



**UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

FRANCISCO FÁBIO SALES DE ALMEIDA

**RAÍZES RACIONAIS DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA COM RESGATE AOS
(QUASE ESQUECIDOS) ALGORITMO DE PELETARIUS E AS REGRAS DE
EXCLUSÃO DE NEWTON**

**REDENÇÃO – CEARÁ
2025**

FRANCISCO FÁBIO SALES DE ALMEIDA

**RAÍZES RACIONAIS DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA COM RESGATE AOS
(QUASE ESQUECIDOS) ALGORITMO DE PELETARIUS E AS REGRAS DE
EXCLUSÃO DE NEWTON**

Dissertação de Mestrado apresentada
ao curso de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional, da Uni-
versidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira, como requisito
parcial para obtenção do título de Mestre
em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Alisson
Pessoa Guimarães

**REDENÇÃO – CEARÁ
2025**

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Almeida, Francisco Fábio Sales de.

A447r

Raízes Racionais de uma Equação Algébrica com resgate aos quase esquecidos Algoritmo de Peletarius e as Regras de Exclusão de Newton / Francisco Fábio Sales de Almeida. - Redenção, 2025.
102f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Alisson Pessoa Guimarães.

1. Álgebra. 2. Raízes de Polinômios. 3. Hybritarius. I.
Título

CE/UF/BSCA

CDD 512

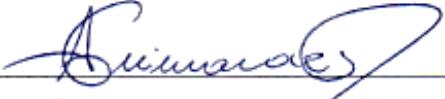
FRANCISCO FÁBIO SALES DE ALMEIDA

**RAÍZES RACIONAIS DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA COM RESGATE AOS
(QUASE ESQUECIDOS) ALGORITMO DE PELETARIUS E AS REGRAS DE
EXCLUSÃO DE NEWTON**

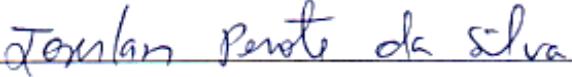
Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Campus das Auroras, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Data de aprovação: 17 de Junho de 2025.

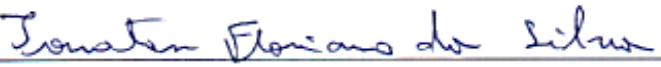
BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Antônio Alisson Pessoa Guimarães (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)


Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)


Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho ao meu filho, Luiz Arthur. O meu maior professor!

AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida e a oportunidade de viver com paz e saúde.

Aos meus pais, Joanete e Vera, por sempre buscarem me alicerçar nos estudos e me propiciar os primeiros passos rumo à Educação.

Ao meu filho Luiz Arthur que, em sua doce inocência, sempre me acolhia nos momentos duvidosos e de prantos silenciosos dessa árdua caminhada.

À minha esposa Isabelle e a sua mãe Sra. Jacira, pelas possíveis ajudas que estiveram aos seus alcances.

Ao núcleo gestor da EEMTI Maria do Carmo Bezerra, nas pessoas do ilustre diretor Fernando Costa e suas aguerridas coordenadoras Edna Alves e Cristiane Bezerra, pela sensível parceria.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), pelo período ao qual fui bolsista.

Aos professores das disciplinas do PROFMAT/UNILAB, pelos valiosos ensinamentos.

Ao Prof. Dr. Alisson Guimarães, meu estimável orientador, por me trazer luz nos momentos de escuridão. Não tenho palavras pra expressar tamanha gratidão.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva e Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva, por seus valiosos tempos disponibilizados e pelas suas imensuráveis colaborações e sugestões para com o meu trabalho.

Ao Prof. Dr. Lenimar Andrade, pela sua honrosa colaboração com o seu inestimável acervo bibliográfico.

Aos colegas da turma de mestrado, agradeço a todos pelas reflexões, ensinamentos, críticas e sugestões. Sem a ajuda de vocês, para mim não seria tão “fácil ver”. Vocês são maravilhosos!

*“Há uma única ciência, a matemática,
a qual ninguém se pode jactar de conhecer
porque suas conquistas são, por natureza, infinitas;
dela toda gente fala, sobretudo os que mais a ignoram.”*
(Malba Tahan)

RESUMO

O presente trabalho visa abordar, dentro do campo da Álgebra, dois importantes pilares: a divisão de polinômios e a raiz de uma equação polinomial. Para tal, serão mostradas técnicas que, em outrora, já foram bastante utilizadas pelos professores de matemática, até a década de 50 e 60, para a identificação das possíveis raízes racionais de uma equação polinomial de coeficientes inteiros e a divisão de polinômios por um binômio da forma $a \cdot X + b$. Além disso, assim como o Dispositivo de Briot-Ruffini, um desses métodos pode ser aplicado na verificação se um determinado número racional é ou não a raiz de uma tal equação polinomial. Chamadas de Regras de Exclusão de Newton e o Algoritmo de Peletarius, essas técnicas, por motivos por mim desconhecidos, não são mais abordadas na atual bibliografia dos inúmeros livros de álgebra dos ensinos médio e superior. Como produto educacional, será apresentado o Hybritarius®. Um aplicativo computacional que permite identificar (se existir) as raízes racionais de uma equação polinomial de coeficientes inteiros, utilizando em seu algoritmo as técnicas então apresentadas.

Palavras-chave: Álgebra. Raízes de Polinômios. Hybritarius.

ABSTRACT

This paper aims to address two important pillars of Algebra: the division of polynomials and the root of a polynomial equation. To this end, techniques that were once widely used by mathematics teachers, up until the 1950s and 1960s, will be presented to identify possible rational roots of a polynomial equation with integer coefficients and the division of polynomials by a binomial of the form $a \cdot X + b$. Furthermore, like the Briot-Ruffini Device, one of these methods can be applied to verify whether or not a given rational number is the root of such a polynomial equation. Called Newton's Exclusion Rules and the Peletarius Algorithm, these techniques, for reasons unknown to me, are no longer addressed in the current bibliography of the numerous algebra books for high school and college education. As an educational product, the Hybritarius® will be presented. A computer application that allows you to identify (if they exist) the rational roots of a polynomial equation with integer coefficients, using the techniques presented in its algorithm.

Keywords: Algebra. Roots of Polynomials. Hybritarius.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Dispositivo de multiplicação 1 | 30 |
| Figura 2 – Dispositivo de multiplicação 2 | 31 |
| Figura 3 – Método da Chave | 35 |
| Figura 4 – Multiplicação dos Polinômios f e $x - c$ | 41 |
| Figura 5 – Dispositivo Prático de Briot-Ruffini | 42 |
| Figura 6 – Divisão de $P(x)$ por $(x - L)$ (cota superior L) no Dispositivo Prático de Briot-Ruffini. | 55 |
| Figura 7 – Alocação do termo b_0 de $Q(x)$ no dispositivo do Algoritmo de Peletarius | 70 |
| Figura 8 – Alocação dos b_k termos de $Q(x)$ no dispositivo do Algoritmo de Peletarius. | 70 |
| Figura 9 – Alocação dos coeficientes de $P(x)$ e da suposta raiz $\frac{d}{c}$ no dispositivo do Algoritmo de Peletarius | 80 |
| Figura 10 – Determinação de b_0 de $Q(x)$ | 80 |
| Figura 11 – Alocação dos coeficientes b_i de $Q(x)$ e da suposta raiz $\frac{d}{c}$ no dispositivo do Algoritmo de Peletarius | 80 |
| Figura 12 – Fluxograma dos processos executados pelo aplicativo Hybritarius [®] para determinar as raízes racionais x de uma equação polinomial $P(x)$ | 91 |
| Figura 13 – Capa do Relatório Automatizado em L ^A T _E X, emitido pelo Hybritarius [®] com as informações específicas de apresentação. | 92 |
| Figura 14 – Certificado de Registro do Hybritarius [®] junto ao INPI. | 93 |
| Figura 15 – Informações preliminares do polinômio proposto, emitido pelo Hybritarius [®] com as informações específicas de $P(x)$ | 94 |
| Figura 16 – Ω_i e Ω_r de $P(x)$, emitido pelo Hybritarius [®] | 95 |
| Figura 17 – Algoritmo de Peletarius aplicado aos elementos do conjunto Ω_i , a distribuição das raízes inteiras de $P(x)$ e a sua decomposição em relação a essas raízes. | 95 |
| Figura 18 – As Regras de Exclusão de Newton aplicadas aos elementos do conjunto Ω_r e a determinação do conjunto $\Omega_r^{(rem)}$ | 96 |
| Figura 19 – O Algoritmo de Peletarius para raízes racionais não inteiras, distribuição dessas raízes quanto as suas multiplicidades e a decomposição final de $P(x)$ | 97 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|--------|---|
| ABNT | Associação Brasileira de Normas Técnicas |
| abnTeX | ABsurdas Normas para TeX |
| AP | Algoritmo de Peletarius |
| DBR | Dispositivo Prático de Briot-Ruffini |
| REN | Regras de Exclusão de Newton |
| RPM | Revista do Professor de Matemática |
| SBM | Sociedade Brasileira de Matemática |
| SIBI | Sistema Integrado de Bibliotecas |
| TFA | Teorema Fundamental da Álgebra |
| UFPB | Universidade Federal da Paraíba |
| UNILAB | Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------|----------------------|
| \in | Pertence |
| \notin | Não Pertence |
| $=$ | Igual |
| \neq | Diferente |
| $>$ | Maior que |
| $<$ | Menor que |
| \geq | Maior que ou igual a |
| \leq | Menor que ou igual a |
| ∂ | Del |
| \forall | Para todo |
| \cup | União |
| \cap | Interseção |
| $ $ | Divide |
| \nmid | Não divide |

SUMÁRIO

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 15 |
| 1.1 | A IMPORTÂNCIA DESSE TRABALHO | 17 |
| 1.2 | ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO | 17 |
| 2 | POLINÔMIOS | 19 |
| 2.1 | UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE A ÁLGEBRA E OS POLINÔMIOS | 19 |
| 2.2 | A FUNÇÃO POLINOMIAL OU (SIMPLESMENTE) POLINÔMIO | 22 |
| 2.3 | CONCEITOS E DEFINIÇÕES | 23 |
| 2.3.1 | Grau, Coeficiente Líder e Coeficiente Independente | 23 |
| 2.3.2 | O valor numérico e a Raiz de um Polinômio | 23 |
| 2.3.3 | Polinômio Nulo e os seus coeficientes | 24 |
| 2.3.4 | Polinômios Idênticos e os seus coeficientes | 25 |
| 2.4 | OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS | 25 |
| 2.4.1 | Adição | 25 |
| 2.4.1.1 | <i>Soma de Polinômios</i> | 25 |
| 2.4.1.2 | <i>Propriedades da Adição</i> | 26 |
| 2.4.1.3 | <i>Grau da Soma</i> | 26 |
| 2.4.1.4 | <i>Exemplos da Soma de Polinômios</i> | 26 |
| 2.4.2 | Subtração | 27 |
| 2.4.2.1 | <i>Diferença de Polinômios</i> | 27 |
| 2.4.2.2 | <i>Propriedades da Subtração</i> | 27 |
| 2.4.2.3 | <i>Grau da Subtração</i> | 27 |
| 2.4.2.4 | <i>Exemplos de Subtração de Polinômios</i> | 28 |
| 2.4.3 | Multiplicação | 28 |
| 2.4.3.1 | <i>Produto de Polinômios</i> | 28 |
| 2.4.3.2 | <i>Propriedades da Multiplicação</i> | 29 |
| 2.4.3.3 | <i>Grau do Produto</i> | 29 |
| 2.4.3.4 | <i>Técnicas de Multiplicação de Polinômios</i> | 29 |
| 2.4.3.4.1 | Método 1 | 29 |
| 2.4.3.4.2 | Método 2 | 30 |
| 2.4.4 | Divisão | 32 |
| 2.4.4.1 | <i>Definição</i> | 32 |
| 2.4.4.2 | <i>Casos em que as divisões são imediatas</i> | 32 |
| 2.4.4.3 | <i>Técnicas de divisão de Polinômios</i> | 33 |
| 2.4.4.3.1 | Método de Descartes | 33 |
| 2.4.4.3.2 | Método da Chave | 35 |

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 2.4.5 | Divisão por Binômios do 1º Grau | 39 |
| 2.4.5.1 | <i>Divisão por binômios do 1º grau unitário.</i> | 39 |
| 2.4.5.2 | <i>Teorema do resto</i> | 40 |
| 2.4.5.3 | <i>Teorema de D'Alembert</i> | 40 |
| 2.4.5.4 | <i>O Dispositivo Prático de Briot-Ruffini</i> | 41 |
| 2.4.5.4.1 | <i>Demonstração do Dispositivo de Briot-Ruffini</i> | 41 |
| 2.4.5.4.2 | <i>Aplicação prática do Dispositivo de Briot-Ruffini</i> | 42 |
| 2.4.5.5 | <i>Divisão por binômios do 1º grau quaisquer</i> | 44 |
| 2.5 | EQUAÇÕES POLINOMIAIS | 46 |
| 2.5.1 | Definição | 46 |
| 2.5.2 | Raiz de uma Equação Polinomial ou Algébrica | 46 |
| 2.5.3 | Conjunto Solução de uma Equação Polinomial | 46 |
| 2.5.4 | Teorema Fundamental da Álgebra - TFA | 47 |
| 2.5.4.1 | <i>O Teorema da Decomposição</i> | 48 |
| 2.5.4.2 | <i>Consequências do Teorema da Decomposição</i> | 48 |
| 2.5.5 | Relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial - Relações de Girard | 49 |
| 2.5.6 | Teorema das Raízes Racionais de uma Equação Algébrica de Coeficientes Inteiros | 51 |
| 2.5.6.1 | <i>Definição</i> | 51 |
| 2.5.6.2 | <i>Demonstração do Teorema das Raízes Racionais</i> | 52 |
| 2.5.6.3 | <i>Aplicação prática do Teorema das Raízes Racionais</i> | 53 |
| 2.5.7 | Delimitação das Raízes de uma Equação Polinomial | 54 |
| 2.5.7.1 | <i>Método de Laguerre</i> | 55 |
| 2.5.7.2 | <i>Aplicação prática do Método de Laguerre</i> | 56 |
| 3 | REGRAS DE EXCLUSÃO DE NEWTON | 59 |
| 3.1 | CONTEXTUALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO | 59 |
| 3.2 | DEMONSTRAÇÃO DAS REGRAS DE EXCLUSÃO DE NEWTON | 59 |
| 3.3 | APLICAÇÃO DAS REGRAS DE EXCLUSÃO DE NEWTON | 60 |
| 3.4 | AS REGRAS DE EXCLUSÃO DE NEWTON APLICADAS A RAÍZES RACIONAIS DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE COEFICIENTES INTEIROS | 62 |
| 3.4.1 | Contextualização e Definição | 62 |
| 3.4.2 | Demonstração | 62 |
| 3.4.3 | Aplicação das Regras de Exclusão de Newton em Raízes Racionais | 64 |
| 4 | O ALGORITMO DE PELETARIUS | 67 |
| 4.1 | CONTEXTUALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO | 67 |
| 4.2 | DEMONSTRAÇÃO DO ALGORITMO DE PELETARIUS | 68 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 4.3 | DISPOSITIVO PRÁTICO DO ALGORITMO DE PELETARIUS | 69 |
| 4.4 | APLICAÇÃO DO ALGORITMO DE PELETARIUS | 70 |
| 4.5 | O ALGORITMO DE PELETARIUS PARA RAÍZES RACIONAIS | 77 |
| 4.5.1 | Contextualização | 77 |
| 4.5.2 | Extensão do Algoritmo de Peletarius | 77 |
| 4.5.3 | Demonstração do Algoritmo de Peletarius para Raízes Racionais | 78 |
| 4.5.4 | Dispositivo prático do Algoritmo de Peletarius para Raízes Racionais | 80 |
| 4.5.5 | Aplicação do Algoritmo de Peletarius para Raízes Racionais | 81 |
| 5 | HYBRITARIUS®: MODELO HÍBRIDO PARA A DETERMINAÇÃO DE RAÍZES RACIONAIS EM POLINÔMIOS DE COEFICIENTES INTEIROS | 90 |
| 6 | CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS | 98 |
| 6.1 | CONCLUSÕES | 98 |
| 6.2 | PERSPECTIVAS FUTURAS | 99 |
| | REFERÊNCIAS | 101 |

1 INTRODUÇÃO

A busca das raízes ou resolução de uma equação algébrica ou polinomial e/ou a divisão de um polinômio de grau maior que 2 por um binômio são algumas das tarefas que todo estudante da Educação Básica (Ensino Médio certamente) é submetido a realizar na disciplina de Matemática. Nos cursos da Área de Exatas do Ensino Superior, no campo da Álgebra, a divisão de polinômios, a busca do zero de uma função algébrica e a raiz de uma equação polinomial ou algébrica são temas recorrentes, como por exemplo, nos cursos de Cálculo. Para tal fim, quando se trata de equações polinomiais de grau maior que 4, o trabalho fica cada vez mais oneroso; tendo em vista que não há “fórmulas” de resolução para equações de tal grau ([Andrade, 1989](#)). Encontrar as raízes de uma equação algébrica ou o zero de uma função polinomial e/ou dividir um polinômio de grau maior que 2 por um binômio são alguns dos temas que serão abordados mais adiante.

O presente trabalho se origina sobre um artigo da Revista do Professor de Matemática (RPM), número 14, publicada em 1989, sob o título “Raízes Racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros” de autoria do Professor Lenimar Nunes de Andrade, onde na época era docente da Universidade Federal da Paraíba - UFPB. No final desse artigo, há uma nota de rodapé (NR) da própria equipe editorial da revista com o seguinte texto: “O colega Lenimar N. Andrade, neste artigo, ressuscita um teorema que se encontrava nos livros do 3º colegial na década de 50 [...]. O teorema chama-se ‘Regras de Exclusão de Newton’ [...].” A NR continua: “Ainda no contexto da procura das raízes inteiras, os livros ensinavam o ‘algoritmo de Peletarius’ - alguém, nascido após 1950, aprendeu esse algoritmo no 2º grau? Já ouviu falar nele?”. Através dessas indagações despertou-se o interesse em conhecer esses métodos, assim como seus princípios, suas aplicações, suas ferramentas e, também, buscar entender os supostos motivos que os levaram a não ser mais contemplados nos atuais livros escolares de matemática da Educação Básica.

Pesquisando sobre as Regras de Exclusão de Newton, o aprofundamento do tema veio através de dois livros da década de 50 e 70 e um periódico da RPM. As mesmas nos permitem, através de cálculos bastante simples, excluir no primeiro momento, um determinado número racional que não pode ser uma raiz de um certo polinômio de coeficientes inteiros. Como o próprio nome já diz, essas regras são atribuídas à Isaac Newton (1643-1727). Segundo [Roxo et al. \(1955\)](#), elas também são relacionadas ao francês Étienne Bézout (1730-1783). No primeiro momento essas regras permitem identificar se um determinado inteiro é ou não uma possível raiz de uma certa equação polinomial. Para [Andrade \(1989\)](#), as mesmas também podem

ser aplicadas a racionais não inteiros. Ou seja, se uma determinada fração $\frac{p}{q}$ com $\text{mdc}(p, q) = 1$, é ou não uma possível raiz de um certo polinômio de coeficientes inteiros. Sua sustentação e demonstração se dá através do polinômio de Taylor, ao qual será abordado mais a frente com maiores detalhes.

Pesquisando sobre o Algoritmo de Peletarius, ele pode ser utilizado para dividir um polinômio de grau maior que 1 por um binômio qualquer. Além disso, é possível verificar se um certo número racional é ou não raiz de uma equação polinomial. Pois, atualmente, por exemplo, para realizar a divisão de um certo polinômio $P(x)$ por um polinômio da forma $x - b$ (binômio unitário) ou, até mesmo, verificar se um determinado inteiro é raiz de $P(x)$, utiliza-se o famoso Dispositivo de Briot-Ruffini (DBR). A edição de número 65 de 2008 da RPM traz um artigo dos professores e historiadores da Matemática Flávia Soares e José Lourenço da Rocha, sob o título “Que fim levou o Algoritmo de Peletarius?”. Segundo as pesquisas realizadas por [Soares e Rocha \(2008\)](#), os livros de história da matemática, bastante conhecidos e usados nos cursos de graduação, não faziam também referência a essa técnica. O artigo que envolve a pesquisa sobre esse algoritmo, dos referidos historiadores, é esclarecedor. Pois, o mesmo aponta apenas dois livros que contemplam Peletarius, aos quais também foram identificados na nossa presente pesquisa, com diferença única de número de edição e ano de publicação.

O primeiro é o livro “Curso de Matemática para os cursos de segundo grau (Antigos cursos CLÁSSICO E CIENTÍFICO) - Curso Completo” do autor Manoel Jairo Bezerra, publicado pela Companhia Editora Nacional em São Paulo, bastante usado no Brasil na década de 50. A versão à qual tivemos acesso foi a 31º Edição do ano 1974. Esse livro faz referência ao Algoritmo de Peletarius e as Regras de Exclusão de Newton aplicadas a números inteiros e outros importantes conteúdos que, por sinal, não são mais contempladas nos atuais livros didáticos de Matemática. O segundo livro identificado que aborda tal algoritmo é o “Matemática - 2º Ciclo - 3º Série”. Escrito pelos professores Euclides Roxo, Haroldo Lisboa da Cunha, Roberto Peixoto e César Dacorso Netto e publicado pela Livraria Francisco Alves. Esse livro era direcionado à estudantes da 3º série do colegial, atual Ensino Médio. A versão à qual tivemos acesso foi a 4º Edição do ano de 1955. O mesmo também aborda as Regras de Exclusão de Newton aplicadas a racionais e outros importantes conteúdos que também não são mais contemplados nas publicações recentes.

Mas, quem era Peletarius e o que é o algoritmo que leva o seu nome? Apesar das inúmeras consultas realizadas em busca de mais informações sobre Peletarius, foi também no presente artigo de [Soares e Rocha \(2008\)](#) que obteve-se as respostas mais precisas. Segundo as pesquisas, Peletarius respondia pelo nome de Jacques

Peletier (1517-1582). Esse foi um dos mais importantes algebristas franceses do período anterior a François Viète (1540-1603). Além dos seus trabalhos no campo da Matemática, Peletier ficou conhecido por suas lindas poesias. Dentre as obras que publicou, pode-se destacar a *Arithmeticae practicae* (1545), a *Arithmétique* (1549) e *L'algèbre departie en deux livres* (Lyon, 1554). Em 1557, publicou o *In Euclidis elementa demonstrationum libri sex*. No entanto, sobre o seu algoritmo, não há nada publicado além de outras poucas referências bibliográficas.

Há pouquíssimos livros que trazem conteúdo sobre as Regras de Exclusão de Newton ou Algoritmo de Peletarius. Mais precisamente, a nossa pesquisa identificou que os atuais livros didáticos de Matemática usados nas escolas públicas, através do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), dentro das atuais diretrizes do Novo Ensino Médio, criado através da Lei n° 13.415/2017, não trazem em seus sumários essas técnicas.

1.1 A IMPORTÂNCIA DESSE TRABALHO

A importância desse trabalho se dá por buscar compreender a teoria, a relevância e a aplicação prática das regras de Exclusão de Newton e o Algoritmo de Peletarius para o ensino de Álgebra na disciplina de Matemática, principalmente no Ensino Médio. Além disso, considerando a limitada oferta de livros contemporâneos sobre os temas, busca-se com esse trabalho resgatar essas técnicas que encontram-se omissas nos atuais acervos bibliográficos do PNLD, e assim, trazê-las a luz para as atuais levas de estudantes. Em contrapartida, buscar compreender os possíveis motivos que levaram os coevos autores de livros didáticos de Matemática a excluírem essas técnicas de suas obras. Por fim, apresentar um aplicativo computacional chamado Hybritarius® que, implementado em linguagem R e capaz de gerar relatórios automatizados em L^AT_EX, nos permite determinar as possíveis raízes racionais (se houver) de uma equação polinomial de coeficientes inteiros e exibi-lo na sua forma fatorada, conforme o Teorema Fundamental da Álgebra. O seu algoritmo de funcionamento é baseado nas Regras de Exclusão de Newton, o Algoritmo de Peletarius e outros conceitos e ferramentas aqui também trabalhados.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em 6 capítulos, onde o 1º trata-se da presente Introdução e os demais sendo distribuídos a saber:

No Capítulo 2, apresenta-se uma abordagem histórica sobre a Álgebra e os Polinômios no decorrer do tempo. São mostrados fatos e curiosidades sobre as Funções

e Equações Algébricas, assim como os seus conceitos e definições. Na sequência é tratada as operações envolvendo as Funções Polinomiais, evidenciando conceitos e técnicas pertinentes ao desenvolvimento do trabalho. Nas Equações Polinomiais, são apresentados conceitos e definições sobre Raízes, Conjunto-Solução e o importantíssimo Teorema Fundamental da Álgebra e seus Corolários. Por fim, aborda-se o indispensável Teorema das Raízes Racionais e é resgatada uma técnica de delimitação do intervalo real onde se encontram as raízes de uma equação polinomial, chamada de Método de Laguerre, onde são ilustradas suas definição e aplicação.

No Capítulo 3, são tratadas das Regras de Exclusão de Newton. No primeiro momento são contextualizados conceitos e definições de suma importância para o desenvolvimento do trabalho, envolvendo apenas os números inteiros. Em sequência, apresenta-se as suas demonstrações e aplicações através de alguns exemplos práticos. No segundo momento, são mostradas as Regras de Exclusão de Newton, aplicadas a Raízes Racionais não inteiras de Equações Algébricas de coeficientes inteiros com seus conceitos e definição. Para sua demonstração, é apresentado o Polinômio de Taylor, ao qual é peça fundamental para o seu desenvolvimento. Em sequência, utiliza-se exemplos práticos para ilustrar a sua aplicação.

No Capítulo 4, é apresentado o Algoritmo de Peletarius, juntamente com seus conceitos e definições. Em seguida, apresenta-se a sua demonstração para números inteiros e o seu dispositivo prático que torna a sua aplicação bastante simples. Depois, apresenta-se alguns exemplos práticos de sua aplicação, usando os conceitos e técnicas já tratados nos capítulos anteriores. Em seguida, é apresentado o Algoritmo de Peletarius para raízes racionais não inteiras, ao qual o mesmo não foi identificado nas bibliografias então pesquisadas. É então apresentada a nossa demonstração e, logo em seguida, apresenta-se o seu dispositivo prático e alguns exemplos que tornam singela a sua aplicação.

