável estocástica $\xi(t)$ [7, 8, 12]. Além disso, supondo que o valor da força aleatória em um instante qualquer é totalmente independente do valor que assumiu em qualquer instante anterior, a função de correlação do ruído branco em dois instantes t_1 e t_2 quaisquer é dada por [2, 4, 8, 12]

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \delta(t_1 - t_2) \quad (12)$$

Com relação à intensidade do ruído branco, temos dois cenários possíveis: o primeiro deles ocorre se $\alpha = \text{constante}$, caracterizando o ruído como sendo do tipo *aditivo* e o segundo se $\alpha = \alpha(x(t))$, que caracteriza o ruído como *multiplicativo* [12].

O tamanho da partícula browniana é muito maior que o das moléculas do fluido e, como consequência, a partícula sofre muitas colisões quase simultaneamente. Dessa forma, a intensidade e a direção do impulso resultante variam em tempos bem menores quando comparados aos tempos de

observação, conseqüentemente, para levar em conta o efeito acumulado das colisões aleatórias que afetam o movimento da partícula, utilizamos o processo de Wiener W [12, 13, 14, 15, 20] que é definido como uma integral do ruído branco em tempo contínuo, ou seja,

$$W(t) = \int_0^t \xi(s) ds \quad (13)$$

Como $W(t)$ é dado por uma integral, ou seja, um limite de uma soma de um processo estocástico, temos pelo teorema do limite central, que a distribuição de probabilidades de $W(t)$ é gaussiana com média zero e desvio padrão $\sigma = \sqrt{t}$ [12, 13, 14, 15, 20].

Supondo que a partícula browniana se move no regime superamortecido, o qual é típico para partículas esféricas coloidais rígidas movendo-se em um líquido de pequenas moléculas quando comparadas ao tamanho das esferas, o termo de inércia é desprezível e podemos fazer [22, 23, 24, 25, 26]

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \approx 0 \quad (14)$$

Além disso, considerando que a difusão da partícula ocorre em um meio não homogêneo, temos que o ruído é do tipo multiplicativo [19] cuja intensidade, que depende do estado do sistema, suporemos da forma $\alpha = \sigma x(t)$, onde σ é um parâmetro que mede a intensidade das flutuações aleatórias. Se a partícula está sujeita a uma força repulsiva do tipo $F = kx$ ($k =$ constante positiva) que é derivada do potencial $V = -kx^2/2$, o movimento da partícula browniana, escolhendo $\gamma = 1$, passa a ser regido pela equação

$$\frac{dx}{dt} = (k + \sigma \xi(t))x \quad (15)$$

a qual pode ser reescrita como

$$dx = kxdt + \sigma x \xi(t)dt \quad (16)$$

Da definição do processo de Wiener $W(t)$ descrito pela equação 13, podemos ainda escrever essa equação como

$$dx = kxdt + \sigma x dW(t) \quad (17)$$

que é conhecida como equação diferencial estocástica de Itô, a qual é útil para modelar fenômenos sujeitos a incertezas ou ruídos aleatórios.

20 Modelo de Black-Scholes

Idealizado pelos economistas Fischer Black e Myron Scholes em meados dos anos 70, este modelo foi o primeiro a ser amplamente difundido e, consequentemente, o mais conhecido sobre precificação de ações. Ele calcula o preço teórico da ação com base em algumas variáveis que estão sujeitas a variações temporais e podem ter comportamento bastante complexos. Seja $B(t)$ o valor de uma aplicação no instante $t \geq 0$ e $B(0) = B_0$ o valor inicial investido. Se a taxa de rendimento r for fixa, a taxa instantânea de crescimento da aplicação é proporcional ao valor investido e dada pela equação diferencial ordinária (EDO) [13, 14, 15]

$$\frac{dB}{dt} = rB \quad (18)$$

cujas solução é

$$B(t) = B_0 e^{rt} \quad (19)$$

Por outro lado, se o investimento for feito em renda variável como, por exemplo, em ações, a taxa de rendimento não é constante e flutua aleatoriamente. Dessa forma, considerando S o preço de uma determinada ação, podemos escrever uma equação para a taxa de crescimento de S análoga a equação 18 como

$$\frac{dS}{dt} = R(t)S \quad (20)$$

onde $R(t) = r + \sigma\xi(t)$. Aqui, r é a parte não aleatória que representa a taxa média de rendimento, σ é um parâmetro que, no mercado financeiro é conhecido como volatilidade, que é uma medida estatística de dispersão relacionada ao desvio padrão dos retornos em um determinado período [27, 28], e $\xi(t)$ é um processo estocástico chamado de *ruído branco*, como já discutido. Assim, temos a equação