No Capítulo 5, é apresentado o aplicativo educacional Hybritarius®, implementado em linguagem R, que propõe uma solução computacional que integra as Regras de Exclusão de Newton e o Algoritmo de Peletarius para a obtenção (se houver) das raízes racionais de expressões polinomiais de coeficientes inteiros. Identificando tais raízes, as mesmas serão figuradas e o polinômio em questão é exibido conforme o Teorema Fundamental da Álgebra. No mais, é ilustrado um fluxograma que mostra todo o roteiro do processo executado pelo Hybritarius® e um exemplo prático do seu funcionamento.

Por fim, no Capítulo 6, apresentam-se as conclusões finais e as perspectivas de trabalhos futuros.

2 POLINÔMIOS

2.1 UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOBRE A ÁLGEBRA E OS POLINÔMIOS

A Álgebra é a parte da matemática em que se empregam outros símbolos além dos algarismos ([Longen, 2003](#)). Esses símbolos, chamados de variáveis, ligam-se convenientemente por operações aritméticas e, juntos, formam as expressões algébricas. As funções algébricas de grau maior que dois foram um dos objetos de estudo de muitos matemáticos durante vários séculos. Nas palavras de [Iezzi \(2013\)](#), ao final do século XV a álgebra tinha avançado a passos curtos em relação aos conhecimentos adquiridos e deixados pelos babilônios e egípcios sobre o tema, a cerca de 1800 anos antes de Cristo.

Segundo [Fernandez e Santos \(2010\)](#), as equações polinomiais do primeiro grau surgiram de forma bastante tímida no papiro de Ahmes (1650 a. C.). De acordo com [Nunes, Situba e Chaquiam \(2024\)](#), um dos primeiros livros que se tem registro com conteúdo algébrico é o “Hisabal-jabrw’al-muqabala” do matemático nascido na região da Ásia Central chamado Al-Khwarizmi (780-850 a.C.). Seu trabalho teve contribuições bastante significativas para o ensino de Matemática com o primeiro tratado sobre soluções de equações lineares e quadráticas. Além disso, suas contribuições foram fundamentais para incentivar o mundo a utilizar os algarismos indu-arábicos que culminou no nosso atual sistema de numeração.

Em sequência, já na era Cristã, uma grande referência é o matemático indiano Bhaskara Akaria (1140-1185) cujas importantes contribuições culminaram nos atuais métodos de resolução de equações quadráticas. Sua importância é tão significativa para a matemática que alguns livros se dirigem a esse método como a "fórmula de Bhaskara", que busca as raízes de uma equação quadrática.

De acordo com [Iezzi \(2013\)](#), até antes de 1500, a resolução de equações cúbicas era algo ainda intangível de aplicação prática. Já em meados do século XVI, surgiram avanços significativos na resolução de equações do terceiro grau. Ou seja, achar as raízes de uma equação da forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (com a, b e c reais) já era uma realidade. Desse ponto em diante, a álgebra obteve avanços significativos e, com ela, a busca das raízes de uma equação polinomial de grau n .

Nas palavras de [Fernandez e Santos \(2010\)](#), um pioneiro na busca das soluções de uma equação cúbica foi o matemático italiano Niccolò Fontana (Tartaglia) (1500-1557). Suas contribuições foram além do âmbito matemático. Pois, através de seus estudos, ele realizou aplicações matemáticas em artilharias, contribuindo com o avanço

do poder bélico italiano. Um outro grande feito seu foi o de traduzir o honorável Livro de Euclides “Os elementos” para sua língua nativa. De acordo com [Iezzi \(2013\)](#), por volta de 1530 surgiu a notícia de que Tartaglia resolia equações da forma $x^3 + px^2 = q$. Tartaglia manteve o seu método de resolução em segredo por um bom tempo, mas o acabou revelando, sob promessa de sigilo, para um “amigo” e exímio matemático chamado Girolano Cardano.

Ainda na Itália, Girolamo Cardano (1501-1576) foi outro matemático que dividiu o palco com Tartaglia na solução de equações cúbicas. Pela surpresa de Tartaglia, em 1545, na primeira edição do livro *Ars magna* lá estavam seus métodos sob a autoria de Cardano, embora com referências de agradecimentos. Esse fato gerou uma verdadeira “guerra” entre os dois matemáticos durante bastante tempo. Foi Cardano que identificou no método de Tartaglia uma falha, pois o mesmo não resolia equações com raízes complexas. Nesse momento, não havia ainda o conceito de números complexos e Cardano se referia a essas raízes como “sofísticas”. Ou seja, “são tão sutis quanto inúteis”([Rosa, 1998](#)). Nessa perspectiva, em relação aos polinômios, a contribuição matemática de Cardano pode ser equiparada a de Tartaglia, na medida em que ambos contribuíram para o método de resolução de equações polinomiais de grau 3.

No mesmo ano, o *Ars magna* trazia uma outra notável descoberta pelo matemático italiano e discípulo de Cardano chamado de Ludovico Ferrari (1522-1565): um método para reduzir equações do quarto grau a equações cúbicas, através de uma expressão radical. Para a solução de equações do quinto grau, muitos matemáticos importantes tentaram buscar soluções, mas não obtiveram êxito. Segundo [Knudsen \(1985\)](#), o notório suíço Leonard Euler (1707-1783) não conseguiu resolvê-lo. Porém encontrou novos métodos para a resolução da equação do 4º grau. Em 1770, o matemático italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) conseguiu unificar os argumentos nos casos das equações de grau 3 e 4 e mostrou porque tal argumento falhava no caso do grau 5. O matemático italiano Paolo Ruffini (1765-1822), em 1813, também tentou uma demonstração de tal impossibilidade, mas seus argumentos apresentavam bastante falhas. Por fim, em 1824, o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) provou que a equação geral de grau 5 não é resolúvel por meio de radicais.

Já em 1843, o matemático francês Joseph Liouville (1809-1882) escreveu para a Academia de Ciências de Paris anunciando que os trabalhos deixados pelo matemático francês Evariste Galois (1811-1832) continham uma solução que respondia com precisão quando uma equação de grau 5 é ou não “resolúvel por meio de radicais” ([Knudsen, 1985](#)). A solução apresentada por Galois, ao caracterizar as equações polinomiais resolúveis por meio de radicais, através de propriedades do grupo de automorfismos de um corpo, é considerada uma das principais conquistas da Álgebra no século XIX.

Outro matemático bastante influente em relação as equações algébricas e os polinômios foi o italiano Albert Girard (1595-1632). Foi Girard que identificou as relações entre o número de raízes de um polinômio e o seu grau (maior expoente da variável). Ou seja, o grau do polinômio determina a sua quantidade de raízes. Não só isso, mas também as relações dessas raízes com os coeficientes do polinômio com as famosas "Relações de Girard".

Já no século XVII surge o brilhante matemático alemão, Carl Gauss (1777-1855). Suas contribuições foram além do campo da matemática como a Física e a Astronomia. O conceito de números complexos foi atribuído por Gauss e foi ele quem deu a primeira demonstração satisfatória do Teorema Fundamental da Álgebra - TFA, ao qual será mais explorado nos próximos capítulos.

Ainda no século XVII, o italiano Paolo Ruffini e o francês Charles Briot (1817-1882) trouxeram contribuições significativas para a divisão de polinômios. Seus legados são tão importantes para o campo da Álgebra que o “Dispositivo de Briot-Ruffini” é uma das ferramentas poderosas na divisão de um polinômio de grau $n \geq 2$ por um binômio da forma $x - a$. Esse dispositivo será também mais explorado nos capítulos seguintes.

Outro influente matemático do século de XVII que apresentou importantes contribuições para a Álgebra foi o tcheco Bernard Bolzano (1781-1848). O seu teorema, ao qual leva o seu nome (Teorema de Bolzano) permite perceber se há ou não pelo menos uma raiz de uma determinada função contínua dentro de um domínio específico. A contribuição deste teorema foi significativa para o âmbito dos estudos das funções algébricas e os polinômios.

Esses são alguns dos matemáticos que tiveram seus trabalhos mais direcionados ao estudo das soluções das equações algébricas. No entanto, a de considerar que todos esses trabalhos, e tantos outros que vieram depois, se apoiaram em feitos de outros grandes nomes da Álgebra. Há um consenso na literatura sobre os maiores e mais importantes matemáticos que contribuíram direta (ou indiretamente) para o desenvolvimento da Álgebra, ao qual dispensa apresentações. Entre os tais, pode-se citar os gregos Arquimedes (287-212 a.C.), Euclides (por volta de 300 a.C.) e Pitágoras (570-495 a.C.), a egípcia Hypatia de Alexandria (360-415 a.C.), o italiano Leonardo Fibonacci (1170-1250), os franceses René Descartes (1596-1650) e Henri Poincaré (1854-1912), os alemães Bernhard Riemann (1826-1866) e Gottfried Leibniz (1646-1716) e o inglês Isaac Newton (1643-1727). Sem sombra de dúvidas, essa lista é bem mais longa.

2.2 A FUNÇÃO POLINOMIAL OU (SIMPLESMENTE) POLINÔMIO

Dentro do contexto científico, sabe-se que as funções algébricas são comuns nos diversos campos da ciência; seja na Física, na Química, nas diversas Engenharias, na Arquitetura, na Medicina e etc. Na matemática, as equações polinomiais são comumente usadas para representar ou modelar o comportamento de um determinado fenômeno prático. Resolver uma equação polinomial significa “encontrar” determinadas soluções ou respostas de certos problemas específicos, através dos valores, até então desconhecidos, representados por uma letra que consiste à sua incógnita (geralmente x), onde esse valor encontrado representa a sua raiz (ou suas raízes).

Para [Lima \(2023\)](#), Polinômio define-se da seguinte forma:

Definição 2.2.1. Um polinômio é uma expressão formal do tipo

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2} + \cdots + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0, \quad (2.1)$$

onde (a_0, a_1, \dots, a_n) é uma lista ordenada de números reais e X é um símbolo (chamado uma **indeterminada**), sendo X^i uma abreviatura para $X \cdot X \cdots X$ (i fatores).

Segundo [Iezzi \(2013\)](#), os números $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são denominados **coefficientes** e as parcelas $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, a_{n-2} x^{n-2}, \dots, a_3 x^3, a_2 x^2, a_1 x$ e a_0 são chamadas de **termos** do polinômio. O x é a variável única ao qual pode assumir qualquer valor real com expoente $n \in \mathbb{N}$.

Em se tratando de Função Polinomial, [Lima \(2023\)](#) conceitua da seguinte forma:

Definição 2.2.2. Diz-se que $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando são dados números reais $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \quad (2.2)$$

Para [Lima \(2023\)](#), há uma correspondência biunívoca entre polinômio e função polinomial ($P(X) \mapsto p(x)$). Logo, não há necessidade de fazer distinção entre o polinômio P e a função polinomial p . Pois, ambos serão representados pelo mesmo símbolo p e serão chamados indiferentemente de polinômio ou de função polinomial.

Portanto, pode-se admitir indistintamente os termos “polinômio” ou “função polinomial”.

2.3 CONCEITOS E DEFINIÇÕES

A seguir, serão abordados alguns conceitos e definições que caracterizam um Polinômio que serão pertinentes à elaboração do presente trabalho.

2.3.1 Grau, Coeficiente Líder e Coeficiente Independente

Para [Hefez e Villela \(2022\)](#), em todo polinômio $f(x)$ não identicamente nulo ($f(x) \neq 0$), algum coeficiente deve ser diferente de zero, então há um maior natural n tal que $a_n \neq 0$. Definimos o grau de $f(x)$ como sendo este número natural n e o denotamos por $gr(f(x))$. O grau de um polinômio f é representado por [Iezzi \(2013\)](#) como ∂f ou grf .

Como alguns exemplos, temos:

1. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 6x + 8 \Rightarrow \partial f = 4$.
2. $g(x) = -2 + 8x - 10x^3 \Rightarrow \partial g = 3$.
3. $h(x) = (a - 5)x^5 + 7x^4 - 6x^2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} \partial h = 4, & \text{se } a = 5 \\ \partial h = 5, & \text{se } a \neq 5 \end{cases}$.

Tem-se ainda que se o grau de f é n , então a_n é chamado de **coeficiente líder** ou **dominante** do Polinômio. Pois esse é o coeficiente do termo x^n de maior expoente do Polinômio. No caso do coeficiente dominante a_n ser igual a 1, f é chamado de **Polinômio Unitário**.

Em sequência, tem-se que a_0 é o **coeficiente independente** ou **termo independente** do Polinômio, já que o mesmo não possui produto com a variável x .

2.3.2 O valor numérico e a Raiz de um Polinômio

Dado o número real α e o polinômio $f(x)$, o valor numérico de um polinômio f em α é a imagem de α pela função f . Ou seja,

$$f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0. \quad (2.3)$$

Com isso, tem-se que $f(\alpha)$ é a imagem de α pela função f . Portanto, o valor numérico de α em f é $f(\alpha)$.

Uma observação a ser dada aqui é para $\alpha = 1$ e $\alpha = 0$. Pois, dado um polinômio

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \quad (2.4)$$

temos os seguintes casos:

- Para $x = 1$, temos:

$$P(1) = a_n \cdot 1^n + a_{n-1} \cdot 1^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1 + a_0$$

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0.$$

Isto é, $P(1)$ corresponde a soma dos coeficientes de $P(x)$.

- Para $x = 0$, temos que:

$$P(0) = a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0 + a_0$$

$$P(0) = a_0.$$

Isto é, $P(0)$ corresponde ao valor do coeficiente independente de $P(x)$.

Em particular, se α é um número real e $P(x)$ é um polinômio, tal que $P(\alpha) = 0$, ou seja,

$$P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0, \quad (2.5)$$

diz-se que α é uma raiz (ou um zero da função) de $P(X)$. Em termos de equações, α é raiz da Equação Polinomial.

2.3.3 Polinômio Nulo e os seus coeficientes

Diz-se que um Polinômio f é considerado nulo ou identicamente nulo quando o mesmo assume o valor numérico igual a zero para qualquer α real. Ou seja,

$$f = 0 \iff f(\alpha) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Essa afirmação é reforçada por [Iezzi \(2013\)](#) pelo seguinte teorema para Coeficientes de Polinômios Nulos:

Teorema 2.3.1. *Um polinômio f é nulo se, e somente se, todos os seus coeficientes forem nulos. Ou seja, sendo*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (2.7)$$

temos:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \iff a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0.$$

Por consequência dessa definição, o fato do Polinômio possuir todos os coeficientes iguais a zero, não se pode definir o seu grau.

2.3.4 Polinômios Idênticos e os seus coeficientes

A literatura acerca do assunto diz que dois Polinômios f e g são iguais ou idênticos quando os mesmos assumem valores numéricos iguais para qualquer valor de x real. Ou seja,

$$f = g \iff f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Para tal definição, [Iezzi \(2013\)](#) aponta o seguinte teorema para os Coeficientes de Polinômios Idênticos:

Teorema 2.3.2. *Dois Polinômios f e g são iguais se, e somente se, os coeficientes de f e g forem ordenadamente iguais. Em símbolos, sendo*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (2.9)$$

e

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \quad (2.10)$$

temos que:

$$f = g \iff a_i = b_i, \forall i \in \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Ou seja, quando $a_n = b_n; a_{n-1} = b_{n-1}; \dots; a_2 = b_2; a_1 = b_1$ e $a_0 = b_0$.

2.4 OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

A soma e o produto de funções polinomiais são ainda funções polinomiais ([Lima, 2023](#)). A seguir será mostrado como realiza-se as operações com Polinômios, tendo em vista que essas operações são de total importância para a realização do presente trabalho.

2.4.1 Adição

2.4.1.1 Soma de Polinômios

Para [Hefez e Villela \(2022\)](#), dados dois Polinômios

$$f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j,$$

representados respectivamente pelas Equações [2.9](#) e [2.10](#), definimos a soma de f com g como sendo o Polinômio h dado por

$$f(x) + g(x) = h(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j,$$

onde $c_j = a_j + b_j$, para $0 \leq j \leq n$. Com isso, temos

$$h(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0), \quad (2.11)$$

em que podemos reescrevê-lo como

$$h(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0. \quad (2.12)$$

Portanto, a soma dos Polinômios f e g corresponde ao Polinômio h , obtido quando soma-se os seus coeficientes dos termos semelhantes.

2.4.1.2 Propriedades da Adição

De acordo com [Iezzi \(2013\)](#), a operação de adição define em P , conjunto dos Polinômios de coeficientes reais, uma estrutura de grupo comutativo. Ou seja, dados os Polinômios f , g e h , para a operação de soma de Polinômios, aceita-se as seguintes propriedades:

- Propriedade Associativa: $f + (g + h) = (f + g) + h, \forall f, g, h \in P$.
- Propriedade Comutativa: $f + g = g + f, \forall f, g \in P$.
- Existência de Elemento Neutro: $\exists \varepsilon \in P \mid f + \varepsilon = f, \forall f \in P$. Ou seja, ε (elemento neutro para a adição de Polinômios) é o Polinômio Nulo.
- Existência de Inverso Aditivo ou Simétrico: $\forall f \in P, \exists f' \in P \mid f + f' = \varepsilon$. Ou seja, f' é o **inverso aditivo ou simétrico** de f que, somado com f , figura o Polinômio Nulo ε . Logo, $f' = -f(x) = (-a_n)x^n + (-a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-a_1)x + (-a_0)$.

2.4.1.3 Grau da Soma

De acordo com [Iezzi \(2013\)](#), se f , g e $f + g = h$ são Polinômios não nulos, então o grau de h é menor ou igual ao maior dos números ∂f e ∂g . Ou seja, em termos gerais, tem-se que:

$$\partial h \leq \max\{\partial f, \partial g\}. \quad (2.13)$$

2.4.1.4 Exemplos da Soma de Polinômios

Dados os seguintes Polinômios exemplos, temos:

$$1. \quad f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5x + 1;$$

$$2. \quad g(x) = 5x^3 - x + 3.$$

Será definido o Polinômio $h(x) = f(x) + g(x)$. Para equiparar o número de termos, podemos reescrevê-los como:

1. $f(x) = 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 5x + 1;$
2. $g(x) = 0x^4 + 5x^3 + 0x^2 - x + 3.$

Logo, executando a soma dos coeficientes de termos semelhantes, tem-se como resultado o Polinômio

$$h(x) = (2 + 0)x^4 + (0 + 5)x^3 + (3 + 0)x^2 + (-5 - 1)x + (1 + 3).$$

Portanto, segue que

$$h(x) = 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 6x + 4.$$

2.4.2 Subtração

2.4.2.1 Diferença de Polinômios

As operações que envolve a diferença de Polinômios são definidas de modo análogo às realizadas na adição. Pois, dados os Polinômios f e g , dados pelas Equações 2.9 e 2.10 respectivamente, definimos a diferença entre f e g com sendo o polinômio $h = f - g = f + (-g)$, em que $-g$ é o simétrico de g . Ou seja:

$$h(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0).$$

Com isso, segue que a diferença entre os dois Polinômios f e g corresponde ao Polinômio h , obtido quando diminui-se os seus coeficientes dos termos semelhantes.

2.4.2.2 Propriedades da Subtração

Dado que o Polinômio $h = f - g = f + (-g)$, as propriedades da subtração são as mesmas da soma.

2.4.2.3 Grau da Subtração

De modo análogo ao grau da soma, se f, g e $f - g = f + (-g) = h$ são Polinômios não nulos, então ∂h segue conforme Equação 2.13.

2.4.2.4 Exemplos de Subtração de Polinômios

Dados os seguintes Polinômios exemplos, temos:

1. $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5x + 1;$
2. $g(x) = 5x^3 - x + 3.$

Será calculado o Polinômio $h(x) = f(x) - g(x)$. Equiparando o número de termos, os reescrivemos como:

1. $f(x) = 2x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 5x + 1;$
2. $g(x) = 0x^4 + 5x^3 + 0x^2 - x + 3.$

Logo, executando a subtração dos coeficientes de termos semelhantes, tem-se o Polinômio:

$$h(x) = (2 - 0)x^4 + (0 - 5)x^3 + (3 - 0)x^2 + (-5 - (-1))x + (1 - 3).$$

Portanto, segue que

$$h(x) = 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x - 2.$$

2.4.3 Multiplicação

2.4.3.1 Produto de Polinômios

Dados dois Polinômios f , conforme Equação 2.9, e g , tal que

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0, \quad (2.14)$$

denomina-se o produto de $f \cdot g$ o Polinômio h como

$$h(x) = a_n b_m x^{n+m} + \cdots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0. \quad (2.15)$$

Nota-se que o polinômio h corresponde a

$$h(x) = c_{n+m} x^{n+m} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0, \quad (2.16)$$

ao qual, nas palavras de Iezzi (2013), cada coeficiente c_k ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) pode ser obtido da seguinte forma:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

Portanto, percebe-se que h pode ser encontrado multiplicando cada termo $a_i x^i$ de f por cada termo $b_j x^j$ de g , seguindo a regra que $(a_i x^i) \cdot (b_j x^j) = a_i b_j x^{i+j}$, e posteriormente, somando os respectivos resultados obtidos.

2.4.3.2 Propriedades da Multiplicação

Nas palavras de [Iezzi \(2013\)](#), a operação de Multiplicação em P , ao qual considera-se como o conjunto dos Polinômios de coeficientes reais, verifica-se as seguintes propriedades, dados os Polinômios f , g e h :

- Propriedade Associativa: $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h, \forall f, g, h \in P$.
- Propriedade Comutativa: $f \cdot g = g \cdot f, \forall f, g \in P$.
- Existência de Elemento Neutro: $\exists \varepsilon \in P \mid f \cdot \varepsilon = f, \forall f \in P$. Ou seja, o Polinômio ε (elemento neutro para a multiplicação de polinômios) é numericamente igual a 1.
- Propriedade Distributiva: $f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h, \forall f, g, h \in P$.

2.4.3.3 Grau do Produto

Segundo [Iezzi \(2013\)](#), se f e g são dois polinômios não nulos de coeficientes reais, então o grau de $f \cdot g$ é igual a soma dos graus de f e g . Ou seja, em termos gerais, tem-se que:

$$\partial h = \partial f + \partial g. \quad (2.17)$$

2.4.3.4 Técnicas de Multiplicação de Polinômios

A seguir serão apresentados dois métodos práticos para a multiplicação de Polinômios através de dois dispositivos, a saber:

2.4.3.4.1 Método 1

Consiste em um dispositivo onde organiza-se os Polinômios, um sobre o outro, onde cada termo de um dos polinômios, de preferência o de menor grau, multiplica todos os termos do outro. Feito isso, as parcelas resultantes de termos semelhantes vão se agrupando e, posteriormente, sendo somadas e formando os coeficientes c_i (com $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) do Polinômio produto h . Considerando os Polinômios f e g , a Figura 1 ilustra o dispositivo que apresenta o Método 1 para a multiplicação dos Polinômios $f \cdot g = h$, da seguinte forma:

Figura 1 – Dispositivo usado no Método 1 para a Multiplicação de Polinômios.

$$\begin{array}{r}
 f(x) = \\
 g(x) = \\
 \hline
 & a_n x^n & + & \cdots & + & \cdots & + & a_2 x^2 & + & a_1 x & + & a_0 \\
 & b_m x^m & + & \cdots & + & \cdots & + & b_2 x^2 & + & b_1 x & + & b_0 \\
 & a_n b_0 x^n & + & \cdots & + & \cdots & + & a_2 b_0 x^2 & + & a_1 b_0 x & + & a_0 b_0 \\
 & a_n b_1 x^{n+1} & + & \cdots & + & \cdots & + & a_2 b_1 x^3 & + & a_1 b_1 x^2 & + & a_0 b_1 x \\
 & a_n b_2 x^{n+2} & + & \cdots & + & a_2 b_2 x^4 & + & a_1 b_2 x^3 & + & a_0 b_2 x^2 \\
 & \vdots \\
 & a_n b_m x^{n+m} & + & \cdots & + & \cdots & + & a_2 b_m x^2 & + & a_1 b_m x & + & a_0 b_m \\
 \hline
 h(x) = & a_n b_m x^{n+m} & + & \cdots & + & \cdots & + & \cdots & + & (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 & + & (a_0 b_1 + a_1 b_0) x & + & a_0 b_0
 \end{array}$$

Fonte: Adaptado de [lezzi \(2013\)](#).

Portanto, tem-se através desse método, a Equação 2.15 resultando na Equação 2.16.

Para ilustrar a aplicação desse método, segue um exemplo:

Exemplo 2.1. Exiba o polinômio produto da multiplicação dos polinômios $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5x + 1$ e $g(x) = 4x^2 - x + 3$.

Solução. Organizando os mesmos no dispositivo e executando as devidas operações, conforme Método 1, busca-se o polinômio $f \cdot g = h$.

$$\begin{array}{r}
 f \rightarrow & 2x^4 & + & 0x^3 & + & 3x^2 & - & 5x & + & 1 \\
 g \rightarrow & & & & & 4x^2 & - & x & + & 3 \\
 \hline
 & 6x^4 & + & 0x^3 & + & 9x^2 & - & 15x & + & 3 \\
 & - 2x^5 & + & 0x^4 & - & 3x^3 & + & 5x^2 & - & x \\
 & 8x^6 & + & 0x^5 & + & 12x^4 & - & 20x^3 & + & 4x^2 \\
 \hline
 h \rightarrow & 8x^6 & - & 2x^5 & + & 18x^4 & - & 23x^3 & + & 18x^2 & - & 16x & + & 3
 \end{array}$$

Portanto, o polinômio pedido é $h(x) = 8x^6 - 2x^5 + 18x^4 - 23x^3 + 18x^2 - 16x + 3$.

2.4.3.4.2 Método 2

Esse método consiste em organizar em uma tabela os coeficientes a_i do polinômio f e os b_i de g . Posteriormente, em cada célula calcula-se todos os produtos $a_i \cdot b_i$ e os somam-se em cada diagonal.

A Figura 2 abaixo ilustra a aplicação desse método.

Figura 2 – Dispositivo usado no Método 2 para a Multiplicação de Polinômios.

| $f \backslash g$ | b_m | \dots | b_2 | b_1 | b_0 |
|------------------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|
| a_n | $a_n b_m$ | \dots | $a_n b_2$ | $a_n b_1$ | $a_n b_0$ |
| \vdots | \dots | \ddots | \dots | \dots | \dots |
| a_2 | $a_2 b_m$ | \dots | $a_2 b_2$ | $a_2 b_1$ | $a_2 b_0$ |
| a_1 | $a_1 b_m$ | \dots | $a_1 b_2$ | $a_1 b_1$ | $a_1 b_0$ |
| a_0 | $a_0 b_m$ | \dots | $a_0 b_2$ | $a_0 b_1$ | $a_0 b_0$ |

Fonte: Adaptado de [Iezzi \(2013\)](#).

Logo, somando-se os produtos de cada diagonal da tabela, temos os coeficientes c_k do Polinômio h :

$$\begin{aligned} c_{n+m} &= a_n b_m \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_0 &= a_0 b_0. \end{aligned}$$

Portanto, segue desse método a Equação 2.15 culminando na Equação 2.16.

Exemplo 2.2. Usando agora esse método, realize a multiplicação do polinômio $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5x + 1$ pelo polinômio $g(x) = 4x^2 - x + 3$.

Solução. Organizando os coeficientes dos mesmos na tabela e executando as devidas operações, temos:

| $f \backslash g$ | 2 | 0 | 3 | -5 | 1 |
|------------------|----|---|----|-----|----|
| 4 | 8 | 0 | 12 | -20 | 4 |
| -1 | -2 | 0 | -3 | 5 | -1 |
| 3 | 6 | 0 | 9 | -15 | 3 |

Logo, como o $\partial(f \cdot g) = \partial f + \partial g = 4 + 2 = 6$, temos os seguintes termos como resultado:

$$\begin{aligned}
 c_6 &= 8 \\
 c_5 &= -2 + 0 = -2 \\
 c_4 &= 6 + 0 + 12 = 18 \\
 c_3 &= 0 + (-3) + (-20) = -23 \\
 c_2 &= 9 + 5 + 4 = 18 \\
 c_1 &= -15 + (-1) = -16 \\
 c_0 &= 3.
 \end{aligned}$$

Portanto, temos o Polinômio $h(x) = 8x^6 - 2x^5 + 18x^4 - 23x^3 + 18x^2 - 16x + 3$.

2.4.4 Divisão

2.4.4.1 Definição

Nas palavras de [Iezzi \(2013\)](#), dados dois Polinômios f como o dividendo e g (com $g \neq 0$) como o divisor, realizar a operação de dividir f por g é determinar dois outros Polinômios q como quociente e r como o resto. Nesses termos, verificam-se as duas condições seguintes:

1. $f = q \cdot g + r$;
2. $\partial r < \partial g$ ou $r = 0$ (quando a divisão for exata).

2.4.4.2 Casos em que as divisões são imediatas

A seguir, serão ilustrados os dois casos em que a divisão de f por g é imediata.

- 1º caso: O dividendo f é o Polinômio Nulo ($f = 0$). Neste caso, temos que:

$$f = q \cdot g + r \Leftrightarrow 0 \cdot g + 0 = 0.$$

Portanto, os Polinômios $q = 0$ e $r = 0$ satisfazem as condições (1) e (2) acima. Logo,

$$f = 0 \Rightarrow q = 0 \text{ e } r = 0.$$

- 2º caso: O dividendo f não é um Polinômio Nulo ($f \neq 0$), mas tem grau menor que o divisor g ($\partial f < \partial g$). Neste caso, temos que:

$$f = q \cdot g + r \Leftrightarrow f = 0 \cdot g + r = r.$$

Portanto, claramente os Polinômios $q = 0$ e $r = f$ satisfazem as condições (1) e (2) da definição de divisão acima, já que $\partial r = \partial f < \partial g$. Logo,

$$\partial f < \partial g \Rightarrow q = 0 \text{ e } r = f.$$

2.4.4.3 Técnicas de divisão de Polinômios

Para a proposta do presente trabalho, será sempre admitido que o grau do Polinômio f é maior ou igual ao de g . Ou seja, $\partial f \geq \partial g$. A bibliografia apresenta alguns métodos bastante utilizados pelos matemáticos para a divisão de Polinômios. Entre tais, [Iezzi \(2013\)](#) apresenta dois métodos a saber: Método de Descartes e Método da Chave.

2.4.4.3.1 Método de Descartes

Criado pelo notável e renomado matemático francês René Descartes (1596 - 1650), esse método também é conhecido como “método dos coeficientes a determinar”, ao qual baseia-se nos seguintes fatos:

1. Pela consequência da definição de divisão de Polinômios, $\partial q = \partial f - \partial g$, já que $q \cdot g + r = f \Rightarrow \partial(q \cdot g + r) = \partial f$ e então $\partial q + \partial g = \partial f$.
2. Por consequência, temos que $\partial r < \partial g$ ou $r = 0$.

Esse método obedece o seguinte roteiro:

1. Calculam-se inicialmente os graus de f e de r ;
2. Posteriormente constroem-se os Polinômios q e r , sem figurar os seus coeficientes;
3. Por fim, determinam-se os coeficientes incógnitos através da equivalência $q \cdot g + r = f$.

A seguir, mostraremos dois exemplos de aplicações práticas utilizando esse método:

Exemplo 2.3. Dividir o Polinômio $f = 3x^5 - x^4 + 2x^3 - 4x - 3$ por $g = x^3 - 2x + 1$.

Solução. Temos que os graus e as formas dos Polinômios quociente q e resto r são, respectivamente:

- $\partial q = \partial f - \partial g = 5 - 3 = 2 \Rightarrow q(x) = ax^2 + bx + c.$
- $\partial r < \partial g = 3 \Rightarrow \partial r \leq 2 \Rightarrow r(x) = dx^2 + ex + f'.$
- $q \cdot g + r = f \Rightarrow (ax^2 + bx + c) \cdot (x^3 - 2x + 1) + (dx^2 + ex + f') = 3x^5 - x^4 + 2x^3 - 4x - 3.$

Desenvolvendo os produtos do lado esquerdo da última igualdade e somando os termos semelhantes, temos pela identidade de Polinômios e para todo $x \in \mathbb{R}$, que:

- $ax^5 + bx^4 - (2a - c)x^3 + (a - 2b + d)x^2 + (b - 2c + e)x + (e + f') = 3x^5 - x^4 + 2x^3 - 4x - 3.$

Pela igualdade de Polinômios, temos que:

- $a = 3.$
- $b = -1.$
- $-2a + c = 2 \Rightarrow -2 \cdot 3 + c = 2 \Rightarrow c = 8.$
- $a - 2b + d = 0 \Rightarrow 3 - 2 \cdot (-1) + d = 0 \Rightarrow d = -5.$
- $b - 2c + e = -4 \Rightarrow -1 - 2 \cdot 8 + e = -4 \Rightarrow e = 13.$
- $c + f' = -3 \Rightarrow 8 + f' = -3 \Rightarrow f' = -11.$

Com isso, temos os Polinômios $q(x) = 3x^2 - x + 8$ e $r(x) = -5x^2 + 13x - 11$. Portanto,

$$q \cdot g + r = f \Leftrightarrow$$

$$(3x^2 - x + 8) \cdot (x^3 - 2x + 1) - 5x^2 + 13x - 11 = 3x^5 - x^4 + 2x^3 - 4x - 3.$$

Exemplo 2.4. Dividir o Polinômio $f = 2x^6 - 11x^4 + 18x^3 - 5x^2 - 8x + 6$ por $g = 2x^2 - 4x + 3$.

Solução. Temos que os graus e as formas dos Polinômios quociente q e resto r são, respectivamente:

- $\partial q = \partial f - \partial g = 6 - 2 = 4 \Rightarrow q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$
- $\partial r < \partial g = 2 \Rightarrow \partial r \leq 1 \Rightarrow r(x) = f'x + g'.$
- $q \cdot g + r = f \Rightarrow (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) \cdot (2x^2 - 4x + 3) + (f'x + g') = 2x^6 - 11x^4 + 18x^3 - 5x^2 - 8x + 6.$

Desenvolvendo os produtos do lado esquerdo da última igualdade e somando os termos semelhantes, temos para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\bullet \quad 2ax^6 - (4a - 2b)x^5 + (3a - 4b + 2c)x^4 + (3b - 4c + 2d)x^3 + (3c - 4d + 2e)x^2 + (3d - 4e + f')x + (3e + g') = 2x^6 + 0x^5 - 11x^4 + 18x^3 - 5x^2 - 8x + 6.$$

Pela igualdade de Polinômios, temos que:

- $2a = 2 \Rightarrow a = 1.$
- $-4a + 2b = 0 \Rightarrow -4 \cdot 1 + 2b = 0 \Rightarrow b = 2.$
- $3a - 4b + 2c = -11 \Rightarrow 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 2c = -11 \Rightarrow c = -3.$
- $3b - 4c + 2d = 18 \Rightarrow 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 2d = 18 \Rightarrow d = 0.$
- $3c - 4d + 2e = -5 \Rightarrow 3 \cdot (-3) - 4 \cdot 0 + 2e = -5 \Rightarrow e = 2.$
- $3d - 4e + f' = -8 \Rightarrow 3 \cdot 0 - 4 \cdot 2 + f' = -8 \Rightarrow f' = 0.$
- $3e + g' = 6 \Rightarrow 3 \cdot 2 + g' = 6 \Rightarrow g' = 0.$

Com isso, temos o Polinômio $q(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2$ e o Polinômio Nulo $r = 0$, o que se configura como uma divisão exata. Portanto,

$$q \cdot g + r = f \Leftrightarrow$$

$$(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2) \cdot (2x^2 - 4x + 3) = 2x^6 - 11x^4 + 18x^3 - 5x^2 - 8x + 6.$$

2.4.4.3.2 Método da Chave

Esse se assemelha com a forma convencional da divisão aritmética entre dois inteiros quaisquer. Utiliza-se uma “chave” onde nela são organizados os coeficientes do dividendo f , os do divisor g , os do quociente q e os do resto r , conforme Figura 3 abaixo:

Figura 3 – Método da Chave para a Divisão de Polinômios.

$$\begin{array}{c} f \quad | \quad g \\ r \quad \quad q \end{array}$$

Fonte: [Iezzi \(2013\)](#).

Portanto, segue dessa representação que $f = q \cdot g + r$. O método consiste, inicialmente, em multiplicar os termos de g por um certo número (coeficiente líder de q) de modo que esse produto seja o inverso aditivo do primeiro termo de f (termo do coeficiente líder de f). Esse processo é feito de modo sucessivo e aplicado em todos os Polinômios r_i (restos residuais de f) até que $\partial r_i < \partial g$. Os exemplos abaixo ilustram como é realizado esse método.

Exemplo 2.5. Dividir o Polinômio $f = 3x^5 - x^4 + 2x^3 - 4x - 3$ por $g = x^3 - 2x + 1$.

Solução. Temos que:

1. Primeiramente, organiza-se os coeficientes de f e g na Chave e nota-se que $\partial q = \partial f - \partial g = 5 - 3 = 2 \Rightarrow q = ax^2 + bx + c$ e que $\partial r < \partial g \Rightarrow \partial r \leq 2 \Rightarrow r = dx^2 + ex + f'$. Portanto, temos:

$$r_1 = \frac{3x^5 - x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 3}{x^3 - 2x + 1} \quad \left| \begin{array}{r} x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \\ ax^2 + bx + c \end{array} \right.$$

2. Agora, buscando “anular” o termo $3x^5$ de f , multiplica-se x^3 de g por ax^2 de modo que $ax^2 \cdot x^3 = 3x^5 \Rightarrow a = 3$. Portanto, inicialmente, cada termo de g será multiplicado por 3 e, com isso, gerando o Polinômio $3g$ onde esse será subtraído de f . Consequentemente nesse processo, o termo do coeficiente líder de f ($3x^5$, no caso) será anulado e, com isso, surge o primeiro resto residual r_1 de f . O seguinte quadro ilustra esse processo de forma prática:

$$r_1 = \frac{3x^5 - x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 3 - (3x^5 - 0x^4 + 6x^3 - 3x^2)}{3x^2 + bx + c} \quad \left| \begin{array}{r} x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \\ 3x^2 + bx + c \end{array} \right.$$

Com isso, temos que o primeiro resto residual de f será $r_1 = -x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 4x - 3$.

3. O processo se reinicia buscando agora “anular” o termo $-x^4$ de r_1 . Para isso, multiplica-se esse termo por bx de modo que $bx \cdot x^3 = -x^4 \Rightarrow b = -1$. Logo, agora cada termo de g será multiplicado por (-1) , sendo gerado o Polinômio $(-g)$ e, em seguida, o subtraíndo de r_1 . Desse modo, o termo $(-x^4)$ de r_1 será anulado e, com isso, surgindo o segundo resto residual r_2 de f .

O seguinte quadro ilustra essa situação:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 3 \\
 - 3x^5 - 0x^4 + 6x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 r_1 = \frac{0x^5 - x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 4x - 3}{0x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x} \\
 \hline
 r_2 = \frac{x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x}{0x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 3x - 3}
 \end{array}
 \end{array}.$$

Com isso, temos então o segundo resto residual de f ; $r_2 = 8x^3 - 5x^2 - 3x - 3$.

4. Por conseguinte, buscando agora “anular” o termo $8x^3$ de r_2 , multiplica-se o mesmo por c de forma que $c \cdot x^3 = 8x^3 \Rightarrow c = 8$. Multiplicando cada termo de g por (8), tem-se o Polinômio $(8g)$. Subtraindo esse de r_2 , o termo $8x^3$ é anulado e, com isso, sendo gerado o terceiro resto residual r_3 de f . Para isso, temos o seguinte quadro:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x - 3 \\
 - 3x^5 - 0x^4 + 6x^3 - 3x^2 \\
 \hline
 r_1 = \frac{0x^5 - x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 4x - 3}{0x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x} \\
 \hline
 r_2 = \frac{x^4 + 0x^3 - 2x^2 + x}{0x^4 + 8x^3 - 5x^2 - 3x - 3} \\
 \hline
 r_3 = \frac{- 8x^3 + 0x^2 + 16x - 8}{0x^3 - 5x^2 + 13x - 11}
 \end{array}
 \end{array}.$$

Por fim, temos $r_3 = -5x^2 + 13x - 11$ como o último resto residual r de f . Como $\partial r \leq \partial g$ a operação é dada por finalizada. Portanto, temos que:

$$q \cdot g + r = f \Leftrightarrow$$

$$(3x^2 - x + 8) \cdot (x^3 - 2x + 1) - 5x^2 + 13x - 11 = 3x^5 - x^4 + 2x^3 - 4x - 3.$$

Exemplo 2.6. Dividir o Polinômio $f = 2x^6 - 11x^4 + 18x^3 - 5x^2 - 8x + 6$ por $g = 2x^2 - 4x + 3$.

Solução. Nesse exemplo, sem perca de generalidade, serão representados somente os coeficientes dos termos dos Polinômios envolvidos na operação, afim de facilitar os cálculos.

1. Inicialmente, temos que $\partial q = \partial f - \partial g = 6 - 2 = 4 \Rightarrow q = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ e $\partial r < \partial g \Rightarrow \partial r \leq 1 \Rightarrow r = f'x + g'$. Portanto, organizando os coeficientes de f e g na Chave, temos:

$$r_1 = \frac{2 \quad 0 \quad -11 \quad 18 \quad -5 \quad -8 \quad 6}{a \quad b \quad c \quad d \quad e} \left| \begin{array}{r} 2 \quad -4 \quad 3 \\ \hline a \quad b \quad c \quad d \quad e \end{array} \right..$$

2. Buscando “zerar” o coeficiente 2 de f , multiplicamos 2 de g por a de modo que $a \cdot 2 = 2 \Rightarrow a = 1$. Portanto, pela propriedade do Elemento Neutro, tem-se que o Polinômio (g) será subtraído de f e, com isso, obtendo o primeiro resto residual r_1 de f . O quadro abaixo ilustra essa passagem:

$$r_1 = \begin{array}{cccccc|ccc} 2 & 0 & -11 & 18 & -5 & -8 & 6 & 2 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & -3 & & & & & 1 & b & c \\ \hline 0 & 4 & -14 & 18 & -5 & -8 & 6 & & & \end{array} .$$

Com isso, temos que $r_1 = 4x^5 - 14x^4 + 18x^3 - 5x^2 - 8x + 6$.

3. Reiniciando o processo agora para “anular” o coeficiente 4 de r_1 , multiplicamos 2 de g por b , de modo que $b \cdot 2 = 4 \Rightarrow b = 2$. Obviamente, 2 multiplicará também os demais coeficientes de g formando o Polinômio ($2g$) ao qual será subtraído de r_1 e, com isso, formando o segundo resto residual r_2 de f , conforme quadro abaixo:

$$r_1 = \begin{array}{cccccc|ccc} 2 & 0 & -11 & 18 & -5 & -8 & 6 & 2 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & -3 & & & & & 1 & 2 & c \\ \hline 0 & 4 & -14 & 18 & -5 & -8 & 6 & & & \end{array} .$$

$$r_2 = \begin{array}{cccccc|ccc} & & -4 & 8 & -6 & & & & & \\ & & \hline 0 & -6 & 12 & -5 & -8 & 6 & & & \end{array} .$$

Com isso, temos então o segundo resto residual de f , $r_2 = -6x^4 + 12x^3 - 5x^2 - 8x + 6$.

4. Buscando agora “anular” o coeficiente (-6) de r_2 , multiplica-se 2 de g por c , de modo que $c \cdot 2 = -6 \Rightarrow c = -3$. Assim, como o (-3) multiplicará cada um dos coeficientes de g , tem-se o Polinômio $(-3g)$ ao qual será subtraído de r_2 . Com isso, tem-se o seguinte quadro:

$$r_1 = \begin{array}{cccccc|ccc} 2 & 0 & -11 & 18 & -5 & -8 & 6 & 2 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & -3 & & & & & 1 & 2 & -3 \\ \hline 0 & 4 & -14 & 18 & -5 & -8 & 6 & & & \end{array} .$$

$$r_2 = \begin{array}{cccccc|ccc} & & -4 & 8 & -6 & & & & & \\ & & \hline 0 & -6 & 12 & -5 & -8 & 6 & & & \end{array} .$$

$$r_3 = \begin{array}{cccccc|ccc} & & 6 & -12 & 9 & & & & & \\ & & \hline 0 & 0 & 4 & -8 & 6 & & & & \end{array} .$$

Por fim, tem-se o terceiro resto residual $r_3 = 4x^2 - 8x + 6$ de f . Observa-se aqui que, para $c = -3$, “zerou” também o coeficiente 12 de r_2 (termo $12x^3$). Isso implica dizer que $d = 0$.

5. Por fim, buscando “zerar” o coeficiente 4 de r_3 , multiplica-se 2 de g por e (assim como os demais coeficientes de g), de modo que $e \cdot 2 = 4 \Rightarrow e = 2$. Portanto, tem-se o Polinômio $(2g)$ que, ao ser subtraído de r_3 , tem-se o seguinte quadro como resultado:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 2 & 0 & -11 & 18 & -5 & -8 & 6 \\
 & -2 & 4 & -3 & & & & \\
 \hline
 r_1 = & 0 & 4 & -14 & 18 & -5 & -8 & 6 \\
 & & -4 & 8 & -6 & & & \\
 \hline
 r_2 = & 0 & -6 & 12 & -5 & -8 & 6 \\
 & & 6 & -12 & 9 & & \\
 \hline
 r_3 = & 0 & 0 & 4 & -8 & 6 \\
 & & & -4 & 8 & -6 \\
 \hline
 r_4 = & r = & 0 & 0 & 0
 \end{array} .$$

Como $r_4 = r = 0$, a operação é dada por finalizada. Portanto, com $q = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2$, temos que:

$$q \cdot g + r = f \Leftrightarrow$$

$$(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2) \cdot (2x^2 - 4x + 3) = 2x^6 - 11x^4 + 18x^3 - 5x^2 - 8x + 6.$$

2.4.5 Divisão por Binômios do 1º Grau

A seguir, serão ilustradas definições e conceitos pertinentes à divisão de Polinômios por Binômios do 1º grau da forma $\beta x - \alpha$.

2.4.5.1 Divisão por binômios do 1º grau unitário.

Nessa Seção são tratadas das divisões de polinômios reais em que o dividendo f possui $\partial f \geq 1$ e o divisor g possui $\partial g = 1$ e coeficiente dominante também igual a 1 (Polinômio Unitário).

Dados os polinômios f e g , dividendo e divisor, respectivamente, em que $g = x - \alpha$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$). De acordo com [leaggi \(2013\)](#), na divisão de f por g o polinômio r é do tipo constante. Pois, por consequência da definição ($\partial r < \partial g$), como g é unitário e de grau 1, então tem-se que $\partial r = 0$ ou $r = 0$. Dado o valor para $x = \alpha$, percebe-se que o valor numérico de r não depende de α . Ou seja,

$$f(\alpha) = r, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

2.4.5.2 Teorema do resto

Teorema 2.4.1. O resto da divisão de um Polinômio f por $x - \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) é igual ao valor numérico de $f(\alpha)$. Ou seja,

$$f(\alpha) = r.$$

Segue sua demonstração:

Demonstração. De acordo com a definição de divisão, temos:

$$q \cdot (x - \alpha) + r = f$$

em que q é o quociente e r é o resto. Como o grau de $x - \alpha$ é igual a 1, pode-se concluir que o r ou é nulo ou tem grau nulo. Logo, r é um Polinômio constante. Com isso, temos com igualdade acima, para $x = \alpha$, que:

$$q(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + r(\alpha) = f(\alpha).$$

Portanto, tem-se com isso que:

$$r(\alpha) = r = f(\alpha).$$

■

2.4.5.3 Teorema de D'Alembert

Teorema 2.4.2. Um Polinômio f é divisível por um binômio $x - \alpha$ se, e somente se, α for raiz de f . Ou seja:

$$f(\alpha) = 0.$$

Sem percas de generalidades, tomemos α uma raiz da equação polinomial $f(x) = 0$ como um zero da função f .

Sua demonstração se dá por duas implicações a se provar:

Demonstração. Dado o binômio $x - \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) e o polinômio f , com $f(\alpha) = 0$, temos:

1. $x - \alpha \mid f \Rightarrow \alpha$ é raiz de f . Pelo Teorema do Resto, $r = f(\alpha) = 0$. Logo, como a divisão é exata, podemos concluir que α é raiz de f .

2. α é raiz de $f \Rightarrow x - \alpha | f$. Como α é raiz de f , tem-se que $f(\alpha) = 0$ e, pelo Teorema do Resto, o resto r da divisão de f por $x - \alpha$ é igual a $f(\alpha)$. Dessa forma, $r = f(\alpha) = 0$, mostrando que f é divisível por $x - \alpha$. ■

2.4.5.4 O Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

Na Seção 2.4.4 é apresentado alguns métodos de divisão de Polinômios. O Dispositivo ou Algoritmo de Briot-Ruffini (DBR) é bastante utilizado para a divisão de polinômios por binômios unitários da forma $x - \alpha$. Sua aplicação é relativamente prática e é bastante mencionada na bibliografia e também utilizada nos cursos de Matemática, seja no Ensino Médio ou no Ensino Superior.

2.4.5.4.1 Demonstração do Dispositivo de Briot-Ruffini

Sua demonstração se dá utilizando algumas das definições sobre as operações com polinômios. Vamos a sua demonstração:

Considere os polinômios f da Equação 2.9 e

$$g = x - c. \quad (2.18)$$

Buscaremos agora determinar os polinômios quociente q e resto r da divisão de f por g . Para tal, temos que:

$$\partial f = n \quad \text{e} \quad \partial g = 1 \implies \partial q = n - 1.$$

Portanto, tem-se que:

$$q = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_2x^2 + b_1x + b_0. \quad (2.19)$$

Em seguida, aplicando as técnicas de multiplicação de polinômios, tratadas na Seção 2.4.3 entre q e g , temos o seguinte:

Figura 4 – Multiplicação dos Polinômios quociente q e $g = x - c$.

| | | | | | | | |
|------------------|---------------------------------------|---------------------------|-----------------|-------------------|---------------------------|-------------------------|----------------|
| $b_{n-1}x^{n-1}$ | $+ \quad b_{n-2}x^{n-2}$ | $+ \quad b_{n-3}x^{n-3}$ | $+ \quad \dots$ | $+ \quad b_2x^2$ | $+ \quad b_1x$ | $+ \quad b_0$ | |
| $-$ | $- \quad cb_{n-1}x^{n-1}$ | $- \quad cb_{n-2}x^{n-2}$ | $- \quad \dots$ | $- \quad cb_3x^3$ | $- \quad cb_2x^2$ | $- \quad cb_1x$ | $- \quad cb_0$ |
| $b_{n-1}x^n$ | $+ \quad b_{n-2}x^{n-1}$ | $+ \quad b_{n-3}x^{n-2}$ | $+ \quad \dots$ | $+ \quad b_2x^3$ | $+ \quad b_1x^2$ | $+ \quad b_0x$ | |
| $b_{n-1}x^n$ | $+ \quad (b_{n-2} - cb_{n-1})x^{n-1}$ | | \dots | | $+ \quad (b_1 - cb_2)x^2$ | $+ \quad (b_0 - cb_1)x$ | $- \quad cb_0$ |

Fonte: Adaptado de [Iezzi \(2013\)](#).

Pela condição de que $q \cdot (x - c) + r = f$ e pela identidade de polinômios tratado na Seção 2.3.4, temos as seguintes igualdades:

- $b_{n-1} = a_n$
- $b_{n-2} - c \cdot b_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = c \cdot b_{n-1} + a_{n-1}$
- $b_{n-3} - c \cdot b_{n-2} = a_{n-2} \Rightarrow b_{n-3} = c \cdot b_{n-2} + a_{n-2}$
- $\vdots \quad \vdots$
- $b_1 - c \cdot b_2 = a_2 \Rightarrow b_1 = c \cdot b_2 + a_2$
- $b_0 - c \cdot b_1 = a_1 \Rightarrow b_0 = c \cdot b_1 + a_1$
- $r - c \cdot b_0 = a_0 \Rightarrow r = c \cdot b_0 + a_0.$

Os passos realizados acima (ou o Algoritmo) tornam-se bastante simples quando os coeficientes de f e o termo independente c de g estão organizados conforme o quadro da Figura 5 abaixo:

Figura 5 – Algoritmo de Briot-Ruffini.

| c | a_n | a_{n-1} | a_{n-2} | \cdots | a_2 | a_1 | a_0 |
|-----|------------------------------|--|--|----------|--|--|--------------------------------------|
| | $\underbrace{a_n}_{b_{n-1}}$ | $\underbrace{c \cdot b_{n-1} + a_{n-1}}_{b_{n-2}}$ | $\underbrace{c \cdot b_{n-2} + a_{n-2}}_{b_{n-3}}$ | \cdots | $\underbrace{c \cdot b_2 + a_2}_{b_1}$ | $\underbrace{c \cdot b_1 + a_1}_{b_0}$ | $\underbrace{c \cdot b_0 + a_0}_{r}$ |
| | | | | | | | |

Fonte: Adaptado de [Iezzi \(2013\)](#).

O dispositivo do quadro acima torna a divisão de um polinômio de grau n (com $n \geq 2$) por um binômio unitário da forma $x - \alpha$ de modo simples e prático.

2.4.5.4.2 Aplicação prática do Dispositivo de Briot-Ruffini

A seguir, mostra-se algumas aplicações práticas do uso desse dispositivo:

Exemplo 2.7. Dividir o polinômio $f = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ pelo binômio $g = x - 3$.

Solução. Usando o DBR, temos os seguintes passos:

1. Definimos a raiz de g ($x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$) e a organizamos juntamente com os coeficientes ordenados de f , obedecendo as potências decrescentes de x , no dispositivo, conforme abaixo:

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & & & & \end{array} .$$

2. Baixa-se o primeiro coeficiente do dividendo q (no caso, 1) e o multiplica-se pela raiz do divisor g ($1 \cdot 3 = 3$).

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & & & \end{array}.$$

3. Adiciona-se o produto obtido, (3) ao coeficiente seguinte de f , (-4). A soma $(3 + (-4) = -1)$ é inserida abaixo desse coeficiente, conforme segue:

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}.$$

4. Com a soma obtida (-1), repete-se as operações (multiplica-se pela raiz de g e adiciona-se ao coeficiente seguinte de f), e assim por diante. Com isso, ficando o quadro da seguinte forma:

$$\begin{array}{c|ccccc} 3 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 4 \\ & & & & \end{array}.$$

O último número obtido no quadro é o resto r da divisão de f por g . Logo, $r = 4$. Já os demais números correspondem aos coeficientes ordenados (segundo potências de expoentes decrescentes de x) do polinômio quociente q . Com isso, temos que $q = x^2 - x + 2$.

Portanto, segue que:

$$g \cdot q + r = f \Rightarrow (x - 3) \cdot (x^2 - x + 2) + 4 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

Exemplo 2.8. Dividir o polinômio $f = 2x^8 + 7x^7 + 13x^5 - 10x^4 - 35x^2 + 48$ por $g = x + 4$.

Solução. Essa divisão pode ser facilmente realizada através do dispositivo de Briot-Ruffini.

1. Definir a raiz de g ($x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$) e juntamente com os coeficientes de f , organiza-los no dispositivo, conforme abaixo:

$$\begin{array}{c|cccccccc} -4 & 2 & 7 & 0 & 13 & -10 & 0 & -35 & 0 \\ \hline & & & & & & & & \end{array}.$$

2. O coeficiente líder de q corresponde ao de f (no caso, 2). Logo, multiplica-se esse coeficiente pela raiz de g ($2 \cdot (-4) = -8$).

| | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|----|-----|---|-----|---|----|
| -4 | 2 | 7 | 0 | 13 | -10 | 0 | -35 | 0 | 48 |
| | 2 | | | | | | | | |

3. Adiciona-se o produto obtido, (-8) ao coeficiente seguinte de f (7). A soma $(-8 + 7 = -1)$ é inserida abaixo desse coeficiente (7) de f , conforme segue:

| | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|----|-----|---|-----|---|----|
| -4 | 2 | 7 | 0 | 13 | -10 | 0 | -35 | 0 | 48 |
| | 2 | | | | | | | | |

4. Com a soma obtida (-1), repete-se as mesmas operações (multiplica-se o eliminante coeficiente de q pela raiz de g e adiciona-se ao coeficiente seguinte de f), e assim por diante. Com isso, ficando o quadro completo da seguinte forma:

| | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|----|-----|---|-----|---|----|
| -4 | 2 | 7 | 0 | 13 | -10 | 0 | -35 | 0 | 48 |
| | 2 | | | | | | | | |

O último quadro nos informa que o seu último número obtido é o resto r da divisão em questão. Como $r = 0$, conclui-se que a divisão é exata e que, consequentemente, $x = -4$ é raiz de f . Já os demais números correspondem aos coeficientes ordenados do polinômio quociente q .

Portanto,

$$q(x) = 2x^7 - x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 3x + 12.$$

Ao qual, para $g \cdot q + r = f$, segue que:

$$(x+4) \cdot (2x^7 - x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 3x + 12) = 2x^8 + 7x^7 + 13x^5 - 10x^4 - 35x^2 + 48.$$

2.4.5.5 Divisão por binômios do 1º grau quaisquer

Será aqui tratado da divisão de um polinômio dividendo $f = (\beta x - \alpha) \cdot q + r$, com $\partial f \geq 1$, por um polinômio $g = \beta x - \alpha$, em que $\beta \neq 0$ e 1.

Segundo [Iezzi \(2013\)](#), para a obtenção do quociente q e o resto r da divisão do polinômio f por g , nota-se o seguinte:

$$f = (\beta x - \alpha) \cdot q + r \Rightarrow \left(x - \frac{\alpha}{\beta} \right) \cdot \underbrace{(\beta \cdot q)}_{q'} + r = f. \quad (2.20)$$

Da Equação 2.20, verifica-se o seguinte processo de resolução, utilizando o Dispositivo de Briot-Ruffini:

1. Divide-se f por $x - \frac{\alpha}{\beta}$ com o auxílio do DBR.
2. Divide-se o quociente q' encontrado por β para obter q ($q' = \beta \cdot q \Rightarrow q = \frac{q'}{\beta}$).

A seguir, será ilustrado alguns exemplos práticos de sua aplicação.

Exemplo 2.9. Qual o quociente da divisão do polinômio $8x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 15x + 9$ pelo binômio $4x - 3$?

Solução. Temos que $4x - 3 \Rightarrow 4 \cdot (x - \frac{3}{4})$. Dividindo o polinômio em questão pelo binômio $x - \frac{3}{4}$ com o auxílio do DBR, temos:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & | 8 & -2 & 5 & -2 & -15 & 9 \\ \frac{3}{4} & | 8 & 4 & 8 & 4 & -12 & 0 \end{array}.$$

Como $q' = 8x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x - 12$ e $\beta = 4$, temos que

$$q = \frac{q'}{\beta} = \frac{8x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x - 12}{4} = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + x - 3$$

e $r = 0$. Portanto, segue que o quociente pedido é $q = 2x^4 + x^3 + 4x^2 + x - 3$.

Exemplo 2.10. Qual o quociente da divisão do polinômio $4x^4 + 6x^3 - 7x^2 + 8x - 7$ pelo binômio $2x + 3$?

Solução. Temos que $2x + 3 \Rightarrow 2 \cdot (x + \frac{3}{2})$. Dividindo o polinômio em questão pelo binômio $(x + \frac{3}{2})$ e utilizando o DBR, temos a seguinte situação:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & | 4 & 6 & -7 & 8 & -7 \\ -\frac{3}{2} & | 4 & 0 & -7 & \frac{37}{2} & -\frac{139}{4} \end{array}.$$

Com isso, temos que $q' = 4x^3 - 7x + \frac{37}{2}$ e $\beta = 2$. Logo, temos que

$$q = \frac{q'}{\beta} = \frac{4x^3 - 7x + \frac{37}{2}}{2} = 2x^3 - \frac{7x}{2} + \frac{37}{4} \quad \text{e} \quad r = -\frac{139}{4}.$$

Portanto, temos que o quociente solicitado é $q = 2x^3 - \frac{7x}{2} + \frac{37}{4}$.

Observação. Observa-se através do Exemplo 2.10 que é possível obter um certo polinômio quociente q cujo alguns de seus coeficientes sejam racionais. Como todos os coeficientes de f são inteiros, no processo de execução do algoritmo de Briot-Ruffini, o resto r obtido será sempre um número racional, já que a soma de um racional não inteiro com um inteiro será um número racional não inteiro. Logo, não nulo.

2.5 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

A seguir, serão apresentados alguns conceitos pertinentes as Equações Polinomiais ou Algébricas relevantes ao desenvolvimento do presente trabalho.

2.5.1 Definição

Segundo [Dante \(2010\)](#), denomina-se Equação Polinomial ou Algébrica toda equação que pode ser reduzível à forma $P(x) = 0$, em que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, (\text{com } a_n \neq 0) \quad (2.21)$$

em que os a_i ($i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) são elementos do conjunto dos números complexos e n (com $n \in \mathbb{N} \cup 0$) é o grau da equação. A partir desse ponto, para efeito de abordagem do trabalho em questão, serão considerados que os coeficientes a_i das equações polinomiais figuradas pertencerão ao conjunto dos números reais. Ou seja, $a_i \in \mathbb{R}$.

Observação. Para o desenvolvimento do presente trabalho, o conjunto \mathbb{C} poderá ser mencionado na necessidade de maiores esclarecimentos.

2.5.2 Raiz de uma Equação Polinomial ou Algébrica

Denomina-se **raiz** da Equação [2.21](#) todo número que, substituído no lugar de x , torna uma determinada igualdade verdadeira ([Dante, 2010](#)). Dessa forma, o valor de α é raiz de uma equação $P(x) = 0$ se α satisfazer a igualdade. Ou seja:

$$P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

2.5.3 Conjunto Solução de uma Equação Polinomial

Denomina-se **conjunto solução** de uma equação algébrica como o conjunto de todas as raízes dessa equação, considerando \mathbb{R} como o conjunto universo. Para encontrar as raízes das equações polinomiais, pode-se utilizar as seguintes estratégias para cada grau da equação. Segundo [Iezzi et al. \(2017\)](#), são elas:

- 1º Grau: Dada a equação $ax + b = 0$ (com $a \neq 0$), para encontrar o conjunto solução S , basta fazer: $ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Logo, $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$.
- 2º Grau: Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ (com $a \neq 0$), para encontrar o conjunto solução S , pode-se utilizar a fórmula resolutiva da equação do 2º grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}, \quad \text{onde} \quad \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Sobre o discriminante Δ , é importante destacar que:

$$\Delta \left\{ \begin{array}{l} > 0 \Rightarrow \text{A equação possui duas raízes reais e distintas.} \\ = 0 \Rightarrow \text{A equação possui duas raízes reais e iguais.} \\ < 0 \Rightarrow \text{A equação não possui raiz no conjunto dos reais.} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Logo, $S = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \right\}$.

- 3º Grau: Segundo [Iezzi et al. \(2017\)](#), há a possibilidade de determinar as raízes de uma equação de tal grau por meio de fórmulas que envolvem operações aritméticas e a extração de raízes. No entanto, essas fórmulas não são estudadas nas escolas de Ensino Médio, tendo em vista a complexidade de suas aplicações. Mas, para resolver uma equação do 3º grau, geralmente busca-se encontrar uma das suas raízes racionais α e, posteriormente, dividir a equação pelo binômio $x - \alpha$, onde o polinômio quociente é uma equação do 2º grau. Com isso, o problema é reduzido a encontrar as outras duas raízes ([Knudsen, 1985](#)).
- 4º Grau: Assim como as equações do 3º grau, as fórmulas usadas para a resolução de uma equação do 4º grau são bastante complexas e não aplicáveis aos cursos de Ensino Médio. Esse processo de resolução se dá por técnicas de completamento de quadrados e substituição de variáveis com o objetivo de reduzir a uma equação do terceiro grau. Daí, aplica-se as técnicas de redução para equações do segundo grau, onde as resoluções são bastante conhecidas ([Knudsen, 1985](#)). No entanto, o método mais convencional (sem usar fórmulas resolutivas) é o mesmo para as equações do 3º grau (e para os demais graus).
- 5º Grau ou maior: Não existe uma fórmula resolutiva que se aplique a qualquer situação. No entanto, graças aos trabalhos de Évariste Galois (1811-1832), que deram início a chamada Álgebra Moderna, generalizou-se as condições de resolvibilidade de uma equação algébrica qualquer [Iezzi \(2013\)](#).

2.5.4 Teorema Fundamental da Álgebra - TFA

Enunciado e provado por Carl Gauss (1777-1855) em 1799, então com 21 anos de idade, em sua tese de doutorado na Universidade de Helmstadt, esse teorema constitui um elemento central e essencial para o estudo das equações algébricas.

Teorema 2.5.1. *Toda função polinomial $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, com $(n \geq 1)$ e $(n \neq 0)$, possui uma raiz no corpo \mathbb{C} dos números complexos.*

Observação. A correspondência biunívoca entre Polinômio e Função Polinomial real, tratada na Seção 2.2, logo após a Definição 2.2.2, é válida também para o contexto dos Números Complexos.

Segundo [Fernandez e Santos \(2010\)](#), a maioria das demonstrações sobre o TFA, apresentadas nos cursos de bacharelado em matemática, exigem que os alunos tenham cursado uma disciplina de análise complexa ou de funções complexas.

Nas palavras de [Costa \(2016\)](#), depois da demonstração de Gauss, inúmeras outras demonstrações do TFA surgiram, exibindo uma enorme diversidade. Portanto, considerando a complexidade da demonstração desse teorema e a sua numerosa quantidade de provas disponíveis na literatura, a sua demonstração no presente trabalho será omitida.

Uma das inúmeras demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra é atribuída a [Fernandez e Santos \(2010\)](#) e, segundo [Costa \(2016\)](#), o mesmo apresenta dois Corolários bastante significativos:

Corolário. *Todo polinômio $P(x)$ não constante de grau n possui exatamente n raízes, não necessariamente distintas.*

Corolário. *Também conhecido na bibliografia como Teorema da Decomposição, esse item será tratado no próximo tópico.*

2.5.4.1 O Teorema da Decomposição

Nas palavras de [Iezzi et al. \(2017\)](#), esse teorema afirma que:

Teorema 2.5.2. *Seja $P(x)$ um polinômio de grau n , com $n \geq 1$, dado pela Equação 2.21. Então, $P(x)$ pode ser decomposto em n fatores do 1º grau sob a forma:*

$$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) \quad (2.23)$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são as raízes de $P(x)$ e a_n é o coeficiente dominante de $P(x)$.

Com exceção da ordem dos fatores, tal decomposição é única ([Iezzi, 2013](#)).

2.5.4.2 Consequências do Teorema da Decomposição

Nos apontamentos de [Iezzi et al. \(2017\)](#), há duas consequências bastante peculiares em relação ao Teorema da Decomposição:

Corolário. *Toda equação polinomial de grau n ($n \geq 1$), admite n , e somente n , raízes complexas.*

Corolário. *Multiplicidade de uma raiz:* Tendo em vista o Teorema da Decomposição, nada impede que essa decomposição de $P(x)$ apresente fatores iguais ou idênticos. Isso implica dizer que o polinômio $P(x)$ apresente raízes idênticas ou múltiplas. Com isso, diz-se que α é raiz de **multiplicidade** m ($m > 1$) da equação $P(x) = 0$ se, e somente se,

$$P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q(x) \quad \text{e} \quad Q(x) \neq 0.$$

Isto é, α é raiz de multiplicidade m de $P(x) = 0$ quando o polinômio P é divisível por $(x - \alpha)^m$ e não é divisível por $(x - \alpha)^{m+1}$. Ou seja, a decomposição de $P(x)$ apresenta exatamente m fatores iguais a $(x - \alpha)$.

2.5.5 Relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial - Relações de Girard

As famosas “Relações de Girard” são atribuídas ao matemático francês Albert Girard (1595 – 1632) que estabeleceu relações de soma e produto entre as raízes de uma equação polinomial.

Para as equações polinomiais de grau n , seguem as seguintes relações:

- **Equações do 2º Grau:** Tomemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$ e cujas raízes são α_1 e α_2 .

Pelo Teorema da Decomposição, essa equação pode ser escrita na forma:

$$a \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) = 0.$$

Com isso, tem-se então a identidade polinomial:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2), \quad \forall x.$$

Isto é:

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_1 \cdot \alpha_2), \quad \forall x.$$

Portanto, segue pela Identidade de Polinômios que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{c}{a}$$

são as relações entre coeficientes e raízes de equação do 2º grau.

- **Equações do 3º Grau:** Tomemos a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a \neq 0$ e cujas raízes são α_1, α_2 e α_3 . Pelo Teorema da Decomposição essa equação também pode ser escrita na forma:

$$a \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) = 0.$$

Dessa forma, tem-se a identidade polinomial:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3), \quad \forall x.$$

Através de algumas operações aritméticas, tem-se que:

$$x^3 + \frac{b}{a} \cdot x^2 + \frac{c}{a} \cdot x + \frac{d}{a} = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot x^2 + (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3) \cdot x - (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3), \quad \forall x.$$

Finalmente, acompanhando a Identidade de Polinômios, tem-se:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a}, \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 = \frac{c}{a} \quad \text{e} \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -\frac{d}{a}$$

são as relações entre coeficientes e raízes da equação do 3º grau.

- **Equações de grau n qualquer:** A seguir será deduzido as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial de grau n ($n \geq 1$). Dado a Equação 2.21, cujas raízes são $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Pelo Teorema da Decomposição, essa equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$P(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n) = 0.$$

Realizando as devidas operações com Polinômios, temos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n \cdot x^n + a_n \cdot \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n)}_{S_1} \cdot x^{n-1} + \\ &+ a_n \cdot \underbrace{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n)}_{S_2} \cdot x^{n-2} - \\ &- a_n \cdot \underbrace{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n)}_{S_3} \cdot x^{n-3} + \dots + \\ &+ (-1)^n \cdot a_n \cdot S_m \cdot x^{n-m} + \dots + (-1)^n \cdot a_n \cdot \underbrace{(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_n)}_{S_n}, \quad \forall x, \end{aligned}$$

em que S_m corresponde a soma de todos os $\binom{n}{m}$ produtos de m raízes da equação e S_n é o produto das n raízes. Portanto, aplicando a condição de igualdade,

temos:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_r = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
 S_2 &= \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
 S_3 &= \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 + \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\
 &\vdots = \vdots \\
 S_m &= (-1)^m \cdot \frac{a_{n-m}}{a_n} \\
 &\vdots = \vdots \\
 S_n &= \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \cdot \alpha_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}
 \end{aligned}$$

são as relações entre coeficientes e raízes da equação $P(x) = 0$, amplamente conhecida na literatura como **Relações de Girard**. Com isso, o número n de relações coincide com o grau n de $P(x)$.

Segundo [Iezzi \(2013\)](#), as n relações de Girard para uma determinada equação polinomial $P(x) = 0$ de grau n , não são suficientes para obter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Pois, na tentativa de obter qualquer uma das raízes, após várias substituições, obtém-se a equação inicial $P(x) = 0$.

Portanto, é necessário que seja dada uma condição ou relação entre as raízes de $P(x)$ para que seja possível a determinação do conjunto solução.

2.5.6 Teorema das Raízes Racionais de uma Equação Algébrica de Coeficientes Inteiros

Sabe-se que as equações polinomiais de grau maior que 4 não possuem um processo determinado de resolução por meio de fórmulas ([Knudsen, 1985](#)). Até mesmo as equações de grau 3 ou 4, apesar de haver desde o século XVI fórmulas para encontrar as suas raízes, tais fórmulas não são comumente empregadas na Matemática do Ensino Médio, dadas as suas complexidades de execução ([Iezzi et al., 2017](#)). Diante de tal constatação, para encontrar, por exemplo, as raízes de uma equação de grau 6, deve-se encontrar uma ou mais raízes para, então, com elas buscar todas as outras. O presente capítulo trará uma propriedade que auxiliará na pesquisa das raízes racionais (e inteiros) de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.

2.5.6.1 Definição

A propriedade em questão é o Teorema das Raízes Racionais ao qual, segundo [Iezzi \(2013\)](#), afirma que:

Teorema 2.5.3. Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$. Se o número racional $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ e $(p, q) = 1$, é raiz dessa equação, então $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$.

2.5.6.2 Demonstração do Teorema das Raízes Racionais

Segue sua demonstração:

Demonstração. Tomando $\frac{p}{q}$ como raiz da equação polinomial, temos:

$$a_n \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por q^n , temos:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q + \dots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n = 0. \quad (2.24)$$

Isolando $a_n \cdot p^n$ e colocando q em evidência na Equação 2.24, segue que:

$$a_n \cdot p^n = -q \underbrace{(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1})}_A. \quad (2.25)$$

Agora, isolando $a_0 \cdot q^n$ e colocando p em evidência, a partir da Equação 2.24, temos:

$$a_0 \cdot q^n = -p \underbrace{(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1 q^{n-1})}_B. \quad (2.26)$$

Como todos os coeficientes a_i ($i \in \mathbb{N} \cup 0$) são inteiros, segue que A e B também são inteiros.

Das Equações 2.25 e 2.26, temos:

$$\begin{cases} a_n \cdot p^n = -q \cdot A \Rightarrow \frac{a_n \cdot p^n}{q} = -A \in \mathbb{Z} & (*) \\ \text{e} \\ a_0 \cdot q^n = -p \cdot B \Rightarrow \frac{a_0 \cdot q^n}{p} = -B \in \mathbb{Z} & (**) \end{cases}.$$

As igualdades acima obtidas mostram que:

- De (*), temos que $q \mid a_n p^n$. Como $(p, q) = 1$, a_n é divisível por q . Isto é, q é divisor de a_n .

- De (**), temos que $p \mid a_0 q^n$. Como $(q, p) = 1$, a_0 é divisível por p . Ou seja, p é divisor de a_0 . ■

Esse Teorema não garante a existência de raízes racionais em uma equação com coeficientes inteiros. Mas, caso existam tais raízes, o teorema fornece todas as possibilidades.

2.5.6.3 Aplicação prática do Teorema das Raízes Racionais

A seguir, alguns exemplos práticos de aplicação desse Teorema.

Exemplo 2.11. Dado a equação $3x^3 + 8x^2 + 3x - 2 = 0$, quais as suas possíveis raízes racionais?

Solução. Como não há qualquer outra informação sobre as raízes dessa equação, além do fato de que são 3 (equação polinomial de grau 3) e, como ela possui todos os coeficientes inteiros, o Teorema das Raízes Racionais vem a calhar. Por meio do teorema, sabe-se que, se a equação tiver alguma raiz racional, ela será da forma $\frac{p}{q}$, em que p é divisor de (-2) e q é divisor de 3 . Ou seja, $p \in \{\pm 1, \pm 2\}$ e $q \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Portanto, os “candidatos” a raízes racionais são: $\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3} \right\}$.

Exemplo 2.12. Dada a equação $2x^4 + 9x^3 - 12x^2 - 29x + 30 = 0$, quais as suas possíveis raízes inteiras?

Solução. A equação em questão possui 4 raízes e todos os seus coeficientes são inteiros. Logo, o teorema das raízes racionais será bastante útil para determinar as suas possíveis raízes inteiras. Pelo teorema, as suas raízes racionais, se houver, serão da forma $\frac{p}{q}$, em que $p \mid 30$ e $q \mid 2$. Isto é, $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30\}$ e $q \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Com isso, os candidatos a raízes racionais são: $\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 5, \pm \frac{5}{2}, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm \frac{15}{2}, \pm 30 \right\}$. Como o problema está interessado nas possíveis raízes inteiras, temos que os candidatos são: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 15\}$.

Para Bezerra (1974), há observações bastante significativas a respeito desse teorema:

Observação 1. Toda equação algébrica de coeficientes inteiros, cujo coeficiente do termo de maior grau (coeficiente dominante) é a unidade, se possuir raízes racionais

elas serão inteiras. Então, uma equação da forma

$$x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

não pode ter raízes racionais.

Observação 2. Uma equação algébrica de coeficientes inteiros que possuir o coeficiente do termo de maior grau (coeficiente dominante) diferente da unidade ($a_n \neq 1$), se houver raízes, não pode ter apenas inteiras.

Observação 3. Toda raiz inteira (α) de uma equação algébrica de coeficientes inteiros é um divisor do termo independente da equação (suposta desprovida de raízes nulas). Ou seja,

$$\pm\alpha \mid a_0.$$

Observação 4. Toda raiz racional tem para o numerador um divisor do termo independente da equação e para o denominador um divisor do coeficiente dominante.

2.5.7 Delimitação das Raízes de uma Equação Polinomial

A busca pelas raízes de uma equação polinomial pode ser bastante onerosa, dependendo das características da equação em questão. Além do grau da equação, há a observância do coeficiente líder e o termo independente que, como visto na Seção 2.5.6, estão diretamente conectados as suas raízes. Para Bezerra (1974), a delimitação das raízes consiste em determinar dois números l e L , entre os quais estejam compreendidas as raízes racionais de uma equação algébrica. Para tal, tem-se que o número l trata-se da cota inferior (ou limite inferior das raízes negativas) e L da cota superior (ou limite superior das raízes positivas).

A pesquisa das raízes exige intervalos pequenos de investigação, pois quanto mais próximos de l e L elas forem, mais fácil tornam-se as suas buscas. De acordo com Bezerra (1974), a determinação dessas cotas baseiam-se no seguinte princípio:

É condição necessária e suficiente para que um número L seja cota superior das raízes de

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (2.27)$$

que tenhamos: $P(x) > 0$ para $x \geq L$.

A condição é necessária. Pois, de fato, como $a_n > 0$, $P(x) > 0$ quando x crescer indefinidamente. Logo, se L é limite superior das raízes, então $P(x) > 0 \forall x \geq L$. Pois, caso contrário, se $P(x) < 0$ teríamos que, primeiramente, obter $P(x) = 0$ antes de

$P(x) > 0$. Portanto, não há raízes superiores a L . Como consequência, se $P(x)$ não se anular para $x \geq L$, L é maior que qualquer raiz de $P(x) = 0$. Portanto, sendo L uma cota superior.

Para a determinação da cota inferior l , o raciocínio é de modo análogo para $P(-x) = 0$, onde essa é a transformada de $P(x) = 0$. Pois, calculando a transformada $P(-x) = 0$ e a sua cota superior sendo $l > 0$, teríamos $-l$ como a cota inferior de $P(x) = 0$.

2.5.7.1 Método de Laguerre

Atribuído ao matemático francês Edmond Laguerre (1834-1886), esse método é o mais indicado entre os métodos existentes, pois é de fácil aplicação, além de permitir achar uma cota superior bastante reduzida ([Bezerra, 1974](#)).

O método de Laguerre permite a determinação da cota superior L . Além disso, através da transformada $P(-x) = 0$, é possível pelo mesmo método determinar, também, a cota inferior l .

Para tal verificação desse método, dada a Equação 2.27 e supondo a divisão de $P(x)$ por $x - L$, com o auxílio do Dispositivo de Briot-Ruffini, temos o seguinte arranjo, conforme exposto na Figura 6:

Figura 6 – Divisão de $P(x)$ por $(x - L)$ (cota superior L) no Dispositivo Prático de Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline L & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & R \end{array}$$

Fonte: Adaptado de [Bezerra \(1974\)](#).

Dessa forma, podemos escrever a Equação 2.27 como:

$$P(x) = (x - L) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0) + R \quad (2.28)$$

em que, conforme Figura 6, aplicando o Dispositivo de Briot-Ruffini e pela identidade de polinômios, temos as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = b_{n-1} \cdot L + a_{n-1} = a_n \cdot L + a_{n-1} \\ b_{n-3} = b_{n-2} \cdot L + a_{n-2} = (a_n \cdot L + a_{n-1}) \cdot L + a_{n-2} = a_n \cdot L^2 + a_{n-1} \cdot L + a_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 = b_1 \cdot L + a_1 = a_n \cdot L^{n-1} + a_{n-1} \cdot L^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot L + a_1 \\ R = P(L) = a_n \cdot L^n + a_{n-1} \cdot L^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot L^2 + a_1 \cdot L + a_0 \end{array} \right. . \quad (2.29)$$

Supondo que $a_n > 0$ e, consequentemente, $b_{n-1} > 0$, um real L que tornar positivos os números $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$ e R em 2.29, será um número que tornará na Equação 2.28, $P(x) > 0$. Portanto, segue que $\forall x \geq L$, nas relações apontadas em 2.29, $P(x) > 0$. Com isso, seguindo o princípio tratado na Seção 2.5.7, L é uma cota superior das raízes positivas de $P(x)$.

Para Roxo et al. (1955), a simples observação da identidade

$$P(x) = (x - L) \cdot Q(x) + P(L) \quad (2.30)$$

que define a divisão de $P(x)$ por $x - L$, permite a determinação dos intervalos onde se encontram as raízes racionais de uma equação algébrica. Com efeito, escolhendo um L de tal forma que, para $x > L$, tem-se um $P(x) > 0$. Como por hipótese $P(x)$ não se anulará para valores maiores que L , nenhuma raiz ultrapassará L .

Portanto, a determinação de um certo número L satisfazendo essa condição, o resultado é imediato. Pois, para tal, bastará por tentativas, procurar o divisor L para o qual sejam positivos os coeficientes b_i do quociente $Q(x)$ e o resto $P(L)$.

2.5.7.2 Aplicação prática do Método de Laguerre

Para o uso do método de Laguerre, o Dispositivo de Briot-Ruffini torna o processo bastante simples para o cálculo da cota L . Para tal, deve-se observar que se L for cota superior de $P(x) = 0$, ao dividir $P(x)$ por $x - L$, os coeficientes b_i do quociente $Q(x)$ e o resto R , necessariamente, devem ser positivos. Portanto, usando o dispositivo de Briot-Ruffini, divide-se sucessivamente $P(x)$ pelos naturais $\{1, 2, 3, \dots\}$, até que se encontrem todos os b_i e R positivos.

Caso algum b_i ou R for negativo, o processo de divisão pode ser imediatamente encerrado. Além disso, é importante destacar que é possível que um ou mais coeficientes do quociente sejam nulos. Por fim, para determinar a cota inferior l das raízes negativas de $P(x) = 0$, basta que seja determinado a cota superior da transformada simétrica $P(-x) = 0$.

A seguir, vejamos alguns exemplos de sua aplicação:

Exemplo 2.13. Determine as cotas superiores e inferiores da equação:

$$P(x) = x^6 + 3x^5 - 36x^4 - 45x^3 + 93x^2 + 132x + 140.$$

Solução. Determinando L com o auxílio do Dispositivo de Briot-Ruffini, temos o seguinte resultado a partir de $L \geq 1$:

| | | | | | | | |
|---|---|---|-----|-----|----|-----|-----|
| | 1 | 3 | -36 | -45 | 93 | 132 | 140 |
| 1 | 1 | 4 | - | | | | |
| 2 | 1 | 5 | - | | | | |
| 3 | 1 | 6 | - | | | | |
| 4 | 1 | 7 | - | | | | |
| 5 | 1 | 8 | 4 | - | | | |
| 6 | 1 | 9 | 18 | 63 | + | + | + |

Portanto, segue que $L = 6$ é cota superior de $P(x) = 0$.

Buscando agora determinar l , temos que a transformada de $P(x) = 0$ é:

$$P(-x) = x^6 - 3x^5 - 36x^4 + 45x^3 + 93x^2 - 132x + 140.$$

Organizando os seus coeficientes no dispositivo de Briot-Ruffini, temos o seguinte resultado a partir de $l \geq 1$:

| | | | | | | | |
|---|---|----|-----|----|-----|------|-----|
| | 1 | -3 | -36 | 45 | 93 | -132 | 140 |
| 1 | 1 | - | | | | | |
| 2 | 1 | - | | | | | |
| 3 | 1 | 0 | - | | | | |
| 4 | 1 | 1 | - | | | | |
| 5 | 1 | 2 | - | | | | |
| 6 | 1 | 3 | - | | | | |
| 7 | 1 | 4 | - | | | | |
| 8 | 1 | 5 | 4 | 77 | 709 | + | + |

Portanto, segue que a cota inferior de $P(x) = 0$ é $l = -8$. Com isso, temos que se $P(x) = 0$ possuir alguma raiz real, elas pertencerão ao intervalo $-8 < x < 6$.

Observação. Para o cálculo de L , nota-se que não foi necessário calcular os últimos coeficientes para $1 \leq L \leq 5$, pois os mesmos seriam negativos. Assim como para $L \geq 6$,

pois os mesmos seriam positivos. De modo análogo, o mesmo pôde ser aplicado para o cálculo de l .

Exemplo 2.14. Dado a equação polinomial $P(x) = 3x^5 - 50x^4 + 2x - 40 = 0$, determine o intervalo que se encontram as suas possíveis raízes racionais, se existir.

Solução. Devemos determinar as cotas superiores e inferiores das raízes de $P(x)$.

Para L , temos com o auxílio do algoritmo de Briot-Ruffini o seguinte quadro:

| | | | | | | |
|-----|---|-----|----|---|---|-----|
| | 3 | -50 | 0 | 0 | 2 | -40 |
| 1 | 3 | - | | | | |
| ... | | ... | | | | ... |
| 16 | 3 | - | | | | |
| 17 | 3 | 1 | 17 | + | + | + |

Logo, segue que $L = 17$.

Para o cálculo de l , temos que a transformada de $P(x) = 0$ é:

$$P(-x) = 3x^5 + 50x^4 + 2x + 40 = 0.$$

Dessa forma, organizando os dados no dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos o seguinte quadro:

| | | | | | | |
|---|---|----|---|---|---|----|
| | 3 | 50 | 0 | 0 | 2 | 40 |
| 1 | 3 | + | + | + | + | + |

Logo, temos com isso que $l = -1$.

Portanto, temos que o intervalo pedido é: $-1 < x < 17$.

3 REGRAS DE EXCLUSÃO DE NEWTON

Como já visto na Seção 2.5.6, as raízes inteiras de uma equação algébrica $P(x) = 0$ são os divisores do seu termo independente. Além disso, através do Método de Laguerre, tratado na Seção 2.5.7.1, o mesmo permite limitar, ainda mais, o campo de busca das possíveis raízes da equação. No entanto, as cotas podem ser de tal forma que o número de divisores ainda seja relativamente grande. Diante desse fato, serão apresentadas as Regras de Exclusão de Newton que permitem excluir os não divisores de a_0 , portanto improváveis raízes de $P(x) = 0$, compreendidos no intervalo entre l e L .

3.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO

Para [Roxo et al. \(1955\)](#), as Regras de Exclusão de Newton são condições necessárias, mas não suficientes para que um determinado número, compreendido no intervalo entre l e L , seja raiz de $P(x) = 0$. Segundo [Bezerra \(1974\)](#), essas regras de exclusão são também atribuídas ao matemático francês Étienne Bézout (1730 – 1783), ao qual diz que:

Definição 3.1.1. Se um determinado número inteiro α é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros $P(x) = 0$, então:

1. $\alpha - 1$ divide $P(1)$.

2. $\alpha + 1$ divide $P(-1)$.

Para tanto, é importante destacar que é possível que um número α seja de tal forma que $\alpha - 1 \mid P(1)$, $\alpha + 1 \mid P(-1)$ e α , mesmo assim, não ser raiz de $P(x) = 0$. Pois, como dito, essas regras são condições necessárias, mas não suficientes.

3.2 DEMONSTRAÇÃO DAS REGRAS DE EXCLUSÃO DE NEWTON

A seguir, sua demonstração:

Demonstração. Dado um $\alpha \in \mathbb{Z}$, raiz de $P(x) = 0$, tem-se que:

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) \tag{3.1}$$

em que $Q(x)$ é o quociente da divisão de $P(x)$ por $x - \alpha$. Com isso, temos os seguintes casos:

1. Para $x = 1$, em 3.1, temos: $P(1) = (1 - \alpha) \cdot Q(1) \Rightarrow P(1) = -(\alpha - 1) \cdot Q(1)$.
Portanto,

$$\frac{P(1)}{\alpha - 1} = -Q(1).$$

Logo, $\alpha - 1 \mid P(1)$.

2. Para $x = -1$, em 3.1, temos: $P(-1) = (-1 - \alpha) \cdot Q(-1) \Rightarrow P(-1) = -(\alpha + 1) \cdot Q(-1)$.

Portanto,

$$\frac{P(-1)}{\alpha + 1} = -Q(-1).$$

Logo, $\alpha + 1 \mid P(-1)$. ■

Com isso, dado um certo α inteiro que, diminuído de uma unidade, não divide $P(1)$ ou que, aumentado de uma unidade, não divide $P(-1)$, não poderá ser raiz do polinômio $P(x) = 0$.

3.3 APLICAÇÃO DAS REGRAS DE EXCLUSÃO DE NEWTON

A seguir, alguns exemplos de sua aplicação:

Exemplo 3.1. Dada uma equação polinomial $P(x) = 0$, cujo valor numérico para $x = 1$ é 70 e para $x = -1$ é 126, verifique se os inteiros $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ podem ser candidatos a raízes de $P(x)$.

Solução. Temos que $P(1) = 70$ e $P(-1) = 126$. Logo,

- $x = 2 \Rightarrow 2 - 1 = 1 \mid P(1)$ e $2 + 1 = 3 \mid P(-1)$ (2 pode ser raiz).
- $x = 3 \Rightarrow 3 - 1 = 2 \mid P(1)$, mas $3 + 1 = 4 \nmid P(-1)$ (3 não pode ser raiz).
- $x = 4 \Rightarrow 4 - 1 = 3 \nmid P(1)$ (4 não pode ser raiz).
- $x = 5 \Rightarrow 5 - 1 = 4 \nmid P(1)$ (5 não pode ser raiz).
- $x = 6 \Rightarrow 6 - 1 = 5 \mid P(1)$ e $6 + 1 = 7 \mid P(-1)$ (6 pode ser raiz).
- $x = 7 \Rightarrow 7 - 1 = 6 \nmid P(1)$ (7 não pode ser raiz).
- $x = 8 \Rightarrow 8 - 1 = 7 \mid P(1)$ e $8 + 1 = 9 \mid P(-1)$ (8 pode ser raiz).

Portanto, as possíveis raízes inteiros de $P(x) = 0$ são: $\{2, 6, 8\}$.

Exemplo 3.2. Determine as possíveis raízes racionais de $P(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$.

Solução. Como visto na Seção 2.5.6, só poderão ser raízes racionais de $P(x)$ aqueles que pertencem ao conjunto dos divisores de $a_0 = -28$. Logo, são eles: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28\}$.

Buscando delimitar ainda mais o campo de procura das possíveis raízes, através do Método de Laguerre, tratado na Seção 2.5.7.1, buscaremos as cotas inferiores l e superiores L do intervalo onde elas possivelmente se encontram. Logo, temos:

- Com o auxílio do DBF, segue que L :

| | | | | |
|---|---|----|----|-----|
| | 1 | 7 | -4 | -28 |
| 1 | 1 | 8 | 4 | - |
| 2 | 1 | 9 | 14 | 0 |
| 3 | 1 | 10 | 26 | 50 |

Logo, $L = 3$ é cota superior do intervalo que se encontram as supostas raízes de $P(x)$.

- Buscando agora encontrar l , alocando os coeficientes da transformada de $P(x)$ no DBR, temos:

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | -7 | -4 | -28 |
| 1 | -6 | - | | |
| ... | ... | ... | ... | . |
| 7 | 1 | 0 | -4 | |
| 8 | 1 | 1 | 4 | 4 |

Logo, $l = -8$ é cota inferior do intervalo em questão. Com isso, $-8 < x < 3$.

Como $P(1) = -24$ e $P(-1) = -18$, $x = \pm 1$ não são raízes. Logo, com o auxílio das Regras de Exclusão de Newton, verificaremos se os números $\{-7, -4, -2, 2\}$ são candidatos a raiz de $P(x)$. Com isso, segue;

- $x = -7 \Rightarrow -7 - 1 = -8 \mid P(1)$ e $-7 + 1 = -6 \mid P(-1)$ (-7 pode ser raiz).
- $x = -4 \Rightarrow -4 - 1 = -5 \nmid P(1)$ (-4 não pode ser raiz).
- $x = -2 \Rightarrow -2 - 1 = -3 \mid P(1)$ e $-2 + 1 = -1 \mid P(-1)$ (-2 pode ser raiz).
- $x = 2 \Rightarrow 2 - 1 = 1 \mid P(1)$ e $2 + 1 = 3 \mid P(-1)$ (2 pode ser raiz).

Portanto, as possíveis raízes racionais de $P(x) = 0$ são $\{-7, -2, 2\}$.

3.4 AS REGRAS DE EXCLUSÃO DE NEWTON APLICADAS A RAÍZES RACIONAIS DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA DE COEFICIENTES INTEIROS

A seguir, será apresentado uma aplicação das Regras de Exclusão de Newton para as candidatas a raízes racionais de $P(x) = 0$, tratado na Seção 2.5.6. Ou seja, dentro do conjunto das possíveis raízes racionais, da forma $\frac{p}{q}$ (com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$), de uma equação algébrica, é possível apontar se uma das frações pode (ou não) ser uma raiz racional de $P(x) = 0$.

3.4.1 Contextualização e Definição

Segundo Andrade (1989), o seguinte teorema nos permite eliminar muitas das possíveis raízes, sem a necessidade de realizar quase nenhum cálculo, já conhecidos os valores numéricos de $P(\pm 1)$. O teorema diz o seguinte:

Teorema 3.4.1. *Seja $\frac{p}{q}$ uma raiz de $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ onde $p, a_n, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ e $(p, q) = 1$. Então, $(p - \alpha \cdot q) \mid P(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$.*

Em particular, $(p - q) \mid P(1)$ e $(p + q) \mid P(-1)$.

3.4.2 Demonstração

Para a sua demonstração, será necessário a apresentação do Polinômio de Taylor que decorre da fórmula de Taylor.

Segundo Leithold (1994), temos o seguinte teorema que estabelece a fórmula de Taylor:

Teorema 3.4.2. *Seja f uma função tal que f e suas n primeiras derivadas são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$. Além disso, $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo x no intervalo aberto (a, b) . Então, existe um número ϵ no intervalo aberto (a, b) tal que*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!} \cdot (b-a)^{n+1}. \quad (3.2)$$

Se na Equação 3.2, b for substituído por x e a por α , obtém-se a fórmula de Taylor que é

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} \cdot (x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!} \cdot (x-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} \cdot (x-\alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!} \cdot (x-\alpha)^{n+1} \quad (3.3)$$

onde ϵ encontra-se no intervalo (α, x) .

A validade pela qual a Equação 3.3 ocorre é pelo fato de que f e suas n primeiras derivadas dever ser contínuas no intervalo $[\alpha, x]$ e a $(n+1)$ -ésima derivada de f deve existir em todos os pontos do intervalo aberto correspondente. Diante dessas constatações, a Equação 3.3 pode ser escrita como

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (3.4)$$

onde

$$P_n(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} \cdot (x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!} \cdot (x - \alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} \cdot (x - \alpha)^n \quad (3.5)$$

e

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\epsilon)}{(n+1)!} \cdot (x - \alpha)^{n+1} \quad (3.6)$$

onde $\epsilon \in (\alpha, x)$.

O $P_n(x)$ é chamado de polinômio de Taylor de enésimo grau da função f no número α e o $R_n(x)$ é chamado de resto na forma de Lagrange, em homenagem ao matemático francês Joseph L. Lagrange (1736-1813) ([Leithold, 1994](#)).

Consequentemente, com $\partial P_n(x) = n < \partial R_n(x) = n+1$ (ordem da derivada do Resto), tem-se que que

$$R_n(x) = 0.$$

Logo, a Equação 3.4 corresponde a

$$f(x) \equiv P_n(x). \quad (3.7)$$

As palavras de [Andrade \(1989\)](#) traz contribuições bastante elucidativas sobre a demonstração desse teorema, ao qual será então mostrado.

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{Z}$. Pelo Teorema 3.4.2 e a Equação 3.5, existem inteiros β_i ($i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), tais que

$$P(x) = \beta_n \cdot (x - \alpha)^n + \beta_{n-1} \cdot (x - \alpha)^{n-1} + \cdots + \beta_2 \cdot (x - \alpha)^2 + \beta_1 \cdot (x - \alpha) + \beta_0.$$

Cada β_i é o resto da divisão de $P(x)$ por um polinômio $P_i(x)$ de coeficientes inteiros. Tomando $\frac{p}{q}$ como raiz de $P(x)$, temos:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \beta_n \cdot \left(\frac{p}{q} - \alpha\right)^n + \cdots + \beta_1 \cdot \left(\frac{p}{q} - \alpha\right) + \beta_0 = 0.$$

Multiplicando a igualdade acima por (q^n) e isolando $-\beta_0 \cdot q^n$, temos:

$$\beta_n \cdot (p - \alpha q)^n + q \cdot \beta_{n-1} \cdot (p - \alpha q)^{n-1} + \cdots + q^{n-1} \cdot \beta_1 \cdot (p - \alpha q) = -\beta_0 \cdot q^n. \quad (3.8)$$

Observa-se que o primeiro membro desta última equação é um inteiro múltiplo de $(p - \alpha q)$. Logo, $(-\beta_0 \cdot q^n)$ é também múltiplo de $(p - \alpha q)$.

Toma-se $d \in \mathbb{Z}$, tal que $d \mid q$ e $d \mid (p - \alpha q)$. Com isso, tem-se que $d \mid \alpha q$, implicando que $d \mid (\alpha q + (p - \alpha q))$. Ou seja, $d \mid p$.

Dessa forma, tem-se que d é um divisor de p e q . Logo, $d = 1$ ou $d = -1$, já que $(p, q) = 1$. Portanto, $(p - \alpha q, q) = 1$.

De acordo com Hefez (2022), dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \mid b \cdot c$ e $(a, b) = 1$, então $a \mid c$. Aplicando esse fato às n parcelas do primeiro termo da Equação 3.8, tem-se que $(p - \alpha q) \mid \beta_0 \cdot q^n$, o que implica que $(p - \alpha q) \mid \beta_0$; já que os inteiros $(p - \alpha q)$ e q são primos entre si. Ou seja, $(p - \alpha q)$ é um divisor de $P(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$. ■

3.4.3 Aplicação das Regras de Exclusão de Newton em Raízes Racionais

A seguir, será mostrado alguns exemplos de sua aplicação.

Exemplo 3.3. Dada a equação $6x^6 - 7x^5 - 76x^4 + 91x^3 + 190x^2 - 252x + 72 = 0$, verifique quais dos números $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ podem ser suas possíveis raízes racionais.

Solução. Usando as Regras de Exclusão de Newton, temos que para $x = 1$, $P(1) = 24$ e para $x = -1$, $P(-1) = 360$. Com isso, tem-se:

- $x = \frac{3}{2} \Rightarrow 3 - 2 = 1 \mid P(1)$ e $3 + 2 = 5 \mid P(-1)$. $\left(\frac{3}{2} \text{ pode ser raiz}\right)$.
- $x = \frac{4}{3} \Rightarrow 4 - 3 = 1 \mid P(1)$, mas $4 + 3 = 7 \nmid P(-1)$. $\left(\frac{4}{3} \text{ não pode ser raiz}\right)$.
- $x = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 - 3 = -1 \mid P(1)$ e $2 + 3 = 5 \mid P(-1)$. $\left(\frac{2}{3} \text{ pode ser raiz}\right)$.
- $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2 = -1 \mid P(1)$ e $1 + 2 = 3 \mid P(-1)$. $\left(\frac{1}{2} \text{ pode ser raiz}\right)$.
- $x = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - 3 = -2 \mid P(1)$ e $1 + 3 = 4 \mid P(-1)$. $\left(\frac{1}{3} \text{ pode ser raiz}\right)$.
- $x = \frac{1}{6} \Rightarrow 1 - 6 = -5 \nmid P(1)$. $\left(\frac{1}{6} \text{ não pode ser raiz}\right)$.

Portanto, as possíveis raízes da equação são $\left\{\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$.

Exemplo 3.4. Considere a equação $6x^4 - 7x^3 - 37x^2 + 8x + 12$. Apresente os números racionais com potencial de ser suas possíveis raízes.

Solução. Inicialmente, vamos determinar as possíveis raízes racionais da equação usando o Teorema das Raízes Racionais, tratado na Seção 2.5.6. Para isso, temos que os divisores de $a_0 = 12$ são $d(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ e os divisores de $a_n = 6$ são $d(6) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Logo, as possíveis raízes racionais da equação são: $\left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}, \pm 6, \pm 12\right\}$.

Para reduzir o campo de procura das possíveis raízes, utilizaremos o Método de Laguerre, tratado na Seção 2.5.7.1, para definir as cotas inferiores l e superiores L do intervalo onde as raízes candidatas se encontram. Para L , com a ajuda do DBR, temos:

| | | | | | |
|---|---|----|-----|---|----|
| | 6 | -7 | -37 | 8 | 12 |
| 1 | 6 | -1 | | | |
| 2 | 6 | 5 | -27 | | . |
| 3 | 6 | 11 | -4 | | |
| 4 | 6 | 17 | 31 | + | + |

Logo, $L = 4$.

Buscando l , temos no DBF os coeficientes da transformada da equação em questão:

| | | | | | |
|---|---|----|-----|----|----|
| | 6 | 7 | -37 | -8 | 12 |
| 1 | 6 | 13 | -24 | | |
| 2 | 6 | 19 | 1 | -5 | . |
| 3 | 6 | 25 | 38 | + | + |

Logo, $l = -3$. Portanto, $-3 < x < 4$.

Usando agora as Regras de Exclusão de Newton para limitar ainda mais o conjunto das possíveis raízes, temos que $P(1) = -18$ e $P(-1) = -20$. Portanto, $\{\pm 1\}$ não é raiz. Logo, para os demais candidatos, temos:

- $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2 = -1 \mid P(1)$, mas $1 + 2 = 3 \nmid P(-1) \left(\frac{1}{2} \text{ não pode ser raiz}\right)$.

- $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow -1 - 2 = -3 \mid P(1)$ e $-1 + 2 = 1 \mid P(-1) \left(-\frac{1}{2} \text{ pode ser raiz} \right)$.
- $x = \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - 3 = -2 \mid P(1)$ e $1 + 3 = 4 \mid P(-1) \left(\frac{1}{3} \text{ pode ser raiz} \right)$.
- $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow -1 - 3 = -4 \nmid P(1) \left(-\frac{1}{3} \text{ não pode ser raiz} \right)$.
- $x = \frac{1}{6} \Rightarrow 1 - 6 = -5 \nmid P(1) \left(\frac{1}{6} \text{ não pode ser raiz} \right)$.
- $x = -\frac{1}{6} \Rightarrow -1 - 6 = -7 \nmid P(1) \left(-\frac{1}{6} \text{ não pode ser raiz} \right)$.
- $x = 2 \Rightarrow 2 - 1 = 1 \mid P(1)$, mas $2 + 1 = 3 \nmid P(-1)(2 \text{ não pode ser raiz})$.
- $x = -2 \Rightarrow -2 - 1 = -3 \mid P(1)$ e $-2 + 1 = -1 \mid P(-1)(-2 \text{ pode ser raiz})$.
- $x = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 - 3 = -1 \mid P(1)$ e $2 + 3 = 5 \mid P(-1) \left(\frac{2}{3} \text{ pode ser raiz} \right)$.
- $x = -\frac{2}{3} \Rightarrow -2 - 3 = -5 \nmid P(1) \left(-\frac{2}{3} \text{ não pode ser raiz} \right)$.
- $x = 3 \Rightarrow 3 - 1 = 2 \mid P(1)$ e $3 + 1 = 4 \mid P(-1)(3 \text{ pode ser raiz})$.
- $x = \frac{3}{2} \Rightarrow 3 - 2 = 1 \mid P(1)$ e $3 + 2 = 5 \mid P(-1) \left(\frac{3}{2} \text{ pode ser raiz} \right)$.
- $x = -\frac{3}{2} \Rightarrow -3 - 2 = -5 \nmid P(1) \left(-\frac{3}{2} \text{ não pode ser raiz} \right)$.
- $x = \frac{4}{3} \Rightarrow 4 - 3 = 1 \mid P(1)$, mas $4 + 3 = 7 \nmid P(-1) \left(\frac{4}{3} \text{ não pode ser raiz} \right)$.
- $x = -\frac{4}{3} \Rightarrow -4 - 3 = -7 \nmid P(1) \left(-\frac{4}{3} \text{ não pode ser raiz} \right)$.

Portanto, temos que as possíveis raízes racionais do polinômio em questão são $\left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -2, \frac{2}{3}, 3, \frac{3}{2} \right\}$.

4 O ALGORITMO DE PELETARIUS

De acordo com [Roxo et al. \(1955\)](#), não há regra geral para investigar as raízes inteiras de uma equação algébrica de coeficientes inteiros, como a Equação 4.1. Para tal fim, será sempre possível, mediante certo número de tentativas sistemáticas, calcular tais raízes. Para [Bezerra \(1974\)](#), dada uma tal equação, podemos usar o Algoritmo de Peletarius para verificar se um dos divisores d do termo independente é realmente raiz de $P(x) = 0$.

4.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO

Como já discutido, de acordo com a pesquisa realizada, a bibliografia que aborda essa técnica é bastante limitada. As referências as quais se teve acesso sobre o algoritmo de Peletarius, não trazem uma definição precisa sobre o mesmo. Apenas relatam a sua aplicação, através da demonstração do algoritmo, seguido de alguns exemplos práticos.

Visando suprir essa lacuna, buscou-se então elaborar uma proposição que caracterizasse o algoritmo de Peletarius, ao qual se segue:

Proposição 4.1.1. *Dado o polinômio de coeficientes inteiros*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (4.1)$$

e um certo polinômio $Q(x)$ de coeficientes reais, com $\partial Q(x) = n - 1$, e um dado $d \in \mathbb{Z}$. Se todos os casos a seguir ocorrerem:

1. *o número d for divisor do coeficiente a_0 de $P(x)$ ($d | a_0$);*
2. *os coeficientes b_i de $Q(x)$ (com $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$) forem inteiros ($b_i \in \mathbb{Z}$) e*
3. *os coeficientes dominantes de $P(x)$ e $Q(x)$ forem iguais ($a_n = b_{n-1}$),*

então $P(x)$ pode ser representado de modo fatorado da forma

$$P(x) = (x - d) \cdot Q(x). \quad (4.2)$$

Ou seja, o inteiro d será uma raiz de $P(x)$.

A seguir será dada uma demonstração do algoritmo desenvolvido por Jaques Peletier (Peletarius) e alguns exemplos práticos de sua aplicação.

4.2 DEMONSTRAÇÃO DO ALGORITMO DE PELETARIUS

Demonstração. Considere um certo polinômio $P(x)$ de coeficientes inteiros e um número inteiro d sendo uma de suas raízes. Pelo Teorema de D'Alembert tratado na Seção 2.4.5.3, d será raiz de $P(x)$, conforme Equação 4.1, se, e somente se, existir um certo polinômio de coeficientes reais

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0, \quad (4.3)$$

tal que

$$P(x) = (x - d) \cdot Q(x). \quad (4.4)$$

Substituindo a Equação 4.3 na Equação 4.4, temos

$$P(x) = (x - d) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0). \quad (4.5)$$

Desenvolvendo o produto da Equação 4.5 e agrupando os termos semelhantes, temos

$$P(x) = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - db_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - db_{n-2})x^{n-2} + \cdots + (b_1 - db_2)x^2 + (b_0 - db_1)x - db_0. \quad (4.6)$$

Pela identidade de polinômios, tratado na Seção 2.3.4, e comparando os coeficientes de $P(x)$ nas Equações 4.1 e 4.6, temos as seguinte igualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - d \cdot b_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - d \cdot b_{n-2} \\ \vdots \\ a_2 = b_1 - d \cdot b_2 \\ a_1 = b_0 - d \cdot b_1 \\ a_0 = -d \cdot b_0 \end{array} \right. . \quad (4.7)$$

Isolando os coeficientes de $Q(x)$, temos agora que:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + d \cdot b_{n-1} \\ b_{n-3} = a_{n-2} + d \cdot b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 = a_2 + d \cdot b_2 \\ b_0 = a_1 + d \cdot b_1 \\ b_0 = -\frac{a_0}{d} \end{array} \right. . \quad (4.8)$$

Observa-se de 4.7 que toda raiz inteira d de $P(x)$ é necessariamente um divisor de a_0 . Esse fato se comprova ao ler 4.8 de cima para baixo onde $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3}, \dots, b_2, b_1, b_0$ são números inteiros, já que são resultados de operações com inteiros. Logo, $d | a_0$.

Diante do exposto, o Algoritmo de Peletarius trata exatamente da questão inversa. Ou seja, se um dado d inteiro e divisor de a_0 é ou não uma raiz de $P(x)$.

Por fim, isolando os coeficientes de $Q(x)$ em função de d , temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-1} = \frac{b_{n-2} - a_{n-1}}{d} \\ b_{n-2} = \frac{b_{n-3} - a_{n-2}}{d} \\ \vdots \\ b_2 = \frac{b_1 - a_2}{d} \\ b_1 = \frac{b_0 - a_1}{d} \\ b_0 = \frac{-a_0}{d} \end{array} \right. . \quad (4.9)$$

Como todos os coeficientes de $P(x)$ são inteiros e observando as últimas igualdades de 4.9, de cima para baixo, é fato que $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2, b_1, b_0$ são inteiros e que, consequentemente, $d | a_0$.

Essa primeira observação mostra que, em particular, se $P(x)$ tiver uma raiz inteira, então todos os coeficientes de $Q(x)$ são também números inteiros. Consequentemente, se em algum momento da execução do algoritmo deparar-se com um certo b_k (com $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) que não seja inteiro, pode-se concluir que d não é raiz de $P(x)$.

Uma segunda observação é que se mesmo todos os coeficientes de $Q(x)$ forem inteiros, mas se o seu coeficiente líder for diferente do de $P(x)$, ou seja, $a_n \neq b_{n-1}$, ainda pode-se concluir que d não é raiz de $P(x)$.

Por fim, pode-se afirmar que se $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2, b_1, b_0$ forem todos inteiros e $a_n = b_{n-1}$, então d é uma raiz de $P(x)$. ■

4.3 DISPOSITIVO PRÁTICO DO ALGORITMO DE PELETARIUS

A seguir, será apresentado um dispositivo prático, bastante similar ao de Briot-Ruffini, ao qual facilita por demais a aplicação do algoritmo de Peletarius.

Seja d um divisor do termo independente de um Polinômio $P(x)$. Ou seja, $d | a_0$. Inicialmente, para tal verificação prática, dispõe-se os coeficientes inteiros de $P(x)$ e d

num quadro de formato semelhante ao utilizado no dispositivo de Briot-Ruffini, em que $b_0 = \frac{-a_0}{d}$, conforme quadro da Figura 7.

Figura 7 – Alocação do termo b_0 de $Q(x)$ no dispositivo do Algoritmo de Peletarius

| | | | | | | | |
|-------|-----------|-----------|----------|-------|-------|-------------------------------|-----|
| a_n | a_{n-1} | a_{n-2} | \cdots | a_2 | a_1 | a_0 | x |
| | | | | b_0 | | | d |
| | | | | | | $\underbrace{\frac{-a_0}{d}}$ | |

Fonte: Adaptado de [Bezerra \(1974\)](#).

Em seguida, inicia-se o processo de completamento do quadro calculando, de modo sequencial, os inteiros $b_1 = \frac{b_0 - a_1}{d}$, $b_2 = \frac{b_1 - a_2}{d}$, \dots , $b_{n-2} = \frac{b_{n-3} - a_{n-2}}{d}$, $b_{n-1} = \frac{b_{n-2} - a_{n-1}}{d}$. Se no processo em questão surgir algum b_k ($k \in \mathbb{N} \cup 0$) que não seja inteiro, então d não é raiz de $P(x)$. Além disso, mesmo que todos os b_k sejam inteiros e os coeficientes líderes de $P(x)$ e $Q(x)$ sejam diferentes, d continua não sendo raiz de $P(x)$. Caso isso não ocorra, encontra-se, então, os inteiros acima mencionados, dispostos no quadro conforme Figura 8.

Figura 8 – Alocação dos b_k termos de $Q(x)$ no dispositivo do Algoritmo de Peletarius.

| | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------|-----------|----------|-----------------------|-----------------------|-------------------------------|-----|
| a_n | a_{n-1} | a_{n-2} | \cdots | a_2 | a_1 | a_0 | x |
| | b_{n-1} | b_{n-2} | | b_2 | b_1 | b_0 | d |
| | | | | | | $\underbrace{\frac{-a_0}{d}}$ | |
| $a_n = \frac{b_{n-2} - a_{n-1}}{d}$ | $\frac{b_{n-3} - a_{n-2}}{d}$ | | | $\frac{b_1 - a_2}{d}$ | $\frac{b_0 - a_1}{d}$ | | |

Fonte: Adaptado de [Bezerra \(1974\)](#).

Para [Bezerra \(1974\)](#), o Algoritmo de Peletarius apresenta a grande vantagem de abandonar o processo do divisor d , caso encontre uma divisão inexata. Além disso, assim como o dispositivo de Briot-Ruffini, encontrada uma raiz, o processo pode ser continuado para os outros divisores com os coeficientes do quociente obtido.

4.4 APLICAÇÃO DO ALGORITMO DE PELETARIUS

Para tais aplicações práticas do uso do Algoritmo de Peletarius, serão usadas expressões polinomiais de coeficientes inteiros, definições, conceitos e técnicas de operações com polinômios vistos nos capítulos anteriores.

Exemplo 4.1. Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, determine as suas raízes

inteiras, se existir.

Solução. Temos que o $\partial P(x) = 3$ (possui três raízes) e os seus coeficientes são $a_3 = 1$, $a_2 = -6$, $a_1 = 11$ e $a_0 = -6$. Observa-se que $P(1) = 0$. Logo, a primeira raiz de $P(x)$ é $x_1 = 1$. Como $P(x) = Q(x) \cdot (x - 1)$; onde $Q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$, podemos usar o algoritmo de Peletarius para encontrar as outras duas raízes x_2 e x_3 de $P(x)$ que também são as raízes de $Q(x)$.

Organizando os coeficientes de $Q(x)$ no quadro de divisão, temos:

$$\begin{array}{r} 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & & & x \\ & & & | \\ & & & 1 \end{array} .$$

Buscando os demais coeficientes de $Q(x)$, temos:

$$b_0 = \frac{-(-6)}{1} = 6 \in \mathbb{Z}, b_1 = \frac{6 - 11}{1} = -5 \in \mathbb{Z} \text{ e } b_2 = \frac{-5 - (-6)}{1} = 1 = a_3.$$

Logo, completando o quadro, temos que:

$$\begin{array}{r} 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline 1 & -5 & 6 & | \\ & & & 1 \end{array} .$$

Portanto, segue que o quociente é $Q(x) = x^2 - 5x + 6$. Para encontrar as demais raízes, podemos utilizar os métodos tratados na Seção 2.5.2 para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau. No caso específico de $Q(x) = 0$, podemos usar a fórmula resolutiva para uma equação do segundo grau, onde

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}, \quad \text{onde} \quad \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Tem-se que os coeficientes de $Q(x)$ são $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$. Substituindo os devidos valores na expressão, temos:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{array} \right..$$

Portanto as raízes de $P(x)$ são $\{1, 2, 3\}$ e pelo TFA, tratado na Seção 2.5.4, sua forma fatorada é

$$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3).$$

Exemplo 4.2. Considere o polinômio $P(x) = x^4 - 20x^2 + 64$. Quais as suas possíveis raízes inteiras, se houver?

Solução. Temos que os coeficientes de $P(x)$ são $a_4 = 1$, $a_3 = 0$, $a_2 = -20$, $a_1 = 0$ e $a_0 = 64$ e $\partial P(x) = 4$. Portanto, $P(x)$ possui quatro raízes. Pelo Teorema das Raízes Racionais, tratado na Seção 2.5.6, se $P(x)$ possuir raízes racionais, elas pertencerão ao conjunto dos divisores de 64, já que $a_4 = 1$. Portanto, as possíveis raízes são: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64\}$.

Observa-se que $P(\pm 1) \neq 0$. Logo, utilizando o algoritmo de Peletarius, testaremos os demais candidatos a raiz. Começando o teste com $x = 2$, faremos a divisão de $P(x)$ por $x - 2$ e, caso seja, encontraremos que $P(x) = Q(x) \cdot (x - 2)$, onde $Q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$.

Montando o quadro com os coeficientes de $P(x)$, temos:

$$\begin{array}{r|ccccc} 1 & 0 & -20 & 0 & 64 & x \\ \hline & & & & & 2 \end{array}.$$

Executando o algoritmo e completando o quadro, tem-se que:

$$b_0 = \frac{-64}{2} = -32 \in \mathbb{Z}, b_1 = \frac{-32 - 0}{2} = -16 \in \mathbb{Z}, b_2 = \frac{-16 - (-20)}{2} = 2 \in \mathbb{Z} \text{ e}$$

$$b_3 = \frac{2 - 0}{2} = 1 = a_4.$$

Logo,

$$\begin{array}{r|ccccc} 1 & 0 & -20 & 0 & 64 & x \\ \hline 1 & 2 & -16 & -32 & & 2 \end{array}.$$

Portanto, segue que $x_1 = 2$ é raiz de $P(x)$ e que o quociente corresponde a $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 16x - 32$.

O algoritmo permite também que o processo seja continuado em busca das demais raízes de $P(x)$ através do polinômio quociente $Q(x)$. Vejamos que, tomando o polinômio $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 16x - 32$, vamos analisar agora se $x = -2$, também é uma das raízes de $P(x)$. Logo, caso seja, temos que $Q(x) = S(x) \cdot (x + 2)$, em que $S(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$. Com isso, continuando com o quadro, temos:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -20 & 0 & 64 & x \\ \hline 1 & 2 & -16 & -32 & 2 \\ \hline & & & & -2 \end{array} .$$

Executando o algoritmo e completando o quadro, temos:

$$c_0 = \frac{-(-32)}{-2} = -16 \in \mathbb{Z}, c_1 = \frac{-16 - (-16)}{-2} = 0 \in \mathbb{Z} \text{ e } c_2 = \frac{0 - 2}{-2} = 1 = b_3.$$

Com isso, completando o quadro, encontramos:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -20 & 0 & 64 & x \\ \hline 1 & 2 & -16 & -32 & 2 \\ \hline 1 & 0 & -16 & -2 \end{array} .$$

Portanto, segue $x_2 = 2$ é raiz de $Q(x)$ e, consequentemente, é também raiz de $P(x)$ e que o quociente corresponde a $S(x) = x^2 - 16 = 0$. Nesse caso, as outras duas raízes de $P(x)$ podem ser encontradas usando métodos algébricos práticos para a busca das raízes de uma equação quadrática quando a mesma é da forma $ax^2 + c = 0$. Especificamente para $S(x) = 0$, temos:

$$S(x) = x^2 - 16 = 0 \iff x^2 = 16 \iff x = \pm\sqrt{16} \iff x = \pm 4.$$

Logo, $x_3 = 4$ e $x_4 = -4$. Por fim, temos que o conjunto solução de $P(x)$ é: $\{\pm 2, \pm 4\}$. E, pelo TFA, sua forma decomposta ou fatorada é

$$P(x) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 4) \cdot (x + 4).$$

Exemplo 4.3. Considere o polinômio $P(x) = x^7 - 3x^6 - 29x^5 + 75x^4 + 280x^3 - 612x^2 - 864x^2 + 1728$. Se existir, quais as suas raízes inteiras?

Solução. Temos que $\partial P(x) = 7$. Portanto, o polinômio possui sete raízes em \mathbb{C} . Sabe-se que nenhuma dessas raízes é racional não inteira, dado que $P(x)$ é unitário ($a_7 = 1$). Portanto, de acordo com o Teorema das Raízes Racionais, suas possíveis raízes racionais são os divisores de $a_0 = 1728$, que são: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 16, \pm 18, \pm 24, \pm 27, \pm 32, \pm 36, \pm 48, \pm 54, \pm 64, \pm 72, \pm 96, \pm 108, \pm 144, \pm 192, \pm 216, \pm 288, \pm 432, \pm 576, \pm 864, \pm 1728\}$.

Como a quantidade de possíveis raízes é relativamente grande, iremos usar o Método de Laguerre, tratado na Seção 2.5.7.1, para diminuir o intervalo de busca. Para isso, montando o quadro com o DBR para encontrar L , temos:

| | | | | | | | | | |
|---|---|----|-----|-----|------|------|------|------|--|
| | 1 | -3 | -29 | 75 | 280 | -612 | -864 | 1728 | |
| 1 | 1 | - | | | | | | | |
| 2 | 1 | - | | | | | | | |
| 3 | 1 | 0 | - | | | | | | |
| : | : | : | : | | | | | | |
| 7 | 1 | 4 | - | | | | | | |
| 8 | 1 | 5 | 11 | 163 | 1584 | + | + | + | |

Portanto, temos que $L = 8$ é cota superior do intervalo ao qual se encontram as possíveis raízes de $P(x)$.

De modo análogo, buscando encontrar a cota inferior l , temos que a transformada de $P(x) = 0$ é $P(-x) = x^7 + 3x^6 - 29x^5 - 75x^4 + 280x^3 + 612x^2 - 864x - 1728 = 0$. Alocando os seus coeficientes no DBR, temos:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|-----|-----|-----|-----|------|-------|--|
| | 1 | 3 | -29 | -75 | 280 | 612 | -864 | -1728 | |
| 1 | 4 | - | | | | | | | |
| : | : | : | | | | | | | |
| 4 | 1 | 7 | - | | | | | | |
| 5 | 1 | 8 | 11 | - | | | | | |
| 6 | 1 | 9 | 25 | 75 | 730 | + | + | + | |

Logo, $l = -6$ é cota inferior do referido intervalo. Portanto, as possíveis raízes de $P(x)$ encontra-se em $(-6, 8)$.

Com isso, o conjunto solução, contendo as possíveis raízes racionais de $P(x)$, reduz-se a $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 6\}$.

Buscando agora as verdadeiras raízes de $P(x)$, observa-se que $P(\pm 1) \neq 0$. Logo, $x = \pm 1$ não são raízes. Testando agora para as demais possíveis raízes, utilizaremos o quadro com o algoritmo de Peletarius para, inicialmente, testar se $x = \pm 2$ é raiz de $P(x)$. Portanto, temos:

| | | | | | | | | |
|----------------|-----|-----|----|-----|------|------|------|-----|
| 1 | -3 | -29 | 75 | 280 | -612 | -864 | 1728 | x |
| $\frac{11}{2}$ | -14 | -1 | 77 | 126 | -864 | 864 | | -2 |
| 1 | -1 | -31 | 13 | 306 | 0 | -864 | | 2 |

Como $P(-2) \neq 0$, então $\{-2\}$ não é raiz de $P(x)$. Como todos os requisitos para $x = 2$ foram atendidos, temos $P(2) = 0$. Vamos realizar o processo novamente para

$x = 2$ com o intuito de buscar supostas raízes idênticas ou múltiplas (multiplicidade), conforme tratado na Seção 2.5.4.2. Observa-se que o processo pode ser realizado sobre o polinômio quociente $Q(x) = x^6 - x^5 - 31x^4 + 13x^3 + 306x^2 - 864$. Portanto, continuando o processo, temos:

| | | | | | | | | |
|----------------|-----|-----|-----|-----|------|------|------|-----|
| 1 | -3 | -29 | 75 | 280 | -612 | -864 | 1728 | x |
| $\frac{11}{2}$ | -14 | -1 | 77 | 126 | -864 | 864 | | -2 |
| 1 | -1 | -31 | 13 | 306 | 0 | -864 | | 2 |
| 1 | 1 | -29 | -45 | 216 | 432 | | | 2 |

Conforme quadro acima, para $x = 2$, temos que $Q(2) = 0$. Logo, podemos até o momento dizer que $x = 2$ é raiz de multiplicidade 2 de $P(x)$. Realizando o processo mais uma vez para $x = 2$ sobre o último polinômio $S(x) = x^5 + x^4 - 29x^3 - 45x^2 + 216x + 432$, testaremos se $\{2\}$ é raiz de multiplicidade 3 de $P(x)$. Para isso, temos:

| | | | | | | | | |
|----------------|-----|-----|-----|------------------|------|------|------|-----|
| 1 | -3 | -29 | 75 | 280 | -612 | -864 | 1728 | x |
| $\frac{11}{2}$ | -14 | -1 | 77 | 126 | -864 | 864 | | -2 |
| 1 | -1 | -31 | 13 | 306 | 0 | -864 | | 2 |
| 1 | 1 | -29 | -45 | 216 | 432 | | | 2 |
| | | | | $-\frac{171}{2}$ | -216 | -216 | | 2 |

Como o quociente $-\frac{171}{2} \notin \mathbb{Z}$, temos que $S(2) \neq 0$. Portanto, segue que $\{2\}$ não é raiz de multiplicidade 3 de $P(x)$. Logo, temos então as duas primeiras raízes de $P(x)$, $x_1 = x_2 = 2$.

Vamos agora testar para $x = \pm 3$. Continuando o quadro, temos:

| | | | | | | | | |
|----------------|-----|-----|-----|------------------|------|------|------|-----|
| 1 | -3 | -29 | 75 | 280 | -612 | -864 | 1728 | x |
| $\frac{11}{2}$ | -14 | -1 | 77 | 126 | -864 | 864 | | -2 |
| 1 | -1 | -31 | 13 | 306 | 0 | -864 | | 2 |
| 1 | 1 | -29 | -45 | 216 | 432 | | | 2 |
| | | | | $-\frac{171}{2}$ | -216 | -216 | | 2 |
| | | | | $\frac{4}{3}$ | -25 | -120 | -144 | 3 |
| 1 | -2 | -23 | 24 | 144 | | | | -3 |

Como para $x = 3$ o último quociente corresponde a $\frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$, temos que $S(3) \neq 0$ e, com isso, não é raiz de $P(x)$. Em sequência, observa-se que para $x = -3$, $S(-3) = 0$. Portanto, $\{-3\}$ também é raiz de $P(x)$. Buscando agora averiguar se $x = -3$ é raiz

múltipla de $P(x)$, vamos realizar o processo mais uma vez sobre o último polinômio quociente $T(x) = x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144$. Logo, usando o quadro, temos:

| | | | | | | | | |
|----------------|-----|-----|------------------|------|------|------|------|-----|
| 1 | -3 | -29 | 75 | 280 | -612 | -864 | 1728 | x |
| $\frac{11}{2}$ | -14 | -1 | 77 | 126 | -864 | 864 | | -2 |
| 1 | -1 | -31 | 13 | 306 | 0 | -864 | | 2 |
| 1 | 1 | -29 | -45 | 216 | 432 | | | 2 |
| | | | $-\frac{171}{2}$ | -216 | -216 | | | 2 |
| | | | $\frac{4}{3}$ | -25 | -120 | -144 | | 3 |
| 1 | -2 | -23 | 24 | 144 | | | | -3 |
| | | | 1 | -5 | -8 | 48 | | -3 |
| | | | | | | | | |

Observa-se também que para $x = -3$, $T(-3) = 0$. Portanto, $\{-3\}$ é raiz de multiplicidade 2 de $P(x)$. Aplicando mais uma vez o algoritmo de Peletarius no polinômio quociente $V(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48$ para $x = -3$, temos o seguinte:

| | | | | | | | | |
|----------------|-----|-----|------------------|------|------|------|------|-----|
| 1 | -3 | -29 | 75 | 280 | -612 | -864 | 1728 | x |
| $\frac{11}{2}$ | -14 | -1 | 77 | 126 | -864 | 864 | | -2 |
| 1 | -1 | -31 | 13 | 306 | 0 | -864 | | 2 |
| 1 | 1 | -29 | -45 | 216 | 432 | | | 2 |
| | | | $-\frac{171}{2}$ | -216 | -216 | | | 2 |
| | | | $\frac{4}{3}$ | -25 | -120 | -144 | | 3 |
| 1 | -2 | -23 | 24 | 144 | | | | -3 |
| | | | 1 | -5 | -8 | 48 | | -3 |
| | | | | | | | | |

Logo, $V(-3) = 0$. Portanto, como verificado, $\{-3\}$ é raiz de multiplicidade 3 de $P(x)$ e com isso, temos $x_3 = x_4 = x_5 = -3$.

Por fim, tem-se o polinômio de 2 grau $Z(x) = x^2 - 8x + 16$, onde podemos aplicar umas das formas de encontrar as suas raízes, tratadas no Capítulo 2.5. Usando, por exemplo, as Relações de Girard, tratadas na Seção 2.5.5, temos que:

$$x_6 + x_7 = -\frac{-8}{1} = 8$$

$$x_6 \cdot x_7 = \frac{16}{1} = 16.$$

Observa-se que os únicos pares que atendem aos requisitos são $x_6 = 4$ e $x_7 = 4$. Com isso, temos $Z(4) = 0$ e, com isso, $\{4\}$ é raiz de multiplicidade 2 de $P(x)$. Logo,

temos que $x_6 = x_7 = 4$. Portanto, em função do $\partial P(x)$, temos todas as suas raízes e podemos reescrever o polinômio na seguinte forma fatorada:

$$P(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 3)^3 \cdot (x - 4)^2.$$

4.5 O ALGORITMO DE PELETARIUS PARA RAÍZES RACIONAIS

4.5.1 Contextualização

No decorrer da elaboração do presente trabalho, após determinar um certo conjunto $\Omega \in \mathbb{Q}$, onde esse contém as possíveis raízes racionais α_i ($i \in \mathbb{N}$) de um dado polinômio de coeficientes inteiros, através do Teorema das Raízes Racionais, surgiu a necessidade de averiguar se algum dos $\alpha_i \in \{\Omega - \mathbb{Z}\}$ eram, efetivamente, raízes de $P(x) = 0$. Após terem atendidos os critérios estabelecidos pelas Regras de Exclusão de Newton, o uso do Dispositivo de Briot-Ruffini é um dos métodos utilizados para tal verificação, como visto na Seção 2.4.5.5. No entanto, como a proposta do trabalho em questão versa sobre o algoritmo de Peletarius, surgiu a necessidade de investigar se o método desenvolvido por Peletier poderia ser aplicado à racionais não inteiros.

Como já tratado, a literatura acerca do assunto já é bastante escassa no que se refere ao método aplicado apenas aos inteiros. Na pesquisa realizada, não foi encontrado nenhum registro sobre o uso do Algoritmo de Peletarius para raízes racionais não inteiros. No entanto, buscando a possibilidade de sua aplicação à esse subconjunto de racionais, será aqui apresentada uma definição desse algoritmo, seguida de sua proposição e demonstração, de autoria própria, para raízes racionais não inteiros. Além disso, será apresentado também um dispositivo prático que torna o método bastante simples, análogo ao empregado aos inteiros e, em seguida, alguns exemplos práticos de sua aplicação.

4.5.2 Extensão do Algoritmo de Peletarius

O Algoritmo de Peletarius permite também verificar se um certo número racional não inteiro é uma raiz de um polinômio $P(x) = 0$. Ou seja, se um certo $x = \frac{d}{c}$ for raiz de $P(x)$, então $P\left(\frac{d}{c}\right) = 0$.

Proposição 4.5.1. *Dado o polinômio de coeficientes inteiros*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (4.10)$$

e um certo polinômio $Q(x)$ de coeficientes reais, com $\partial Q(x) = n - 1$, e um dado $\frac{d}{c} \in \mathbb{Q}$, com $d \in \mathbb{Z}$ e $c \in \mathbb{Z}^$ e $\text{mdc}(c, d) = 1$. Se todos os casos a seguir ocorrerem:*

1. os inteiros d e c forem divisores dos coeficientes a_0 e a_n de $P(x)$, respectivamente ($d \mid a_0$ e $c \mid a_n$);
2. os coeficientes b_i de $Q(x)$ (com $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$) forem inteiros ($b_i \in \mathbb{Z}$) e
3. os coeficientes dominantes de $P(x)$ e $Q(x)$ obedecerem a relação: $b_{n-1} = \frac{a_n}{c}$,

então $P(x)$ pode ser representado de modo fatorado da forma

$$P(x) = (c \cdot x - d) \cdot Q(x). \quad (4.11)$$

Ou seja, o racional $\frac{d}{c}$ será uma raiz de $P(x)$.

A seguir, será apresentada a sua demonstração e alguns exemplos práticos de sua aplicação.

4.5.3 Demonstração do Algoritmo de Peletarius para Raízes Racionais

Demonstração. Considere o polinômio $P(x)$ de coeficientes inteiros, conforme Equação 4.10 e o polinômio

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0, \quad (4.12)$$

de coeficientes reais.

Considere também um certo binômio não unitário

$$G(x) = c \cdot x - d \quad (4.13)$$

com coeficiente líder e termo independente c e d , respectivamente, inteiros. Tome que $P(x)$ pode ser reescrito em função de $G(x)$ e $Q(x)$, conforme

$$P(x) = G(x) \cdot Q(x) = 0. \quad (4.14)$$

Com isso, substituindo as Equações 4.13 e 4.12 na Equação 4.14, temos que

$$P(x) = (c \cdot x - d) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_2x^2 + b_1x + b_0) = 0. \quad (4.15)$$

Desenvolvendo o produto da Equação 4.15, temos que

$$P(x) = cb_{n-1}x^n - db_{n-1}x^{n-1} + cb_{n-2}x^{n-1} - \dots - db_2x^2 + cb_1x^2 - db_1x + cb_0x - db_0 = 0. \quad (4.16)$$

Agrupando os termos semelhantes da última igualdade, temos

$$P(x) = cb_{n-1}x^n + (cb_{n-2} - db_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (cb_1 - db_2)x^2 + (cb_0 - db_1)x - db_0 = 0. \quad (4.17)$$

Pela identidade de Polinômios, comparando as Equações 4.10 e 4.17, temos as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = c \cdot b_{n-1} \\ a_{n-1} = c \cdot b_{n-2} - d \cdot b_{n-1} \\ a_{n-2} = c \cdot b_{n-3} - d \cdot b_{n-2} \\ \vdots \\ a_2 = c \cdot b_1 - d \cdot b_2 \\ a_1 = c \cdot b_0 - d \cdot b_1 \\ a_0 = -d \cdot b_0 \end{array} \right. . \quad (4.18)$$

Isolando os coeficientes de $Q(x)$, temos o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{n-1} = \frac{a_n}{c} \\ b_{n-1} = \frac{c \cdot b_{n-2} - a_{n-1}}{d} \\ b_{n-2} = \frac{c \cdot b_{n-3} - a_{n-2}}{d} \\ \vdots \\ b_2 = \frac{c \cdot b_1 - a_2}{d} \\ b_1 = \frac{c \cdot b_0 - a_1}{d} \\ b_0 = -\frac{a_0}{d} \end{array} \right. . \quad (4.19)$$

De 4.18 observa-se que o termo independente d de $G(x)$ é necessariamente um divisor de a_0 , assim como o coeficiente líder c é de a_n . Portanto, como já tratado na Seção 4.2, temos que, por definição, necessariamente $b_i \in \mathbb{Z}$. Com isso, se em qualquer uma das operações em 4.19 surgir algum $b_i \notin \mathbb{Z}$ (com $i = 0, 1, 2, 3, \dots$), pode-se concluir que $P\left(\frac{d}{c}\right) \neq 0$. Ou seja, $x = \frac{d}{c}$ não é raiz de $P(x)$.

Se mesmo que todos os coeficientes b_i de $Q(x)$ forem inteiros, mas se o seu coeficiente líder for diferente de $\frac{a_n}{c}$, ou seja, $c \cdot b_{n-1} \neq a_n$, ainda pode-se concluir que $\frac{d}{c}$ não é raiz de $P(x)$. ■

Portanto, ficando então demonstrado o Algoritmo de Peletarius, aplicado a Raízes Racionais.

4.5.4 Dispositivo prático do Algoritmo de Peletarius para Raízes Racionais

A seguir, será ilustrado um dispositivo prático de execução desse método para raízes racionais, similar ao utilizado para raízes inteiras.

Para tal, seja $\frac{d}{c}$, $(c, d) = 1$, uma suposta raiz de um polinômio $P(x)$ de coeficientes inteiros a_i com termo independente a_0 e coeficiente líder a_n . Considere que $d \mid a_0$ e $c \mid a_n$. Dispondo os coeficientes de $P(x)$ no dispositivo prático, temos:

Figura 9 – Alocação dos coeficientes de $P(x)$ e da suposta raiz $\frac{d}{c}$ no dispositivo do Algoritmo de Peletarius

| | | | | | | | |
|-------|-----------|-----------|----------|-------|-------|-------|------------------|
| a_n | a_{n-1} | a_{n-2} | \cdots | a_2 | a_1 | a_0 | x |
| | | | | | | | $\frac{d}{c}$ |
| | | | | | | | $\frac{-a_0}{d}$ |

Fonte: Elaborado pelo autor .

Em sequência, inicia-se o processo determinando $b_0 = \frac{-a_0}{d}$ de $Q(x)$. Com isso, o quadro da Figura 9 se apresenta da seguinte forma:

Figura 10 – Determinação de b_0 de $Q(x)$.

| | | | | | | | |
|-------|-----------|-----------|----------|-------|-------|-------|------------------|
| a_n | a_{n-1} | a_{n-2} | \cdots | a_2 | a_1 | a_0 | x |
| | | | | | | | $\frac{d}{c}$ |
| | | | | | | b_0 | $\frac{-a_0}{d}$ |
| | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor .

Para completar o quadro, utiliza-se as relações determinadas em 4.19. Com isso, tem-se o seguinte quadro conforme Figura 11.

Figura 11 – Alocação dos coeficientes b_i de $Q(x)$ e da suposta raiz $\frac{d}{c}$ no dispositivo do Algoritmo de Peletarius

| | | | | | | | |
|---|---------------------------------------|-----------|-------------------------------|-------------------------------|-------|------------------|---------------|
| a_n | a_{n-1} | a_{n-2} | \cdots | a_2 | a_1 | a_0 | x |
| | b_{n-1} | b_{n-2} | | b_2 | b_1 | b_0 | $\frac{d}{c}$ |
| $\frac{a_n}{c} = \frac{c \cdot b_{n-2} - a_{n-1}}{d}$ | $\frac{c \cdot b_{n-3} - a_{n-2}}{d}$ | | $\frac{c \cdot b_1 - a_2}{d}$ | $\frac{c \cdot b_0 - a_1}{d}$ | | $\frac{-a_0}{d}$ | |
| | | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor .

Finalmente, se ao final do processo surgir que $b_{n-1} \neq \frac{a_n}{c}$, pode-se afirmar que $\frac{d}{c}$ não é raiz de $P(x)$. Assim como para raízes inteiras, esse dispositivo é bastante vantajoso para um rápido processo de verificação de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros. Pois, constatando que algum $b_i \notin \mathbb{Z}$, o processo pode ser imediatamente abandonado. Além disso, ao encontrar uma raiz, o processo pode ser prosseguido para outras possíveis candidatas a raiz, aplicado ao polinômio $Q(x)$ obtido.

4.5.5 Aplicação do Algoritmo de Peletarius para Raízes Racionais

Visando exemplificar o uso prático desse dispositivo, serão usadas expressões polinomiais de coeficientes inteiros, definições, conceitos e técnicas relacionadas às expressões polinomiais até então abordadas.

Exemplo 4.4. Dado o polinômio $P(x) = 8x^5 - 54x^4 - 69x^3 - 78x^2 - 77x - 24$, determine as suas possíveis raízes inteiras e racionais, se houver.

Solução. Apresenta-se um polinômio de grau 5 (possui cinco raízes) e não unitário ($a_5 = 8$). Portanto, como já discutido na Seção 2.5.6, como o coeficiente líder é diferente de 1, podemos afirmar que $P(x)$ não possui apenas raízes inteiras. Para encontrar as possíveis raízes candidatas de $P(x)$, utilizaremos o Teorema das Raízes Racionais. Para tal, devemos observar que se $P(x)$ possuir alguma raiz racional, ela é da forma $x = \frac{p}{q}$, onde p pertence ao conjunto dos divisores de $a_0 = -24$ e q pertence ao conjunto dos divisores de $a_5 = 8$. Os divisores de 24 são: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$ e os divisores de 8 são: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. Logo, as possíveis raízes racionais de $P(x)$ são: $\left\{ \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24 \right\}$.

Visando diminuir o intervalo onde se encontram tais raízes, utilizaremos o Método de Laguerre, tratado na Seção 2.5.7.1. Para tal, com o auxílio do DBF, buscaremos encontrar a cota superior L .

| | 8 | -54 | -69 | -78 | -77 | -24 |
|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 8 | - | | | | |
| : | : | - | | | | |
| 7 | 8 | 2 | - | | | |
| 8 | 8 | 10 | 11 | 10 | 3 | 0 |
| 9 | 8 | + | + | + | + | + |

De acordo com o quadro acima, segue que $L = 9$ e $\{8\}$ é uma das raízes de $P(x)$, já que o resto da divisão é zero.

Para a determinação da cota inferior l , temos que a transformada de $P(x) = 0$ é:

$$P(-x) = 8x^5 + 54x^4 - 69x^3 + 78x^2 - 77x + 24.$$

Organizando os seus coeficientes no DBR, temos:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 8 & 54 & -69 & 78 & -77 & 24 \\ \hline 1 & 8 & 62 & - & & & \\ 2 & 8 & 70 & 71 & 220 & + & + \end{array}.$$

Portanto, temos que $l = -2$ é cota inferior do procurado intervalo. Logo, $-2 < x < 9$. Diante disso, temos que as possíveis soluções de $P(x) = 0$ se reduz ao conjunto: $\{\pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$.

Buscando reduzir ainda mais o conjunto das candidatas a raízes, utilizaremos as Regras de Exclusão de Newton, abordada na Seção 3.1, para tal fim. Para isso, temos que $P(1) = -294$ e $P(-1) = -18$, onde os seus conjuntos de divisores naturais são $\{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 49, 147, 98, 294\}$ e $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, respectivamente.

Para $x = -\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \pm 3, \pm 4, \pm 6$, os resultados dessas operações, realizadas com esses números, aplicadas as Regras de Exclusão de Newton, não dividem $P(1)$ ou $P(-1)$ ou ambos. Logo, o conjunto das prováveis candidatas a raízes é reduzido aos elementos: $\left\{\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \pm 2, 8\right\}$.

Buscando agora comprovar se esses números são realmente raízes de $P(x)$, usaremos o Algoritmo de Peletarius. A verificação será realizada inicialmente com as candidatas a raízes inteiras, pois, caso se comprovando ser raiz, o procedimento pode ser continuado com o polinômio quociente, ao qual os cálculos irão diminuindo, tendo em vista a redução do grau do polinômio dividendo. Montando o quadro com os coeficientes de $P(x)$ e começando para $x = -2$, temos:

$$\begin{array}{ccccccc|c} 8 & -54 & -69 & -78 & -77 & -24 & x \\ \hline & & & & & & -2 \end{array}.$$

Executando o algoritmo, temos o seguinte quadro:

$$b_0 = \frac{-(-24)}{-2} = -12 \in \mathbb{Z}; b_1 = \frac{-12 - (-77)}{-2} = -\frac{65}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 8 & -54 & -69 & -78 & -77 & -24 & x \\ \hline & & & & -\frac{65}{2} & -12 & -2 \end{array}.$$

Como $\frac{-65}{2} \notin \mathbb{Z}$, podemos concluir que $P(-2) \neq 0$. Logo, $\{-2\}$ não é raiz de $P(x)$.

Testando para $x = 2$, temos o seguinte quadro:

| | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----------------|-----|----|
| 8 | -54 | -69 | -78 | -77 | -24 | x |
| | | | | $-\frac{65}{2}$ | -12 | -2 |
| | | | | $\frac{89}{2}$ | 12 | 2 |

Como $b_1 = \frac{89}{2} \notin \mathbb{Z}$, pode-se afirmar que $\{2\}$ também não é raiz de $P(x)$.

Montando o quadro para $x = 8$ e executando o algoritmo, temos:

| | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----------------|-----|-----|
| 8 | -54 | -69 | -78 | -77 | -24 | x |
| | | | | $-\frac{65}{2}$ | -12 | -2 |
| | | | | $\frac{89}{2}$ | 12 | 2 |
| 8 | 10 | 11 | 10 | 3 | | 8 |

Com isso, temos que para as supostas raízes inteiras apontadas, a única verdadeira corresponde a $x = 8$, como já comprovado anteriormente. Observa-se também que o coeficiente líder do polinômio quociente $Q(x) = 8x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 10x + 3 = 0$ é o mesmo de $P(x)$. Ou seja, $a_5 = b_4 = 8$. Como $P(x)$ é de grau 5, o mesmo possui 5 raízes, onde apenas uma delas é inteira.

Agora, buscando comprovar a veracidade das raízes racionais não inteiros, usaremos também o Algoritmo de Peletarius para raízes dessa natureza. Portanto, continuando com o quadro, testaremos as supostas raízes com o polinômio quociente encontrado com $x = 8$. Iniciaremos o teste para $x = -\frac{1}{2}$. Para isso, temos:

| | | | | | | |
|---|--|--|--|----------------------------------|----------------|-----|
| 8 | -54 | -69 | -78 | -77 | -24 | x |
| 8 | 10 | 11 | 10 | 3 | 8 | |
| | $\underbrace{4}_{\frac{8-2 \cdot 3-10}{-1}}$ | $\underbrace{3}_{\frac{2 \cdot 4-11}{-1}}$ | $\underbrace{4}_{\frac{2 \cdot 3-10}{-1}}$ | $\underbrace{3}_{\frac{-3}{-1}}$ | $\frac{-1}{2}$ | |

Portanto, segue então que $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ é uma raiz racional de $P(x) = 0$.

Testando agora para $x = \frac{1}{2}$, temos o seguinte:

| 8 | -54 | -69 | -78 | -77 | -24 | x |
|---|--|------------------------------|----------------|-----|-----|----------------|
| 8 | 10 | 11 | 10 | 3 | 8 | |
| 4 | 3 | 4 | 3 | | | $-\frac{1}{2}$ |
| | | | | | | |
| | <u>-23</u> | <u>-10</u> | <u>-3</u> | | | $\frac{1}{2}$ |
| | $\frac{4}{2} \neq \frac{2 \cdot (-10) - 3}{1}$ | $\frac{2 \cdot (-3) - 4}{1}$ | $\frac{-3}{1}$ | | | |

Como $-23 \neq \frac{4}{2} = 2$, pode-se concluir que $P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$. Logo, não sendo uma das raízes de $P(x)$.

Verificando para $x = \frac{1}{8}$, não há a necessidade de testarmos no dispositivo prático do algoritmo de Peletarius, tendo em vista que a condição $c \mid a_n$ não é atendido. Pois, como $a_n = a_3 = 4$ e $c = 8$, tem-se que $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Portanto, $\left\{\frac{1}{8}\right\}$ também não é raiz de $P(x)$.

Por fim, testando agora para $x = -\frac{3}{4}$, temos o seguinte quadro:

| 8 | -54 | -69 | -78 | -77 | -24 | x |
|---|--|----------------------------|-----------------|-----|-----|----------------|
| 8 | 10 | 11 | 10 | 3 | 8 | |
| 4 | 3 | 4 | 3 | | | $-\frac{1}{2}$ |
| | | | | | | |
| | -23 | -10 | -3 | | | $\frac{1}{2}$ |
| | | | | | | |
| | <u>1</u> | <u>0</u> | <u>1</u> | | | $-\frac{3}{4}$ |
| | $\frac{4}{4} = \frac{4 \cdot 0 - 3}{-3}$ | $\frac{4 \cdot 1 - 4}{-3}$ | $\frac{-3}{-3}$ | | | |

Portanto, temos que $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ é uma das raízes de $P(x)$ e o polinômio quociente resultante $Q(x) = x^2 + 1$.

Por fim, temos que $P(x) = 0$ possui como conjunto-solução, em \mathbb{Q} , $S = \left\{8, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right\}$. Com isso, podemos reescrevê-lo de modo fatorado como:

$$P(x) = 8 \cdot (x - 8) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3}{4}\right) \cdot (x^2 + 1).$$

Como visto em 2.22, observa-se no polinômio $Q(x)$ que $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$. Com isso, temos que as suas outras duas raízes restantes não pertencem ao conjunto dos números reais.

Exemplo 4.5. Dado polinômio $P(x) = 900x^6 + 180x^5 - 397x^4 - 65x^3 + 51x^2 + 5x - 2$, quais as suas raízes racionais, se existir?

Solução. O polinômio em questão apresenta, no primeiro momento, um certo grau de dificuldades; tendo em vista que o seu grau é 6 (possui seis raízes) e o seu coeficiente líder é 900. Logo, suas supostas raízes, se existir, não são apenas inteiras. Para exibir tais raízes, buscaremos primeiramente definir as suas possíveis raízes racionais da forma $x = \frac{p}{q}$ utilizando o Teorema das Raízes Racionais, tratado na Seção 2.5.6. Como $a_6 = 900$ é seu coeficiente líder e $a_0 = -2$ o seu termo independente, temos que p corresponde aos divisores de a_0 e q aos de a_6 . Os divisores de -2 são: $\{\pm 1, \pm 2\}$. Os divisores de 900 são: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 9, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 18, \pm 20, \pm 25, \pm 30, \pm 36, \pm 45, \pm 50, \pm 60, \pm 75, \pm 90, \pm 100, \pm 150, \pm 180, \pm 225, \pm 300, \pm 450, \pm 900\}$.

Com isso, as possíveis raízes racionais de $P(x)$ são: $\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{1}{10}, \pm \frac{1}{12}, \pm \frac{1}{15}, \pm \frac{1}{18}, \pm \frac{1}{20}, \pm \frac{1}{25}, \pm \frac{1}{30}, \pm \frac{1}{36}, \pm \frac{1}{45}, \pm \frac{1}{50}, \pm \frac{1}{60}, \pm \frac{1}{75}, \pm \frac{1}{90}, \pm \frac{1}{100}, \pm \frac{1}{150}, \pm \frac{1}{180}, \pm \frac{1}{225}, \pm \frac{1}{450}, \pm \frac{1}{900}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{2}{15}, \pm \frac{2}{25}, \pm \frac{2}{45}, \pm \frac{2}{75}, \pm \frac{2}{225} \}.$

Visando diminuir o intervalo onde se encontram as possíveis raízes de $P(x)$, não há a necessidade de usar o Método de Laguerre, pois observa-se que as mesmas encontram-se no intervalo $-2 \leq x \leq 2$. Portanto, suas possíveis raízes inteiros é para $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$. Para $x = 1$ temos que $P(1) = 672 \neq 0$ e para $x = -1$, $P(-1) = 432 \neq 0$. Por conseguinte, ambos não são raízes. Utilizando o Algoritmo de Peletarius para testar se $x = \pm 2$ são raízes, temos o seguinte:

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----------------|-----|----|----|----|---|
| 900 | 180 | -397 | -65 | 51 | 5 | -2 | x |
| | | $-\frac{89}{2}$ | 24 | 3 | -1 | -2 | . |
| | | $-\frac{53}{2}$ | -2 | 1 | 2 | | |

Observa-se que $x = -2$ não é raiz de $P(x)$, já que $b_3 = -\frac{89}{2} \notin \mathbb{Z}$. Da mesma forma para $x = 2$, pois $b_2 = -\frac{53}{2} \notin \mathbb{Z}$. Portanto, podemos concluir que o presente polinômio não possui raiz inteira e as demais raízes são possivelmente racionais e encontra-se no intervalo $-1 < x < 1$. Buscando agora reduzir o campo de busca dessas raízes, serão utilizadas as Regras de Exclusão de Newton para raízes racionais, tratado na Seção 3.1.

Para facilitar os cálculos, para $P(1) = 672$, os seus divisores naturais são $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16, 21, 24, 28, 32, 42, 48, 56, 84, 96, 112, 168, 224, 336, 672\}$.

E para $P(-1) = 432$, seus divisores naturais são $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 108, 144, 216, 432\}$.

Logo, para $x = \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{1}{10}, \pm \frac{1}{12}, -\frac{1}{15}, \pm \frac{1}{18}, \pm \frac{1}{20}, \pm \frac{1}{25}, \pm \frac{1}{30}, \pm \frac{1}{36}, \pm \frac{1}{45}, \pm \frac{1}{50}, \pm \frac{1}{60}, \pm \frac{1}{75}, \pm \frac{1}{90}, \pm \frac{1}{100}, \pm \frac{1}{180}, \pm \frac{1}{225}, \pm \frac{1}{450}, \pm \frac{1}{900}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{5}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{2}{15}, \pm \frac{2}{25}, \pm \frac{2}{45}, \pm \frac{2}{75}, \pm \frac{2}{225}$, os resultados obtidos pela aplicação das Regras de Exclusão de Newton a esses números, não dividem $P(1)$ ou de $P(-1)$ ou ambos.

Com isso, restam apenas como possíveis raízes de $P(x)$ os números $\{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{5}, \frac{1}{15}, -\frac{2}{5}\}$. Para isso, utilizaremos o Algoritmo de Peletarius para Raízes Racionais, para testar se esses números são realmente raízes de $P(x)$.

Começando para $x = \frac{1}{2}$ temos:

| 900 | 180 | -397 | -65 | 51 | 5 | -2 | x |
|--|---|--|--|---|------------------------------------|----|---------------|
| $\underbrace{450}_{\frac{900-180}{2} = \frac{2 \cdot 315 - 180}{1}}$ | $\underbrace{315}_{\frac{2 \cdot (-41) - (-397)}{1}}$ | $\underbrace{-41}_{\frac{2 \cdot (-53) - (-65)}{1}}$ | $\underbrace{-53}_{\frac{2 \cdot (-1) - 51}{1}}$ | $\underbrace{-1}_{\frac{2 \cdot 2 - 5}{1}}$ | $\underbrace{2}_{\frac{-(-2)}{1}}$ | | $\frac{1}{2}$ |

De acordo com o quadro acima, $\{\frac{1}{2}\}$ é raiz de $P(x) = 0$.

Testando agora para $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$, temos:

| 900 | 180 | -397 | -65 | 51 | 5 | -2 | x |
|--|--|--|---|----------------------------------|---|----|----------------|
| 450 | 315 | -41 | -53 | -1 | 2 | | $\frac{1}{2}$ |
| $\underbrace{225}_{\frac{450-315}{2} = \frac{2 \cdot 45 - 315}{-1}}$ | $\underbrace{45}_{\frac{2 \cdot (-43) - (-41)}{-1}}$ | $\underbrace{-43}_{\frac{2 \cdot (-5) - (-53)}{-1}}$ | $\underbrace{-5}_{\frac{2 \cdot 2 - (-1)}{-1}}$ | $\underbrace{2}_{\frac{-2}{-1}}$ | | | $-\frac{1}{2}$ |

Com isso, temos que $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ também é uma das raízes do presente polinômio.

Verificando para $x = -\frac{2}{5}$, temos o seguinte quadro:

| 900 | 180 | -397 | -65 | 51 | 5 | -2 | x |
|--|---|---|----------------------------------|----|---|----|----------------|
| 450 | 315 | -41 | -53 | -1 | 2 | | $\frac{1}{2}$ |
| 225 | 45 | -43 | -5 | 2 | | | $-\frac{1}{2}$ |
| $\underbrace{45}_{\frac{225-315}{5} = \frac{5 \cdot (-9) - 45}{-2}}$ | $\underbrace{-9}_{\frac{5 \cdot (-5) - (-43)}{-2}}$ | $\underbrace{-5}_{\frac{5 \cdot 1 - (-5)}{-2}}$ | $\underbrace{1}_{\frac{-2}{-2}}$ | | | | $-\frac{2}{5}$ |

Com isso, comprova-se que $\left\{-\frac{2}{5}\right\}$ é também raiz do polinômio.

Averiguando agora para $x = -\frac{1}{5}$, temos a seguinte situação:

| | | | | | | | |
|---|-------------------------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|-----|
| 900 | 180 | -397 | -65 | 51 | 5 | -2 | x |
| 450 | 315 | -41 | -53 | -1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | |
| 225 | 45 | -43 | -5 | 2 | $-\frac{1}{2}$ | | |
| 45 | -9 | -5 | 1 | $-\frac{2}{5}$ | | | |
| 41 | -10 | 1 | $-\frac{1}{5}$ | | | | |
| $\frac{45}{5} \neq \frac{5 \cdot (-10) - (-9)}{-1}$ | $\frac{5 \cdot 1 - (-5)}{-1}$ | $\frac{-1}{-1}$ | | | | | |

Como $41 \neq \frac{45}{5} = 9$, segue que $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$ não é raiz de $P(x)$.

Buscando comprovar para $\frac{1}{15}$, temos:

| | | | | | | | |
|--|----------------------------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|-----|
| 900 | 180 | -397 | -65 | 51 | 5 | -2 | x |
| 450 | 315 | -41 | -53 | -1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | |
| 225 | 45 | -43 | -5 | 2 | $-\frac{1}{2}$ | | |
| 45 | -9 | -5 | 1 | $-\frac{2}{5}$ | | | |
| 41 | -10 | 1 | $-\frac{1}{5}$ | | | | |
| $\frac{-141}{15} \neq \frac{15 \cdot (-10) - (-9)}{1}$ | $\frac{15 \cdot (-1) - (-5)}{1}$ | $\frac{-1}{-1}$ | | | | | |
| $\frac{45}{15} \neq \frac{15 \cdot (-10) - (-9)}{1}$ | $\frac{15 \cdot (-1) - (-5)}{1}$ | $\frac{-1}{-1}$ | | | | | |

Como $-141 \neq \frac{45}{15} = 3$, segue que $\left\{\frac{1}{15}\right\}$ não é raiz de $P(x)$.

Testando para $x = \frac{1}{5}$, temos:

| | | | | | | | |
|--|---------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|-----|
| 900 | 180 | -397 | -65 | 51 | 5 | -2 | x |
| 450 | 315 | -41 | -53 | -1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | |
| 225 | 45 | -43 | -5 | 2 | $-\frac{1}{2}$ | | |
| 45 | -9 | -5 | 1 | $-\frac{2}{5}$ | | | |
| 41 | -10 | 1 | $-\frac{1}{5}$ | | | | |
| -141 | -10 | -1 | $\frac{1}{15}$ | | | | |
| $\frac{9}{5} = \frac{5 \cdot 0 - (-9)}{1}$ | $\frac{0}{1}$ | $\frac{-1}{-1}$ | | | | | |

Logo, $\left\{ \frac{1}{5} \right\}$ é também raiz do polinômio em questão.

Buscando testar se $\left\{ -\frac{1}{3} \right\}$ é também raiz, temos:

| | | | | | | | |
|------|-----|--|--------------------------------------|----|---|----------------|-----|
| 900 | 180 | -397 | -65 | 51 | 5 | -2 | x |
| 450 | 315 | -41 | -53 | -1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | |
| 225 | 45 | -43 | -5 | 2 | | $-\frac{1}{2}$ | |
| 45 | -9 | -5 | 1 | | | $-\frac{2}{5}$ | |
| 41 | -10 | 1 | | | | $-\frac{1}{5}$ | |
| -141 | -10 | -1 | | | | $\frac{1}{15}$ | |
| 9 | 0 | -1 | | | | $\frac{1}{5}$ | |
| | | | | | | $\frac{1}{3}$ | |
| | | $\underbrace{3}_{\frac{9}{3} = \frac{3 \cdot (-1) - 0}{-1}}$ | $\underbrace{-1}_{\frac{-(-1)}{-1}}$ | | | $-\frac{1}{3}$ | |

Verifica-se que $x = -\frac{1}{3}$ é também uma das raízes racionais do polinômio.

Por fim, testando agora para $x = \frac{1}{3}$, temos:

| | | | | | | | |
|------|-----|--|-----|----|---|----------------|-----|
| 900 | 180 | -397 | -65 | 51 | 5 | -2 | x |
| 450 | 315 | -41 | -53 | -1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | |
| 225 | 45 | -43 | -5 | 2 | | $-\frac{1}{2}$ | |
| 45 | -9 | -5 | 1 | | | $-\frac{2}{5}$ | |
| 41 | -10 | 1 | | | | $-\frac{1}{5}$ | |
| -141 | -10 | -1 | | | | $\frac{1}{15}$ | |
| 9 | 0 | -1 | | | | $\frac{1}{5}$ | |
| 3 | -1 | | | | | $\frac{1}{3}$ | |
| | | | | | | $\frac{1}{3}$ | |
| | | $\underbrace{1}_{\frac{3}{3} = \frac{-(-1)}{1}}$ | | | | | |

Com isso, temos então a constatação de que $\left\{ \frac{1}{3} \right\}$ é a última raiz procurada.

Portanto, as raízes do polinômio $P(x) = 900x^6 + 180x^5 - 397x^4 - 65x^3 + 51x^2 + 5x - 2$ são $\left\{ \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5} \right\}$.

Com isso, segue que sua forma fatorada ou decomposta é:

$$P(x) = 900 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{5}\right).$$

Logo, todas as suas raízes são racionais.

5 HYBRITARIUS®: MODELO HÍBRIDO PARA A DETERMINAÇÃO DE RAÍZES RACIONAIS EM POLINÔMIOS DE COEFICIENTES INTEIROS

A seguir, será apresentado o aplicativo educacional Hybritarius® que implementa uma solução computacional, integrando os métodos do Algoritmo de Peletarius e as Regras de Exclusão de Newton, para a identificação de raízes racionais em polinômios de coeficientes inteiros. Desenvolvido sob a proposta de auxiliar no ensino de álgebra no Ensino Médio e em cursos de Análise Numérica. Com uma interface intuitiva, o aplicativo é implementado em linguagem R e gera relatórios automatizados em LATEX.

O aplicativo consiste em exibir, através de um relatório automatizado, as raízes racionais (inteiros e racionais não inteiros), dados os coeficientes de um determinado polinômio. Além disso, identificando a existência de tais raízes, o Hybritarius® exibe o polinômio em questão em sua forma fatorada. Caso o polinômio possua não somente raízes racionais, o aplicativo exibe o polinômio quociente ao qual encontram-se as demais raízes (irracionais ou complexas). Por fim, caso o polinômio não possua raízes racionais, o Hybritarius® aponta tal característica.

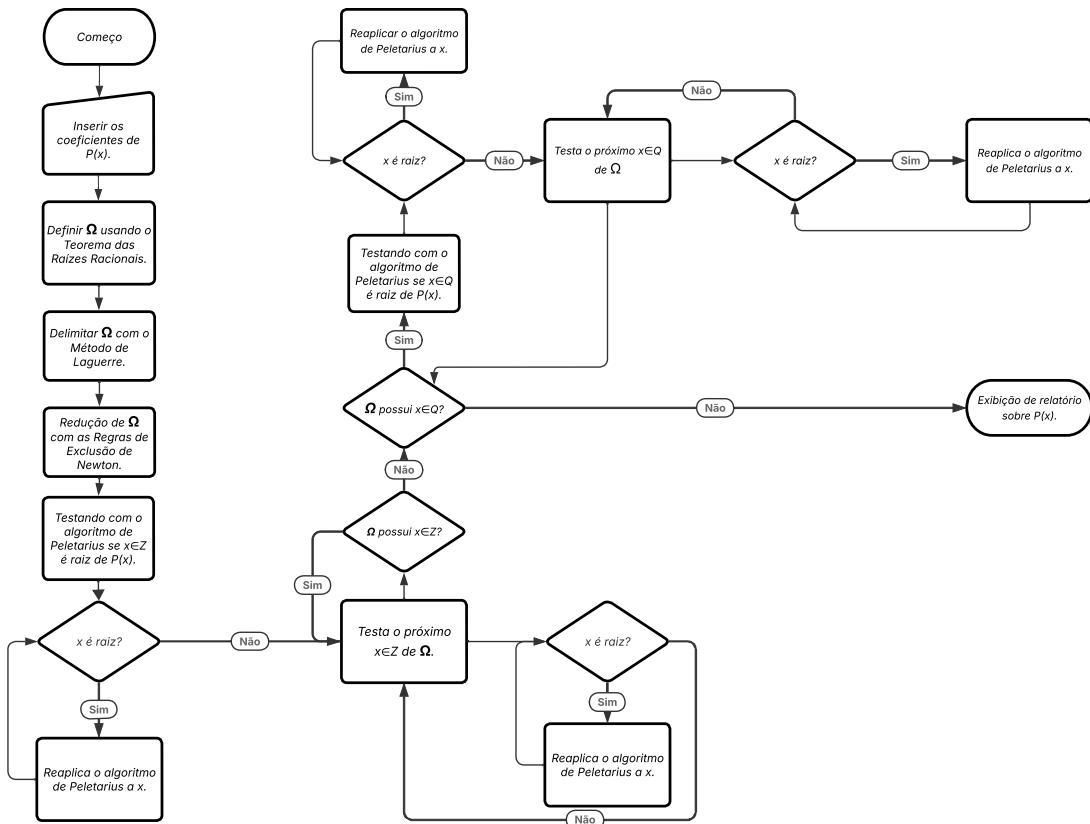
Para isso, apresentando os coeficientes do polinômio $P(x)$ proposto, o aplicativo segue o seguinte roteiro para identificar as suas possíveis raízes racionais:

1. Determinação do conjunto Ω que contém as suas candidatas a raízes racionais, através do Teorema das Raízes Racionais, tratado na Seção 2.5.6.
2. Delimitação de Ω através da redução do intervalo onde se encontram as verdadeiras raízes de $P(x)$, utilizando o Método de Laguerre, tratado na Seção 2.5.7.1.
3. Exclusão das improváveis raízes de $P(x)$, através das Regras de Exclusão de Newton (tratadas no Capítulo 3), aplicadas as candidatas inteiros e racionais não inteiros, e reduzindo os elementos de Ω .
4. Aplicação do Algoritmo de Peletarius, inicialmente nas candidatas a raízes inteiros, através do método tratado no Capítulo 4, reduzindo assim o conjunto Ω e também o grau do polinômio quociente; tornando os cálculos mais simples.
5. Reaplicação do algoritmo de Peletarius nas raízes inteiros identificadas a fim de encontrar possíveis multiplicidade de raízes, conforme tratado na Seção 2.5.4.2.
6. Execução do Algoritmo de Peletarius para as raízes racionais não inteiros, tratado na Seção 4.5.

7. Reaplicação do algoritmo nas raízes racionais não inteiras, buscando encontrar possíveis raízes múltiplas.
8. Exibição de um relatório automatizado em LATEX, elencando as raízes racionais de $P(x)$ (se houver), assim como a sua representação na forma fatorada, conforme tratado na Seção 2.5.4.

A Figura 12 abaixo ilustra o fluxograma dos processos realizados pelo Hybritarius®.

Figura 12 – Fluxograma dos processos executados pelo aplicativo Hybritarius® para determinar as raízes racionais x de uma equação polinomial $P(x)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para iniciar o Hybritarius®, é necessário apenas inserir os coeficientes inteiros do polinômio $P(x)$ ao qual deseja-se investigar. Feito isso, o aplicativo automaticamente emite através de um relatório, as suas raízes inteiras e racionais não inteiras (caso as possua) e a forma fatorada do polinômio investigado, conforme o TFA.

Para ilustrar o funcionamento do aplicativo, vamos usar o polinômio $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 37x^2 + 8x + 12$ como exemplo.

Após inserir os coeficientes de $P(x)$ ($6, -7, -37, 8, 12$) no *prompt* de comando, o Hybritarius® emite o seguinte relatório, conforme explicado através das figuras abaixo:

Figura 13 – Capa do Relatório Automatizado em \LaTeX , emitido pelo Hybritarius® com as informações específicas de apresentação.

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Hybritarius®:
modelo híbrido para determinação de raízes racionais em
polinômios de coeficientes inteiros

Autores

Prof. Me. Francisco Fábio Sales de Almeida - SEDUC/CE
Prof. Dr. Antonio Alisson Pessoa Guimarães - UNILAB (desenvolvedor)

Aplicativo educacional que implementa uma solução computacional integrando os métodos de Peletarius e os princípios de exclusão de Newton, para identificação de raízes racionais em polinômios de coeficientes inteiros. Desenvolvido para auxiliar no ensino de álgebra no Ensino Médio e em cursos de Análise Numérica, com uma interface intuitiva. Implementado em linguagem R, o aplicativo gera relatórios automatizados em \LaTeX .

Este aplicativo possui registro no INPI (Nº BR512025002351-0), garantindo sua propriedade intelectual.

Fonte: Hybritarius®.

A Figura 13 acima ilustra a capa do Relatório Automatizado em \LaTeX , emitido pelo Hybritarius® trazendo informações prévias de apresentação do Aplicativo como autores e N° de registro no INPI, por exemplo.

A seguir, tem-se a Figura 14 ilustrando o Certificado de Registro de Programa de Computador do Hybritarius® junto ao Instituto Nacional da Propriedade Industrial - INPI, sob o N° BR512025002351-0.



Figura 14 – Certificado de Registro do Hybritarius® junto ao INPI.

A Figura 15 ilustra as informações preliminares do polinômio $P(x)$ proposto, como a sua representação, conforme Equação 2.21, e a delimitação do intervalo das suas possíveis raízes racionais pelo Método de Laguerre. São ilustradas as Tabelas 1 e 2 que contemplam os seus limites superiores e inferiores, respectivamente, que contém tais supostas raízes. Ou seja, o intervalo na reta real onde essas raízes se encontram (caso existam).

Figura 15 – Informações preliminares do polinômio proposto, emitido pelo Hybritarius® com as informações específicas de $P(x)$.

1 Etapa preliminar

1.1 Polinômio proposto

$$P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 37x^2 + 8x + 12$$

1.2 Delimitação do intervalo das raízes racionais

Table 1: Tabela de Laguerre para o limite superior

| L | a_4 | a_3 | a_2 | a_1 | a_0 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 6 | -7 | -37 | 8 | 12 |
| 2 | 6 | 5 | — | | |
| 3 | 6 | 11 | — | | |
| 4 | 6 | 17 | 31 | 132 | 540 |

Table 2: Tabela de Laguerre para o limite inferior

| L | a_4 | a_3 | a_2 | a_1 | a_0 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 6 | 7 | -37 | -8 | 12 |
| 1 | 6 | 13 | — | | |
| 2 | 6 | 19 | 1 | — | |
| 3 | 6 | 25 | 38 | 106 | 330 |

Intervalo de delimitação das raízes de $P(x)$

$$(-3, 4)$$

Fonte: Hybritarius®.

A Figura 16 abaixo ilustra os conjuntos das possíveis raízes inteiras Ω_i e racionais não-inteiras Ω_r do polinômio proposto.

Figura 16 – Ω_i e Ω_r de $P(x)$, emitido pelo Hybritarius®.

Conjunto das possíveis raízes inteiras

O conjunto Ω_i das possíveis raízes inteiras é formado por **5 elementos**, os quais estão listados a seguir:

$$\Omega_i = \{\pm 1, \pm 2, 3\}$$

Conjunto das possíveis raízes racionais não-inteiras

O conjunto Ω_r das possíveis raízes racionais não inteiras é formado por **12 elementos**, os quais estão listados a seguir:

$$\Omega_r = \left\{ \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{3}{2} \right\}$$

Fonte: Hybritarius®.

A seguir tem-se a Figura 17 esboçando o Algoritmo de Peletarius aplicado às possíveis raízes inteiras de $P(x)$ que pertencem ao conjunto Ω_i .

Figura 17 – Algoritmo de Peletarius aplicado aos elementos do conjunto Ω_i , a distribuição das raízes inteiras de $P(x)$ e a sua decomposição em relação a essas raízes.

2 Algoritmo de Peletarius para raízes inteiras

2.1 Execução do algoritmo

Table 3: Algoritmo de Peletarius

| k | a_4 | a_3 | a_2 | a_1 | a_0 | Teste | Raiz? | Exclusão |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 0 | 6 | -7 | -37 | 8 | 12 | - | - | - |
| 1 | | 24 | 17 | -20 | -12 | 1 | Não | 1 |
| 2 | | 11 | 15 | -7 | -6 | 2 | Não | 2 |
| 3 | | 6 | 11 | -4 | -4 | 3 | Sim | 3 |
| 4 | | | 11 | 0 | -4 | -1 | Não | -1 |
| 5 | | | 6 | -1 | -2 | -2 | Sim | |
| 6 | | | | 0 | -1 | -2 | Não | -2 |

Distribuição das raízes inteiras

Table 4: Distribuição das raízes inteiras

| Zeros | Multiplicidade |
|-------|----------------|
| -2 | 1 |
| 3 | 1 |

Decomposição polinomial

$$P(x) = (x + 2)(x - 3)(6x^2 - x - 2)$$

Observação

O polinômio possui 2 raízes inteiras de 4 possíveis.

Fonte: Hybritarius®.

Além disso, a figura traz também a distribuição dessas raízes quanto a sua multiplicidade e a decomposição prévia de $P(x)$ em relação a essas raízes.

A Figura 18 ilustra a execução do algoritmo das Regras de Exclusão de Newton aplicadas ao conjunto Ω_r , onde excluem-se as improváveis candidatas a raízes de $P(x)$ e, com isso, determinando o conjunto das possíveis raízes racionais não inteiras remanescentes $\Omega_r^{(rem)}$.

Figura 18 – As Regras de Exclusão de Newton aplicadas aos elementos do conjunto Ω_r e a determinação do conjunto $\Omega_r^{(rem)}$.

3 Regras de exclusão de Newton

3.1 Valores de referência

$$P(1) = -18, \quad P(-1) = -20, \quad p/q \in \Omega_r.$$

3.2 Execução do algoritmo

Table 5: Análise de raízes racionais pelas regras de exclusão de Newton

| p/q | $p - q$ | $(p - q) P(1)$ | $p + q$ | $(p + q) P(-1)$ | Exclusão |
|-------|---------|----------------|---------|-----------------|----------|
| -3/2 | -5 | Não | | | -3/2 |
| -4/3 | -7 | Não | | | -4/3 |
| -2/3 | -5 | Não | | | -2/3 |
| -1/2 | -3 | Sim | 1 | Sim | |
| -1/3 | -4 | Não | | | -1/3 |
| -1/6 | -7 | Não | | | -1/6 |
| 1/6 | -5 | Não | | | 1/6 |
| 1/3 | -2 | Sim | 4 | Sim | |
| 1/2 | -1 | Sim | 3 | Não | 1/2 |
| 2/3 | -1 | Sim | 5 | Sim | |
| 4/3 | 1 | Sim | 7 | Não | 4/3 |
| 3/2 | 1 | Sim | 5 | Sim | |

3.3 Conjunto das possíveis raízes racionais não-inteiras (remanescentes)

$$\Omega_r^{(rem)} = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\}$$

Fonte: Hybritarius®.

Por fim, tem-se a Figura 19 que ilustra a execução do Algoritmo de Peletarius para as raízes racionais não inteiras, aplicado aos elementos do conjunto $\Omega_r^{(rem)}$. Além dessas informações, o relatório também traz a distribuição dessas raízes quanto a sua multiplicidade e a decomposição final do polinômio $P(x)$, conforme o Teorema Fundamental da Álgebra.

Figura 19 – O Algoritmo de Peletarius para raízes racionais não inteiras, distribuição dessas raízes quanto as suas multiplicidades e a decomposição final de $P(x)$.

4 Algoritmo de Peletarius para raízes racionais não inteiras

4.1 Polinômio resultante

$$Q(x) = 6x^2 - x - 2$$

4.2 Execução do algoritmo

Table 6: Algoritmo de Peletarius (final)

| k | a_2 | a_1 | a_0 | Teste | Raiz? | Exclusão |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 0 | 6 | -1 | -2 | - | - | - |
| 1 | | 21 | 6 | 1/3 | Não | 1/3 |
| 2 | | 6 | 3 | 2/3 | Sim | 2/3 |
| 3 | | | -2 | 3/2 | Não | 3/2 |
| 4 | | | 6 | -1/2 | Sim | -1/2 |

4.3 Distribuição das raízes racionais

Table 7: Distribuição das raízes racionais

| Zeros | Multiplicidade |
|-------|----------------|
| -1/2 | 1 |
| 2/3 | 1 |

Decomposição polinomial final

$$P(x) = 6(x + 2)(x - 3)(x + 1/2)(x - 2/3)$$

Processo finalizado!!!

Fonte: Hybritarius®.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este capítulo resume os principais apontamentos obtidos neste trabalho, destacando as contribuições resultantes da pesquisa e também apresentam-se algumas perspectivas de novas direções de pesquisas na área de ensino de matemática.

6.1 CONCLUSÕES

A presente pesquisa nos remete a uma pergunta em relação às Regras de Exclusão de Newton (REN) e ao Algoritmo de Peletarius (AP): “Por que esses métodos não mais figuram nos atuais livros didáticos de Matemática?”.

Para buscar responder a essa indagação em relação ao AP, vem em mente dois possíveis motivos de cunho prático. O primeiro seria pelo fato do Dispositivo de Briot-Ruffini (DBR) apresentar operações aritméticas mais simples de serem executadas pelos estudantes em seu algoritmo. Pois, como visto, no AP as operações envolvidas são a subtração e a divisão. Enquanto que no DBR, envolvem operações de multiplicação e adição. Pois, segundo dados do *Programme for International Student Assessment - PISA*, realizado em 2022 e divulgados em 2023, cerca de 70% das crianças e adolescentes brasileiros possuem dificuldades básicas em Matemática. Esse dado corrobora com um fato que é de conhecimento comum entre os professores de matemática do Ensino Fundamental II (6º ao 9º ano) e Ensino Médio que é também sustentado por Lautert (2005) e Mello (2008), ao qual a maioria dos estudantes da Educação Básica apresentam dificuldades com a subtração e/ou a divisão.

Outro ponto que torna o DBR mais “popular” que o AP é a divisão de Polinômios. Pois, na divisão de um certo polinômio f por um binômio $g = ax + b$, o DBR, além de apontar o polinômio quociente q , esse método aponta também o polinômio do resto r , conforme equação $f = q \cdot g + r$. Já com o AP, o polinômio q só é figurado se a divisão em questão for exata. Ou seja, $r = 0$.

No entanto, o AP apresenta uma grande vantagem em relação ao DBR na verificação se um determinado racional d é ou não raiz de um certo polinômio $P(x)$. Pois, se no decorrer do processo de execução do algoritmo nos deparamos com qualquer resultado não inteiro, o ensaio pode ser abandonado. Ou seja, d não é raiz de $P(x)$. Há de se observar que se mesmo os resultados encontrados sejam inteiros, os coeficientes dominantes dos polinômios $P(x)$ e quociente necessariamente precisam coincidirem. Assim como o DBR, encontrada uma raiz, o processo pode ser continuado com outras possíveis raízes d de $P(x)$ com os coeficientes do polinômio quociente obtido.

Em relação às REN, observa-se que as mesmas não apresentam maiores complexidades de sua aplicação ou execução, tendo em vista que seu mecanismo consiste praticamente em comparar se a soma e a subtração de dois inteiros é dividível por $P(-1)$ e $P(1)$ de $P(x)$, respectivamente.

Em relação ao Hybritarius®, o mesmo se apresenta como uma promissora opção de instrumento educacional de auxílio nas aulas de Álgebra. Sua interface é bastante simples de ser utilizada e os seus resultados são precisos e esclarecedores, graças aos seus relatórios automatizados emitidos em L^AT_EX. Sua aplicação em linguagem R pode ser executada em qualquer ambiente computacional e sem a necessidade de rede de internet, desde que as máquinas possuam o aplicativo previamente instalado.

Por fim, as Regras de Exclusão de Newton e o Algoritmo de Peletarius são técnicas que, outrora, foram bastante usadas nas aulas de Matemática em décadas passadas, mas que se apresentam com um grande potencial de reuso nas atuais atividades docentes que envolvem a Álgebra. Combinados às técnicas do Teorema das Raízes Racionais para determinar o conjunto-solução ao qual encontram-se as possíveis raízes racionais de um certo polinômio de coeficientes inteiros e ao Método de Laguerre para restringir esse conjunto; essas técnicas se apresentam como uma grande proposta no campo do ensino da Álgebra nas turmas de Ensino Médio e, porque não dizer, no Ensino Superior.

6.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Como proposta de estudos futuros, podemos buscar aprofundar essa mesma linha de pesquisa a aplicação do Algoritmo de Peletarius na sala de aula, nas turmas de 3º ano do Ensino Médio, etapa onde o estudo do Conjuntos dos Números Complexos e Polinômios são mais evidentes.

Para tal, pode ser realizado uma pesquisa investigativa comparando os métodos do Dispositivo de Briot-Ruffini e do Algoritmo de Peletarius e buscar perceber, de modo mais prático, os possíveis reais motivos da desutilidade do método desenvolvido por Peletier no decorrer do tempo. O mesmo se aplica às Regras de Exclusão de Newton e também ao Método de Laguerre. Pois esse método se mostrou bastante eficiente para a limitação do intervalo real onde se encontram, não só as possíveis raízes racionais de uma equação polinomial, mas também as suas possíveis raízes irracionais. Consequentemente, de posse de tais dados, espera-se compreender também as possíveis causas que culminaram para a não publicação desses métodos pelos contemporâneos autores de livros didáticos de Matemática contemplados pelo PNLD.

Em relação ao Hybritarius®, o programa computacional pode ser expandido e, com isso, ser desenvolvido para outras plataformas digitais, como por exemplo, aplicativos executáveis no sistema operacional *Android* para dispositivos portáteis. Pois, pelo menos no Estado do Ceará, através da Lei Nº 17.347 de 11 de dezembro de 2020 que autoriza o poder executivo estadual a adquirir e distribuir *Tablets* a alunos do Ensino Público Superior e da Rede Estadual de Ensino, a maioria dos estudantes do Ensino Médio possuem tal equipamento com possibilidades de uso em sala de aula.

Além dessas perspectivas, há carência de se pesquisar outros promissores conceitos e métodos, também esquecidos e não mais trabalhados nas aulas de Matemática da Educação Básica e Superior. Ao identificá-los, buscar compreender os possíveis motivos que os levaram a não mais participarem dos conteúdos programáticos das aulas de Matemática, principalmente nos cursos de licenciatura.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, Lenimar Nunes de. Raízes Racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros. **RPM - Revista do Professor de Matemática - São Paulo.**, n. 14, 1989. ISSN 0102-4981. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/14/8.htm>.
- BEZERRA, Manoel Jairo. **Curso de Matemática para os Cursos do Segundo Grau (Antigos cursos Clássicos e Científico) - Curso Completo.** 31º. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1974. Único.
- COSTA, Allan Inocêncio de Souza. **Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.** Dissertação (mathesis) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, out. 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/8723/DissAISC.pdf>.
- DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações.** 1º. ed. São Paulo: Editora Ática, 2010. v. 3. ISBN 978850812914-0.
- FERNANDEZ, Cecília de Souza; SANTOS, Raphael Antunes dos. O Teorema Fundamental da Álgebra. **UFPB - V Bienal da SBM**, 2010. Disponível em: https://mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini_Cursos_Completos/MC5Completo.pdf.
- HEFEZ, Abramo. **Aritimética.** 3. ed. Rio de Janeiro- RJ: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022. (Coleção PROFMAT). ISBN 978-85-8337-181-6.
- Hefez, Abramo; Villela, Maria Lúcia Torres. **Polinômios e Equações Algébricas.** 3. ed. Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2022. ISBN 9788583371878.
- IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar. complexos, polinômios, equações.** 8. ed. [S.l.: s.n.]: Atual Editora, 2013. v. 6. ISBN 978-85-357-1752-5.
- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ANDRADE, Nilze. **Matemática: ciência e aplicações.** 9. ed. [S.l.: s.n.]: Editora Saraiva, 2017. v. 3. ISBN 9788547205409.
- KNUDSEN, Carlos Alberto. A Teoria das Equações Algébricas. **RPM - Revista do Professor de Matemática - São Paulo**, n. 7, 1985. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/7/6.htm>.
- Lautert, Síntria Labres. **As dificuldades das crianças com a divisão: um estudo de intervenção.** Tese (phdthesis) — Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Recife, 2005. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/8334/1/arquivo8899_1.pdf.
- Leithold, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.
- LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais.** 2º. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2023. ISBN 9788583371946.
- LONGEN, Adilson. **Matemática: uma abordagem humana.** São Paulo: Base Editora, 2003. v. 1. ISBN 85-7534-126-X.

Mello, Elisabete Marcon. **Análise de dificuldades de alunos com o Algoritmo da Subtração.** Dissertação (mathesis) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP., São Paulo, 2008. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11323/1/ElisabeteMarconMello.pdf>.

NUNES, João Henrique Xavier; SITUBA, Maurício Pereira; CHAQUIAM, Miguel. Recortes histórico-matemáticos acerca dos polinômios para sala de aula. **Brazilian Journal of Development**, 2024. ISSN 2525-8761. Disponível em: <https://ojs.brazilianjournals.com.br/ojs/index.php/BRJD/article/view/67960/48308>.

ROSA, Mario Servelli. Números complexos: uma abordagem histórica para aquisição do conceito. 1998. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/edd7863d2933bcf466e725c357be18446aa4e5d4>.

ROXO, Euclides; CUNHA, Haroldo Lisbôa da; PEIXOTO, Roberto; NETO, César Dacorso. **Matemática - 2º Ciclo**. 4º. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1955. v. 3º.

SOARES, Flávia; ROCHA, José Lourenço da. Que fim levou o Algorítimo de Peletarius. **RPM - Revista do Professor de Matemática - São Paulo**, n. 65, 2008. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/65/8.html>.