$$\frac{dS}{dt} = (r + \sigma\xi(t))S \quad (21)$$

que pode ser escrita também na forma

$$dS = rSdt + \sigma S\xi(t)dt \quad (22)$$

ou

$$dS = rSdt + \sigma SdW(t) \quad (23)$$

A equação 22 é uma EDE conhecida como o *modelo de Black-Scholes* para a cotação de uma ação [13, 14, 15]. Observe que a equação 23 é idêntica à

equação 17 e, portanto, possuem as mesmas soluções numérica e analítica, conforme veremos a seguir. O modelo de Black-Scholes também é útil para o estudo do crescimento de uma população de seres vivos. Neste caso, S pode ser, por exemplo, o número de bactérias no instante t , r é a taxa média de crescimento e a aleatoriedade pode estar relacionada a pequenas variações de temperatura que afetam a taxa de crescimento da população, sendo a intensidade desses efeitos aleatórios dada por σ [14, 15, 20].

21 Solução Analítica

As variáveis estocásticas apresentam comportamentos aleatórios que tornam as regras usuais do cálculo diferencial e integral inadequadas para lidar com elas e, por esse motivo, recorremos ao cálculo estocástico. Para nossos propósitos, utilizaremos o cálculo de Itô, que nos fornece ferramentas essenciais, como as regras de diferenciação de funções compostas ou regra da cadeia. Essas ferramentas são fundamentais para o desenvolvimento de modelos matemáticos precisos em diversas áreas, permitindo descrever de forma mais eficiente e precisa os fenômenos regidos por processos estocásticos.

Teorema de Itô: Seja $x(t)$ um processo estocástico descrito pela EDE

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dW(t) \quad (24)$$

Seja $y(t) = h(x(t), t)$, onde $h(x(t), t)$ é uma função contínua com derivada parcial contínua com relação a t e com segunda derivada parcial contínua com relação a x . Então $y(t)$ é também um processo estocástico com condição inicial $y_0 = h(x_0, 0)$ dado na forma diferencial pela equação

$$\begin{aligned} dy(t) = & \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} f(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} g^2(x, t) \right] dt \\ & + \frac{\partial h}{\partial x} g(x, t) dW(t) \end{aligned} \quad (25)$$

Considerando $h = \ln(x/x_0)$ e que $f(x, t) = kx$, $g(x, t) = \sigma x$ pelas equações 17 e 24, temos, pelo teorema de Itô, que a solução da equação 17 é dada por

$$x(t) = x_0 \exp \left[\left(k - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right] \quad (26)$$

que é um processo estocástico chamado de movimento browniano geométrico [11, 13, 14, 15].

22 Solução Numérica

Nesse ponto, é muito importante destacar que a trajetória do movimento browniano não é diferenciável em nenhum ponto e, por isso, a EDE 17 deve ser tratada utilizando o cálculo estocástico que pode ser o de Itô ou de Stratonovich [12, 14, 15]. Dessa forma, a EDE 17, apesar de ser escrita na forma diferencial, é, na verdade, uma equação integral dada por [12, 13, 14, 15, 20]

$$x(t) = x(0) + k \int_0^t x(s)ds + \sigma \int_0^t x(s)dW(s) \quad (27)$$

onde $x(0) = x_0$ é a condição inicial que supomos conhecida e ainda que $x_0 > 0$ [14, 15]. A primeira integral, supondo que o integrando é uma função suficientemente bem comportada, é uma integral de Riemann-Stieltjes e podemos utilizar a equação

$$\int_0^t x(s)ds = \sum_{i=1}^N x(t_i)\Delta t \quad (28)$$

onde dividimos o intervalo de integração $[0, t]$ em N intervalos de tamanho Δt , com $\Delta t \rightarrow 0$ e $N \rightarrow \infty$ [12, 20, 21]. Por outro lado, a segunda integral é uma integral estocástica chamada integral de Itô, que pode ser aproximada pela equação [12, 13, 14, 15, 20]

$$\int_0^t x(s)dW(s) = \sum_{i=1}^N x(t_{i-1})\Delta W(t_i) \quad (29)$$

onde

$$\Delta W(t_i) = W(t_i) - W(t_{i-1}) \quad (30)$$

Como $\Delta W(t)$ é um processo estocástico gaussiano com média zero e desvio padrão igual a $\sqrt{\Delta t}$, podemos escrever [12, 13, 14, 15, 20]

$$\Delta W(t_i) = \epsilon(t_i)\sqrt{\Delta t} \quad (31)$$

onde $\epsilon(t_i)$ é um número aleatório, com distribuição gaussiana, com média 0 e desvio padrão 1. Dessa forma, o i -ésimo passo de integração da equação 27 é dado por

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + kx(t_i)\Delta t + \sigma x(t_i)\epsilon(t_i)\sqrt{\Delta t} \quad (32)$$

23 Comparação das Soluções

À medida que refinamos os parâmetros de discretização (ou seja, reduzimos o tamanho dos passos no espaço e no tempo) na abordagem numérica, esta solução deve se aproximar cada vez mais da solução analítica, fornecida pela fórmula de Black-Scholes. Em condições ideais, à medida que os passos de discretização tendem a zero, a solução numérica deve convergir para a solução analítica.

Vamos, portanto, considerar as equações 26 e 32, respectivamente, e escrevê-las em termos das variáveis do modelo de Black-Scholes como

$$S(t) = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right] \quad (33)$$

e

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + rS(t_i)\Delta t + \sigma S(t_i)\epsilon(t_i)\sqrt{\Delta t} \quad (34)$$

Na forma discretizada, o i -ésimo passo de integração da solução analítica é dado por

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \Delta W(t_i) \right] \quad (35)$$

ou

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon(t_i)\sqrt{\Delta t} \right] \quad (36)$$

onde substituímos as equações 30 e 31 na equação 33 para obter este resultado. Para mostrar que as soluções analítica e numérica convergem, vamos considerar, por exemplo, que o preço inicial da ação é de $S_0 = 10$ reais, que a taxa de juros é de $r = 13.75\%$ ao ano, e obter o preço em função do tempo durante um ano para diferentes incrementos de tempo e diferentes volatilidades. Podemos observar nas figuras 5 e 6 que já para $dt = 0.05$ as soluções analítica e numérica já estão muito próximas uma da outra, o que nos permite escolher qualquer uma das duas para a realização de simulações computacionais. Outro fato que vale a pena ressaltar é o papel da volatilidade no preço das ações. Como já mencionamos, a volatilidade é uma medida estatística de dispersão que expressa a incerteza dos retornos de um ativo [27, 28]. Podemos observar nas figuras 5b e 6b, que conforme a volatilidade aumenta o preço da ação oscila com mais intensidade e está sujeito tanto a grandes altas como a grandes baixas.

24 Conclusão

Em resumo, este trabalho apresentou o modelo de Black-Scholes como um caso particular da equação de Langevin e discutiu as soluções analítica

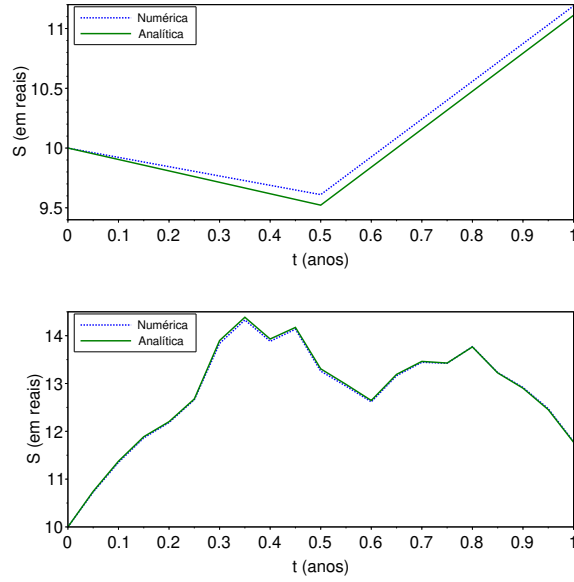


Figura 5: Solução analítica e numérica para o preço em função do tempo considerando $\sigma = 20\%$ para (a) $dt = 0.5$ e (b) $dt = 0.05$.

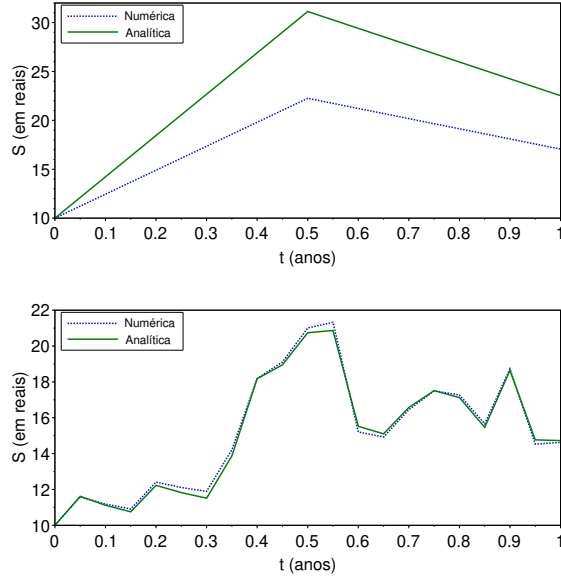


Figura 6: Solução analítica e numérica para o preço em função do tempo considerando $\sigma = 60\%$ para (a) $dt = 0.5$ e (b) $dt = 0.05$.

e numérica para diferentes volatilidades. Esperamos que este trabalho seja

útil para os estudantes de física, permitindo-lhes uma introdução de forma mais acessível e didática no ramo da econofísica.

Referências

- [1] S.R.A. Salinas, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27**, 263 (2005).
- [2] S.R.A. Salinas, *Introdução à Física Estatística* (Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013), 2^a ed.
- [3] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* (McGraw-Hill, Nova Iorque, 1965).
- [4] J.M. Silva e J.A.S. Lima, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **29**, 25 (2007).
- [5] A. Einstein, *Investigations on the Theory of the Brownian Movement* (Dover Publications, New York, 1956).
- [6] M.A.L. Caetano, *Análise de Risco em Aplicações Financeiras* (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2017).
- [7] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica* (Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1997), v. 2, 3^a ed.
- [8] J.P. Casquilho e P.I.C. Teixeira, *Introdução à Física Estatística* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2012), 1^a ed.
- [9] J.S. Lima, T.C. Abdias, I.M. Miranda e G.M. Viswanathan, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20200002 (2020).
- [10] L. Bachelier, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* **17**, 21 (1900).
- [11] R.N. Mantegna, H.E. Stanley, *An introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, New York, 2000).
- [12] C. Scherer, *Métodos Computacionais da Física* (Editora Livraria da Física, 2010), 2^a ed.
- [13] G.L. Vasconcelos, *Brazilian Journal of Physics*, **34**, 1039 (2004).

- [14] C.A. Braumann, *Uma Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações* (Editora Sociedade Portuguesa de Estatística, 2005), 1^a ed.
- [15] C.A. Braumann, *Introduction to Stochastic Differential Equations with Applications to Modelling in Biology and Finance* (Editora Wiley, 2019), 1^a ed.
- [16] P. Langevin, Compt. Rend. **146**, 530 (1908).
- [17] M.F.M. Osborne, Operations Research **7**, 145 (1959).
- [18] F. Black e M. Scholes, J. Polit. Econ. **81**, 637 (1973).
- [19] G. Volpe e J. Wehr, Rep. Prog. Phys **79**, 053901 (2016).
- [20] I.R. Filho, A.S.L. Oliveira e F.B. Silva, Revista Eletrônica Paulista de Matemática, **17**, 61 (2020).
- [21] F.C. Klebaner, *Introduction to Stochastic Calculus with Applications* (Imperial College Press, 2005), 2^a ed.
- [22] Nägele, G., Dhont, J.K., Meier, G. (2005). Diffusion in Colloidal and Polymeric Systems. In: Heitjans, P., Kärger, J. (eds) Diffusion in Condensed Matter. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [23] D. Lucena, D.V. Tkachenko, K. Nelissen, V.R. Misko, W.P. Ferreira, G.A. Farias e F.M. Peeters, Phys. Rev. E **85**, 031147 (2012).
- [24] D.L. Ermak e J.A. McCammon, J. Chem. Phys. **69**, 1352 (1978).
- [25] D. Lucena, W.P. Ferreira, F.F. Munarin, G.A. Farias e F.M. Peeters, Phys. Rev. E **87**, 012307 (2013).
- [26] D. Lucena, J.E. Galván-Moya, W.P. Ferreira e F. M. Peeters, Phys. Rev. E **89**, 032306 (2014).
- [27] A.A. Neto, *Mercado Financeiro* (Editora Atlas, 2021), 14^a ed.
- [28] A.A. Neto, *Mercado Financeiro: Exercícios e Prática* (Editora Atlas, 2019), 2^a ed.

25 Parecer do Supervisor

O pós-doutorando executou suas atividades de maneira exemplar, indo além do que foi previsto no seu plano de trabalho. Durante o período do seu estágio de pós-doutorado, foi publicado um artigo em revista científica qualis b1 e outros dois trabalhos estão em fase final de revisão para submissão. Além disso, sua participação em projetos de pesquisa na Unilab foi fundamental para a geração de um ambiente de pesquisa produtivo e na produção de uma série de trabalhos apresentados em encontros universitários por estudantes de graduação da Unilab. Por fim, afirmo que estou bastante satisfeito com o trabalho realizado e recomendo fortemente a aprovação desse Relatório de Estágio Pós doutoral.

26 Assinaturas

Docente:

Professor Supervisor:

Coordenador do programa de pós-graduação: