UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PAULO HENRIQUE RICARDO MAIA

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: OS PRINCÍPIOS DA INVARIÂNCIA E DO ELEMENTO EXTREMO NO CONTEXTO OBM, OBMEP E OCM.

REDENÇÃO
2025

PAULO HENRIQUE RICARDO MAIA

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: OS PRINCÍPIOS DA INVARIÂNCIA E DO ELEMENTO EXTREMO NO CONTEXTO OBM, OBMEP E OCM.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO

2025

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Maia, Paulo Henrique Ricardo.

M271e

Estratégias de resolução de problemas: os princípios da invariância e do elemento extremo no contexto OBM, OBMEP e OCM / Paulo Henrique Ricardo Maia. - Redenção, 2025.
100f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva.

1. Matemática - Invariantes matemáticos. 2. Princípio do extremo. 3. Resolução de problemas. 4. Olimpíadas de matemática. I. Título

CE/UF/BSCA CDD 510

PAULO HENRIQUE RICARDO MAIA

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: OS PRINCÍPIOS DA INVARIÂNCIA E DO ELEMENTO EXTREMO NO CONTEXTO OBM, OBMEP E OCM

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, UNILAB - Campus Auroras.

Aprovada em: 03/07/2025.

BANCA EXAMINADORA

Joserlan perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Amanda A. F. Nunes

Prof.ª Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes
Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

F. Icaro M. F. Ch.

Prof. Dr. Francisco Icaro Maciel Forte Chaves
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente com a sua realização.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

A minha família por ter me possibilitado e apoiado a chegar nessa etapa da minha vida.

Ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Dra.Amanda Angélica Feltrin Nunes e Dr. Ícaro Chaves pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores do programa, que foram fundamentais para o êxito desse discente.

Aos colegas da turma de mestrado, tanto os concludentes como os que não seguiram na jornada. Desejo a todos muito sucesso e prosperidade pelas reflexões, críticas, sugestões e amadurecimento que ganhamos com a vivência desses 2 anos. Sem esquecer o forte laço conquistado pela união do grupo.

A minha eterna diretora Ana Lúcia da Silva de Almeida por ter tido muita paciência e me apoiado em diversos momentos.

Ao meu Tio Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia que me inspirou e me apoiou bastante na vida.

"Só a ignorância aceita e a indiferença tolera o reinado da mediocridade."(José de Alencar).

RESUMO

Este trabalho apresenta o uso de invariantes matemáticos e dos elementos extremos na resolução de problemas de olimpíadas nacionais de nível básico OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas) e OCM (Olimpíada Cearense de Matemática). Os invariantes são propriedades que se mantêm inalteradas sob transformações e mostram-se ferramentas poderosas em combinatória, teoria dos números, teoria dos grafos, álgebra e geometria. O princípio do extremo é uma estratégia eficaz para problemas com múltiplos elementos e definidos em conjuntos finitos. O método consiste em identificar elementos extremos (máximos ou mínimos) em conjuntos ordenados, explorando suas restrições naturais. Esta dissertação ressalta como esses conceitos fundamentam demonstrações por indução e contradição, revelando estruturas essenciais em problemas olímpicos. Os problemas envolvendo o Princípio da Invariância e do Elemento Extremo exigem não apenas raciocínio combinatório, mas também criatividade e conhecimentos de diversas áreas da Matemática. Como esses princípios não possuem fórmulas prontas, sua aplicação requer a combinação com argumentos aritméticos, algébricos, geométricos e outros. Os problemas olímpicos apresentados nesta pesquisa ilustram a variedade de situações em que esses conceitos podem ser aplicados. Contudo, por se tratarem de questões clássicas, com soluções claras e acessíveis, facilitam o aprendizado e a compreensão do leitor.
Palavras-chave: Invariantes Matemáticos. Princípio do Extremo. Resolução de Problemas. Olimpíadas de Matemática.

ABSTRACT

This work presents the use of mathematical invariants and extremal elements in solving problems from basic-level national olympiads: OBM (Brazilian Mathematics Olympiad), OBMEP (Brazilian Public and Private Schools Mathematics Olympiad), and OCM (Ceará Mathematics Olympiad). Invariants are properties that remain unchanged under transformations and prove to be powerful tools in combinatorics, number theory, graph theory, algebra, and geometry. The extremal principle is an effective strategy for problems with multiple elements defined on finite sets. This method involves identifying extremal elements (maximum or minimum) in ordered sets while exploiting their natural constraints. This dissertation emphasizes how these concepts underpin proofs by induction and contradiction, revealing essential structures in olympiad problems. Problems involving the Invariance Principle and Extremal Principle require not only combinatorial reasoning but also creativity and knowledge from various areas of Mathematics. Since these principles don't have ready-made formulas, their application requires combination with arithmetic, algebraic, geometric, and other types of arguments. The olympiad problems presented in this research illustrate the variety of situations where these concepts can be applied. Moreover, being classical problems with clear and accessible solutions, they facilitate the reader's learning and understanding..

Keywords: Mathematical Invariants. Extremal Principle. Problem Solving. Mathematics Olympiads.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
NBR	Norma Brasileira Regulamentar
SIBI	Sistema Integrado de Bibliotecas
trad.	Tradutor
SASMO	Singapore and Asia Math Olympiad
AUO	Allunion Mathematical Olympiad
IMO	International Mathematical Olympiad
LMO	Leningrad Mathematical Olympiad
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Privadas
OCM	Olimpíada Cearense de Matemática
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
EGMO	European Girls' Mathematical Olympiad
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com quase 18 anos de experiência como professor de matemática e tendo vivenciado diversas situações em sala de aula, pude observar o crescente papel das olimpíadas de matemática no cenário educacional. Motivado por essa relevância, decidi dedicar esta dissertação ao estudo de técnicas para resolução de problemas olímpicos, com foco em dois princípios matemáticos pouco difundidos, porém de grande importância: o Princípio da Invariância e o Princípio do Elemento Extremo.

Embora, como aluno, eu não tenha participado de nenhuma olimpíada na escola, como professor pude ver os efeitos e as conquistas na vida dos alunos que se destacam nessas competições. Tive a oportunidade de trabalhar como corretor regional da OBMEP e, com isso, acompanhar a rotina de alunos medalhistas de escolas particulares e públicas do Ceará. Foi incrível testemunhar a transformação em suas vidas: muitos se tornaram mais focados nos estudos, conquistaram bolsas integrais em colégios particulares e ingressaram em turmas olímpicas, cursos de medicina ou direito, ao lado de alunos que já dispunham de mais oportunidades e recursos para desenvolver seu potencial desde cedo. É inegável que programas como a OBMEP abrem portas para estudantes de escolas públicas, permitindo que desenvolvam suas habilidades intelectuais e conquistem condições mais igualitárias de competir por vagas nas melhores universidades, tanto no Brasil quanto no exterior, inclusive em cursos altamente concorridos. Essa oportunidade não só eleva seu desempenho acadêmico, mas também promove uma transformação significativa em suas trajetórias de vida.

Para a elaboração desta dissertação, conduzi uma pesquisa abrangente em obras especializadas em olimpíadas de Matemática, complementada pela consulta aos portais oficiais da OBM, OBMEP e OCM. O objetivo consistiu em analisar materiais pedagógicos e compilar um extenso repertório de problemas nos quais a aplicação dos princípios em estudo demonstra eficácia comprovada. Paralelamente, realizei um levantamento histórico sobre as olimpíadas brasileiras de matemática, com ênfase particular na OBM, OBMEP e OCM, incluindo uma síntese de seus impactos na formação acadêmica de estudantes cearenses.

O objetivo desta dissertação é apresentar técnicas de resolução de problemas olímpicos que, apesar de facilmente aplicáveis, ainda são pouco conhecidas tanto por alunos quanto por professores que estudam matemática e preparam estudantes para olimpíadas. Nesse contexto, este trabalho vai abordar dois princípios básicos e relevantes para resolver problemas olímpicos: o Princípio da Invariância e o Princípio do Elemento Extremo. Como dito antes eles não são tão explorados quanto o Princípio de Indução, da Boa Ordenação ou de Dirichlet, mas são ferramentas valiosas para resolver certos tipos de problemas.

Esses conteúdos foram selecionados justamente por dispensarem fórmulas complexas ou conceitos avançados, sendo, ao mesmo tempo, muito eficazes em problemas olímpicos. Além disso, são acessíveis e podem ser aplicados de forma intuitiva, o que os torna ótimos para quem está começando nesse universo.

Esta dissertação tem como objetivo explorar o Princípio da Invariância (PI) e o Princípio do Elemento Extremo (PE), oferecendo um material de apoio robusto para professores e estudantes envolvidos com competições olímpicas de matemática. Nosso trabalho busca preencher uma lacuna importante na literatura acadêmica, já que poucos textos abordam sistematicamente esses temas. Além de apresentar os fundamentos teóricos, propomos técnicas e métodos de treinamento especializados, desenvolvidos para atender às particularidades do raciocínio olímpico, que exige não apenas conhecimento teórico aprofundado, mas também a capacidade de reconhecer padrões e aplicar estratégias criativas de forma sistemática. Preparar-se para olimpíadas de matemática não é só sobre saber fórmulas e conceitos, é sobre desenvolver habilidades que só aparecem com muita prática. Essa constatação remete à profunda reflexão do filósofo Aristóteles: *"Nós somos o que repetidamente fazemos. A excelência, portanto, não é um ato, mas um hábito."*

O Princípio da Invariância é essencial na matemática olímpica por revelar propriedades que permanecem inalteradas mesmo sob transformações, sendo aplicável em áreas como combinatória (para analisar configurações dinâmicas), teoria dos números (identificando padrões invariantes), teoria dos grafos (estudando características preservadas), álgebra (simplificando estruturas) e geometria (detectando relações constantes). Sua força está na capacidade de extrair regularidades ocultas, transformando problemas aparentemente complexos em abordagens mais sistemáticas e elegantes. Podemos citar como exemplo básico, a paridade de um número (ser par ou ímpar) é um invariante: se um número é par, ele continuará par mesmo quando multiplicado por outro inteiro, como em $6 \times 3 = 18$. Outro exemplo comum seria o valor absoluto de um número real, que não muda independente do sinal ($\mid 5 \mid = \mid -5 \mid = 5$). Já na geometria podemos citar, a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre será igual a $180°$ ou a área de uma figura geométrica, que não se altera mesmo que a figura seja movida ou girada no plano. Embora simples, esses exemplos revelam o poder dos invariantes matemáticos e como eles atuam mesmo nas situações mais básicas. Temos que muitas provas por indução ou contradição se baseiam em invariantes. Por isso reconhecer invariantes exige um olhar atento, e o domínio do uso de invariantes não apenas amplia o repertório de técnicas matemáticas, mas também fortalece a nossa capacidade de abstração na resolução de problemas.

Em geral quando tentamos resolver um problema, uma das principais dificuldades é lidar com uma grande quantidade de elementos a serem compreendidos e acompanhados. Um problema pode envolver uma sequência com vários (talvez infinitos) elementos, ou um problema de geometria pode incluir diversas linhas e formas. Assim precisamos de um bom método para resolver problemas desse tipo que busque organizar essa complexidade de maneira eficaz. Uma ótima estratégia para isso é o princípio do extremo : A ideia central é supor que os elementos do seu problema estejam ordenados. Foque nos elementos "maior" e "menor", pois eles frequentemente podem estar sujeitos a restrições interessantes.

O princípio do elemento extremo é uma técnica matemática que consiste em selecionar um objeto que atinja um valor extremo (máximo ou mínimo) em relação a uma determinada função ou situação problema. A prova da propriedade desejada para esse objeto segue ao demonstrar que qualquer pequena perturbação (ou variação) em sua estrutura levaria a um aumento ou diminuição no valor da função, confirmando sua eficiência. Além disso, o princípio do elemento extremo é principalmente construtivo, fornecendo um algoritmo para construir o objeto de resolução. Por exemplo, em problemas de combinatória ou geometria, escolher o ponto mais distante, o número maior ou a configuração mais simétrica pode fornecer um ponto de partida claro. O princípio funciona porque elementos extremos geralmente têm características especiais que limitam as possibilidades, ajudando a encontrar padrões ou contradições que levam à solução.

O Capítulo 1 desta dissertação apresenta uma breve exposição sobre as motivações que levaram à elaboração do trabalho, bem como uma introdução ao tema proposto para investigação.

O capítulo 2 dessa dissertação é dedicado a uma breve análise histórica das olimpíadas de matemática, destacando sua evolução, relevância ao longo dos anos e suas contribuições para a sociedade. O texto aborda especificamente as competições nacionais OBM, OBMEP e OCM, explorando suas origens, reformulações e impactos no cenário educacional brasileiro.

O capítulo 3 apresenta uma fundamentação teórica sobre os Princípios de Indução, Boa Ordenação e Dirichlet, essenciais para a compreensão adequada do tema proposto. Esses princípios são extremamente necessários na abordagem de problemas de natureza combinatória e discreta, fornecendo bases sólidas para as demonstrações e técnicas discutidas posteriormente.

Os capítulos 4 e 5 focam na aplicação prática do Princípio da Indução (PI) e do Princípio do Elemento Extremo (PE), por meio de um conjunto selecionado de problemas. Esses exemplos ilustram de maneira detalhada a utilização desses métodos, permitindo ao leitor não apenas observar, mas também assimilar as estratégias empregadas.

Por fim, o capítulo 6 consolida o estudo, aplicando as técnicas assimiladas na resolução de problemas provenientes das olimpíadas mencionadas. Essa análise prática visa demonstrar a eficácia dos princípios discutidos e sua relevância em competições matemáticas. Este capítulo também se consolida como o produto educacional central desta dissertação, oferecendo uma abordagem didática e aplicada dos princípios matemáticos discutidos ao longo do trabalho, para servir como um recurso valioso (material formativo) tanto para professores, que podem utiliza-lo em sala de aula, quanto para estudantes, que encontrarão nele um guia claro e estimulante para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade matemática.

2 PANORAMA DA OBM, OBMEP E OCM: SÍNTESE HISTÓRICA E CONTRIBUIÇÕES

Desde sua criação as olimpíadas de matemática apresentam como valores, a capacidade de identificar e aprimorar, nos participantes, o pensamento estratégico e a criatividade na resolução de problemas desafiadores. Elas atuam como laboratórios de desenvolvimento intelectual, onde estudantes aprendem a enfrentar questões complexas por meio de raciocínio lógico, persistência e abordagens inovadoras. Assim essas competições abrangem tanto questões estritamente matemáticas quanto problemas de outras naturezas que demandem abordagens matemáticas para sua solução. Constituem um ambiente privilegiado para o exercício dessa habilidade, uma vez que os desafios propostos geralmente requerem apenas conhecimentos fundamentais da disciplina.

Na verdade, a maioria das questões pode ser resolvida com base no conhecimentos do ensino básico, sem necessidade de tópicos avançados como trigonometria avançada, cálculo diferencial ou geometria analítica. A essência do desafio reside não no domínio de conceitos sofisticados, mas sim na capacidade do estudante de articular, aplicar e sintetizar esses conhecimentos básicos de maneira criativa e eficaz para alcançar a solução.

Uma observação pertinente é que os problemas iniciais das olimpíadas guardam semelhanças com aqueles presentes em avaliações educacionais internacionais, como o PISA (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes). Desse modo, a participação em competições olímpicas de matemática representa uma valiosa preparação para exames padronizados, pois desenvolve habilidades de raciocínio lógico e resolução de problemas. Considere os seguintes exemplos:

- (PISA-2012) Uma escada de 5 metros está apoiada em uma parede. Se a base da escada é afastada 1 metro da parede, quanto o topo da escada desce?
- (OBMEP 2023 - Nível 1) Um retângulo tem lados de 6 cm e 8 cm. Se diminuirmos seu maior lado em 2 cm e aumentarmos o menor lado em x cm para que a área permaneça a mesma, qual é o valor de x?

Ambos os problemas exigem a aplicação de conceitos matemáticos básicos (como o Teorema de Pitágoras e o cálculo de área), envolvem a análise de como uma mudança afeta o sistema como um todo, e desenvolvem a capacidade de modelagem matemática, demonstrando como competições olímpicas e avaliações padronizadas compartilham objetivos pedagógicos similares no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático.

Entrando no contexto histórico as Olimpíadas de Matemática, no formato atual, tiveram origem em 1894 na Hungria, com competições organizadas em âmbito nacional. Progressivamente, países do Leste Europeu adotaram iniciativas semelhantes, culminando na primeira Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) em 1959, realizada na Romênia.

Já no Brasil, a trajetória olímpica teve início em 1979, quando a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) criou a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Sua trajetória, construída graças ao esforço coletivo de professores universitários, educadores da educação básica e entusiastas da matemática, incluindo pioneiros como os matemáticos Angelo Barone Netto, Augusto César Morgado e João Bosco Pitombeira de Carvalho, transformou-se em referência para o desenvolvimento científico brasileiro.

Inicialmente voltada para preparação de equipes para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), a OBM evoluiu de um formato único para um sistema abrangente, incorporando em 1998 uma significativa reformulação liderada pelo matemático Jacob Palis. A reestruturação conduzida pelo IMPA com apoio do CNPq estabeleceu uma arquitetura competitiva inédita, organizada em três eixos principais: primeiro, a formação de uma rede nacional de Coordenadores Regionais; segundo, a segmentação em três faixas educacionais contemplando alunos da 5ª e 6ª séries, 7ª e 8ª séries, e ensino médio; e terceiro, a criação do nível universitário em 2001, alcançando na primeira edição reformulada a expressiva marca de 500 mil participantes em âmbito nacional. Mesmo com as diversas atualizações em seu formato, seus objetivos se mantiveram inalterados, como:

- Incentivar o estudo da Matemática entre estudantes;
- Aprimorar a formação de professores;
- Contribuir para a melhoria do ensino da disciplina;
- Identificar e desenvolver jovens talentos.

E esse sucesso da OBM possibilitou em 2005 a criação da OBMEP, essa expansão foi fruto da parceria entre governo federal, SBM e IMPA, que em 2017 se unificaram em um sistema integrado.

A conexão entre escolas básicas, universidades e centros de pesquisa, estabelece a OBM como peça fundamental para a formação de talentos e o fortalecimento da cultura matemática no Brasil, superando desafios orçamentários e transformando gerações de jovens apaixonados pela Matemática.

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) se trata hoje de um projeto nacional voltado tanto para escolas públicas quanto privadas, que tem como fundamentos:

- Estimular e promover o estudo da Matemática;
- Contribuir para a melhoria da educação básica, garantindo acesso a materiais didáticos de qualidade;
- Identificar jovens talentos e incentivá-los a ingressar em universidades, especialmente nas áreas científicas e tecnológicas;
- Aperfeiçoar e valorizar professores da rede pública;
- Integrar escolas, universidades públicas, institutos de pesquisa e sociedades científicas;
- Promover inclusão social por meio da democratização do conhecimento.

A importância da OBMEP hoje não se deve só do fortalecimento do ensino de Matemática no país, mas de uma ponte para oportunidades acadêmicas e profissionais. Da sua criação voltada para estudantes do 6° ano do Ensino Fundamental ao 3° ano do Ensino Médio, a competição cresceu devido a sua magnitude e em 2022 lançou a OBMEP Mirim, destinada a alunos do 2° ao 5° ano do Ensino Fundamental. Esta ampliação passa a refletir um avanço significativo já que ofertando mais uma modalidade, passa a inserir mais desenvolvimento ensejando novos talentos mirins as olimpíadas científicas no Brasil, que hoje passam a englobar, competições para todas as faixas etárias, eventos regionais e nacionais, provas adaptadas para diferentes níveis de aprendizagem e programas de preparação e desenvolvimento docente. Assim, nos tornamos um país que demonstra com o devido esmero as competições matemáticas acompanhando nossos alunos desde os primeiros anos escolares até o ingresso no ensino superior.

Em 2024 a OBMEP apresenta uma nova conquista, com a criação do IMPA Tech, iniciativa de destaque significativo no ensino superior brasileiro. O IMPA Tech oferece uma graduação pioneira em Matemática Aplicada à Tecnologia e Inovação, integrando conhecimentos avançados de matemática com ciência da computação, análise de dados e física moderna. O programa foi concebido para atender prioritariamente aos medalhistas da OBMEP, proporcionando-lhes bolsas de estudo integrais, auxílio moradia e suporte financeiro para manutenção durante o curso.

Esta iniciativa estratégica foi fruto da colaboração entre o Ministério da Educação, o Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação e a Prefeitura do Rio de Janeiro. O principal objetivo é formar profissionais qualificados para liderar a transformação digital e tecnológica do país, criando pontes entre o talento matemático identificado nas olimpíadas científicas e as demandas do mercado de tecnologia de ponta. O modelo combina excelência acadêmica com apoio socioeconômico, garantindo que jovens talentos possam dedicar-se integralmente à sua formação.

Por fim, outro fato marcante nessa cadeia de realizações e transformações realizadas pelos trunfos de nossas olímpiadas, foi a criação em 17 de outubro de 2018, da primeira edição do Torneio Meninas na Matemática (TM²). Competição direcionado a alunas do Ensino Fundamental (a partir do 8º ano) e Médio, tanto de escolas públicas quanto privadas, em todo o Brasil. Onde foram selecionadas estudantes com base em seu desempenho na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) em 2018, além de indicações por mérito acadêmico.

O TM² não apenas reconheceu o talento das jovens matemáticas, mas também serviu como etapa seletiva para a European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO), competição internacional exclusiva para meninas. Desde 2017, o IMPA financia a participação brasileira na EGMO, e as melhores competidoras do TM² tiveram a oportunidade de representar o Brasil na edição de 2019, em Egmond, Holanda. A iniciativa por sua vez visou reduzir a disparidade de gênero nas olimpíadas científicas, onde os dados mais recentes mostram que a participação feminina na OBMEP cresceu 15% entre 2018 e 2023 em níveis avançados.

Agora falaremos de outra competição mas de ordem regional, a OCM (Olímpiada Cearense de Matemática), realizada todo ano sem interrupções desde a sua criação em 1981, é uma competição que já revelou centenas de alunos, professores e escolas com talento especial para aprender e ensinar matemática. Organizada pela Universidade Federal do Ceará (UFC), por meio do Departamento de Matemática, a OCM é voltada para estudantes do Ensino Fundamental e Médio, divididos em duas categorias de ensino (fundamental e médio). Os desafios propostos nas provas são criados por professores da Comissão de Olimpíadas da UFC. Muitos deles inéditos, desenvolvidos exclusivamente para a competição.

Ao longo dos anos, a OCM se tornou uma espécie de trampolim para competições matemáticas mundo afora, onde estudantes cearenses vêm brilhando regularmente. Não é à toa que o estado é reconhecido nacionalmente pelos resultados impressionantes na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e em torneios internacionais. Tudo começou com a iniciativa de professores visionários como Marcondes França, João Marques, Guilherme Ellery e Raimundo Thompson (1944-1993), que deram os primeiros passos. Mais tarde, a coordenação passou por Frederico Girão (2014-2017) e, desde 2018, está sob responsabilidade do professor Romildo José da Silva.

A OCM é uma atividade de extensão da UFC, com objetivos similares aos das olimpíadas já consolidadas Brasil a fora. Esse propósito visa, descobrir e estimular talentos matemáticos, incentivar a participação de jovens em competições globais (como a Olimpíada do Cone Sul e a Internacional), melhorar o ensino da disciplina nas escolas e fortalecer a conexão entre a universidade e a educação básica. Mais do que uma prova, é um projeto que une gerações, transformando o "medo" de números em oportunidades reais e orgulho para o estado.

As Olimpíadas de Matemática Básica, como a OBM, OBMEP e outras competições regionais, são fundamentais para o avanço da educação matemática no Brasil e portanto para garantir o sucesso contínuo dessas iniciativas, é importante que haja um suporte institucional sólido e um compromisso com a inclusão e a equidade. Assim, as olimpíadas podem continuar a desempenhar um papel crucial na educação matemática e no estímulo ao potencial dos jovens brasileiros.

Para mais informações indico Gomes (2019), o Noticiário SBM (2019) e os sítios da OBM (2025), OBMEP (2025) e OCM (2025) que nos serviram de base informativa. Peço também que vejam o documentário OBMEP (2013) a título de conhecer o grande impacto que ela proporciona relatado em histórias de vida.

3 PRINCÍPIO DE INDUÇÃO, PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO E PRINCÍPIO DE DIRICHLET

Neste capítulo, será apresentado uma exposição das principais propriedades, axiomas, proposições, lemas, corolários, teoremas e noções fundamentais para o desenvolvimento do objetivo principal deste trabalho: a análise do Princípio da Invariância e do Princípio do Elemento Extremo, bem como suas aplicações.

Dito isto revisitaremos outros princípios matemáticos que são apresentados no início da jornada acadêmica do aluno de matemática que são importantíssimos métodos na resolução de problemas. Destes destacaremos os Princípio de Indução, Princípio da Boa Ordenação e por último o Princípio de Dirichlet. Iremos cita-los brevemente neste trabalho como título de revisão, já que o bom entendimento desses princípios ensejará na melhor compreensão do tema dessa dissertação.

3.1 PRINCÍPIO DE INDUÇÃO

O Princípio da Indução é uma ferramenta poderosa para demonstrar propriedades relacionadas aos números naturais. Logo, ele é fundamental na resolução de muito problemas. Além disso, é igualmente importante compreender seu significado e seu papel no contexto geral da Matemática. Dominar o Princípio da Indução equivale, em grande parte, a entender a essência dos números naturais.

Os números naturais formam um modelo matemático, uma escala padrão que permite realizar a operação de contagem. Ao comparar conjuntos de objetos com essa escala abstrata e ideal, tornamos mais precisa a noção de quantidade. Esse processo de contagem pressupõe, portanto, o conhecimento prévio da sequência numérica.

Sabemos que os números naturais são 1, 2, 3, 4, 5, e assim por diante. O conjunto completo desses números é denominado conjunto dos números naturais, representado pelo símbolo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Vale ressaltar que essa noção faça sentindo se já reconhecemos o que é ser um número natural. Porém, se não dominamos esse conceito? Investigamos o que é fundamental na sequência dos números $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$

Giuseppe Peano (1858-1932) mostrou que toda a teoria dos números naturais pode ser construída com base em quatro princípios básicos, conhecidos como os Axiomas de Peano.

- Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
- Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes. (Ou ainda: números que têm o mesmo sucessor são iguais.)
- Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um".
- Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o

sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contém todos os números naturais.

Para entender melhor como funciona o princípio de indução, consideremos um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ tal que $1 \in A$. Suponha, além disso, que sempre que um número natural $k \in A$, então $k+1$ também pertence a A. Nesse caso, $1 \in A$ garante que $2 \in A$. Da mesma forma, $2 \in A$ nos permite concluir que $3 \in A$. Seguindo esse raciocínio, concluímos que A contém todos os números naturais, ou seja, $A = \mathbb{N}$, ou seja, podemos enunciar da seguinte forma.

Axioma 3.1. *Seja $A \subset \mathbb{N}$ um conjunto satisfazendo as condições:*

i) $1 \in A$.

ii) Se $k \in A$, então $k+1 \in A$. Então $A = \mathbb{N}$.

Proposição 3.1. *Dada uma propriedade $P(n)$, temos $P(n)$ verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ se e somente se:*

i) $P(1)$ é verdadeira.

ii) $P(k)$ verdadeira. $\Rightarrow P(k+1)$ verdadeira.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Para mostrar a equivalência, primeiro suponha que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. Imediatamente obtemos $P(1)$ verdadeira (caso particular para $n = 1$) e, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, como tanto $P(k)$ quanto $P(k+1)$ são verdadeiras por hipótese, a implicação $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ segue trivialmente. Reciprocamente, assumindo (i) $P(1)$ verdadeira e (ii) $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para todo k, considere o conjunto $S = \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ é verdadeira}\}$. Pela condição (i), $1 \in S$, e pela condição (ii), sempre que $k \in S$ temos $k+1 \in S$. Pelo Axioma da Indução, segue que $S = \mathbb{N}$, ou seja, $P(n)$ vale para todo número natural n. $\square$

Exemplo 3.1. Prove por indução que para cada $n \in \mathbb{N}$ a soma dos n primeiros quadrados perfeitos é igual a:

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Solução: Devemos mostrar a validade da igualdade:

$$P(n) : \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

i) Para $n = 1$; temos $P(1) = \frac{1}{6}1(1+1)(2 \cdot 1 + 1) = 1 = 1^2$

ii) Então supomos que $P(k)$ é verdade para algum $k \in \mathbb{N}$, precisamos mostrar que vale também para $k+1$, ou seja, $\sum\limits_{j=1}^{k+1} j^2 = \dfrac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$. Usando a hipótese de indução temos que:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1} j^2 &= \sum_{j=1}^{k} j^2 + (k+1)^2\\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2\\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.\end{aligned}$$

Portanto por indução $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exemplo 3.2. Mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 6n - 1$ é divisível por 9.

Solução:

i) Note que $P(1) = 4^1 + 6 \cdot 1 - 1 = 9$, então $P(1)$ é verdade, pois $9/9$.

ii) Suponhamos que $P(k)$ seja verdade para algum $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $4^k + 6k - 1$ é divisível por 9, é equivalente dizer que existe um s inteiro tal que $P(k) = 9s$. Logo teremos $4^k = 9s - 6k + 1$. Se multiplicarmos ambos os lados da expressão por 4, obtemos $4^{k+1} = 36s - 24k + 4$. Assim $4^{k+1} + 6(k+1) - 1 = 36s - 24k + 4 + 6(k+1) - 1 = 36s - 18k + 9 = 9(4s - 2k + 1)$. Concluindo que, $4^{k+1} + 6(k+1) - 1$ é divisível por 9, deste modo $P(k+1)$ é verdadeira. Assim mostramos que $P(k)$ implica $P(k+1)$, para todo k natural. Logo pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Axioma 3.2. *Seja $a \in \mathbb{N}$ e $A \subset \{a, a+1, a+2, ...\}$ um conjunto tal que:*

i) $a \in A$.

ii) Se $k \in A$, então $k + 1 \in A$.

Logo teremos $A = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$.

Essa próxima variação do princípio de indução oferece maior uso como método de prova. Suponha, novamente, que temos uma propriedade $P(n)$ associada a um número natural n, e desejamos demonstrar que ela é verdadeira para todos os números naturais a partir de um certo valor a (ou seja, para todo $n \geq a$). Então definido o conjunto $A = \{k \in \mathbb{N}; P(k) \text{ é verdadeira}\}$ e visto que $A = \{a, a+1, a+2, \ldots\}$, tem-se $P(n)$ verdadeira para todo $n \geq a$ natural.

Proposição 3.2. *Dado $a \in \mathbb{N}$ e uma propriedade $P(n)$ do natural n, temos $P(n)$ verdadeira paro todo $n \geq a$, se e somente se as duas condições a seguir forem satisfeitas:*

i) $P(a)$ é verdadeira.

ii) $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ verdadeira.

Exemplo 3.3. (ENQ PROFMAT 2024.1) Considere a sequência de Fibonacci (u_n) definida recursivamente por $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, para $n \geq 2$, com $u_1 = u_2 = 1$. Sabendo que o número real q é raiz da equação $x^2 = x + 1$, mostre que: $q^n = u_n q + u_{n-1}$, para todo $n \geq 2$.

Solução: Usaremos indução sobre n.

i) Para n igual a 2 temos que $q^2 = u_2 q + u_1$, logo a afirmação é verdade pois, q é raiz da equação $x^2 = x + 1$.

ii) Agora supomos que $q^n = u_n q + u_{n-1}$, para um certo $n \geq 2$. Multiplicando a equação por q obtemos $q^{n+1} = q^2 u_n + q u_{n-1}$. Substituindo $q^2 = q + 1$, temos que:

$$q^{n+1} = (q+1)u_n + q u_{n-1} = q u_{n+1} + u_n.$$

Logo, a afirmação é válida para $n+1$. Portanto $q^n = u_n q + u_{n-1}$, é verdade para todo $n \geq 2$. ■

Exemplo 3.4. Mostre que existem inteiros não negativos x e y tais que $7x + 8y = n$ para todo $n \geq 42$. Seria possível tomar um número menor que 42 na afirmativa acima?

Solução: Iremos primeiro responder se é possível encontrar um par (x, y) de inteiros não negativos que sejam solução, quando $n < 42$. A resposta é não! Basta verificar que se tomarmos $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ na equação $7x + 8y = 41$ não encontramos um x inteiro não nulo como solução.

Agora demonstraremos por indução que sempre é possível encontrar um par (x, y) de inteiros não negativos que sejam solução, quando $n \geq 42$.

i) Para $n = 42$, temos que a equação $7x + 8y = 42$ possui solução para o par $(6, 0)$, pois $7 \cdot 6 + 8 \cdot 0 = 42$.

ii) Então suponha que a equação $7x + 8y = 42$ tenha solução (a, b) para algum $n \geq 42$; isto é, $7a + 8b = n$. Note que, para qualquer solução (a, b), devemos ter $a \geq 1$ ou $b \geq 1$. Se $a \geq 1$, observando que $7 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 = 1$, segue que $7(a-1) + 8(b+1) = 7a - 7 + 8b + 8 = 7a + 8b + 1 = n + 1$, o que mostra que a equação $7x + 8y = n + 1$ admite solução para $(a-1, b+1)$. Se $a = 0$, então $b \geq 6$. Usando a igualdade $7 \cdot 7 + 8 \cdot (-6) = 1$, segue que $7(a+7) + 8(b-6) = 7a + 49 + 8b - 48 = 7a + 8b + 1 = n + 1$, o que prova que mostra que $7x + 8y = n + 1$ admite solução para $(a+7, b-6)$. Logo concluímos que, em qualquer caso a equação $7x + 8y = n + 1$ admite solução, sempre que a equação $7x + 8y = n$, para algum $n \geq 42$, tenha solução. ■

Exemplo 3.5. (OBM 1998) Para cada inteiro $n \geq 3$, mostre que existem n números naturais dois a dois distintos tais que a soma de seus inversos é igual a 1.

Solução: Vamos proceder por indução sobre $k \geq 3$. Basta observar que no caso base $n = 3$ temos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Agora suponha que para um número natural $k \geq 3$ existam números naturais $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, tais que:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} = 1.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{2}$ e somando $\frac{1}{2}$ a ambos os lados, obtemos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + \frac{1}{2x_2} + \cdots + \frac{1}{2x_k} = 1.$$

Como $2 < 2x_1 < 2x_2 < \cdots < 2x_k$, obtivemos $k+1$ números naturais distintos dois a dois cuja soma dos inversos é igual a 1, completando assim o passo de indução. ■

Observação 3.1. Note que na solução do problema acima encontramos a ideia para determinar os números $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ explicitamente. A saber, começamos com a terna $(2, 3, 6)$ que resolve o caso $k = 3$. Daí, produzimos a quádrupla $(2, 4, 6, 12)$ que resolve o caso $k = 4$. Do mesmo modo, produzimos a quíntupla $(2, 4, 8, 12, 24)$, que resolva o caso $k = 5$. Com isso, podemos conjecturar que a $k-$upla $(2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{k-2}, 3 \cdot 2^{k-3}, 3 \cdot 2^{k-2})$ resolve para um natural k qualquer. A verificação dessa conjectura é imediata, por indução, pois como vimos no passo de indução feito acima, para produzir a solução para o caso $k+1$ é suficiente duplicarmos cada número da solução para k e acrescentar o número 2 no início.

Exemplo 3.6. (OBM 2006) Sejam $(x_k)_{k\geq 1}$ e $(y_k)_{k\geq 1}$ sequências de números reais tais que, para todo n natural, temos:

$$x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n \quad \text{e} \quad y_{n+1} = y_n^3 - 3y_n.$$

Se $x_1^2 = y_1 + 2$, mostre que $x_n^2 = y_n + 2$ para todo n natural.

Solução: Para $n = 1$, a igualdade vale por hipótese:

$$x_1^2 = y_1 + 2.$$

Agora suponha que para $n = k$ vale:

$$x_k^2 = y_k + 2 \quad \text{(Hipótese de Indução).}$$

Calculamos x_{k+1}^2:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^2 &= (x_k^3 - 3x_k)^2 \\ &= x_k^6 - 6x_k^4 + 9x_k^2. \end{aligned}$$

Calculamos $y_{k+1} + 2$ usando $y_k = x_k^2 - 2$.

$$\begin{aligned} y_{k+1} + 2 &= (y_k^3 - 3y_k) + 2 \\ &= (x_k^2 - 2)^3 - 3(x_k^2 - 2) + 2 \\ &= x_k^6 - 6x_k^4 + 9x_k^2. \end{aligned}$$

Portanto, $x_{k+1}^2 = y_{k+1} + 2$. Pelo Princípio de Indução

$$x_n^2 = y_n + 2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

■

3.2 PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

O Princípio da Boa Ordenação (PBO), também conhecido como Princípio da Boa Ordem, é um dos alicerces da matemática discreta e da teoria dos números, com implicações profundas em demonstrações, estruturas algébricas e algorítmos. Além de simplesmente garantir a existência de um menor elemento em conjuntos de números naturais, o PBO fornece uma estrutura lógica robusta para provas matemáticas, sendo especialmente importante em situações onde trabalhamos com conjuntos finitos e discretos.

Para essa dissertação, o PBO será de suma importância, dado que ele possibilita a construção de soluções em conjuntos finitos, garantindo a existência de elementos mínimos e permitindo argumentos rigorosos por indução e contradição. Sua aplicação com os princípios da Invariância e do Elemento Extremo permitirá abordagens: Assegurando a existência de configurações mínimas essenciais para aplicação da invariância, enquanto valida a escolha de elementos extremos em argumentos de otimização. Antes de tudo para garantir a compreensão do PBO, é importante primeiro estudarmos a estrutura de ordem no naturais, que constituem a base sobre a qual o PBO será definido.

3.2.1 Ordem

A adição dos números naturais nos permiti incluir uma relação de ordem nos $\mathbb{N}$. Assim dados $m, n \in \mathbb{N}$ podemos ter m menor que n e denotaremos $m < n$, ou seja, significa que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. A notação $m \leq n$ representa duas condições, $m < n$ ou $m = n$. Por definição, tem-se portanto $m < m + p$ para quaisquer $m, p \in \mathbb{N}$ e que $1 < n$ para todo natural $n \neq 1$.

Dessa forma, pelo axioma de Peano, $n \neq 1$ implica que ele é sucessor de algum natural m, ou seja, $n = m + 1$, assim $n > 1$. De fato 1 é o menor dos naturais.

Proposição 3.3 (Transitividade)**.** *Se $m < n$ e $n < p$, então $m < p$.*

Demonstração. Se $m < n$, $n < p$ então existem k,r $\in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$, $p = n + r$, logo $p = (m + k) + r = m + (k + r)$, portanto $m < p$. □

Observação 3.2. Outro fato importante de relação de ordem é que, dados dois números naturais diferentes m, n dizemos que são comparáveis quando se tem $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.

Proposição 3.4 (Comparabilidade)**.** *Todo número natural n é comparável com qualquer número natural m.*

Demonstração. Por indução. Temos que o 1 é comparável com qualquer outro natural pois vimos que $1 < m$ qualquer que seja $m \neq 1$. Suponhamos agora que o número n seja comparável com todos os números naturais. Mostremos, a partir daí, que $n+1$ também tem essa propriedade. Com efeito, seja $m \in \mathbb{N}$ pego arbitrariamente. Temos que: $m < n$, $m = n$ ou $n < m$.

i) Se $m < n$. Então $m < n+1$ por transitividade, pois sabemos que $n < n+1$.

ii) Se for $m = n$, então $m < n+1$.

iii) Se for $n < m$ então existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$. Neste caso, há duas possibilidades. Ou se tem $p = 1$, donde $m = n+1$, ou então $p > 1$, logo $p = 1 + p'$, e daí $m = (n+1) + p'$ e concluímos que $n + 1 < m$. □

Proposição 3.5 (Tricotomia)**.** *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, qualquer das afirmações $m < n$, $m = n$, $n < m$ exclui as outras duas.*

Demonstração. Se tivéssemos $m < n$ e $m = n$, então existiria $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = m + p$, donde $m + 1 = m + (p+1)$ e, concluiríamos que $1 = p + 1$, um absurdo, pois 1 não é sucessor de p. Portanto $m < n$ (e analogamente, $n < m$) é incompatível com $m = n$. Do mesmo modo, se tivéssemos $m < n$ e $n < m$, então existiria $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $n = m + p$ e $m = n + k$, que resultaria $n = n + k + p$, logo $n + 1 = n + (k + p + 1)$ e, concluiríamos que $1 = k + p + 1$, um absurdo. □

Proposição 3.6. *Não existem números naturais entre n e $n+1$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que exista $p \in \mathbb{N}$ tal que $n < p < n+1$. Como $n < p$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p = n + k$. Analogamente, como $p < n + 1$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $n + 1 = p + r$. Substituindo p, obtemos $n + 1 = (n + k) + r$, o que implica $n + 1 = n + (k + r)$. Cancelando n, segue que $1 = k + r$. No entanto, como $k, r \in \mathbb{N}$, temos $k \geq 1$ e $r \geq 1$, logo $k + r \geq 2$, o que contradiz $k + r = 1$. Portanto, a suposição inicial é falsa, e não há números naturais entre n e $n+1$. □

Proposição 3.7 (Monotonicidade)**.** *Seja $m, n \in \mathbb{N}$ se $m < n$, então $m + p < n + p$ e $mp < np$.*

Demonstração. Usando a definição de $<$, temos que $m < n \Rightarrow n = m+k \Rightarrow n+p = (m+k)+p \Rightarrow m+p < n+p$. Analogamente, $m < n \Rightarrow n = m+k \Rightarrow np = mp+kp \Rightarrow np > mp$. □

Observação 3.3. A recíproca da monotonicidade é a Lei do Corte para desigualdades: $m + p < n + p \Rightarrow m < n$ e $mp < np \Rightarrow m < n$.

Dado um subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ diz-se que um número natural a é o menor (ou primeiro) elemento de a quando $a \in A$ e, além disso, $a \leq x$, para todos os elementos $x \in A$. Por exemplo, 1 é o menor elemento de $\mathbb{N}$. A seguir, dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos I_n o conjunto de todos os naturais p tais que $1 \leq p \leq n$. Assim, $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1, 2\}$, $I_3 = \{1, 2, 3\}$ etc.

Proposição 3.8. *(Princípio da Boa Ordenação.) Todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $1 \notin A$, pois caso contrário o 1 seria o menor elemento de A. O menor elemento de A cuja a existência desejamos mostrar, será da forma $n+1$. Pois devemos encontrar um natural n tal que $n+1$ pertença a A e, além disso, todos os elementos de A são maiores do que n, logo maiores do que $1, 2, 3, ...n$. Em outras palavras, queremos um natural n tal que $I_n \subset \mathbb{N} - A$ e $n+1 \in A$. Assim, consideremos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N}; I_n \subset \mathbb{N} - A\}$. Portanto X é o conjunto dos números naturais n tais que todos os elementos de A são maiores do que n. Como supomos que $1 \notin A$, sabemos que $1 \in X$. Por outro lado como A não é vazio, nem todos os naturais pertencem a X, ou seja, $X \neq \mathbb{N}$. Então temos que X não é um conjunto indutivo, isto é, deve existe algum $n \in X$ tal que $n+1 \notin X$. Isto significa que todos os elementos de A são maiores que n mas nem todos são maiores que $n+1$. Como não existem naturais entre n e $n+1$, concluímos que $n+1 \in A$ e é o menor elemento de A. □

Exemplo 3.7. Mostre que não existe um inteiro m tal que $0 < m < 1$.

Solução: Suponha por absurdo que exista um m que satisfaça essa relação. Assim, existe um conjunto $\mathbb{S} = \{m; 0 < m < 1\}$ não vazio. Pelo princípio da boa ordenação temos que deve existir m_0 pertencente a $\mathbb{S}$ tal que $m_0 = min(\mathbb{S})$. E como $m_0 \in \mathbb{S}$ então:

$$0 < m_0 < 1,$$
$$\Rightarrow 0 \cdot m_0 < m_0 \cdot m_0 < 1 \cdot m_0.$$
$$\Rightarrow m_0^2 < m_0 < 1;$$

o que resulta num absurdo, pois assim teríamos m_0^2 pertencente a $\mathbb{S}$ (pois m_0^2 está entre 0 e 1) sendo menor que m_0 contrariando a minimalidade de m_0. ■

3.3 PRINCÍPIO DE DIRICHLET

O Princípio da Casa dos Pombos é um dos métodos de demonstração mais utilizados em competições de matemática. Em alguns países, como a Rússia, é conhecido como *Princípio de Dirichlet*, em homenagem ao matemático Lejeune Dirichlet, que foi o primeiro a aplicar essa ideia na solução de problemas não triviais. Matemáticos como os húngaros Paul Erdős e George Szekeres também se destacaram pelo uso desse princípio para resolver uma variedade de problemas. Sua forma mais simples pode ser enunciada da seguinte forma: "Se em n gaiolas são postos $n+1$ pombos, então pelo menos uma das gaiolas terá mais de um pombo". De fato, essa afirmação é a tradução alegórica do seguinte fato matemático.

Definição 3.1. Seja A um conjunto qualquer. A cardinalidade de A, denotada por $|A|$

ou card(A), é uma medida do "tamanho" de A definida da seguinte forma:

- Para A finito: o número de elementos de A.
- Para A infinito: dizemos que $|A| = |B|$ quando existe uma bijeção $f : A \to B$.

Proposição 3.9. *Se M e N são dois conjuntos finitos tais que $|M| > |N|$, então não existe função injetiva $f : M \to N$.*

Demonstração. Inicialmente lembre-se de que para cada $y \in N$, sua imagem inversa é dada $f^{-1}(y) = \{x \in M; f(x) = y\}$. Com isso, temos

$$M = \bigcup_{y \in N} f^{-1}(y).$$

Essa é uma união disjunta e, além disso, se f fosse injetiva, teríamos $|f^{-1}(y)| \leq 1$. Assim, seguiria que

$$|M| = \sum_{y \in N} |f^{-1}(y)| \leq \sum_{y \in N} 1 = |N|.$$

Isso contradiz a hipótese $|M| > |N|$. Logo, nas condições do enunciado, não pode existir função injetiva. $\square$

Em termos menos formais, a demonstração acima corresponde ao raciocínio que se em cada gaiola tivéssemos no máximo um pombo, então o número de pombos seria menor ou igual ao número de gaiolas.

O Princípio de Dirichlet admite uma generalização natural.

Definição 3.2. Seja $x \in \mathbb{Z}$. A função piso $\lfloor x \rfloor$ é definida como o maior inteiro que não supera x, ou seja:

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

A dupla desigualdade $n \leq x < n + 1$ caracteriza unicamente a função piso, fornecendo uma definição alternativa equivalente à definição por máximo.

Exemplo 3.8. Determine o maior inteiro.

- $\lfloor \pi \rfloor = 3$, pois $3 \leq \pi < 4$
- $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor = -2$, pois $-2 \leq -\sqrt{2} < -1$
- $\lfloor 5 \rfloor = 5$, pois $5 \in \mathbb{Z}$ (caso de igualdade)

Proposição 3.10. *Se colocarmos n pombos em k gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$ pombos.*

Demonstração. Por contradição, suponha que, quando dispusemos os n pombos nas k gaiolas, nenhuma delas ficou com pelo menos $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$ pombos. Então cada uma das k gaiolas terá no máximo $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor$ pombos. Assim, todas as gaiolas terão, no máximo, $k \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor$ pombos. Daí teremos:

$$k \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor \leq k(\frac{n-1}{k}) = n - 1 < n.$$

Absurdo! □

Exemplo 3.9. Prove que, em qualquer grupo de 20 pessoas, há ao menos 3 que nasceram no mesmo dia da semana.

Solução: Considere no problema os sete dias da semana como gaiolas e as pessoas como os pombos. O modo de colocar uma pessoa em uma gaiola é determinado pelo dia que a pessoa nasceu. O princípio da casa dos pombos nos garante que pelo menos uma gaiola (dia da semana) terá ao menos $\lfloor \frac{20-1}{7} \rfloor + 1 = 3$ pombos (pessoas). Assim confirmamos que pelo menos duas pessoas terão nascido no mesmo dia. ■

Exemplo 3.10. Em um grupo com 53 pessoas, sempre temos pelo menos 5 delas que fazem aniversário no mesmo mês do ano.

Solução: Consideremos os meses do ano como sendo as gaiolas. Assim, basta observar que $\lfloor \frac{53-1}{12} \rfloor + 1 = 4 + 1 = 5$. Portanto, a proposição garante que existe pelo menos um mês do ano em que temos pelo menos 5 aniversariando. ■

Exemplo 3.11. Se em uma urna contém 3 bolas vermelhas, 8 bolas verdes, 7 bolas azuis e 5 amarelas, qual é o menor número de bolas que devemos tirar (sem olhar) para que possamos ter certeza de termos tirado pelo menos 4 de uma mesma cor?

Solução: Tomando as quatro cores diferentes como sendo as gaiolas, segue que se retirarmos 5 bolas conseguimos garantir pelo menos duas bolas de uma mesma cor, concordando com $\lfloor \frac{5-1}{4} \rfloor + 1 = 1 + 1 = 2$. Para garantir pelo menos quatro bolas de uma mesma cor, observe que queremos o menor valor de n tal que $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor + 1 = 4$. Ou seja, $\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor = 3$. Portanto, devemos ter $n - 1 = 12$ e $n = 13$. De fato, ao retirarmos 12 bolas, pode ocorrer que tenhamos três bolas de cada cor. Porém, com a retirada da próxima bola teremos necessariamente 4 bolas de uma mesma cor. ■

Observação 3.4. O exemplo 3.11 nos chama a atenção para o fato que a aplicabilidade da proposição 3.10 está condicionada a informação de que cada gaiola tenha capacidade pelo menos igual a $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor$. Veja que se no referido exemplo tivéssemos somente duas bolas vermelhas (em vez de três), então a retirada de 12 bolas seria suficiente garantir que tivéssemos quatro bolas de uma mesma cor. Nesses casos em que há gaiolas com capacidade menor que a esperada, recomendamos que essas sejam desconsideradas, o problema seja resolvido considerando as gaiolas com capacidade suficientes e ao final somamos as capacidades das gaiolas que foram desconsideradas.

Exemplo 3.12. Se em uma urna contêm 2 bolas vermelhas, 3 bolas verdes, 7 bolas azuis, 5 amarelas e 6 pretas, qual é o menor número de bolas que devemos tirar (sem olhar) para que possamos ter certeza de termos tirado pelo menos 6 de uma mesma cor?

Solução: Nesse caso temos 5 gaiolas, que correspondem às cinco cores. Como queremos pelo menos 6 bolas de uma mesma cor, deveríamos ter $\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor + 1 = 6$, ou seja, $\lfloor \frac{n-1}{5} \rfloor = 5$. No entanto, a capacidade das gaiolas com bolas vermelhas e verdes não atinge essa média. Assim, resolvemos o problema considerando apenas as três gaiolas que têm a capacidade esperada. Portanto, devemos achar o menor valor de n tal que $\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor + 1 = 6$. Isso nos dá

$n = 16$. Portanto, a resposta para o problema é $16 + 2 + 3 = 21$. ■

Exemplo 3.13. Se escolhermos aleatoriamente 55 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ sempre existirão dois desses números cuja diferença é igual a 9.

Solução: Sejam $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{55} \leq 100$ os números escolhidos, escritos em ordem crescente. Consideremos essa lista de números transladados em 9 unidades, ou seja, olhemos para a lista $10 \leq x_1 + 9 < x_2 + 9 < x_3 + 9 < \ldots < x_{55} + 9 \leq 109$. Ao juntarmos essas duas listas, ficaremos com 110 números (pombos) que são elementos com conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 109\}$, que tem apenas 109 elementos (gaiolas). Assim, dois desses números devem coincidir. Mais especificamente, um elemento da primeira lista deve coincidir com um elemento da segunda lista, já que em ambas as listas os números são distintos. Portanto, existem dois índices $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, 55\}$ para os quais teremos $x_i = x_j + 9$, ou ainda, $x_i - x_j = 9$. ■

Observação 3.5. Observamos que ao analisarmos a solução do exemplo acima, vemos que o argumento não funcionaria diretamente se quiséssemos provar que sempre existem dois números dentre os 55 números escolhidos cuja diferença é 10. De fato, trocando 9 por 10 ficaríamos com duas listas de números, totalizando 110 números, cada um deles com valor entre 1 e 110. Assim, não temos mais como garantir que as listas terão um elemento em comum. No entanto, se tal elemento comum não existir, a união das duas listas coincide necessariamente com o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 110\}$. Nessas condições teríamos

$$2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{55}) + 10 \cdot 55 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 110$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{55}) = 101 \cdot 55.$$

Isso é um absurdo, pois o primeiro membro é par enquanto o segundo é ímpar. Esse absurdo mostra que as duas listas têm elemento em comum e portanto, sempre existem dois números dentre os 55 escolhidos de modo que a diferença é 10.

Por outro lado, destacamos que é possível fazer a escolha de 55 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 110\}$ de modo que não existam dois deles cuja diferença seja 11. Basta, por exemplo, tomarmos

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{11}\} = \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$$

$$\{x_{12}, x_{13}, x_{14}, \ldots, x_{22}\} = \{23, 24, 25, \ldots, 33\}$$

$$\{x_{23}, x_{24}, x_{25}, \ldots, x_{33}\} = \{45, 46, 47, \ldots, 55\}$$

$$\{x_{34}, x_{35}, x_{36}, \ldots, x_{44}\} = \{67, 68, 69, \ldots, 77\}$$

$$\{x_{45}, x_{46}, x_{47}, \ldots, x_{55}\} = \{89, 90, 91, \ldots, 99\}.$$

Nas considerações acima verificamos que a estratégia usada para resolver a versão original do problema (diferença igual a 9) não se aplica aos demais casos (diferença igual a 10 ou 11). É natural perguntarmos se existiria uma estratégia que funcionasse para todos os casos. Felizmente, para esse problema uma tal estratégia existe. Começamos observando que se queremos saber se é possível escolher 55 elementos do conjunto $\{1,2,3,\ldots,100\}$ de modo que a diferença entre quaisquer dois deles nunca seja igual a um certo natural n, então basta considerarmos classes de congruência módulo n. De fato, os elementos do conjunto $\{1,2,3,\ldots,100\}$ são distribuídos nas n classes de congruência $\overline{0},\overline{1},\overline{2},\ldots,,\overline{n-1}$. Portanto, como os elementos do conjunto são consecutivos, cada uma dessas classes de congruência deve conter pelo menos $\lfloor\frac{100}{n}\rfloor$ e no máximo $\lfloor\frac{100}{n}\rfloor+1$. Por outro lado, ao escolhermos 55 números no conjunto, pelo menos uma das classes de congruência deve conter pelo menos $\lfloor\frac{54}{n}\rfloor+1$ dos números escolhidos. Dentro de uma mesma classe de congruência, colocando os números em ordem crescente, temos que dois termos consecutivos têm diferença igual a n. Assim, em cada classe podemos formar no máximo $\frac{1}{2}\cdot(\lfloor\frac{100}{n}\rfloor+1)$ pares de termos consecutivos. Daí, se

$$\frac{1}{2}\cdot(\lfloor\frac{100}{n}\rfloor+1)<\lfloor\frac{54}{n}\rfloor+1,$$

significa que para escolhermos os $\lfloor\frac{54}{n}\rfloor+1$ números dentro de uma mesma classe, seremos obrigados a escolher dois em um mesmo par, o que implica que teremos dois números cuja diferença é n.

Por outro lado, se

$$\frac{1}{2}\cdot(\lfloor\frac{100}{n}\rfloor+1)\geq\lfloor\frac{54}{n}\rfloor+1,$$

seremos capazes de escolher os 55 números de modo que não haja dois números com diferença igual a n.

Exemplo 3.14. Em uma festa há n pessoas. Mostre que podemos encontrar duas pessoas que conhecem, na festa, uma mesma quantidade de outras pessoas (supondo que a relação de conhecer alguém é simétrica).

Solução: Primeiramente, observe que qualquer pessoa na festa conhece no mínimo 0 e no máximo $n-1$ outras pessoas. Consideramos dois casos:

(a) **Cada pessoa conhece pelo menos uma outra:** Considere $n-1$ salas numeradas de 1 a $n-1$. Colocamos na sala i todas as pessoas que conhecem exatamente i outras pessoas na festa. Como temos $n-1$ salas e n pessoas, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos uma sala deve conter no mínimo duas pessoas. Essas duas pessoas conhecem a mesma quantidade de outras pessoas na festa.

(b) **Existe pelo menos uma pessoa que não conhece ninguém (penetra):** Neste caso, ninguém na festa conhece todas as $n-1$ outras pessoas (pois há pelo menos uma pessoa que não conhece ninguém). Portanto, podemos usar $n-1$ salas numeradas de 0 a $n-2$ e aplicar o mesmo raciocínio do caso (a). Novamente, pelo princípio da casa dos pombos, haverá pelo menos duas pessoas na mesma sala, ou seja, que conhecem a mesma quantidade de outras pessoas na festa.

Em ambos os casos, concluímos que existem pelo menos duas pessoas na festa que conhecem o mesmo número de outras pessoas. ■

Exemplo 3.15. (CHINA/2001) Se 51 números são escolhidos arbitrariamente entre os primeiros 100 números naturais $\{1, 2, \ldots, 100\}$, prove que necessariamente existirão dois números escolhidos tais que um é múltiplo do outro.

Solução: Seja $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Existem um total de 50 números ímpares neste conjunto:

$$2k - 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, 50.$$

Pelo teorema fundamental da aritmética, qualquer número em A pode ser escrito de forma única a forma $2^m q$, onde m é um inteiro não negativo, e q é um número ímpar. Quando particionamos todos os números de A em classes de acordo com seus valores de q, obtemos 50 classes distintas, onde cada número pertence a exatamente uma classe. Ao selecionar 51 números quaisquer de A, pelo Princípio da Casa dos Pombos, necessariamente haverá dois números na mesma classe (ou seja, com o mesmo fator ímpar q). Sejam estes dois números:

$$a = 2^{m_1} q \quad \text{e} \quad b = 2^{m_2} q.$$

sem perda de generalidade, assuma $m_1 \geq m_2$. Então:

$$a = 2^{m_1 - m_2} \cdot (2^{m_2} q) = 2^{m_1 - m_2} \cdot b,$$

o que mostra que a é múltiplo de b. ■

Exemplo 3.16. (SASMO/1990) Dados quaisquer $2n - 1$ inteiros positivos, prove que existem n deles cuja soma é divisível por n para:

(a) $n = 3$

(b) $n = 9$.

Solução:

(a) Para $n = 3$ temos $2n - 1 = 5$. Particionamos os cinco números de acordo com seus restos módulo 3 em três classes: C_0, C_1 e C_2. Se uma das três classes não contém nenhum número, ou seja, os cinco números estão em duas classes, pelo princípio da casa dos pombos, deve haver pelo menos uma classe contendo pelo menos 3 números. Então, quaisquer três números da mesma classe terão soma divisível por 3. Se cada classe contém pelo menos um número, então tomando um número de cada classe, a soma desses três números será divisível por 3.

(b) Para $n = 9$, temos $2n - 1 = 17$ números dados, digamos $n_1, n_2, \cdots, n_{17}$. O resultado de (a) implica que, de cada cinco deles, podemos selecionar três números cuja soma é divisível por 3. Assim, organizando esses 17 números nas seguintes quíntuplas

$$(n_1, n_2, \ldots, n_5); (n_4, n_5, \ldots, n_8); (n_7, n_8, \ldots, n_{11}); (n_{10}, n_{11}, \ldots, n_{14}), (n_{13}, n_{14}, \ldots, n_{17}).$$

Em cada uma dessas quíntuplas existe uma terna de números cuja soma é múltiplo de 3. Essas cinco ternas são distintas pois a interseção entre duas quíntuplas tem no máximo dois termos. Podemos supor , sem perda de generalidade, que as cinco ternas são: (n_1, n_2, n_3); (n_4, n_5, n_6); ...; (n_{13}, n_{14}, n_{15}). Assim, suas somas $s_1, s_2, \ldots, s_5$ são todas divisíveis por 3. Seja $s_i = 3m_i$ para $i = 1, 2, \ldots, 5$ (onde m_i são inteiros positivos). Então, novamente pelo resultado de (a), podemos selecionar três números m_1, m_2, m_3 dentre os cinco m_i's tais que $m_1 + m_2 + m_3 = 3k$ para algum inteiro positivo k. Portanto,

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_9 = s_1 + s_2 + s_3 = 3(m_1 + m_2 + m_3) = 9k,$$

que é divisível por 9.

■

Exemplo 3.17. Prove que em um conjunto contendo n inteiros positivos, deve existir um subconjunto cuja soma de seus elementos é divisível por n.

Solução: Sejam os n inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Considere n novos inteiros positivos:

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_1 + a_2,\ \ldots,\ b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Todos os n valores b_i são distintos. Se algum b_i for divisível por n, a conclusão está provada. Caso contrário, se nenhum b_i for divisível por n, então seus restos na divisão por n são todos não nulos, podendo assumir no máximo $n-1$ valores distintos. Pelo princípio da casa dos pombos, devem existir b_i e b_j com $i < j$ tais que $b_j - b_i \neq 0$ é divisível por n. Como

$$b_j - b_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$$

é a soma de alguns dos números dados, a conclusão está provada. ■

Exemplo 3.18. (CHINA/1993) Se cinco pontos são escolhidos aleatoriamente no interior de um quadrado de lado 1, prove que existem pelo menos dois pontos cuja distância entre eles não é maior que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Solução: Dividimos o quadrado unitário em quatro quadrados menores congruentes de lado $\dfrac{1}{2}$, traçando linhas que conectam os pontos médios de lados opostos. Pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos um desses quatro quadrados menores deve conter pelo menos dois dos cinco pontos. A diagonal do quadrado unitário mede $\sqrt{2}$. Portanto, a diagonal de cada um dos quatro quadrados menores mede $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e essa é a maior distância possível entre dois pontos dentro de um mesmo quadrado de lado $\frac{1}{2}$. ■

Para leitores interessados em aprofundar seus conhecimentos sobre os princípios estudados, recomenda-se a consulta às seguintes obras Carvalho(2015), Neto(2012), Neto(2016), Lima (1981) e Oliveira(1998) que serviram de referências para o texto apresentados neste capítulo.

4 O PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA

Uma das melhores estratégias para resolver problemas de olimpíadas é encontrar os invariantes. O Princípio da Invariância é basicamente sobre descobrir o que não muda, mesmo quando a gente faz operações ou transformações permitidas no problema. Ele não segue uma fórmula pronta, mas depende mais de argumentos lógicos e matemáticos, usando conceitos de aritmética, álgebra, geometria e outros. A ideia é usar esses conceitos para chegar numa solução clara e que faça sentido. O Princípio da Invariância é aplicável a algoritmos[1], como jogos ou transformações, nos quais uma tarefa é executada repetidamente. A questão central é: o que permanece constante? O que se mantém invariante ao longo dessas operações? Devemos analisar a seguinte situação: “Se há repetição, procure pelo que não muda!”

Em algoritmos, temos um estado inicial **S** e uma sequência de passos permitidos (movimentos ou transformações). O objetivo é responder às seguintes perguntas:

- Um determinado estado final pode ser alcançado?
- Quais são todos os estados finais possíveis de serem alcançados?
- O processo converge para um estado final?
- Quais são os períodos existentes, com ou sem pré-períodos, caso existam?

Por se tratar de um princípio heurístico[2], o Princípio da Invariância demanda investigação e análise cuidadosa para sua plena compreensão. Sua aplicação eficaz evolui principalmente através da prática sistemática, sendo a resolução de problemas selecionados, especialmente aqueles provenientes de obras de referência consagradas como Problem-Solving Strategies (1998) e The Art and Craft of Problem Solving (2016) um método mais eficiente para dominá-lo. Esta abordagem tem como objetivo desenvolver no leitor uma compreensão sólida da aplicação eficiente do conceito nos problemas típicos das olimpíadas nacionais de matemática.

Exemplo 4.1. Sete moedas estão sobre uma mesa mostrando a cara. Podemos escolher quaisquer quatro delas e virá-las ao mesmo tempo. Podemos obter todas as moedas mostrando a coroa?

Solução: Em um instante qualquer da dinâmica do jogo, quando escolhemos quatro moedas para virar, observando as faces viradas para cima, sempre teremos uma das seguintes possibilidades:

- Quatro caras
- Três caras e uma coroa;

[1]Um algoritmo é um conjunto finito de instruções bem definidas e ordenadas que, quando executadas passo a passo, resolvem um problema específico ou realizam uma tarefa. Ele deve ser determinístico (produzir o mesmo resultado para a mesma entrada), eficiente (usar recursos de forma otimizada) e genérico (funcionar para uma classe de problemas, não apenas para um caso específico).

[2]Na educação matemática, estratégias cognitivas que facilitam a descoberta de soluções através de analogias, experimentação e padrões reconhecíveis.

- Duas caras e duas coroas;
- Uma cara e três coroas;
- Quatro coroas.

Em cada uma dessas situações, vamos analisar como varia a quantidade de moedas com a coroa virada para cima. Na primeira possibilidade, ao virarmos as quatro moedas, passamos a ter quatro coroas a mais na configuração. Na segunda, passamos a ter duas coroas a mais. Na terceira, a quantidade de coroas não se altera. Na quarta, perdemos duas coroas. E na quinta, perdemos quatro. Veja que o número de coroas sempre varia por uma quantidade par. A observação crucial aqui é que a propriedade de um número ser par ou ímpar (isso é o que chamamos de paridade) não se altera quando adicionamos a ele uma quantidade par. Ou seja, um número par adicionado de uma quantidade par, continua par. Do mesmo modo, um número ímpar adicionado de uma quantidade par, continua ímpar. Portanto, a quantidade de coroas, que é inicialmente zero (par), sempre será par. Logo, é impossível obter todas as sete moedas com a coroa virada para cima. Neste caso, a paridade da quantidade de coroas é invariante. ■

Exemplo 4.2. Em cada um dos dez degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, dando um pulo, ir para outro degrau. Porém, quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã deve pular a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas no mesmo degrau? Justifique.

Solução: Para entender se as rãs podem se reunir em um mesmo degrau, vamos criar uma maneira de acompanhar suas posições. Para isso, vamos enumerar os degraus da escada usando os números de 1 até 10 de baixo para cima, de modo que o degrau mais baixo recebe o número 1 e o mais alto recebe o 10. A ideia é atribuir a cada rã um número igual ao número do degrau onde ela ocupa. Vamos então considerar a soma dos dez números atribuídos às dez rãs. No início, como temos rãs nos degraus de 1 a 10, a referida soma é dada por

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55.$$

O ponto crucial é perceber que, pelas condições do problema, essa soma é invariante. Não importa quantos pulos as rãs deem. Por exemplo, se uma rã que estava no degrau 9 pula para o degrau 6, a soma total diminuirá de 3 unidades. Porém, pelas condições do problema, uma outra rã deverá subir 3 degraus, o que fará a soma aumentar também de 3 unidades, uma subindo e outra descendo o mesmo número de degraus, os aumentos e diminuições se cancelam, perfeitamente mantendo a soma total constante. Agora, imagine que em algum momento todas as rãs conseguissem ficar em um mesmo degrau. Se esse degrau fosse o número x, então a soma total dos números atribuídos às rãs seria 10 vezes x (pois são 10 rãs no degrau x). Mas sabemos que a soma total deve permanecer 55, então teríamos $10x = 55$. Isso levaria a $x = \frac{11}{2}$, o que não faz sentido porque os degraus são numerados com números inteiros. Portanto, concluímos que é impossível que todas as rãs se reúnam em um mesmo degrau. ∎

Observação 4.1. Podemos generalizar o problema acima considerando uma escada com n degraus na qual há uma rã posicionada em cada degrau e a dinâmica de movimentos é a mesma descrita antes. Seguindo a mesma ideia da resolução acima, temos que a soma dos números associados às rãs é:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Portanto, se em algum momento todas as rãs estiverem em um mesmo degrau, digamos correspondente ao número d, então

$$n \cdot d = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Portanto, devemos ter $d = \frac{n+1}{2}$. Logo, para que seja possível concentrar todas as rãs em um mesmo degrau, n deve ser ímpar e a única possibilidade é concentra-las no degrau do meio da escada. Isso mostra que o princípio da invariância pode ser usado não apenas para responder negativamente a um questionamento, mas também para analisar em quais condições a situação almejada é possível.

Exemplo 4.3. Cada um dos números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é 1 ou -1, e temos que:

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Prove que $4 \mid n$.

Solução: Consideremos a sequência de produtos consecutivos de quatro elementos como

$$P_k = a_ka_{k+1}a_{k+2}a_{k+3},$$

com $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ e convencionamos que $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ e $a_{n+3} = a_3$. A soma S de todos esses produtos P_k é dada por $S = \sum_{k=1}^{n} P_k = 0$. Observe que cada a_i aparece exatamente em quatro das parcelas dessa soma. Assim, quando multiplicamos todos os produtos P_k, cada termo a_i aparece com expoente igual a quatro, isto é,

$$P = \prod_{k=1}^{n} P_k = \prod_{k=1}^{n}(a_ka_{k+1}a_{k+2}a_{k+3}) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^4 = 1.$$

Por outro lado, como $P_k \in \{-1, 1\}$, para que tenhamos $S = 0$, é necessário que o número de termos $P_k = 1$ seja igual ao número de termos $P_k = -1$. Daí, sendo m o número de termos $P_k = 1$, então $m = n - m$, pois a soma S tem n parcelas. Portanto, $n = 2m$. Finalmente, como $P = 1$ e também, $P = (-1)^{n-m} = (-1)^m$, concluímos que m deve ser par. Logo, $n = 2m$ é divisível por 4. ∎

Exemplo 4.4. Considere um número inteiro positivo ímpar n. Em um quadro, são escritos inicialmente todos os números inteiros $1, 2, \ldots, 2n$. A seguir, realiza-se repetidamente a seguinte operação: escolhem-se dois números quaisquer a e b presentes no quadro, apagam-se esses números e escreve-se, em seu lugar, o valor absoluto da diferença $|a-b|$. Demonstre que, ao final deste processo, restará necessariamente um número ímpar no quadro.

Solução: Seja S a soma de todos os números no quadro-negro. Inicialmente:

$$S = 1 + 2 + \cdots + 2n = n(2n+1).$$

Como n é ímpar e $2n+1$ também é ímpar (pois $2n$ é par e somando 1 fica ímpar), seu produto $n(2n+1)$ é ímpar. Em cada passo, quando substituímos a e b por $|a-b|$, a mudança na soma é:

$$\Delta S = |a-b| - (a+b).$$

Podemos analisar dois casos:

1. Se $a \geq b$: $|a-b| = a-b$, então $\Delta S = (a-b) - a - b = -2b$.
2. Se $b > a$: $|a-b| = b-a$, então $\Delta S = (b-a) - a - b = -2a$.

Em ambos os casos, a soma é subtraída de um número par, a saber: o dobro do menor dos números. Assim, como a soma inicial é ímpar, ao final de cada operação a soma resultante continua ímpar e o total de números escritos no quadro diminui de uma unidade. Logo, após um certo número de repetições restará apenas um número escrito no quadro e esse número será ímpar. ■

Exemplo 4.5. Um círculo é dividido em seis setores. Em seguida, os números 1, 0, 1, 0, 0, 0 são escritos nos setores (no sentido anti-horário, por exemplo). Você pode aumentar dois números vizinhos em 1. É possível igualar todos os números através de uma sequência de tais operações?

Solução: Suponha que $a_1, \ldots, a_6$ são os números atualmente nos setores conforme a figura 1. Consideremos a soma alternada:

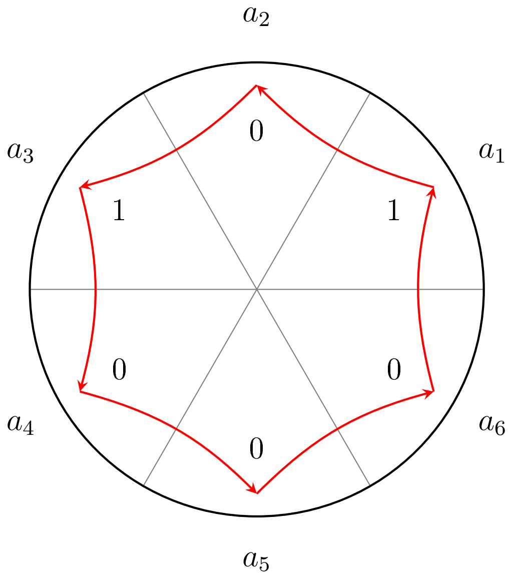
$$I = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6.$$

Com valor inicial dado por

$$I = 1 - 0 + 1 - 0 + 0 - 0 = 2.$$

Temos que cada movimento adiciona 1 a dois números vizinhos. Além disso, quaisquer dois termos vizinhos têm sinais contrários. Portanto, uma parcela contribui para aumentar o número I em uma unidade, mas a outra o faz diminuir em uma unidade. Logo, o valor de I é um invariante do problema. Como o valor inicial é $I = 2$ e o valor almejado para números iguais seria $I = 0$ (pois todos os a_i seriam iguais), concluímos que é impossível equalizar todos os números com as operações permitidas.

Figura 1 – Círculo dividido em 6 setores



Fonte: Próprio autor (2025).

■

4.1 APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Invariantes geométricos são propriedades ou características que permanecem inalteradas sob determinadas transformações, como rotações, translações, reflexões ou homotetias. Eles desempenham um papel fundamental na geometria e em suas aplicações, pois permitem identificar e classificar objetos independentemente de sua posição ou escala.

Por exemplo, a razão entre segmentos (razão simples) é um invariante projetivo, enquanto distâncias e ângulos são invariantes em transformações rígidas (isometrias). Apresentaremos alguns invariantes geométricos relevantes para a resolução de problemas olímpicos.

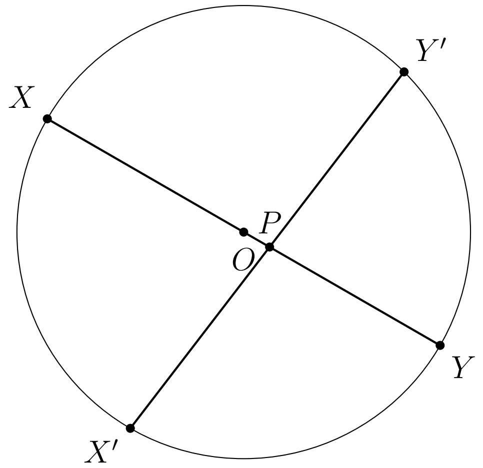
Exemplo 4.6. Dado um ponto fixo P dentro do círculo fixo, trace uma linha que passa por P e intersecta o círculo nos pontos X e Y. A potência do ponto P em relação a esse círculo é definida como o produto $PX \cdot PY$. Qual a relação do conceito de potência de ponto com o conceito de invariantes?

Solução: A potência do ponto é um *invariante geométrico*, pois seu valor não depende da reta específica traçada por P. Para qualquer outra reta passando por P e intersectando o círculo em X' e Y', tem-se que:

$$PX \cdot PY = PX' \cdot PY'.$$

Esse valor constante é dado por $|PO^2 - r^2|$, onde O é o centro do círculo e r seu raio.

Figura 2 – Potência de um ponto



$$\text{Pot}(P) = PX \cdot PY = PX' \cdot PY' = OP^2 - r^2$$

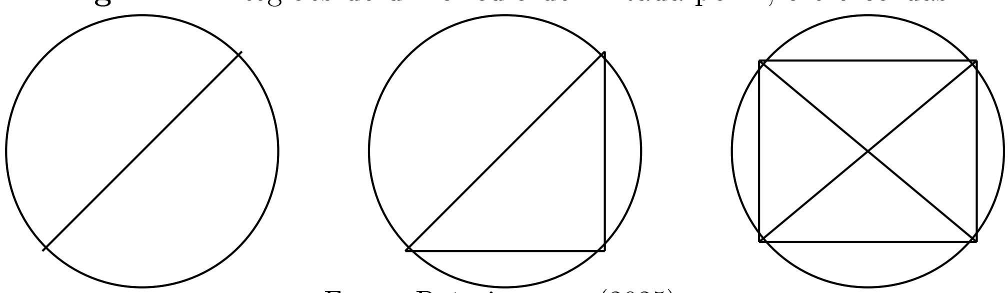
Fonte: Próprio autor (2025).

■

Exemplo 4.7. Considere n pontos dispostos sobre uma circunferência. Trace todas as cordas que ligam esses pontos dois a dois, de modo que não existam três cordas se intersectando no mesmo ponto dentro do círculo. Nessas condições, em quantas regiões o interior do círculo fica dividido?

Solução: Para cada n, temos $L = \binom{n}{2}$ é o número total de segmentos de reta que podemos traçar ligando os n pontos. Denotemos por P o número de pontos de interseção interiores ao círculo que esses L segmentos determinam e seja R o número de regiões em que o círculo fica dividido. Assim, para $n = 2$ temos $L = 1$, $P = 0$ e $R = 2$. Para $n = 3$, temos $L = 3, P = 0$ e $R = 4$. Para $n = 4$, temos $L = \binom{4}{2} = 6, P = 1$ e $R = 8$.

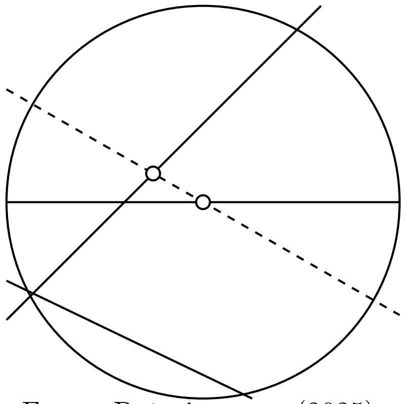
Figura 3 – Regiões de um círculo delimitada por 1, 3 e 6 cordas



Fonte: Próprio autor (2025).

Esses casos nos sugerem que a quantidade $R - L - P$ é um invariante, pois em todos esses casos analisados temos $R - P - L = 1$. Suponha que as cordas são adicionadas à figura uma de cada vez. Uma nova corda ao ser adicionada, corta várias regiões já existentes, aumentando o número de seções. O número de regiões extras é o número de segmentos em que a nova corda fica dividida pelas cordas que ela cruza, pois cada segmento divide uma região já existente em dois pedaços, fazendo o total de regiões aumentar de uma unidade. Portanto, o acréscimo no número de regiões é uma unidade a mais que o número de pontos de interseção que ocorrem ao longo da nova corda.

Figura 4 – Regiões de um círculo delimitada por 4 cordas



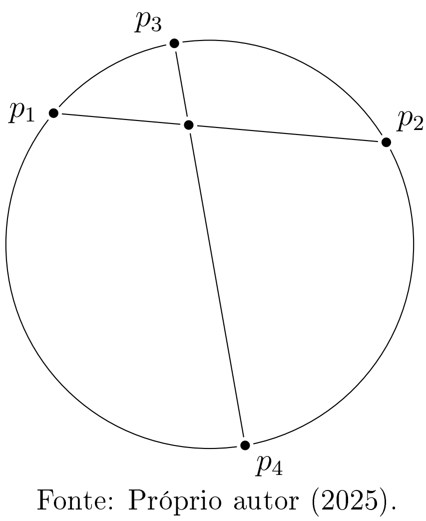
Fonte: Próprio autor (2025).

Em outras palavras, sempre que adicionamos uma nova corda, a diferença $R-P$ aumenta em uma unidade. Como L também aumenta de uma unidade, concluímos que $(R-P)-L$ permanece constante. Assim, vemos que $R-P-L$ é um invariante do problema, que tem valor igual a 1, como vimos nos casos iniciais. Portanto,

$$R = P + L + 1.$$

Já vimos que $L = \binom{n}{2}$. Por outro lado, observe que cada ponto de interseção interior ao círculo é determinado por um **único** par de cordas. Esse par de cordas, por sua vez, é determinado por quatro dos n pontos que foram dados sobre o círculo. Reciprocamente, quaisquer quatro dos n pontos determinam um quadrilátero inscrito no círculo e, consequentemente, um par de diagonais que determinam um único ponto de interseção no interior do círculo. Desse modo, temos uma correspondência biunívoca entre pontos de interseção e quádruplas de pontos escolhidos dentre os n pontos dados.

Figura 5 – Representação biunívoca dos pares de pontos que determinam as regiões



Fonte: Próprio autor (2025).

Portanto, $P = \binom{n}{4}$. Logo,

$$R(n) = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1.$$

■

Observação 4.2. Observe que o número de regiões pode ser derivado de forma muito elegante acompanhando o número de regiões que são perdidas quando as linhas são deletadas uma a uma. Cada seção de uma linha separa duas regiões que se unem em uma única parte quando a linha é removida. O número de regiões perdidas, então, é um a mais que o número de pontos de interseção na linha. Agora, cada ponto de interseção está em duas linhas, e com a remoção de qualquer uma delas, ele desaparece da outra também. Portanto, cada ponto de interseção figura exatamente uma vez na operação total de desmontagem, e para cada linha o número de regiões perdidas é:

$$(\text{número de pontos de interseção restantes na linha}) + 1.$$

Somando sobre a remoção de todas as L linhas, vemos que nosso total conterá todos os P pontos de interseção mais um 1 para cada linha, implicando que um total de $P + L$ regiões são perdidas. Como no final permanece apenas uma região, concluímos que no início tínhamos $P + L + 1$ regiões.

4.2 APLICAÇÕES ARITMÉTICAS

Em aritmética, os invariantes são ferramentas fundamentais que revelam propriedades essenciais dos números, mantendo-se constantes mesmo sob operações matemáticas. Um dos exemplos mais simples e poderosos é o conceito de paridade (a classificação de um número como par ou ímpar), que funciona como um invariante crucial em diversos problemas. Por exemplo, em somas ou multiplicações, a paridade do resultado depende apenas da paridade dos operandos (par + par = par, ímpar + ímpar = par, etc.), permitindo resolver problemas de divisibilidade e demonstrar resultados como a impossibilidade de escrever um número ímpar como soma de dois números ímpares consecutivos. Outro invariante fundamental é o resto módulo n, que generaliza a paridade e permite analisar congruências e ciclos em sequências numéricas.

Além disso, invariantes como o máximo divisor comum (MDC) e a fatoração em primos são essenciais para simplificar problemas complexos. O algoritmo de Euclides, por exemplo, se baseia no invariante $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, a \bmod b)$ para calcular eficientemente o MDC. Já o Teorema Fundamental da Aritmética, que garante a fatoração única de números inteiros em primos, depende da invariância dessa decomposição. Esses conceitos não apenas facilitam a resolução de equações diofantinas e problemas de competições matemáticas, mas também têm aplicações práticas em criptografia e ciência da computação. Em suma, invariantes como paridade, restos módulo n e propriedades de divisibilidade são pilares da aritmética, oferecendo métodos elegantes e eficazes para explorar a estrutura dos números.

Os números inteiros são classificados em duas categorias fundamentais quanto à paridade: pares e ímpares. Um número é par se é divisível por 2, caso contrário, é ímpar. Vale destacar que o zero é considerado par, seguindo essa definição. Embora a paridade pareça um conceito básico, ela possui propriedades fundamentais que são amplamente utilizadas na matemática, especialmente em problemas de olimpíadas e teoria dos números. Temos como propriedades da paridade:

- *Paridade da Soma*:
  A soma de um conjunto de números inteiros terá paridade **ímpar** se, e somente se, a quantidade de números ímpares no conjunto for ímpar. Caso contrário, a soma será par.
- *Paridade do Produto*:
  O produto de um conjunto de números inteiros será **ímpar** apenas se **nenhum** dos fatores for par. Se pelo menos um número no conjunto for par, o produto será par.

Essas propriedades, embora simples, são ferramentas poderosas na resolução de problemas matemáticos. Os exemplos a seguir ilustrarão isso.

Exemplo 4.8. Em um torneio de tênis individual com 127 participantes, prove que, ao final do torneio, o número de pessoas que jogaram um número ímpar de partidas é par.

Solução: È comum pensar que para resolver esse problema devemos supor que o torneio seja disputado, como eliminatória dupla (Mata-mata) ou rodízio. Porém, o problema não especifica a estrutura do torneio! Logo, só podemos considerar que, independentemente de como o torneio é organizado, o número de pessoas que jogaram um número ímpar de partidas deve ser par. Por exemplo, em um cenário extremo, se ninguém jogar nenhuma partida, o número de pessoas que jogaram um número ímpar de partidas é zero, que é um número par, satisfazendo a condição.

Parece haver poucas restrições, mas há uma crucial: **cada partida envolve exatamente dois jogadores**. Em outras palavras, se o jogador A joga contra o jogador B, essa partida é contabilizada duas vezes: uma vez na contagem de partidas de A e uma vez na contagem de partidas de B. Formalmente, se denotarmos por g_i o número de partidas jogadas pelo i-ésimo jogador ao final do torneio, então a soma

$$g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_{127},$$

deve ser **par**, pois essa soma conta cada partida jogada exatamente duas vezes! Note que essa soma é sempre par, não apenas ao final do torneio, mas em qualquer momento durante sua realização.

Agora, a conclusão é imediata: a soma acima é par e consiste na adição de um número ímpar de termos (127). Se um número ímpar desses termos fosse ímpar, a soma não poderia ser par. Portanto, o número de g_i que são ímpares deve ser **par**. ■

Exemplo 4.9. Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uma permutação arbitrária dos números $1, 2, 3, \ldots, n$. Prove que, se n é ímpar, o produto

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdots (a_n - n)$$

é um número par.

Solução: É útil começar analisando o caso com $n = 11$. Recordando o que já sabemos sobre paridade, perguntamos: o que garante que o produto

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdots (a_{11} - 11)$$

seja par? Claramente, basta mostrar que pelo menos um dos termos $(a_1 - 1), (a_2 - 2), \ldots, (a_{11} - 11)$ é par. Como podemos fazer isso? Uma estratégia eficaz é tentar uma prova por contradição, pois precisamos mostrar que apenas um desses termos é par, e não sabemos qual deles. Se assumirmos que todos os termos são ímpares, teremos informações específicas para trabalhar. Assim, suponha que cada um dos termos

$$(a_1 - 1), (a_2 - 2), \ldots, (a_{11} - 11)$$

seja ímpar. Podemos então determinar a paridade dos a_i originais. Observe que:

- Se $(a_i - i)$ é ímpar, então a_i e i têm paridades opostas. Ou seja:
  - Se i é par, a_i é ímpar.
  - Se i é ímpar, a_i é par.

  Aplicando essa lógica ao caso $n = 11$:
- Os índices ímpares são $1, 3, 5, 7, 9, 11$. Portanto, $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11}$ são pares.
- Os índices pares são $2, 4, 6, 8, 10$. Portanto, $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$ são ímpares.

No entanto, isso leva a uma contradição, pois os a_i são uma permutação dos números $1, 2, 3, \ldots, 11$, que contém exatamente cinco números pares $(2, 4, 6, 8, 10)$ e seis números ímpares $(1, 3, 5, 7, 9, 11)$. Pela nossa suposição, teríamos seis números pares $(a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, a_{11})$ e cinco números ímpares $(a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10})$, o que é impossível, pois a contagem de números pares e ímpares não coincide com a do conjunto original.

Portanto, nossa suposição inicial (de que todos os termos $(a_i - i)$ são ímpares) é falsa. Concluímos que pelo menos um dos termos $(a_i - i)$ deve ser par, o que implica que o produto

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$$

é par. Esse argumento se estende ao caso geral, pois a única propriedade especial de 11 que utilizamos foi o fato de ser ímpar. Assim, para qualquer n ímpar, o produto é par. ■

Observação 4.3. Agora iremos considerar como ideia central a soma dos termos. Logo:

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots + (a_n - n)$$

pode ser reescrita como:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (1 + 2 + \cdots + n).$$

Lembre que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma permutação dos números $1, 2, \ldots, n$. Portanto, a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é igual à soma $1 + 2 + \cdots + n$. Assim, a expressão acima se simplifica para:

$$(1 + 2 + \cdots + n) - (1 + 2 + \cdots + n) = 0,$$

ou seja, a soma dos termos $(a_1 - 1), (a_2 - 2), \ldots, (a_n - n)$ é sempre igual a **zero**, independentemente da permutação escolhida. Isso significa que essa soma é um **invariante**: seu valor não muda, não importa como os números $1, 2, \ldots, n$ sejam rearranjados.

Agora, note que estamos somando um número **ímpar** de termos (pois n é ímpar) e o resultado dessa soma é **zero**, que é um número par. Sabemos que a soma de um número ímpar de inteiros só pode ser par se pelo menos um desses inteiros for par. Caso contrário, a soma seria ímpar. Portanto, pelo menos um dos termos $(a_i - i)$ deve ser par e assim concluímos que o produto

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$$

deve ser par, pois pelo menos um de seus fatores é par.

Nessa nova abordagem do problema de maneira geral e criativa, mostramos que a soma dos termos $(a_i - i)$ é sempre zero (**invariante**), independentemente da permutação. Foi um caminho importante que pode ser aplicado em muitos outros problemas.

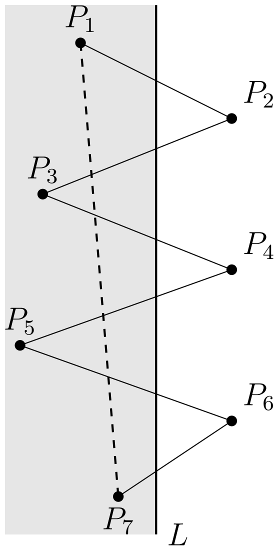
Exemplo 4.10. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_{2025}$ pontos distintos no plano. Conecte os pontos com os segmentos de reta P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ..., $P_{2024}P_{2025}$, $P_{2025}P_1$. É possível traçar uma reta que passe pelo interior de cada um desses segmentos?

Solução: De início não dá pra saber se a paridade importa nesse caso, mas é bom não esquecer dessa possibilidade. Pois quando um problema envolve números inteiros, observar a paridade pode fazer a diferença.

Este problema envolve 2025 pontos. Alguns testes com um número bem menor de pontos vão te convencer facilmente (faça isso!) de que é possível traçar a reta se, e somente se, o número de pontos for par. Então, a paridade parece ser importante. Vamos encontrar um argumento rigoroso para um caso específico, digamos, sete pontos. Mais uma vez, usaremos um raciocínio por contradição, porque assumir que podemos traçar a reta nos dá várias informações concretas para trabalhar.

Então, suponha que exista uma reta L que passa pelo interior de cada segmento. Essa reta divide o plano em duas regiões (semiplanos), que chamaremos de lado "esquerdo" e "direito" de L. Sem perda de generalidade, P_1 está no lado esquerdo de L. Isso força P_2 a ficar no lado direito, o que, por sua vez, obriga P_3 a ficar no esquerdo, P_4 no direito, e assim por diante como mostrado na figura 6. O detalhe importante é que P_7 acaba no lado esquerdo, junto com P_1. Portanto, L não pode passar pelo interior do segmento P_1P_7, logo uma contradição.

Figura 6 – 7 pontos em zigzag



Fonte: Próprio autor.

Esse argumento se generaliza facilmente sempre que n for ímpar, P_1 e P_n ficarão do mesmo lado de L. ■

Exemplo 4.11. (IMO 1985) Dado um conjunto de 1.985 números inteiros positivos (não necessariamente distintos), em que nenhum deles tem fatores primos maiores que 23, prove que sempre existem quatro números desse conjunto cujo produto é um inteiro elevado à quarta potência.

Solução: Este é um problema bastante complexo, que exige análise de paridade junto com aplicações criativas e sucessivas do princípio das gavetas de Dirichlet. Cada número deste conjunto pode ser expresso na forma:

$$2^{f_1}3^{f_2}5^{f_3}7^{f_4}11^{f_5}13^{f_6}17^{f_7}19^{f_8}23^{f_9},$$

onde os expoentes $f_1, f_2, \ldots, f_9$ são inteiros não negativos. O produto de dois números desse tipo,

$$(2^{f_1} \cdots 23^{f_9}) \times (2^{g_1} \cdots 23^{g_9}),$$

será um quadrado perfeito se, e somente se, os expoentes correspondentes tiverem a mesma paridade (ambos pares ou ambos ímpares). Em outras palavras,

$$(2^{f_1} \cdots 23^{f_9}) \times (2^{g_1} \cdots 23^{g_9})$$

será um quadrado perfeito se e somente se:

- f_1 e g_1 tiverem a mesma paridade,
- f_2 e g_2 tiverem a mesma paridade,

$$\vdots$$

- f_9 e g_9 tiverem a mesma paridade.

A cada número desse conjunto, associamos uma 9-upla ordenada (lista ordenada com 9 termos) que representa a paridade dos expoentes. Por exemplo, o número

$$2^{10}3^{5}17^{1}23^{111}$$

corresponde à 9-upla:

$$(\text{par, ímpar, par, par, par, par, ímpar, par, ímpar}).$$

Como cada coordenada admite duas possibilidades: par ou ímpar, o princípio fundamental da contagem nos diz que existem $2^9 = 512$ (9-uplas possíveis). Usando repetidamente o princípio da casa dos pombos, concluímos que **1472** dos inteiros do conjunto podem ser organizados em **736 pares**

$$\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \dots, \{a_{736}, b_{736}\},$$

onde cada par contém dois números com a mesma 9-upla de paridade dos expoentes. Assim, o produto dos números em cada par é um quadrado perfeito. Ou seja, se definirmos

$$C_i := a_i b_i,$$

então cada termo da lista

$$C_1, C_2, \dots, C_{736}$$

é um quadrado perfeito. Consequentemente, cada uma das raízes

$$\sqrt{C_1}, \sqrt{C_2}, \dots, \sqrt{C_{736}}$$

é um número inteiro cujos fatores primos não excedem 23.

Aplicando novamente o princípio da casa dos pombos, concluímos que pelo menos dois números na lista acima compartilham a mesma 9-upla de paridade dos expoentes. Sem perda de generalidade, sejam esses números $\sqrt{C_k}$ e $\sqrt{C_j}$. Então, $\sqrt{C_k} \times \sqrt{C_j}$ é um quadrado perfeito, ou seja, $\sqrt{C_k} \times \sqrt{C_j} = n^2$ para algum inteiro n. Logo,

$$C_k C_j = n^4.$$

Como $C_k C_j = a_k b_k a_j b_j$, encontramos **quatro números** do conjunto original de 1.985 inteiros cujo produto é uma quarta potência de um inteiro. ■

Exemplo 4.12. Seja $s(N)$ a soma dos dígitos da representação decimal de um número inteiro positivo N. Mostre que $N - s(N)$ é sempre divisível por 9. Por exemplo, se $N = 237$, então

$$N - s(N) = 237 - (2 + 3 + 7) = 225 = 9 \cdot 25.$$

Solução: Considere um número inteiro positivo N com k algarismos, representado por:

$$N = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

onde $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0$ são os algarismos de N, com $0 \leq a_i \leq 9$ para todo $i \in \{1, 2, 3 \dots, 9\}$. Agora note que:

$$10 = 9 + 1,$$

$$10^2 = 100 = 99 + 1 = 9 \cdot 11 + 1,$$

$$10^3 = 1000 = 999 + 1 = 9 \cdot 111 + 1,$$

e, em geral:

$$10^m = 9 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{m \text{ dígitos}} + 1.$$

Portanto, podemos escrever:

$$10^m = 9 \cdot C_m + 1,$$

onde C_m é um número inteiro que consiste em m dígitos 1 (por exemplo, $C_2 = 11$, $C_3 = 111$, etc.). Substituindo $10^m = 9 \cdot C_m + 1$ na expressão de N, obtemos:

$$N = a_k \cdot (9 \cdot C_k + 1) + a_{k-1} \cdot (9 \cdot C_{k-1} + 1) + \dots + a_1 \cdot (9 \cdot C_1 + 1) + a_0.$$

Expandindo os termos, temos:

$$N = 9 \cdot (a_k \cdot C_k + a_{k-1} \cdot C_{k-1} + \dots + a_1 \cdot C_1) + (a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0).$$

Simplificando, podemos escrever:

$$N = 9 \cdot Q + s(N) \Rightarrow N - s(N) = 9 \cdot Q,$$

onde temos:

$$Q = a_k \cdot C_k + a_{k-1} \cdot C_{k-1} + \dots + a_1 \cdot C_1 \in \mathbb{Z}.$$

Isso nos permite estabelecer o critério de divisibilidade por 9. De fato, se $S = s(N)$ (a soma dos algarismos de N) for divisível por 9, então $S = 9 \cdot T$, onde T é um número inteiro. Substituindo na expressão de N, temos:

$$N = 9 \cdot Q + 9 \cdot T = 9 \cdot (Q + T).$$

Portanto, N é divisível por 9. Reciprocamente, se N for divisível por 9, então $N = 9 \cdot R$, onde R é um número inteiro. Substituindo na expressão de N, temos:

$$9 \cdot R = 9 \cdot Q + S.$$

Isolando S, obtemos:

$$S = 9 \cdot (R - Q).$$

Logo, S é divisível por 9. ∎

Observação 4.4. Os critérios de divisibilidade representam alguns dos invariantes aritméticos mais fundamentais e práticos, pois revelam propriedades intrínsecas dos números que se mantêm inalteradas mesmo sob diversas operações e transformações. Esses invariantes não apenas oferecem métodos eficientes para testar divisibilidade sem a necessidade de cálculos trabalhosos, como a conhecida regra da soma dos dígitos para divisibilidade por 9 que acabamos de ver a prova, mas também desvendam relações profundas entre a representação posicional dos números e suas características algébricas subjacentes. O caso da divisibilidade por 9 é particularmente ilustrativo: como o critério depende apenas da soma dos dígitos, ele permanece válido mesmo quando estes são permutados, demonstrando que se trata de uma propriedade combinatória inerente ao conjunto de dígitos, independentemente de sua disposição específica.

Essencialmente, os critérios de divisibilidade sintetizam a utilidade da aritmética modular, convertendo problemas aparentemente complexos de divisibilidade em verificações simples e elegantes, fundamentadas em propriedades invariantes robustas e matematicamente consistentes.

Exemplo 4.13. No início, uma sala está vazia. A cada minuto, ou uma pessoa entra ou duas pessoas saem. Após exatamente 3^{1999} minutos, a sala poderia conter $3^{1000} + 2$ pessoas?

Solução: Se há n pessoas na sala, após um minuto, haverá $n+1$ ou $n-2$ pessoas. A diferença entre esses dois resultados possíveis é 3. Continuando por mais tempo, observamos que:

- Em qualquer momento fixo t, todos os valores possíveis para a população da sala diferem entre si por múltiplos de 3.

Em 3^{1999} minutos, uma possível população da sala seria 3^{1999} pessoas (assumindo que uma pessoa entrou a cada minuto). Esse número é um múltiplo de 3, então todos os valores possíveis para a população da sala também devem ser múltiplos de 3. Portanto, $3^{1000} + 2$ **não** será uma população válida. ■

4.3 APLICAÇÕES VARIADAS

A seguir, exploraremos o uso de invariantes em diversas aplicações, ampliando o escopo de problemas em que eles se aplicam.

Exemplo 4.14. Começando com o conjunto $\{3, 4, 12\}$, é permitido apagar dois números a e b e escrever em seus lugares 0,6a – 0,8b e 0,8a + 0,6b, respectivamente. É possível chegar ao conjunto $\{4, 6, 12\}$?

Solução: Note que $(0,6a - 0,8b)^2 + (0,8a + 0,6b)^2 = a^2 + b^2$, implicando que a soma dos quadrados dos números dos conjuntos obtidos é invariante. Como $3^2+4^2+12^2 = 169 = 13^2$ e $4^2 + 6^2 + 12^2 = 196 = 14^2$ então não é possível chegar ao conjunto $\{4, 6, 12\}$. ■

Exemplo 4.15. Encontre a solução da equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Solução: Usaremos a simetria dos coeficientes como ponto de partida para impor ainda mais simetria nos graus dos termos. Basta dividir por x^2 e obteremos:

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

O problema pode não ter ficado mais fácil de resolver, porém agora há mais simetria, pois podemos agrupar termos semelhantes da seguinte forma:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0. \tag{1}$$

Tomando $u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow u^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, substituindo em (1), teremos:

$$u^2 + u - 1 = 0,$$

com soluções

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Resolvendo $x + \frac{1}{x} = u$, obtemos $x^2 - ux + 1 = 0$, ou

$$x = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2}.$$

Substituindo para os valores de u obtemos:

$$x = \frac{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \pm \sqrt{(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2})^2 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Quando aumentamos a simetria do problema e fazemos a substituição conveniente de u por $x + x^{-1}$ os passos seguintes são meramente técnicos, pois só resta trabalhar com a equação para chegar a solução desejada. ■

Observação 4.5. A simetria é uma propriedade relacionada ao conceito de invariantes. Pois dado um objeto (geométrico ou não) simétrico, é um invariante em relação a alguma transformação ou conjunto de transformações. No caso do exemplo acima, a equação

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

é invariante por meio da transformação

$$x \to \frac{1}{x}.$$

Isso nos diz que se x for uma raiz, então $\frac{1}{x}$ também será.

Exemplo 4.16. As seguintes operações são permitidas com a equação quadrática $ax^2 + bx + c$:

(i) Trocar as posições de a e c;

(ii) Trocar x por $x + t$, onde t é um número real;

Repetindo estas transformações é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$?

Solução: Veremos que o discriminante será invariante nas equações executando as operações desejadas.

(i) Temos que pela equação $ax^2 + bx + c$; $\Delta_0 = b^2 - 4ac$. Trocando a e c na equação quadrática temos:

$$ax^2 + bx + c \to cx^2 + bx + a.$$

E para esta nova equação teremos $\Delta_1 = b^2 - 4ca = \Delta_0$.

(ii) Agora fazendo a troca de x por $x + t$ teremos:

$$a(x+t)^2 + b(x+t) + c = ax^2 + (b + 2at)x + at^2 + bt + c.$$

Calculando o novo discriminante:

$$\Delta_2 = (b+2at)^2 - 4a(at^2+bt+c) = b^2+4abt+4a^2t^2-4a^2t^2-4abt-4ac = b^2-4ac = \Delta_0.$$

Agora vamos verificar que se é possível transformar $x^2 - x - 2$ em $x^2 - x - 1$.
Temos que:

- O discriminante de $x^2 - x - 2$ é $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$
- O discriminante de $x^2 - x - 1$ é $\Delta^* = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$

Como as transformações mantêm o discriminante invariante ($\Delta = \Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2$) e $9 \neq 5$, a transformação é impossível. ■

Exemplo 4.17. (Lenigrado 1990) O número 123 está na tela do computador de Teddy. A cada minuto, o número escrito na tela é somado com 102. Teddy pode trocar a ordem dos dígitos do número escrito na tela quando ele quiser. Ele pode fazer com que o número escrito na tela seja sempre um número de três dígitos?

Solução: Como 123 e 102 são ambos múltiplos de 3, e além disso, permutar os dígitos de um número não modifica o resto da divisão por 3, vemos que os números na tela do computador sempre serão múltiplos de 3. Assim, como podemos realizar as operações muitas vezes (infinitas), se for possível sempre permanecer com um número de três dígitos na tela, em algum momento esse número deve se repetir. Como veremos que é possível montar uma sequência de operações em que o 123 volta a aparecer. Para isso, seja S a operação de somar 102 e seja P a operação de permutar algarismos. Assim, é possível manter sempre 3 dígitos com a seguinte sequência estratégica:

$$\begin{aligned} 123 &\xrightarrow{S} 225 \xrightarrow{S} 327 \xrightarrow{S} 429 \xrightarrow{S} 531 \xrightarrow{S} 633 \xrightarrow{P} 336 \xrightarrow{S} 438 \xrightarrow{S} 540 \\ &\xrightarrow{P} 405 \xrightarrow{S} 507 \xrightarrow{S} 609 \xrightarrow{S} 711 \xrightarrow{P} 117 \xrightarrow{S} 219 \xrightarrow{S} 321 \xrightarrow{P} 123. \end{aligned}$$

■

Observação 4.6. Note que a maioria dos problemas de invariância tem enunciados muito semelhantes. Basicamente, todos perguntam se, dada uma determinada configuração inicial, é possível alcançar outra configuração específica. Como você já deve ter percebido, na maioria dos casos, a resposta é não. No entanto, cuidado! Existem problemas com enunciados parecidos em que a resposta é sim. Nesses casos, além de afirmar que a transformação é possível, devemos demonstrar como alcançar a configuração desejada.

5 O PRINCÍPIO DO ELEMENTO EXTREMO

O ensino da matemática transcende a mera aplicação de fórmulas e procedimentos algorítmicos, trata-se de desenvolver o pensamento crítico e estimular a curiosidade intelectual. Para estudantes dedicados e com aptidão na matéria, o desafio consiste em apresentar a disciplina como um campo de exploração criativa e de inovação. Uma estratégia que funciona muito bem é propor problemas que provoque nos alunos um impulso de curiosidade.

Nesse contexto, o Princípio do Elemento Extremo surge como uma ferramenta pedagógica eficaz. Trata-se de um princípio que assim como o da invariância, também não é tão conhecido. Mas é uma ótima ferramenta na resolução de problemas, principalmente os que são ligados as olimpíadas de matemática. A ideia é simples: em um problema com vários elementos, focamos no "*maior*", no "*menor*" ou em algum extremo que pode revelar um caminho para a solução. Pense, por exemplo, em problemas de geometria ou álgebra em que parece não haver uma saída clara. Ao identificar o elemento mais distante, o menor ângulo ou um número que assume um papel máximo ou mínimo, ajudando a solução aparecer como um quebra-cabeça: cada ideia é uma peça que, quando encaixada, revela parte do todo. O Princípio do Elemento Extremo pode nos fornecer essa peça-chave que completa o quadro lógico.

Inicialmente, temos que é fundamental observar três condições básicas, porém importantes para a aplicação correta do algoritmo, elas são:

- Todo conjunto finito de reais tem um mínimo e um máximo, que não são necessariamente únicos.
- Todo conjunto não vazio de inteiros positivos tem um mínimo (esse é o princípio da boa ordem, que é equivalente ao princípio da indução finita.
- Se um conjunto infinito A de reais pode ter ou não um elemento máximo ou mínimo (por exemplo, o intervalo real $]-\infty, 1[$ não possui nenhum dos dois). Se A é limitado superiormente, então admite um limitante superior mínimo, denotado por $\sup A$ (supremo de A); Se A é limitado inferiormente, então admite um limitante inferior máximo, denotado por $\inf A$ (ínfimo de A).

Vale ressaltar que conjuntos finitos de números reais sempre possuem elementos extremos (máximo e mínimo), enquanto conjuntos infinitos podem não tê-los (como no exemplo $\{1, 2, \frac{1}{2}, 2^2, \frac{1}{2^2}, 2^3, \ldots\}$). No caso de conjuntos de inteiros positivos, podemos recorrer ao Princípio da Boa Ordenação, que se tornará essencial na resolução de diversos problemas quando aplicamos a técnica do elemento extremo. Sugiro ao leitor visitar o apêndice desse trabalho se preciso para rever a construção dos reais como um corpo.

Temos que este princípio tem natureza heurística, assim como o princípio da invariância. Portanto a sua estrutura de aplicação segue um padrão característico:

- Assume-se o contrário do que se quer provar.

- Identifica-se o elemento extremo (mínimo/máximo).
- Constrói-se uma contradição criando um elemento mais extremo.

Novamente, nosso estudo será fundamentado em um conjunto variado de problemas selecionados das obras de referência *The Art and Craft of Problem Solving* (2016), *Problem-Solving Strategies* (1998), Notas Olímpicas: Princípio Extremal (2021) e complementado com problemas clássicos de olimpíadas internacionais. Com isso, vamos conseguir absorver com mais naturalidade as técnicas de aplicação do elemento extremo, explorando suas diferentes nuances e variações.

Exemplo 5.1. (Leningrado 1988). Alguns pinos estão em um tabuleiro de xadrez. A cada segundo, um dos pinos move para uma casa vizinha (lado em comum). Após muito tempo verificou-se que cada pino havia passado todas as casas do tabuleiro exatamente uma vez e tinha voltado para a sua casa inicial. Prove que existiu um momento em que todos os pinos estavam fora de sua casa inicial.

Solução: Suponha que P seja o primeiro pino a retornar a sua posição original de fato, percorrendo todas as casas possíveis. E definimos t como esse momento em que P retorna à sua casa inicial. Imediatamente antes desse instante, no tempo $t-1$, teremos que:

- P está necessariamente em uma posição adjacente à sua origem, pois no próximo movimento ele retornará.
- Todos os outros pinos não podem estar em suas posições iniciais nesse momento, pois P foi definido como o primeiro a retornar. Então se algum outro pino já tivesse retornado antes, isso contradiria nossa escolha de P.
- Além disso, como cada pino precisa passar por todas as casas, incluindo a posição inicial de P, e P está prestes a retornar, os demais pinos já devem ter visitado a casa inicial de P em algum momento anterior, mas não podem estar lá agora. ■

Observação 5.1. O bom desta solução está em como a simples tomada de P como "o primeiro a retornar"(nosso elemento extremo) contém toda a informação necessária. Essa escolha inteligente nos permite deduzir o comportamento de todo o sistema em um momento crítico, sem necessidade de analisar cada caso individualmente. O elemento extremo age de forma a revelar a propriedade global que queremos demonstrar.

Exemplo 5.2. Responda:

(a) Em quantas partes, no máximo, um plano é dividido por n retas?

(b) Em quantas partes o espaço é dividido por n planos em posição geral?

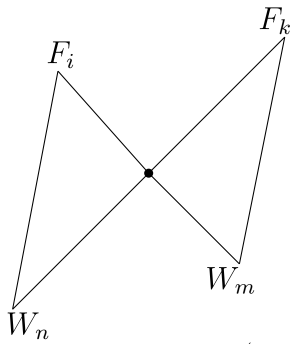
Solução: Denotaremos P_n o número de partes que o plano é dividido por n retas e S_n o número de partes que o espaço é dividido por n planos. Ficaria fácil observar que esses problemas seriam melhor solucionados recursivamente, encontrando P_{n+1} em função de P_n e S_{n+1} em função de S_n. De fato, ao adicionar uma nova reta (ou plano) a n retas (planos) já existentes, obtemos facilmente $P_{n+1} = P_n + n + 1$ e $S_{n+1} = S_n + P_n$. Não há nada errado nessa abordagem, pois a recursão é uma ferramenta de amplo alcance e serventia.

- Em (a) temos um problema de contagem. Um princípio fundamental de contagem é a correspondência biunívoca. A primeira pergunta é: podemos mapear as P_n partes do plano bijetivamente em um conjunto mais fácil de contar? Os $\binom{n}{2}$ pontos de interseção das n retas são fáceis de contar. Cada ponto de interseção é o ponto mais profundo de exatamente uma parte do plano (princípio extremal). Portanto, há $\binom{n}{2}$ partes com um ponto mais profundo. As partes sem ponto mais profundo não são limitadas inferiormente e cortam uma reta horizontal h (que introduzimos) em $n+1$ segmentos. Essas partes podem ser associadas unicamente a esses segmentos. Assim, há $n+1$ (ou $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}$) partes sem ponto mais profundo. Logo, o número total de partes do plano é $P_n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$.
- Em (b), três planos formam um vértice no espaço. Há $\binom{n}{3}$ vértices, e cada um é o ponto mais profundo de exatamente uma parte do espaço. Portanto, existem $\binom{n}{3}$ partes com um ponto mais profundo. Cada parte sem ponto mais profundo intersecta um plano horizontal h em uma das p_n partes do plano. Assim, o número total de partes no espaço é $S_n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$. ■

Exemplo 5.3. São dados $2n$ pontos no plano, com nenhum três colineares. Exatamente n desses pontos são fazendas $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ e os n pontos restantes são poços $W = \{W_1, W_2, \ldots, W_n\}$. Deseja-se construir uma estrada reta de cada fazenda a um poço. Mostre que os poços podem ser atribuídos bijetivamente às fazendas de modo que nenhuma das estradas se intercepte.

Solução: Considere qualquer bijeção $f\colon F \to W$. Se traçarmos uma reta de cada F_i até $f(F_i)$, obtemos um sistema de estradas. Dentre todos os $n!$ sistemas possíveis, escolhemos aquele com comprimento total mínimo. Suponha que neste sistema existam segmentos que se cruzam, digamos F_iW_m e F_kW_n como na figura 7.

Figura 7 – Segmentos que se cruzam F_kW_m e F_iW_n



Fonte: Próprio autor (2025).

Quando substituímos esses segmentos por F_kW_m e F_iW_n, o comprimento total das estradas diminui devido à desigualdade triangular, o que contraria a minimalidade da escolha. Portanto, o sistema minimal não pode ter estradas que se intersectam. ■

Exemplo 5.4. Cada equipe de um torneio de vôlei joga com cada uma das outras exatamente uma vez. Ao fim do torneio, cada jogador faz uma lista com os nomes de todos os jogadores vencidos por ele e de todos os que foram vencidos pelos jogadores que ele venceu. Sabendo que não houve empates, prove que existe um jogador cuja lista possui o nome de todos os outros jogadores.

Solução: Tome A como equipe com o maior número de vitórias no torneio. Iremos demonstrar que a lista de A contém todos os outros jogadores. Agora considere B como uma equipe qualquer do torneio. Teremos duas situações a analisar:

- A primeira é se B perder para A, então B está imediatamente na lista de A por derrota direta, então um jogador da equipe A tem o nome de todos os outros na sua lista.
- A segunda, seria quando B vence A, e aí temos que mostrar que B também está na lista de A, porém indiretamente.

Como A tem o maior número de vitórias, ou seja, nosso elemento extremo da escolha, B não pode ter vencido todas as equipes que A venceu caso contrário, B teria pelo menos tantas vitórias quanto A (todas que A venceu) mais a vitória sobre A, o que faria B ter mais vitórias que A, contradizendo a maximalidade de A. Portanto, existe pelo menos uma equipe C tal que A venceu C, mas B perdeu para C. Isso implica que B está na lista de A por transição: A venceu C e C venceu B, logo B está incluso na lista de A através de C. E assim concluímos que todas as equipes estão na lista de A portanto existe um jogador com o nome de todos os derrotados. ■

5.1 APLICAÇÕES ALGÉBRICAS

A seguir, exploraremos exemplos concretos em que a busca por valores extremos (máximos ou mínimos) surge naturalmente em contextos algébricos delimitados por restrições. Essas situações como: Encontrar máximos e mínimos de funções sujeitas a equações ou inequações algébricas ou espaço de soluções é limitado por condições polinomiais ou racionais.

Exemplo 5.5. Cada ponto reticulado do plano é rotulado com um número inteiro positivo. Cada um desses números é a média aritmética de seus quatro vizinhos (acima, abaixo, esquerda, direita). Demonstre que todos os rótulos são iguais.

Solução: Supomos que m seja o menor rótulo de um ponto reticulado L. Os pontos vizinhos de L são rotulados por a, b, c, d. Então:

$$m = \frac{a+b+c+d}{4} \Leftrightarrow a+b+c+d = 4m. \tag{2}$$

Como m é o menor rótulo, temos $a \geq m$, $b \geq m$, $c \geq m$, $d \geq m$. Se qualquer uma dessas desigualdades fosse estrita, teríamos

$$a+b+c+d > 4m$$

o que contradiz a equação (2). Portanto, concluímos que $a = b = c = d = m$. ■

Observação 5.2. Este é um problema bastante simples quando consideramos inteiros positivos. Entretanto, se substituirmos os inteiros positivos por números reais positivos, o problema se torna significativamente mais difícil. A dificuldade surge porque o conjunto dos números reais positivos não possui um elemento mínimo (ao contrário dos inteiros positivos, onde o Princípio da Boa Ordenação garante a existência de tal elemento).

Exemplo 5.6. (São Petersburgo 1998) Em cada uma de dez folhas de papel são escritas diversas potências de 2. A soma dos números em cada uma das folhas é a mesma. Mostre que algum número aparece pelo menos 6 vezes.

Solução: Seja N a soma comum, e n o maior inteiro tal que $2^n \leq N$. Suponha que cada potência só ocorra no máximo 5 vezes. Daí,

$$5(1 + 2 + \cdots + 2^n) = 5(2^{n+1} - 1) < 10N.$$

E isso gera uma contradição. ■

Exemplo 5.7. O número $n\sqrt{2}$ não é um número inteiro para nenhum inteiro positivo n.

Solução: Usaremos uma abordagem de demonstração de ampla aplicação, fundamentada no *Princípio do Elemento Extremo*. Suponha que exista um conjunto S não vazio de n inteiros positivos tais que $n\sqrt{2}$ é também um inteiro. Se S não for vazio, então pelo P.B.O ele tem um elemento mínimo k. Considere o inteiro $(\sqrt{2} - 1)k$. Então

$$(\sqrt{2} - 1)k\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2},$$

como $k \in S$, tanto $(\sqrt{2} - 1)k$ quanto $2k - k\sqrt{2}$ também são inteiros positivos. Portanto, por definição, $(\sqrt{2} - 1)k \in S$. Porém temos $(\sqrt{2} - 1)k < k$, absurdo! Pois k é o menor elemento de S. Logo, S é vazio, o que significa que $\sqrt{2}$ é irracional. ■

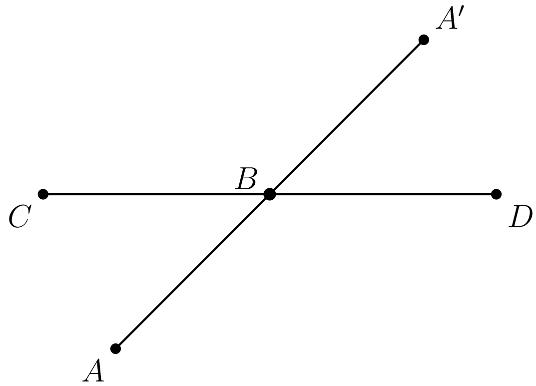
5.2 APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Exploraremos agora, exemplos em que a identificação de elementos extremos, como o maior lado, o menor ângulo ou a distância máxima entre figuras, desempenha um forte recurso na resolução de problemas geométricos.

Exemplo 5.8. Seja Ω um conjunto de pontos no plano. Cada ponto em Ω é um ponto médio de dois pontos em Ω. Mostre que Ω é um conjunto infinito.

Solução: Suponha que Ω seja um conjunto finito. Então Ω contém dois pontos A, B com distância máxima $|AB|$. B é um ponto médio de algum segmento CD com $C, D \in \Omega$. A figura abaixo mostra pela desigualdade triangular que $|AC| > |AB|$ ou $|AD| > |AB|$ contrariando a hipótese de $|AB|$ ser a maior distância devido a escolha dos dois pontos extremais A e B .

Figura 8 – Conjunto de pontos Ω



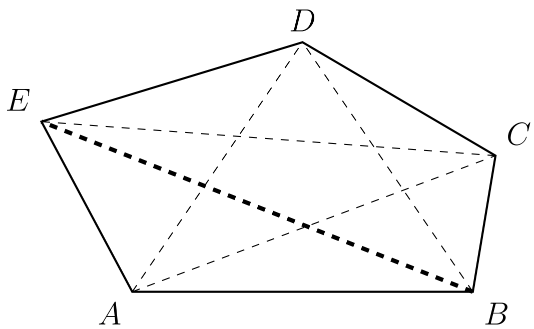
Fonte: Próprio autor (2025).

■

Exemplo 5.9. Em cada pentágono convexo, podemos escolher três diagonais a partir das quais um triângulo pode ser construído.

Solução: A figura abaixo mostra um pentágono convexo $ABCDE$. Seja BE a mais longa das diagonais.

Figura 9 – Pentágono convexo com BE destacada como a diagonal mais longa.



Fonte: Próprio autor (2025).

A desigualdade triangular implica

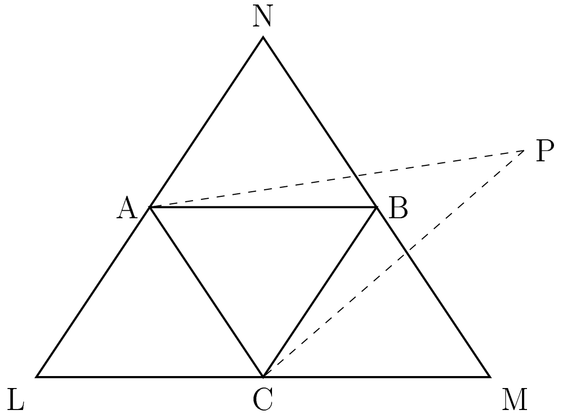
$$|BD| + |CE| > |BE| + |CD| > |BE|,$$

ou seja, podemos construir um triângulo a partir de BE, BD, CE. ■

Exemplo 5.10. (Coreia 1995) Considere um número finito de pontos no plano com a propriedade de que, para quaisquer três pontos A, B, C escolhidos dentre eles, a área do triângulo ABC é sempre menor que 1. Mostre que todos esses pontos estão contidos no interior ou na fronteira de um triângulo com área menor que 4.

Solução: Seja $\triangle ABC$ o triângulo de maior área possível formado por pontos do conjunto dado, onde S denota a área de $\triangle ABC$. Por hipótese, $S < 1$. Considere agora $\triangle LMN$, o triângulo cujos pontos médios dos lados são exatamente A, B e C (ou seja, $\triangle ABC$ é o triângulo medial de $\triangle LMN$). Neste caso, a área de $\triangle LMN = 4S < 4$.

Figura 10 – Triângulo LMN com pontos médios A,B e C.



Fonte: Próprio autor (2025).

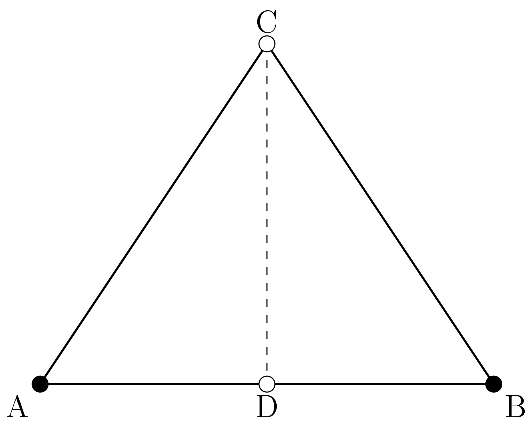
Afirmamos que todos os pontos do conjunto devem estar dentro ou sobre $\triangle LMN$. Suponha, por contradição, que exista um ponto P fora de $\triangle LMN$. Neste caso, é possível conectar P a dois dos vértices de $\triangle ABC$ formando um novo triângulo cuja área seria maior que S, o que contradiria a maximalidade da área de $\triangle ABC$. ■

Observação 5.3. Em qualquer problema, priorize identificar os elementos de ordem, máximo e mínimo. Sempre que possível, assuma uma disposição ordenada dos elementos (técnica conhecida como monotonização).

Exemplo 5.11. Sejam B e W conjuntos finitos de pontos pretos e brancos, respectivamente, no plano, com a propriedade especial de que todo segmento de reta conectando dois pontos da mesma cor contém pelo menos um ponto da outra cor. Vamos provar que todos os pontos devem estar alinhados em uma única reta usando o princípio do extremo.

Solução:

Figura 11 – Triângulo ABC com menor área possível.



Fonte: Próprio autor (2025).

Suponha, por contradição, que os pontos não são todos colineares. Então existem pelo menos três pontos formando um triângulo, conforme a figura 11. Entre todos os triângulos possíveis formados por esses pontos, considere $\triangle ABC$ aquele com menor área possível (princípio do extremo). Sem perda de generalidade, assuma que A e B são ambos pretos. Pela propriedade do problema, deve existir um ponto branco D no segmento AB. Agora, observe que pelo menos um dos novos triângulos formados ($\triangle ADC$ ou $\triangle BDC$) tem área estritamente menor que $\triangle ABC$, o que contradiz a minimalidade de $\triangle ABC$. Portanto, nossa suposição inicial é falsa, e todos os pontos devem estar em uma única reta. ■

Exemplo 5.12. Em todo polígono convexo de n lados com $n \geq 3$, existem três vértices consecutivos A, B, C tais que o circuncírculo do triângulo $\triangle ABC$ cobre todo o polígono.

Solução: Entre as finitas circunferências definidas por três vértices do polígono, existe uma circunferência máxima. Vamos dividir o problema em duas partes:

(1) A circunferência máxima cobre todo o polígono, e

(2) A circunferência máxima passa por três vértices consecutivos.

Provaremos (1) por contradição. Suponha que exista um ponto A' fora da circunferência máxima definida por $\triangle ABC$, onde A, B, C, A' são vértices de um quadrilátero convexo. Então, o circuncirculo de $\triangle A'BC$ teria raio maior que o de $\triangle ABC$, o que é uma contradição com a maximalidade.

Também provamos (2) por contradição. Sejam A, B, C vértices na circunferência máxima, e seja A' um vértice entre B e C que não está na circunferência máxima. Por (1), A' deve estar dentro dessa circunferência, mas então o circuncírculo de $\triangle A'BC$ seria maior que a circunferência máxima, novamente uma contradição. ■

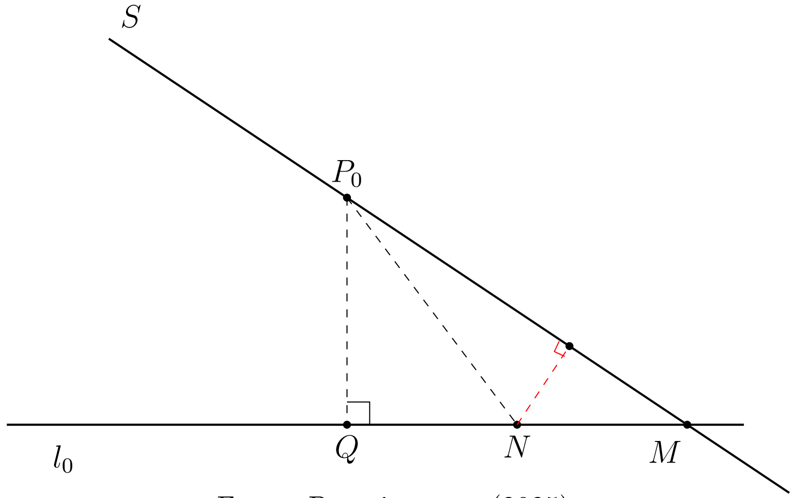
Exemplo 5.13. (Teorema de Sylvester) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a seguinte propriedade: qualquer reta que passa por dois pontos de S passa por um terceiro ponto de S. Prove que todos os pontos de S estão sobre uma mesma reta.

Solução: Suponha, por contradição, que nem todos os pontos de S estejam alinhados. Considere:

- $\mathcal{L}$ o conjunto de todas as retas determinadas por pares de pontos de S.
- Escolha $P_0 \in S$ e $l_0 \in \mathcal{L}$ tais que a distância $d(P_0, l_0)$ seja a menor distância não-nula possível entre pontos de S e retas de $\mathcal{L}$.
- Seja Q o pé da perpendicular de P_0 sobre l_0.

Por hipótese, l_0 deve conter pelo menos três pontos de S. Pelo menos dois desses pontos, digamos M e N, estão do mesmo lado em relação a Q. Sem perda de generalidade, assuma que N está entre Q e M.

Figura 12 – Teorema de Sylvester



Fonte: Próprio autor (2025).

Considere agora a reta P_0M e calculemos a distância de N a esta reta:

- A área do triângulo P_0MN pode ser calculada de duas formas:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}d(N, P_0M) \cdot |P_0M| = \frac{1}{2}d(P_0, l_0) \cdot |MN|.$$

- Como $|MN| < |P_0M|$ (pois N está entre Q e M), segue que:

$$d(N, P_0M) = d(P_0, l_0) \cdot \frac{|MN|}{|P_0M|} < d(P_0, l_0).$$

Isto contradiz a minimalidade de $d(P_0, l_0)$, pois encontramos um ponto $N \in S$ e uma reta $P_0M \in \mathcal{L}$ com distância menor. Portanto, nossa suposição inicial é falsa, e todos os pontos de S devem estar sobre uma única reta. ■

Observação 5.4. A validade do Teorema de Sylvester, vem da ideia da relação de ordem entre pontos e à distância entre eles. Isso acontece porque o teorema depende de definições e axiomas da geometria euclidiana. Em outras geometrias, o teorema pode não valer. Um exemplo de tal invalidez seria em geometrias projetivas, que surgem em áreas como a álgebra e a combinatória. Nessas geometrias, existem apenas um número finito de pontos e de retas, e os arranjos possíveis entre eles são diferentes dos que conhecemos no plano. Em certos casos, pode acontecer que todas as retas passem por três ou mais pontos do conjunto ou seja, nenhuma reta passa por exatamente dois deles, o que contraria o que o Teorema de Sylvester garante no plano euclidiano. Também cabe citar geometrias elípticas, onde as “retas” são curvas fechadas (como grandes círculos numa esfera), e dois pontos distintos sempre estão sobre alguma dessas curvas. Fora que, também pode acorrer de uma reta(curva) conter vários pontos do conjunto, sem que exista uma reta que passe por apenas dois.

5.3 APLICAÇÕES VARIADAS

Os próximos exemplos ilustrarão estratégias eficientes para explorar extremos na álgebra e na aritmética. Teremos desde: Encontrar os valores máximo e mínimo de funções polinomiais, racionais ou exponenciais, sujeitas a certas condições algébricas, o uso de médias (aritmética, geométrica, harmônica) para determinar extremos em expressões simétricas ou limitar o comportamento de sequências, identificar termos máximos ou mínimos em progressões aritméticas e geométricas, ou em somas condicionadas.

Exemplo 5.14. Existirá uma função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, onde $\mathbb{N}^*$ é o conjunto dos inteiros positivos, tal que se cumpra a seguinte igualdade para cada número natural $n > 1$:

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))\,?$$

Solução: Inicialmente devemos nos atentar que entre os valores

$$f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots,$$

deve haver um elemento mínimo, digamos que seja $f(n_0)$, onde $n_0 > 1$. Observe que

$$f(n_0+1) \geq f(n_0) = f(f(n_0-1)) + f(f(n_0+1)) \geq 1 + 1 > 1.$$

Como

$$f(n_0+1) > 1, \quad \text{então} \quad f(f(n_0+1)) \in \{f(2), f(3), \ldots\}.$$

Portanto,

$$f(f(n_0+1)) \geq f(n_0),$$

o que implica que

$$f(n_0) = f(f(n_0-1)) + f(f(n_0+1)) \geq 1 + f(n_0),$$

o que torna impossível existir tal função. ■

Exemplo 5.15. A soma de 17 inteiros positivos distintos é igual a 1000. Prove que podem ser escolhidos 8 destes inteiros de tal forma que a sua soma é maior ou igual a 500.

Solução: Ordene os inteiros em ordem crescente:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{17}.$$

Seja a_9 o elemento central. O valor médio da soma é $\left\lfloor \frac{1000}{17} \right\rfloor = 58$. Consideramos dois casos:

- $a_9 \geq 58$

  Neste caso, consideremos:

  $$a_{10} \geq 59,\ a_{11} \geq 60,\ \ldots,\ a_{17} \geq 66.$$

  Somando as desigualdades temos

  $$a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{17} \geq 59 + 60 + \cdots + 66 = 500.$$

- $a_9 < 58$ Então, temos:

$$a_9 \leq 57,\ a_8 \leq 56,\ \ldots,\ a_1 \leq 49.$$

Portanto:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_9 \leq 49 + 50 + \cdots + 57 = 477.$$

Segue que:

$$a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{17} \geq 1000 - 477 = 523 > 500.$$

Em ambos os casos, encontramos 8 inteiros cuja soma é pelo menos 500. ■

Exemplo 5.16. (Leningrado 1989) Dado um número natural $k > 1$, prove que é impossível colocar os números $1, 2, \ldots, k^2$ em um tabuleiro $k \times k$ de forma que todas as somas dos números em cada linha e coluna sejam potências de 2.

Solução: Suponha que tal disposição seja possível para algum natural maior que 1. Por sua vez seja 2^n a menor dentre todas as somas das linhas e colunas. Logo,

$$2^n \geq 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Como 2^n é a menor potência de 2 entre as somas, ela deve dividir todas as outras somas (pois são potências de 2 maiores ou iguais a 2^n). Portanto, 2^n divide a soma total de todos os números no tabuleiro. Assim

$$2^n \mid \frac{k^2(k^2+1)}{2}.$$

Como k^2 e $k^2 + 1$ tem paridades diferente. Absurdo! ■

Exemplo 5.17. Encontre todas as soluções positivas do sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_5^2 \\ x_4 + x_5 = x_1^2 \\ x_5 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

Solução: Consideremos x e y o maior e o menor de $x_1, x_2, ..., x_5$, respectivamente, ou seja $x = \max\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ e $y = \min\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Como x é máximo, então existe uma equação onde x aparece no lado esquerdo:

$$x_i + x_j = x_k^2 \quad \text{com} \quad x_k \leq x.$$

Assim

$$x_i + x_j \leq 2x \implies x_k^2 \leq 2x \implies x \leq 2.$$

E tomando y mínimo, então temos uma equação onde y aparece no lado direito:

$$x_i + x_j = y^2 \quad \text{com} \quad x_i, x_j \geq y.$$

Daí

$$x_i + x_j \geq 2y \implies y^2 \geq 2y \implies y \geq 2 \quad (y > 0).$$

Assim

$$2 \leq y \leq x \leq 2.$$

Portanto a única solução seria quando

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 2.$$

■

5.4 VERSÃO FUNCIONAL DO PRINCÍPIO DO ELEMENTO EXTREMO

Agora apresentaremos o princípio do elemento extremo em uma versão funcional denotada por *Princípio Extremal*, ela nos permite explorar objetos com propriedades maximais ou minimais e assim, construir demonstrações elegantes.

A aplicação eficaz do *Princípio Extremal* depende da escolha adequada da função. Essa escolha exige um profundo *insight*, pois a função ideal deve traduzir propriedades abstratas em quantidades mensuráveis, capturar a essência do problema, preservando a finitude do conjunto estudado e por fim estabelecer uma correspondência biunívoca entre os extremos da função e as soluções desejadas. Funções bem escolhidas costumam ser aplicáveis a grupos inteiros de problemas. Exemplos comuns incluem dimensão, cardinalidade, energia, entropia, entre outras.

Agora podemos apresentar a versão mais simples do *Princípio Extremal* porém, a que provavelmente é bastante relevante em aplicações. Ela também é conhecida como *Princípio Minimal (ou Princípio Maximal).*

Teorema 5.1. (Princípio Minimal) *Seja S um conjunto finito e não vazio. Considere $f : S \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Então existe $m \in S$ que minimiza o valor de f, ou seja,*

$$f(m) \leq f(s) \quad \forall s \in S.$$

Demonstração. Como S é um conjunto finito e não vazio, podemos escrever:

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}, \quad n \geq 1.$$

Temos que a função f associa a cada elemento de S um número real:

$$f(s_1), f(s_2), \ldots, f(s_n) \in \mathbb{R}.$$

Como o conjunto de valores $\{f(s_1), \ldots, f(s_n)\} \subset \mathbb{R}$ é finito e não vazio, então pelo PBO garantimos que f possui um menor elemento. Logo, existe algum índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que:

$$f(s_i) \leq f(s_j), \quad \text{para todo } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definimos $m := s_i \in S$. Então:

$$f(m) \leq f(s), \quad \text{para todo } s \in S.$$

Portanto, existe $m \in S$ tal que $f(m) \leq f(s), \quad \forall s \in S.$ $\square$

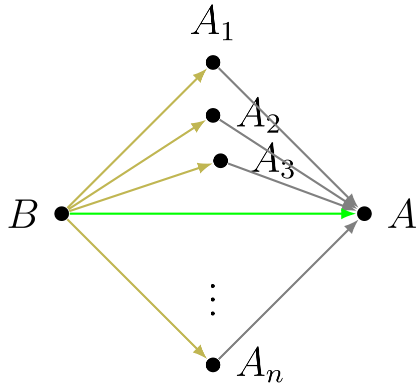
Observação 5.5. Por outro lado, o princípio maximal nos garante que também existe um elemento que maximiza o valor de f. Observe que ambos princípios são equivalentes, pois podemos deduzir um a partir do outro substituindo f por $-f$. Usamos o princípio quando queremos provar a existência de algum elemento de um conjunto finito com certas propriedades especiais ou quando queremos mostrar que não existem elementos com uma certa propriedade em um conjunto finito, ou seja, quando se quer provar que um subconjunto de um conjunto finito é vazio.

Geralmente, aplicamos o princípio sobre um conjunto finito muito grande, provavelmente de tamanho desconhecido, e onde não sabemos exatamente quais são seus elementos. Os passos mais importantes para aplicar o princípio consistem, na identificação do conjunto e verificação da sua finitude. E construir uma função que possamos minimizar (ou maximizar), este sim é o passo mais engenhoso na nossa demonstração.

Exemplo 5.18. (ONM 2004) Em um certo país, existe uma conexão ferroviária direta entre qualquer par de cidades, mas os trens viajam apenas em uma direção. Prove que existe uma cidade da qual é possível chegar a qualquer outra, passando por no máximo uma cidade intermediária.

Solução: Considere uma cidade A que maximize o número de cidades alcançáveis diretamente a partir dela (sem passar por outras cidades). Afirmamos que esta cidade satisfaz a condição requerida. De fato, se supormos o contrário, deve existir uma cidade B para a qual não é possível viajar diretamente de A nem viajando de A passando por exatamente uma cidade intermediária conforme a figura 13. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ as cidades alcançáveis diretamente a partir de A (indicadas por setas cinzas). Como não se pode viajar diretamente de nenhuma A_i para B (para $i = 1, 2, \ldots, n$), necessariamente deve existir uma ligação de B para cada A_i (setas amarelas). Além disso, como não existe ligação direta de A para B, deve existir a ligação $B \to A$ (seta verde).

Figura 13 – Conexões ferroviárias entre A e B.



Fonte: Próprio autor (2025).

Concluímos então que a partir de B pode-se viajar diretamente para pelo menos $n+1$ cidades (as n cidades A_i mais a cidade A), o que excede o número n de cidades alcançáveis diretamente a partir de A. Esta contradição com a maximalidade de A prova que não pode existir tal cidade B, e portanto a cidade A realmente satisfaz a propriedade desejada. ■

Veremos agora outra variação do *Princípio Extremal* para conjuntos infinitos. Podemos dizer que ele é equivalente ao P.B.O.

Teorema 5.2. (Princípio Minimal Infinito) *Seja S um conjunto não vazio (de qualquer cardinalidade, inclusive infinito). Considere*

$$f\colon S \to \mathbb{Z}$$

e suponha que existe algum $c \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c \leq f(s) \quad \forall s \in S.$$

Então existe algum $m \in S$ que minimiza o valor de f, ou seja,

$$f(m) \leq f(s) \quad \forall s \in S.$$

Demonstração. Como $f(s) \in \mathbb{Z}$ para todo $s \in S$ e existe um número inteiro c tal que $f(s) \geq c$ para todo $s \in S$, temos que o conjunto de valores da imagem de f,

$$f(S) := \{f(s) \mid s \in S\} \subset \mathbb{Z},$$

é um subconjunto não vazio e *inferiormente limitado* de $\mathbb{Z}$. Como qualquer subconjunto de $\mathbb{Z}$ podemos garantir pelo Princípio do Boa Ordenação a existência de um elemento mínimo. Logo o conjunto $f(S)$ possui um menor elemento. Seja $m_0 \in \mathbb{Z}$ esse menor elemento , ou seja,

$$m_0 = \min f(S).$$

Como $m_0 \in f(S)$, existe algum $m \in S$ tal que $f(m) = m_0$. Logo, para todo $s \in S$,

$$f(m) = m_0 \leq f(s),$$

ou seja, f atinge seu valor mínimo em $m \in S$, como queríamos demonstrar. □

Observação 5.6. Por exemplo, se considerarmos uma função $f\colon S \to \mathbb{N}$, podemos aplicar o princípio minimal pois $0 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim como na versão finita do princípio minimal, utilizamos este princípio para construir elementos especiais de um conjunto e mostrar que não existem elementos com certa propriedade em um conjunto.

Observação 5.7. Observe que se $3 \mid a^2 + b^2 \Rightarrow 3 \mid a$ e $3 \mid b$. De fato, pois podemos escrever $a = 3k + r_a$ e $b = 3m + r_b$ com $r_a, r_b \in \{0, 1, 2\}$. Desenvolvendo $a^2 + b^2$ temos:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (3k+r_a)^2+(3m+r_b)^2 \\ &= 9k^2+6kr_a+r_a^2+9m^2+6mr_b+r_b^2 \\ &= 3(3k^2+3m^2+2kr_a+2mr_b)+(r_a^2+r_b^2). \end{aligned}$$

Como 3 divide a^2+b^2, deve dividir $r_a^2+r_b^2$. Calculando todas as possibilidades para (r_a, r_b):

- $(0,0) \to 0+0=0$ (divisível por 3).
- $(0,1),(1,0) \to 0+1=1$ ou $1+0=1$ (não divisível por 3).
- $(0,2),(2,0) \to 0+4=4$ ou $4+0=4$ (não divisível por 3).
- $(1,1) \to 1+1=2$ (não divisível por 3).
- $(1,2)$, $(2,1) \to 1+4=5$ ou $4+1=5$ (não divisível por 3).
- $(2,2) \to 4+4=8$ (não divisível por 3).

A única possibilidade onde $r_a^2+r_b^2$ é divisível por 3 é quando $r_a=r_b=0$, ou seja, quando ambos a e b são múltiplos de 3.

Exemplo 5.19. Mostre que não existe quadrupla de inteiros positivos (x,y,z,u) que satisfaça

$$x^2+y^2=3(z^2+u^2).$$

Solução: Suponha que exista tal quadrupla. Escolhemos a solução com o menor valor de x^2+y^2. Seja (a,b,c,d) essa solução escolhida. Então

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 3(c^2+d^2) \\ &\Rightarrow 3 \mid a^2+b^2 \\ &\Rightarrow 3 \mid a \text{ e } 3 \mid b \\ \Rightarrow a &= 3a_1, \quad b=3b_1 \quad \text{com } a_1,b_1 \in \mathbb{Z}, \\ a^2+b^2 &= 9(a_1^2+b_1^2)=3(c^2+d^2) \\ &\Rightarrow c^2+d^2=3(a_1^2+b_1^2). \end{aligned}$$

O que mostra que (c,d,a_1,b_1) onde $c^2+d^2<a^2+b^2$ é solução, absurdo pois (a,b,c,d) é a menor solução para quadrupla. Logo a minimalidade da solução não é satisfeita. ■

O método anterior é conhecido como **descenso infinito**, pois o que fazemos é mostrar que, a partir de uma solução, sempre podemos produzir outra estritamente menor, ou seja, produzimos infinitas soluções cada vez menores. Como no caso dos números naturais é impossível descender infinitamente, conclui-se que não pode existir nenhuma solução.

Este método ganhou fama depois que Fermat o utilizou para resolver de forma elementar alguns exemplos do chamado *Último Teorema de Fermat*, que afirma não existirem soluções inteiras não triviais para $x^n+y^n=z^n$ com $n \geq 3$, foi demonstrado por Andrew Wiles em 1994. A prova utilizou técnicas avançadas da teoria dos números e geometria algébrica, particularmente a conexão entre curvas elípticas e formas modulares (via Teorema de Taniyama-Shimura). Wiles provou que toda curva elíptica semiestável é modular, implicando a impossibilidade das soluções propostas por Fermat. Esse resultado, que dependeu de contribuições acumuladas por séculos, resolveu um dos problemas mais famosos da matemática, permanecendo em aberto por mais de 350 anos.

Exemplo 5.20. (IMO 2020). Considere um baralho de $n > 1$ cartas. Cada carta tem um inteiro positivo escrito. O baralho tem a propriedade de que a média aritmética de cada par de cartas é a média geométrica de alguma coleção de cartas. Para quais valores de n o baralho só tem cartas iguais?

Solução: Afirmamos que para todo $n > 1$ o baralho sempre deve ter todas suas cartas iguais. Em outras palavras, afirmamos que não existe tal baralho com um par de cartas diferentes. Suponhamos por contradição que isto não seja verdade, e aplicando o princípio minimal consideremos um baralho que cumpre a propriedade do enunciado, que além disso não tem todas suas cartas iguais, e que além disso minimiza a soma total das cartas. Ordenemos as cartas

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n.$$

Por nossa suposição sabemos que $a_n > a_1$. Seja $p \mid a_n$ um divisor primo. Afirmamos que

$$p \mid a_i \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

De fato, suponhamos que $p \mid a_{i+1}$, $p \mid a_{i+2}$, …, $p \mid a_n$. Como

$$\frac{a_i + a_n}{2} = \sqrt[k]{a_{i_1} \cdots a_{i_k}}$$

para algum conjunto de índices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, segue que se $a_{i_k} \leq a_i$ então

$$\frac{a_i + a_n}{2} \leq \sqrt[k]{a_{i_1} \cdots a_{i_k}} \leq a_i$$

e consequentemente $a_n \leq a_i$. Logo conclui-se que $a_i = a_n$ e assim $p \mid a_i$ neste caso. No caso que $a_{i_k} > a_i$, segue que $i_k > i$ e então $p \mid a_{i_k}$. Como

$$(a_i + a_n)^k = 2^k a_{i_1} \cdots a_{i_k},$$

vemos que a igualdade anterior implica que $p \mid a_i$ neste caso também. Isto termina a prova de nossa afirmação. Finalmente, se tomarmos o baralho e dividirmos o número de todas as cartas por p obtemos um novo baralho com as mesmas propriedades do problema, que não tem todas suas cartas iguais e com um valor menor da soma total de suas cartas. Isto contradiz nossa escolha original e termina o problema. ■

Finalmente veremos uma versão do princípio extremal em conjuntos ordenados. Tanto esta versão, como as duas que vimos anteriormente, são casos particulares de um princípio extremal geral que vale em conjuntos infinitos de tamanhos tão grandes quanto se queira, dotados de uma ordem especial (chamada ordem indutiva). Nos referimos ao chamado Lema de Zorn, o qual é sumamente importante em matemática. Nós somente mencionaremos sua versão em conjuntos finitos, a qual é totalmente trivial. Primeiro vamos com os preliminares.

Definição 5.1. Um conjunto ordenado é um par $(S, \leq)$ formado por um conjunto S e uma relação de ordem $\leq$ entre seus elementos. Uma relação $\leq$ entre elementos de S é uma ordem quando se cumpre as seguintes propriedades:

(1) Reflexiva, isto é, $\forall a \in S : a \leq a$,

(2) Antissimétrica, isto é, $\forall a, b \in S :$ se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$,

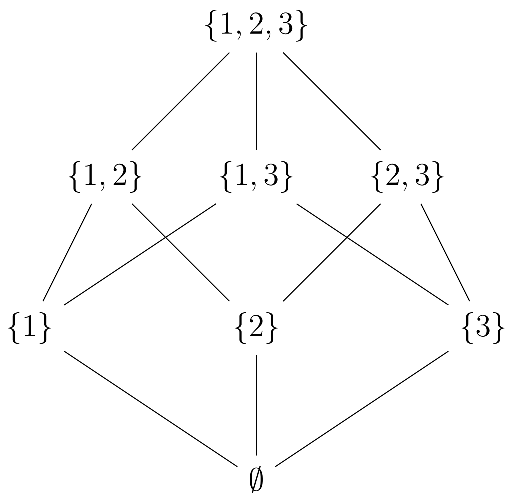
(3) Transitiva, isto é, $\forall a, b, c \in S :$ se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

Exemplo 5.21. Seja $\mathbb{S}$ o conjunto dos subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$, ou seja,

$$\mathbb{S} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Se para $A, B \in \mathbb{S}$ definirmos $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$, então temos uma ordem em $\mathbb{S}$. Um modo de vizualizar esta ordem em $\mathbb{S}$ é pelo diagrama de Hasse, representado na figura 14 abaixo:

Figura 14 – Diagrama Hasse



Fonte: Próprio autor 2025.

Podemos notar facilmente pelo diagrama que o $\emptyset$ é o elemento mínimo e $\{1, 2, 3\}$ é o elemento máximo de $\mathbb{S}$.

Exemplo 5.22. Os números reais com a ordem usual $(\mathbb{R}, \leq)$ onde

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$

é um conjunto ordenado. Esta ordem tem a seguinte propriedade que nos permite representar $\mathbb{R}$ em uma reta: É uma ordem total, isto é, $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b$ ou $b \leq a$.

Exemplo 5.23. O subconjunto dos números naturais $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ goza da seguinte propriedade que é equivalente ao princípio de indução: É um bom ordenamento, isto é,

$$\forall\, \emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N},\ \exists\, s_0 \in S\colon s_0 = \min(S).$$

Exemplo 5.24. A ordem mais importante em $\mathbb{N}$ é dada pela relação de divisibilidade. O par $(\mathbb{N}, |)$ é um conjunto ordenado, mas não possui uma ordem total. Por exemplo, $2 \nmid 3$ e $3 \nmid 2$. O mínimo de $(\mathbb{N}, |)$ é o 1. Por outro lado, nem todo subconjunto de $\mathbb{N}$ possui um mínimo, por exemplo $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ não tem mínimo.

Definição 5.2. Seja $(S, \leq)$ um conjunto ordenado. Dizemos que $s_0 \in S$ é *minimal* se

$$\forall s \leq s_0 : s = s_0.$$

Analogamente, dizemos que um elemento $s_1 \in S$ é *maximal* se

$$\forall s \geq s_1 : s = s_1.$$

Exemplo 5.25. No exemplo anterior, $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ tem infinitos elementos minimais, que correspondem exatamente aos números primos.

Teorema 5.3. *Seja S um conjunto ordenado, finito e não vazio. Então S possui algum elemento minimal e algum elemento maximal.*

Demonstração. A demonstração é análoga a apresentada no teorema 5.1 □

Exemplo 5.26. (IMO 1988) Sejam a e b inteiros positivos tais que $ab+1$ divide a^2+b^2. Demonstre que $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ é o quadrado de um perfeito.

Solução: Iremos provar por absurdo. Se $ab+1$ divide a^2+b^2, então existe um inteiro positivo k tal que:

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k.$$

Então teremos:

$$a^2 - kab + b^2 = k. \tag{3}$$

Suponhamos agora que k não seja um quadrado perfeito. Consideremos o conjunto de todos os pares (a, b) que satisfazem (3) com $a \geq b > 0$, e tomemos o par com a mínimo.

- Se $a = b$, a equação se torna:

  $$(2-k)a^2 = k.$$

  Como o lado esquerdo é não positivo, teríamos $k \leq 0$, contradizendo k positivo.
- Se $a > b$, considerando a equação como quadrática em a:

  $$a^2 - kba + (b^2 - k) = 0.$$

Sejam a e a_1 as raízes. Pelas relações de Vieta:

$$a + a_1 = kb \quad \text{e} \quad aa_1 = b^2 - k.$$

Assim, $a_1 = \frac{b^2-k}{a} < \frac{a^2-1}{a} < a$ (pela minimalidade de a). O par (a_1, b) também satisfaz a equação original com $0 < a_1 < a$, contradizendo a minimalidade de a. Portanto, k é um quadrado perfeito. ■

6 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DAS OLIMPÍADAS NACIONAIS COM O PRINCÍPIO DA INVARIÂNCIA E DO ELEMENTO EXTREMO

Neste capítulo, aprofundaremos nossa análise, aplicando esses princípios a problemas selecionados de competições como a OBM, OBMEP e OCM. Veremos como estratégias baseadas em invariantes e extremos não apenas resolvem questões desafiadoras, mas também revelam padrões ocultos, transformando problemas dinâmicos em análises estáticas de propriedades preservadas ou condições críticas.

Sendo assim, destacaremos técnicas estudadas de resolução, como:

- **Identificação de invariantes criativos** (paridade, divisibilidade, somas simétricas, entre outros).
- **Uso estratégico de elementos extremos** (maior/menor valor, primeiro/último elemento, configurações limites).

Essas metodologias permitem a identificação precoce de soluções não viáveis, otimizando assim o processo de resolução de problemas. O domínio dessas técnicas nos dão uma **vantagem competitiva** significativa, propiciando maior clareza e eficiência na execução da soluções. As resoluções buscam explicitar como e por que cada princípio é aplicado, destacando estratégias heurísticas, armadilhas comuns e conexões com outros conceitos (como o Princípio da Casa dos Pombos ou indução).

As questões foram cuidadosamente selecionadas para ilustrar a versatilidade desses princípios em diferentes contextos. Assim, este trabalho reflete o compromisso de unir teoria e prática. As questões servem não apenas para consolidar o conhecimento, mas também para estimular a criatividade e o raciocínio lógico desenvolvido durante a leitura dos capítulos anteriores.

Este capítulo se destaca como resultado educacional esperado, que por sua vez, visa a atender às necessidades tanto de professores quanto de alunos em busca de excelência matemática. Para os educadores, oferece um repertório valioso de problemas desafiadores que podem enriquecer suas aulas, servindo como ferramenta pedagógica para estimular o raciocínio crítico e a criatividade dos estudantes. Para os alunos, especialmente aqueles que aspiram aprofundar seu conhecimento, apresenta técnicas de prova refinadas e elegantes, organizadas de maneira progressiva para facilitar a aprendizagem.

O resultado é um material que não apenas transmite conhecimento matemático, mas também cultiva a capacidade de resolver problemas de forma criativa e sistemática, habilidades essenciais tanto para competições matemáticas quanto para a formação acadêmica em geral.

Problema 6.1. (OBM 2007-N2Q3) Em 1949 o matemático indiano D. R. Kaprekar inventou um processo conhecido como Operação de Kaprekar. Primeiramente escolha um número de quatro dígitos (não todos iguais), em seguida escreva a diferença entre o maior e o menor número que podem ser formados a partir de uma permutação dos dígitos do número inicial. Repetindo o processo com cada número assim obtido, obtemos uma sequência. Por exemplo, se o primeiro número for 2007, o segundo será $7200 - 0027 = 7173$. O terceiro será $7731 - 1377 = 6354$. Começando com o número 1998, qual será o 2007-ésimo termo da sequência?

Solução: A sequência é $1998 \to 9981 - 1899 = 8082 \to 8820 - 0288 = 8532 \to 8532 - 2358 = 6174 \to 7641 - 1467 = 6174$. Note que, depois de 6174, todos os termos serão iguais a 6174, pois este é um ponto fixo da operação. Logo, a resposta é 6174. Na verdade, começando com qualquer número de 4 dígitos, obtemos este número, 6174, após executarmos um número finito de vezes a operação de Kaprekar. ■

Observação 6.1. O número 6174 é um invariante porque, ao aplicarmos a Operação de Kaprekar, ele se mantém inalterado. Esse comportamento é análogo a um ponto de equilíbrio no qual o processo converge independentemente do número inicial de 4 dígitos (desde que não sejam todos iguais).

Problema 6.2. (OBM 2012-N2Q3) Quando duas amebas vermelhas se juntam, se transformam em uma única ameba azul; quando uma ameba vermelha se junta com uma ameba azul, as duas se transformam em três amebas vermelhas; quando duas amebas azuis se juntam, elas se transformam em quatro amebas vermelhas. Um tubo de ensaio tem inicialmente 201 amebas azuis e 112 amebas vermelhas.

(a) É possível que após algumas transformações o tubo contenha 100 amebas azuis e 314 amebas vermelhas?

(b) É possível que após algumas transformações o tubo contenha 99 amebas azuis e 314 amebas vermelhas?

Solução:

(a) Vamos analisar as transformações considerando apenas as cores. Temos duas regras: (1) podemos converter vermelhas em azuis e vice-versa individualmente; (2) quando temos azuis e vermelhas juntas, podemos transformá-las apenas em vermelhas (1 azul + 1 vermelha $\to$ 3 vermelhas). Isso mostra que é mais fácil obter vermelhas do que azuis. Uma estratégia eficaz é: primeiro, isolar as 100 azuis iniciais; depois, trabalhar com as 101 azuis e 112 vermelhas restantes. A questão é se podemos transformar essas 101 azuis e 112 vermelhas em 314 vermelhas. Sabemos que cada par (azul + vermelha) produz 3 vermelhas. Com 101 azuis: usamos 101 azuis + 101 vermelhas $\to 3 \times 101 = 303$ vermelhas. Sobram $112 - 101 = 11$ vermelhas não transformadas. O total final será $303 + 11 = 314$ vermelhas, mantendo as 100 azuis iniciais, como queríamos.

(b) Vamos encontrar um **invariante** para este problema. Mostraremos que a quantidade $V + 2A$ (vermelhas mais o dobro das azuis) permanece constante em todas as transformações. Analisemos cada caso:

1. Duas vermelhas $\to$ uma azul:

$$(V, A) \to (V - 2, A + 1)$$
$$V + 2A \to (V - 2) + 2(A + 1) = V + 2A.$$

2. Uma vermelha + uma azul → três vermelhas:

$$(V, A) \to (V - 1 + 3, A - 1) = (V + 2, A - 1)$$
$$V + 2A \to (V + 2) + 2(A - 1) = V + 2A.$$

3. Duas azuis → quatro vermelhas:

$$(V, A) \to (V + 4, A - 2)$$
$$V + 2A \to (V + 4) + 2(A - 2) = V + 2A.$$

Em todos os casos, $V + 2A$ é invariante. Na configuração inicial ($V = 212$, $A = 151$):

$$212 + 2 \times 151 = 514.$$

Enquanto na configuração desejada ($V = 314$, $A = 100$):

$$314 + 2 \times 100 = 514.$$

Portanto, a transformação é possível, pois o invariante é preservado. ■

Problema 6.3. (OBMEP 2005-N2Q1) Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira, escrevendo no quadro-negro um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:

1. Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.
2. Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Depois que os alunos escrevem um novo número, a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras. Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{\text{dobra}} 406 \xrightarrow{\text{apaga}} 40 \xrightarrow{\text{apaga}} 4 \ldots$$
$$4197 \xrightarrow{\text{apaga}} 419 \xrightarrow{\text{dobra}} 838 \xrightarrow{\text{apaga}} 83 \ldots$$

a) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
b) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
c) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.

Solução:

(a) Há várias soluções, como por exemplo:

$$45 \xrightarrow{\text{apaga}} 4 \xrightarrow{\text{dobra}} 8 \xrightarrow{\text{dobra}} 16 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$
ou
$$45 \xrightarrow{\text{dobra}} 90 \xrightarrow{\text{apaga}} 9 \xrightarrow{\text{dobra}} 18 \xrightarrow{\text{apaga}} 1.$$

(b) Aqui também há várias soluções, como por exemplo:

$$345 \xrightarrow{\text{apaga}} 34 \xrightarrow{\text{apaga}} 3 \xrightarrow{\text{dobra}} 6 \xrightarrow{\text{dobra}} 12 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$

ou

$$345 \xrightarrow{\text{apaga}} 34 \xrightarrow{\text{dobra}} 68 \xrightarrow{\text{apaga}} 6 \xrightarrow{\text{dobra}} 12 \xrightarrow{\text{apaga}} 1.$$

(c) Aplicamos a regra "apaga" até sobrar apenas um algarismo, e temos então três casos:

1. Este algarismo é igual a 1 e a brincadeira acaba.
2. Este algarismo é 2, 3 ou 4: neste caso aplicamos a regra "dobra" algumas vezes até obter um número de dois algarismos cujo algarismo das dezenas seja 1 (16, 12 ou 16, respectivamente), e aplica-se a regra "apaga" obtendo o número 1.
3. Este algarismo é 5, 6, 7, 8 ou 9: neste caso aplica-se a regra "dobra" uma vez, obtendo respectivamente 10, 12, 14, 16 ou 18; então aplica-se a regra "apaga" para obter o número 1.

Observação 6.2. O invariante aqui é que, independentemente do número inicial, aplicando-se as regras de apagar ou dobrar, sempre se chegará a 1 após um número finito de passos. Isso ocorre porque o processo reduz sistematicamente a magnitude do número (seja diminuindo seus dígitos, seja forçando-o a entrar em um ciclo que leva a 1). Podemos modelar esse problema como um algoritmo de redução, onde:

- Se n tem mais de um dígito, n é reduzido para $\lfloor \frac{n}{10} \rfloor$ (apagar o último dígito) ou $2n$ (dobrar).
- Se n tem um único dígito, só podemos dobrá-lo até que tenha dois dígitos novamente.

O único **ponto fixo** (estado que não muda) é 1, pois:

$$1 \xrightarrow{\text{dobra}} 2 \xrightarrow{\text{dobra}} 4 \xrightarrow{\text{dobra}} 8 \xrightarrow{\text{dobra}} 16 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$

entrando em um ciclo que retorna a 1. Portanto, **1 é um atrator** para esse processo, e qualquer número natural diferente de zero eventualmente chegará a ele seguindo as regras dadas. ■

Problema 6.4. (OCM 2023-N2Q2) Dado o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, ao remover um número x, a média dos elementos restantes é 2023. Sabendo que n é ímpar, determine o valor de x.

Solução: A soma dos elementos do conjunto original é:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Se um elemento x é removido, a nova soma dos elementos passa a ser:

$$\frac{n(n+1)}{2} - x.$$

Como agora o número de elementos é $n-1$, a média dos elementos restantes é dada por:

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - x}{n-1} = 2023.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $(n-1)$, temos:

$$\frac{n(n+1)}{2} - x = 2023(n-1).$$

Isolando x:

$$x = \frac{n(n+1)}{2} - 2023(n-1). \tag{1}$$

Como x deve pertencer ao conjunto $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, devemos garantir que $x \in \mathbb{N}$ e $1 \leq x \leq n$. Note que a média do conjunto original é:

$$\frac{1+n}{2}.$$

Como a média dos elementos restantes é 2023, procuramos um valor de n tal que:

$$\frac{1+n}{2} \approx 2023 \Rightarrow n \approx 4045.$$

Como n é ímpar, para $n = 4045$. Substituindo na equação (1):

$$x = \frac{4045 \cdot 4046}{2} - 2023 \cdot 4044.$$

Calculando:

$$x = \frac{16370570}{2} - 8181012 = 8185285 - 8181012 = 4273. \qquad \blacksquare$$

Observação 6.3. A soma dos elementos restantes após a remoção de x é invariável e igual a $2023(n-1)$, já que a média foi fixada. Esse valor determina unicamente o valor de x pela diferença em relação à soma total do conjunto original.

Problema 6.5. (OBMEP 2020-BQN3Q15) Começando com um número inteiro positivo n, uma sequência é criada satisfazendo a seguinte regra: cada termo se obtém do anterior subtraindo-se o maior quadrado perfeito que é menor ou igual ao termo anterior, até chegar ao número zero. Por exemplo, se $n = 142$, teremos a seguinte sequência de 5 termos:

$a_1 = 142, \quad a_2 = 21, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 1, \quad a_5 = 0$, pois $21 = 142 - 11^2$, $5 = 21 - 4^2$, $1 = 5 - 2^2$ e $0 = 1 - 1^2$.

(a) Dê exemplo de uma sequência que tenha exatamente 6 termos.

(b) Encontre o menor valor de n para que a sequência assim criada tenha exatamente 7 termos.

Solução:

(a) Um exemplo é a sequência, $a_1 = 23, \quad a_2 = 7 = 23 - 16, \quad a_3 = 3 = 7 - 4, \quad a_4 = 2 = 3 - 1, \quad a_5 = 1 = 2 - 1, \quad a_6 = 0 = 1 - 1$.

(b) Como $a_{n+1} = a_n - x^2$, com $x^2 \leq a_n < (x+1)^2$, segue que

$$a_{n+1} = a_n - x^2 < (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1.$$

Daí o inteiro x satisfaz $x > \frac{a_{n+1}-1}{2}$. Para obter o valor mínimo, a sequência será construída de trás para frente e em cada etapa será utilizado a estimativa mínima do incremento x^2 obtida anteriormente. Temos $a_7 = 0$ e $a_6 \geq 1^2$. Daí

$$\begin{aligned} a_5 &= a_6 + x^2 \geq 1 + 1^2, \\ a_4 &= a_5 + x^2 \geq 2 + 1^2, \\ a_3 &= a_4 + x^2 \geq 3 + 2^2, \\ a_2 &= a_3 + x^2 \geq 7 + 4^2, \\ a_1 &= a_2 + x^2 \geq 23 + 144. \end{aligned}$$

Assim, o menor valor de n é $23 + 144 = 167$ e a sequência de 7 termos que será criada é

$$a_1 = 167, \quad a_2 = 23, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 3, \quad a_5 = 2, \quad a_6 = 1, \quad a_7 = 0.$$ ■

Observação 6.4. Começar com o elemento mínimo (zero) e ir adicionando os menores quadrados possíveis permitiu, garantir que n fosse o menor possível e controlar o número exato de termos na sequência, evitando soluções redundantes ou ineficientes. Essa abordagem é um exemplo clássico de **construção gulosa** em matemática, onde escolhas locais ótimas (usar o menor quadrado possível em cada etapa) levam a uma solução global ótima (o menor n que gera uma sequência com 7 termos). O método de começar do mínimo funcionou porque garantiu que cada passo fosse necessário e suficiente, levando ao menor $n = 167$ possível.

Problema 6.6. (OBM 2012-N2Q3) Zoroastro escreveu os números 1, 2, ...,100 em um quadro negro. Ele irá executar algumas operações que reduzirão a quantidade de números até que reste apenas um único número no quadro. A primeira operação consiste em escolher dois números quaisquer a e b e trocá-los por $a + b - 1$. A segunda operação consiste em novamente escolher dois números quaisquer a e b e trocá-los por $a + b - 2$. Em geral, depois de executar k operações, a nova operação será escolher dois números quaisquer a e b e substituí-los por $a + b - (k + 1)$. Determine qual o número que restará no final.

Solução: Observe que, a cada passo i, a soma dos números escritos no quadro diminui de i. No total, serão realizados 99 passos. A soma dos números no quadro inicial é

$$1 + 2 + \cdots + 100,$$

e após 99 passos será

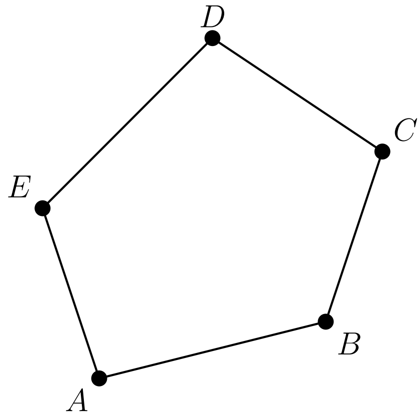
$$(1 + 2 + \cdots + 100) - (1 + 2 + \cdots + 99) = 100,$$

e portanto o número que sobra é 100. ■

Problema 6.7. (OBM 1998- N2Q1) Prove que em qualquer pentágono convexo existem dois ângulos internos consecutivos cuja soma é maior ou igual a 216°.

Solução: Seja $ABCDE$ este pentágono. Suponha, por absurdo, que não existam dois ângulos consecutivos cuja soma seja maior ou igual a 216°.

Figura 15 – Pentágono



Fonte: Próprio autor (2025).

Então a soma de dois ângulos consecutivos é menor que que 216° logo teremos que

$$\angle A + \angle B < 216^\circ$$

$$\angle B + \angle C < 216^\circ$$

$$\angle C + \angle D < 216^\circ$$

$$\angle D + \angle E < 216^\circ$$

$$\angle E + \angle A < 216^\circ$$

ao somarmos as desigualdades chegamos em

$$2(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E) < 1080^\circ \Leftrightarrow \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E < 540^\circ.$$

Porém a soma dos ângulos internos de um pentágono é $180^\circ(5-2) = 540^\circ$. Logo, existem dois ângulos internos consecutivos cuja soma é maior ou igual a 216. ■

Problema 6.8. (OCM 2024-N2Q2) Romildo distribui os números $\{1, 2, \ldots, 200\}$ em duas caixas A e B, de modo que cada número aparece em exatamente uma caixa. É possível que Romildo realize a distribuição de modo que o produto dos números da caixa A seja igual ao produto dos números da caixa B? Justifique sua resposta.

Solução: Suponhamos que seja possível tal distribuição de modo que o produto dos elementos da caixa A, denotado por P_A, seja igual ao produto dos elementos da caixa B, denotado por P_B. Então:

$$P_A = P_B.$$

Considere o número P, tal que P seja o maior número primo menor que 200. Assim temos que $100 < P \leq 199$, consequentemente não existe nenhum outro múltiplo de P menor que 200. Como cada número deve estar em exatamente uma das caixas, o número P estará em **uma única** caixa: ou em A, ou em B, mas não em ambas. Suponha, sem perda de generalidade, que $P \in A$. Logo $P \mid P_A$ mas $P \nmid P_B$, absurdo! Pois consideramos $P_A = P_B$. Portanto não é possível que Romildo distribua os números de 1 a 200 em duas caixas de forma que os produtos sejam iguais. ■

Problema 6.9. (OBMEP 2020-BQN2) Em uma loja de chocolates, existem caixas com 8, 9 e 10 chocolates. Observe que algumas quantidades de chocolates não podem ser compradas exatamente como, por exemplo, 12 chocolates.

(a) Encontre outra quantidade de chocolates que não pode ser comprada.

(b) Verifique que todo número maior que 56 pode ser escrito na forma $8x + 9y$ com x e y inteiros não negativos.

(c) Qual é a maior quantidade de unidades de chocolates que não podemos comprar exatamente nessa loja?

Solução:

(a) Não é possível comprarmos 11, 12, 13, 14 e 15 chocolates, pois $15 > 10$ e a soma das quantidades de quaisquer duas caixas é maior que 15.

(b) Observe a tabela 1 e veja que podemos escrever qualquer número de 56 a 63 com inteiros não negativos na forma $8x + 9y$:

Tabela 1 – Resultados da equação $8x + 9y$ para diferentes pares ordenados

x	y	$8x + 9y$
7	0	$8 \times 7 + 9 \times 0 = 56$
6	1	$8 \times 6 + 9 \times 1 = 57$
5	2	$8 \times 5 + 9 \times 2 = 58$
4	3	$8 \times 4 + 9 \times 3 = 59$
3	4	$8 \times 3 + 9 \times 4 = 60$
2	5	$8 \times 2 + 9 \times 5 = 61$
1	8	$8 \times 1 + 9 \times 6 = 62$
0	7	$8 \times 0 + 9 \times 7 = 63$

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Somando 8 unidades a cada uma dessas representações, podemos escrever todos os números inteiros do intervalo $[64, 71]$ na forma $8x + 9y$. Por exemplo, como $63 = 8 \times 0 + 9 \times 7$, segue que $71 = 8 \times 1 + 9 \times 7$. Somando sucessivamente 8, podemos concluir que todos os inteiros dos intervalos

$$[72, 79], [80, 87], [88, 95], ...$$

podem ser escritos na forma $8x+9y$, com x e y inteiros não negativos. Assim, todos os inteiros maiores que 56 podem ser escritos na forma $8x + 9y$ com x e y inteiros não negativos.

(c) As quantidades de chocolates que podem ser compradas são os números da forma $8x + 9y + 10z$, com x, y e z inteiros não negativos representando as quantidades de cada tipo de caixa. Um número que pode ser escrito na forma $8x + 9y$ em particular também pode ser escrito na forma $8x + 9y + 10z$. Assim, em virtude do item anterior, basta analisarmos os números menores que 56 para sabermos qual é o maior deles que não pode ser uma quantidade admissível de chocolates comprados na loja. A tabela a seguir indica como escrever todos os números de 32 até 40 na forma $8x + 9z + 10z$:

Tabela 2 – Resultados da equação $8x + 9y + 10z$ para diferentes ternos ordenados

x	y	z	$8x + 9y + 10z$
4	0	0	$8 \times 4 + 9 \times 0 + 10 \times 0 = 32$
3	1	0	$8 \times 3 + 9 \times 1 + 10 \times 0 = 33$
3	0	1	$8 \times 3 + 9 \times 0 + 10 \times 1 = 34$
2	1	1	$8 \times 2 + 9 \times 1 + 10 \times 1 = 35$
2	0	2	$8 \times 2 + 9 \times 0 + 10 \times 2 = 36$
1	1	2	$8 \times 1 + 9 \times 1 + 10 \times 2 = 37$
1	0	3	$8 \times 1 + 9 \times 0 + 10 \times 3 = 38$
0	1	3	$8 \times 0 + 9 \times 1 + 10 \times 3 = 39$
5	0	0	$8 \times 5 + 9 \times 0 + 10 \times 0 = 40$

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Somando 8 unidades a cada uma dessas representações, podemos escrever todos os números de 40 a 48. Repetindo esse processo, podemos escrever todos os números inteiros de 48 a 56 na forma $8x+9y+10z$, com x, y e z inteiros não negativos. Para concluir que 31 é a maior quantidade de chocolate que não podemos comprar na loja, precisamos verificar que não existem x, y e z não negativos tais que

$$8x + 9y + 10z = 31.$$

Se existissem tais inteiros, como 31 é ímpar e 8 e 10 são pares, devemos ter $y \neq 0$. Assim y = 3 ou y = 1. No primeiro caso, teríamos 8x + 10z = 4, que claramente não possui solução em inteiros não negativos. No segundo caso, teríamos $8x + 10z = 22$, ou seja, $4x + 5z = 11$. Para $z = 0, z = 1$ e $z = 2$, deveríamos ter $4x = 11, 4x = 6$ e $4x = 1$. Como nenhuma dessas equações possui soluções em inteiros, podemos concluir que a equação $8x + 9y + 10z = 31$ não possui solução em inteiros não negativos. ■

Observação 6.5. A solução do item (c) utiliza implicitamente o conceito de **elemento extremo** (ou *maior número não representável*) em problemas de combinações lineares de inteiros. Esse conceito é formalizado pelo **Teorema do Número de Frobenius**, que afirma que, para dois inteiros coprimos a e b, o maior número que não pode ser expresso como $ax + by$ (com $x, y \geq 0$) é $ab - a - b$. No caso da equação $8x + 9y$ (item b), como $\text{mdc}(8, 9) = 1$, o maior número não representável é $8 \times 9 - 8 - 9 = 55$. Contudo, a introdução da terceira variável ($10z$) modifica o problema. Para três números a, b, c **coprimos dois a dois**, não existe uma fórmula geral fechada para o maior número não representável, mas a estratégia adotada na solução, de verificar exaustivamente os valores abaixo de um limite (56) — é tradicional. O número 31, identificado como o maior não representável para $8x + 9y + 10z$, é um **elemento extremo** desse sistema.

Problema 6.10. (OBMEP 2016-BQN3) Seja n um número inteiro positivo maior ou igual a 5. Para números a_i escolhidos no conjunto $\{-1, 1\}$, calcula-se o número

$$S_n = a_1a_2a_3a_4 + \cdots + a_na_1a_2a_3$$

que soma os produtos de cada quatro termos a_i de índices consecutivos, inclusive os que começam em a_{n-2}, a_{n-1} e a_n e terminam em a_1, a_2 e a_3, respectivamente.

(a) Considerando $n = 8$, comecemos com $a_1 = a_2 = \cdots = a_7 = a_8 = 1$. Qual o valor de S_8? Se trocarmos $a_4 = 1$ por $a_4 = -1$ quanto passa a ser a soma S_8? Após a primeira troca, trocamos $a_5 = 1$ por $a_5 = -1$. Após esta segunda troca, quanto vale S_8?

(b) Para cada troca de 1 por -1, quantas parcelas mudam de valor? Quais são as possíveis variações no valor de S_8 quando se faz uma troca?

(c) Mostre que para quaisquer oito valores de $a_1, a_2, \ldots, a_7$ e a_8 no conjunto $\{-1, 1\}$ a soma S_8 resulta sempre em um número múltiplo de 4.

(d) Para certo valor de n e certa escolha dos números a_i no conjunto $\{-1, 1\}$ a soma

$$S_n = a_1a_2a_3a_4 + \cdots + a_na_1a_2a_3$$

resultou em zero. Prove que n é necessariamente um número múltiplo de 4.

Solução:

(a) Com os valores dados, tem-se: Para $n = 8$, a soma S_8 é dada por:

$$\begin{aligned} S_8 &= a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_7a_8a_1a_2 + a_8a_1a_2a_3 \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 8. \end{aligned}$$

É a soma de oito parcelas iguais a 1. Veja que ao trocar o a_4 de 1 para -1, os quatro produtos em que ele aparece mudam de sinal. Então a soma perde quatro parcelas 1 que passam a ser quatro parcelas -1. Deste modo, a soma passa a ser

$$S_8' = 8 - 4 + (-4) = 0.$$

Se trocarmos agora o a_5 de 1 para -1, há quatro parcelas afetadas, mas algumas passam de 1 para -1 e outras passam de -1 para 1. Mais especificamente, as parcelas com o a_5 que já mudaram de sinal com o a_4 voltarão a ser 1. A parcela $a_5a_6a_7a_8$ passa de 1 a -1 e as outras três passam de -1 a 1. Após a segunda troca a soma será

$$\begin{aligned} S_8'' &= S_8' - \big(1 + (-1) + (-1) + (-1)\big) + \big((-1) + 1 + 1 + 1\big) \\ &= S_8' - (-2) + 2 \\ &= S_8' + 4 \\ &= 4. \end{aligned}$$

(b) Como vimos no item anterior, as quatro parcelas em que o produto possui certo a_i mudam de valor quando trocamos este número de 1 para -1. Para saber as possíveis variações, considere x, y, z e w as parcelas que possuem o a_i no produto.

$$\begin{aligned} S_8' &= S_8 - (x+y+z+w) + (-x-y-z-w) \\ &= S_8 - 2(x+y+z+w). \end{aligned}$$

Como x, y, z e w são produtos de números 1 ou -1, eles mesmos são iguais a 1 ou -1. Então ao somar os quatro, os resultados possíveis são $1+1+1+1=4$, $1+1+1+(-1)=2$, $1+1+(-1)+(-1)=0$, $1+(-1)+(-1)+(-1)=-2$ ou $(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$. Finalmente, concluímos que as variações possíveis são $+8$, $+4$, 0, -4 ou -8.

(c) Primeiro faça todos os números iguais a 1, então a soma é 8. Agora, para cada número da sequência, podemos trocá-lo para -1 e analisar a soma. Deste jeito, todas as possibilidades de números a_i são analisadas. Pelo item anterior, cada troca gera uma variação que é um múltiplo de 4. Como no início a soma é um múltiplo de 4 e esta propriedade não se altera em cada troca, concluímos que a soma S_8 resulta sempre em um múltiplo de 4.

(d) Novamente, comece com todos os números iguais a 1 resultando em soma n. Para uma dada escolha dos elementos da sequência, trocamos cada a_i igual a -1 por 1, um por vez. Em cada troca, não altera-se o resto de S_n na divisão por 4 e, ao final, chegamos no número 0 que é múltiplo de 4. Portanto, o número inicial n também é um múltiplo de 4. ■

Observação 6.6. No item (c), o invariante é a propriedade "S_8 é múltiplo de 4". Mesmo após trocas sucessivas de $a_i = 1$ para $a_i = -1$, como cada troca altera S_8 por um múltiplo de 4 (como demonstrado no item (b)), a propriedade é preservada. Já no item (d), o invariante é o "resto da divisão de S_n por 4". O processo de trocar -1's por 1's um a um mantém este resto inalterado, o que permite concluir que se $S_n = 0$ (que é $\equiv 0 \mod 4$), então o valor inicial n também deve satisfazer $n \equiv 0 \mod 4$.

Problema 6.11. (OCM 2015-N1Q2) Duas mil e quatorze pessoas estão sentadas ao redor de uma mesa redonda. Sabe-se que a altura de cada uma das pessoas sentadas ao redor da mesa é a média aritmética das alturas de suas duas vizinhas. Prove que todas as pessoas sentadas ao redor da mesa têm uma mesma altura.

Solução: Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{2014}\}$ o conjunto das pessoas, organizadas circularmente. Definimos:

- $h_i =$ altura da pessoa P_i.
- $h_{\max} = \max\{h_1, h_2, \ldots, h_{2014}\}$. (existente pois o conjunto é finito)

Suponha que existe pelo menos uma pessoa P_k com altura $h_k = h_{\max}$. Sabemos que:

$$h_k = \frac{h_{k-1} + h_{k+1}}{2}.$$

Como h_k é máximo, temos $h_{k-1}, h_{k+1} \leq h_k$. Contudo, pela desigualdade das médias:

$$\frac{h_{k-1} + h_{k+1}}{2} \leq \frac{h_k + h_k}{2} = h_k. \quad \text{Absurdo!}$$ ■

Problema 6.12. (OBMEP 2020-BQN1Q12) Sobre uma mesa estão 10 moedas, todas com "*cara*" voltada para cima. Uma jogada consiste em virar exatamente 4 moedas.

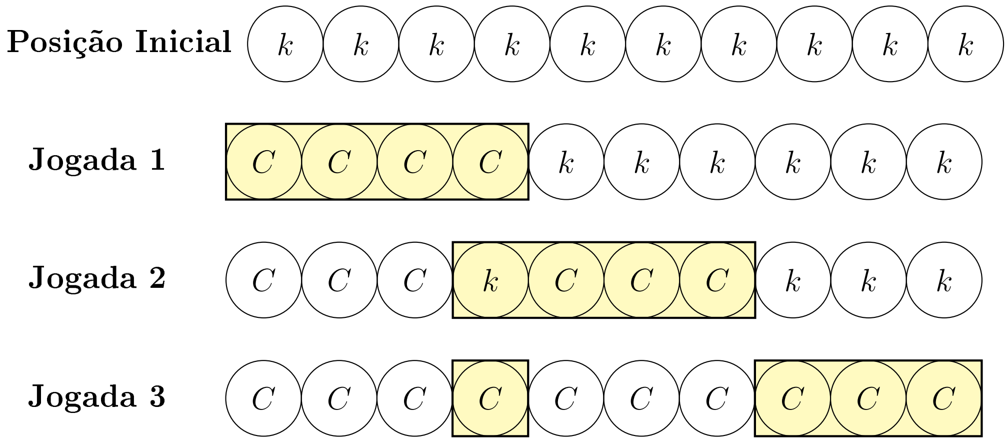
a) Qual a quantidade mínima de jogadas para que todas estejam com "*coroa*" voltada para cima?

b) Se fossem 11 moedas, seria possível deixar todas com coroa voltada para cima?

Solução:

(a) Com 2 jogadas não é possível, pois podemos mudar no máximo $2\times = 8$ moedas, mas precisamos alterar todas as 10. É possível com 3 jogadas, conforme a sequência abaixo na figura 16:

Figura 16 – Jogo das moedas



Fonte: Próprio autor (2025).

(b) Viramos sempre 4 moedas (quantidade par) a cada jogada. Inicialmente, o número de caras (10) e o de coroas (0) é par. Sempre que viramos 4 moedas, a quantidade é par em cara e coroa ou ímpar em ambas, pois a soma das quantidades viradas é par (4). Assim, após cada jogada, a quantidade de caras e de coroas têm mesma paridade (ambas par ou ambas ímpar). Dessa forma, concluímos que não é possível deixar as 11 moedas com "coroa" voltada para cima, pois o número de coroas (11) seria ímpar e o de caras (0) seria par. ■

Observação 6.7. A impossibilidade de transformar todas as moedas em coroas quando temos uma quantidade ímpar no total está diretamente relacionada à preservação da paridade. Quando começamos com um número ímpar de moedas (digamos, 11) e todas estão com cara, qualquer jogada que vire um número par de moedas (como 4) manterá a paridade do número de caras. Isso ocorre porque virar um número par de moedas pode apenas: (1) virar um número par de caras para coroas e um número par de coroas para caras (não alterando a paridade do total de caras), ou (2) virar um número ímpar de caras para coroas e um número ímpar de coroas para caras (o que também mantém a paridade, pois ímpar - ímpar = par). Portanto, como começamos com um número ímpar de caras (11), nunca poderemos alcançar 0 caras (par), já que todas as operações preservam a paridade ímpar inicial.

Problema 6.13. (OCM 2015-N2Q3) Tem-se 2015 números reais e sabe-se que a soma de quaisquer 100 desses números é positiva. Mostre que a soma de todos os 2015 números é positiva.

Solução: O que temos a observar aqui é que quaisquer que sejam os cem números escolhidos, a soma deles sempre será um valor positivo (invariante). Então considere $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2015}$ números reais tais que a soma de quaisquer cem deles é positiva. Logo podemos formar a soma de cem deles dos seguintes modos

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{99} + a_{100} > 0$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{100} + a_{101} > 0$$

$$\vdots$$

$$a_{1916} + a_{1916} + a_{1915} + ... + a_{2014} + a_{2015} > 0$$

$$a_{1917} + a_{1918} + a_{1919} + ... + a_{2015} + a_1 > 0$$

$$a_{1918} + a_{1919} + a_{1920} + ... + a_1 + a_2 > 0$$

$$\vdots$$

$$a_{2015} + a_1 + a_4 + ... + a_{98} + a_{99} > 0.$$

Somando todas as equações acima, obtemos a expressão

$$100(a_1, a_2, a_3, ..., a_{2015}) > 0.$$

E assim concluímos que a soma dos 2015 números reais em questão é positiva. ■

Problema 6.14. (OBM 2004-N2Q3) Esmeralda tem uma pilha com 100 pedras. Ela divide essa pilha em duas novas pilhas e em seguida multiplica as quantidades de pedras nessas duas novas pilhas e escreve o produto em um quadro. Ela então escolhe uma pilha com mais de uma pedra e repete esse procedimento: a pilha é dividida em duas, as quantidades de pedras nessas duas pilhas são multiplicadas e o produto escrito no quadro. Esta operação é realizada até se obter apenas pilhas com 1 pedra cada. Quais são os possíveis valores da soma de todos os produtos escritos no quadro?

Solução: Vamos analisar o problema considerando o processo de divisão das pilhas. Para qualquer divisão de uma pilha com a pedras em duas pilhas de b e c pedras ($a = b + c$), o produto registrado é bc, que pode ser expresso como:

$$bc = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2}.$$

No caso geral com múltiplas divisões, sejam $b_1, b_2, \ldots, b_{2n+1}$ as quantidades de pedras após cada divisão. A soma total S dos produtos registrados é:

$$S = \sum_{k=1}^{n} b_{2k-1}b_{2k} = \frac{100^2 - b_1^2 - b_2^2}{2} + \frac{b_1^2 - b_3^2 - b_4^2}{2} + \cdots + \frac{b_{2n-1}^2 - b_{2n+1}^2 - b_{2n+2}^2}{2}.$$

Observamos que todos os termos b_i^2 onde $b_i > 1$ se cancelam, pois aparecem uma vez positiva e uma vez negativa. Como o processo termina com 100 pilhas de 1 pedra cada, permanecem apenas 100 termos unitários:

$$S = \frac{100^2 - \overbrace{1^2 - 1^2 - \cdots - 1^2}^{100 \text{ termos}}}{2} = \frac{100^2 - 100 \times 1^2}{2} = \frac{10000 - 100}{2} = 4950.$$

Portanto, a soma S é invariante e independe da ordem das divisões, tendo como único valor possível 4950. ■

Problema 6.15 (OBM 2007-N2Q6)**.** Em um torneio de tênis de mesa (no qual nenhum jogador termina empatado), cada um dos n participantes jogou uma única vez contra cada um dos outros. Sabe-se que, para todo $k > 2$, não existem k jogadores $J_1, J_2, \cdots J_k$ tais que J_1 ganhou de J_2, J_2 ganhou de J_3, J_3 ganhou de J_4,$\cdots$, J_{k-1} ganhou de J_k e J_k ganhou de J_1. Prove que existe um jogador que venceu todos os outros e um que perdeu para todos.

Solução: O problema em questão é mais geral. Poderia ser enunciado como "se um jogador A vencer B e B vencer C, é impossível C vencer A. Então, há um jogador que vença todos os demais". Ele se torna até intuitivo se o enunciarmos assim: "quando um jogador vence outro, que vence um terceiro, o primeiro vencerá o terceiro".

Para indicar o vencedor de uma disputa, vamos utilizar uma seta: $J_x \to J_y$ (isso significa que J_x perdeu para J_y). A seta aponta para o vencedor. Vamos supor que nenhum jogador perdeu todas as partidas. Assim, J_1 ganhou pelo menos 1 partida. O esquema dele será assim: $J_1 \leftarrow J_2$. Como J_2 também não perdeu todas, o esquema ficará assim: $J_1 \leftarrow J_2 \leftarrow J_3 \leftarrow \cdots$ Observe que nenhum jogador pode aparecer 2 vezes nessa sequência. Vejamos o porquê: supondo que J_2 apareça de novo no esquema: $J_1 \leftarrow J_2 \leftarrow J_3 \leftarrow J_4 \leftarrow J_2$. Isso criaria um ciclo: $J_2 \to J_3 \to J_4 \to J_2$, o que é proibido pelo enunciado. Portanto, não podemos repetir jogadores na sequência. Como o número de jogadores n é finito, a sequência deve terminar. A única maneira de terminar é quando encontramos um jogador invicto (que não perdeu para ninguém), pois não podemos adicionar ninguém após ele na sequência. Logo, deve existir um jogador que venceu todos os outros. Analogamente, se construirmos a sequência na direção oposta (dos perdedores), chegaremos a um jogador que perdeu para todos os outros. Portanto:

- Existe um jogador que venceu todos os outros (o melhor jogador).
- Existe um jogador que perdeu para todos os outros (o pior jogador).

Esses dois jogadores podem ser o mesmo (no caso de haver apenas um jogador) ou diferentes (no caso geral). ■

Problema 6.16. (OBMEP 2005-N3Q2) A sequência $0, 3, 7, 10, 14, 17, 21, ...$ é formada a partir do número 0 somando-se alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 a mais que o primeiro, o terceiro é 4 a mais que o segundo, o quarto é 3 a mais que o terceiro, o quinto é 4 a mais que o quarto e assim sucessivamente.

$$0 \xrightarrow{+3} 3 \xrightarrow{+4} 7 \xrightarrow{+3} 10 \xrightarrow{+4} 14$$

(a) Escreva os 20 primeiros termos desta seqüência.

(b) Qual é o 1000° termo desta sequência?

(c) Algum termo desta sequência é igual a 2000? Por quê?

Solução:

(a) A sequência inicia com 0 e segue o padrão de somar alternadamente 3 e 4, gerando os 20 primeiros termos:

$$0,\ 3,\ 7,\ 10,\ 14,\ 17,\ 21,\ 24,\ 28,\ 31,\ 35,\ 38,\ 42,\ 45,\ 49,\ 52,\ 56,\ 59,\ 63,\ 66.$$

(b) Analisando sua estrutura, podemos decompô-la em duas progressões aritméticas:

i) Para termos ímpares (a_{2n-1}), temos a sequência 0, 7, 14, 21, ... com termo geral $7(n-1)$ para $n \geq 1$;

ii) Para termos pares (a_{2n}), a sequência 3, 10, 17, 24, ... segue a fórmula $7(n-1)+3$ para $n \geq 1$.

Essa decomposição nos permite calcular qualquer termo: o 1000° termo (par) é $a_{1000} = 7 \times 499 + 3 = 3496$.

(c) Para verificar se 2000 pertence à sequência, analisamos suas duas sub-sequências:

- Termos ímpares: $a_{2n-1} = 7k$ onde $k = n - 1 \geq 0$.
- Termos pares: $a_{2n} = 7k + 3$ onde $k = n - 1 \geq 0$.

Testando ambas as possibilidades:

$$2000 = 7k \Rightarrow k = \frac{2000}{7} \approx 285.714 \notin \mathbb{N}.$$
$$2000 = 7k + 3 \Rightarrow k = \frac{1997}{7} \approx 285.285 \notin \mathbb{N}.$$

Como nenhum dos casos resulta em k inteiro não-negativo, concluímos que 2000 não é termo da sequência. De outro modo, temos que:

$$2000 = 7 \times 285 + 5,$$

mostra que 2000 deixa resto 5 na divisão por 7, enquanto nossos termos só podem deixar restos 0 (termos ímpares) ou 3 (termos pares). ■

Problema 6.17. (OCM 2016- N3Q5) São dados $2n+1$ pontos dispostos sobre um círculo, tais que dois quaisquer deles não são extremidades de um mesmo diâmetro. Prove que, dentre os triângulos que têm três desses $2n+1$ pontos por vértices, no máximo

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

são acutângulos. (Nota: por círculo de centro O e raio r entendemos o conjunto formado pelos pontos do plano que estão à distância r do ponto O.)

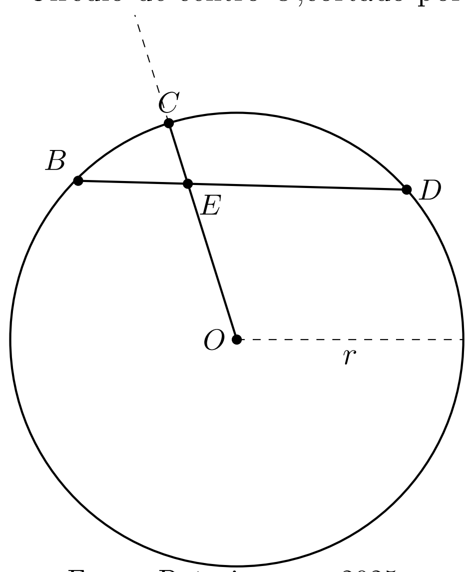
Solução: Um triângulo é acutângulo quando todos os seus ângulos internos são menores que $90°$. Em um triângulo inscrito em uma circunferência, um ângulo será obtuso se e somente se o arco oposto a esse ângulo tiver comprimento maior que meio círculo. Assim, para que um triângulo seja acutângulo, seus três vértices devem estar contidos em um arco com menos da metade da circunferência. Como temos $2n+1$ pontos uniformemente distribuídos e nenhum par de pontos é diametralmente oposto, um arco com n pontos consecutivos representa menos da metade do círculo. Seja $P_0, P_1, \ldots, P_{2n}$ os $2n+1$ pontos dispostos ordenadamente no sentido anti-horário sobre a circunferência. Fixemos um ponto P_i dentre os $2n+1$ pontos da circunferência. Os triângulos que têm P_i como vértice serão acutângulos se os outros dois vértices estiverem entre os n pontos imediatamente à esquerda e os n pontos imediatamente à direita de P_i (considerando a ordem circular dos pontos). Para cada par (P_j, P_k), onde P_j está entre os n pontos à esquerda e P_k entre os n pontos à direita de P_i, o triângulo $P_iP_jP_k$ será acutângulo. O número de tais pares é $n \cdot n = n^2$. Como há $2n+1$ pontos possíveis para P_i, temos, no máximo, $(2n+1) \cdot n^2$ triângulos acutângulos contados dessa forma. Contudo, cada triângulo é contado três vezes, uma para cada vértice. Assim, o número total de triângulos acutângulos distintos é dado por:

$$\frac{(2n+1) \cdot n^2}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad \blacksquare$$

Observação 6.8. O uso do princípio do elemento extremo está na identificação de que, entre todos os triângulos possíveis, apenas os que se formam com vértices concentrados num arco menor que meio círculo podem ser acutângulos, e o número máximo desses casos ocorre justamente quando essa concentração é máxima, ou seja, quando os vértices estão o mais próximo possível no contorno do círculo.

Problema 6.18. (OCM 1986-N2Q3) Seja $\overline{BED}$ uma corda de um círculo com centro em O tal que $\overline{BE} = 3\,\text{cm}$ e $\overline{ED} = 5\,\text{cm}$. A reta determinada por O e E intercepta o círculo no ponto C. Determine o raio do círculo, sabendo-se que $\overline{EC} = 1\,\text{cm}$.

Figura 17 – Círculo de centro O,cortado por duas cordas



Fonte: Próprio autor 2025.

Solução: Sabemos que $\overline{BD} = \overline{BE} + \overline{ED} = 3\,\text{cm} + 5\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$. Logo pelo teorema da potência de pontos (nosso invariante) temos:

$$\begin{aligned}\overline{BE} \cdot \overline{ED} &= \overline{CE} \cdot (2r - \overline{CE})\\ 3 \cdot 5 &= 1 \cdot (2r - 1)\\ 15 &= 2r - 1\\ 2r &= 16\\ r &= 8\,\text{cm}\end{aligned}$$

■

Problema 6.19. (OCM 1998-N2Q6) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ inteiros positivos e $p_1, p_2, \ldots, p_{13}$ números primos. Sabe-se que:

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 &= p_1\\ a_2 + a_3 &= p_2\\ a_3 + a_4 &= p_3\\ &\vdots\\ a_{13} + a_1 &= p_{13}.\end{aligned}$$

Encontre o valor do menor elemento dos conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{13}\}$ e $B = \{p_1, p_2, \ldots, p_{13}\}$.

Solução: Se somarmos todos os termos das equações acima, obtemos:

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{13}) = p_1 + p_2 + \ldots + p_{13}.$$

Temos que pela paridade se todos os $p_i s$ fossem ímpares, a soma $p_1 + p_2 + \ldots + p_{13}$ também seria ímpar (pois teríamos a soma de uma quantidade ímpar de ímpares). Logo algum p_j é par, para algum $j = 1, 2, 3 \ldots, 13$. Como p_j é primo, segue que $p_j = 2$ que é o menor elemento de B. Para este termo em específico temos

$$a_j + a_{j+1} = 2 \Rightarrow a_j = a_{j+1} = 1.$$

Então 1 é o menor elemento de A e 2 o de B e dado a essa **minimalidade** conseguimos conjeturar os outros elementos, assim teremos por exemplos $A = \{1, 1, 2, 3, 4, 7, 10, 13, 16, 21, 22, 25, 28\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 17, 23, 29, 37, 43, 47, 53, 29\}$. ■

Problema 6.20. (OCM 2014 - N2Q1) Um estudante resolve colar seus selos num álbum. Se prega 20 selos em cada folha, o álbum não terá folhas suficientes para receber todos os selos. Se prega 23 selos, sobrará pelo menos uma folha vazia no álbum. Se o aluno receber outro álbum idêntico, com 21 selos em cada folha, ficará com um total de 500 selos. Quantas folhas tem o álbum?

Solução: Seja S a quantidade de selos no nosso herói e n a quantidade de folhas do álbum. Então podemos concluir que:

$$S > 20n, \quad S \leq 23(n-1) \quad \text{e} \quad 21n + S = 500.$$

Daí,

$$20n + 21n < S + 21n \leq 23(n-1) + 21n,$$

que resulta:

$$41n < 500 \leq 44n - 23.$$

resolvendo as equações:

$$\begin{aligned} 500 > 41n \quad &\Rightarrow \quad n < \frac{500}{41} \approx 12,19 \\ 500 \leq 44n - 23 \quad &\Rightarrow \quad n \geq \frac{523}{44} \approx 11,89. \end{aligned}$$

Como n deve ser inteiro, obtemos $11,89 \leq n < 12,19 \Rightarrow n = 12$ que é o número de folhas no álbum. ■

Problema 6.21. (OCM 1998-N2Q4) Determine todos os inteiros positivos N de três dígitos tais que N e a soma dos seus dígitos sejam divisíveis por 11.

Solução: Seja $N = abc$. Sabemos que pra N ser divisível por 11 então $c - b + a$ (nosso invariante) também tem que ser divisível por 11, ou seja,

$$c - b + a = 11k. \tag{4}$$

Como a soma dos dígitos de N também é divisível por 11, temos

$$b + c = 11s. \tag{5}$$

Subtraindo a equação (4) da (5), obtemos

$$2b = 11(s - k).$$

Logo, sabemos que $2b$ é múltiplo de 11. A única possibilidade é $b = 0$. Assim as equações se reduzem a uma única $a + c = 11k$. Como $0 < a + c \leq 9 + 9 = 18$, só podemos ter $a + c = 11$. Portanto, teremos como resultado os números:

$$209,\ 308,\ 407,\ 506,\ 605,\ 704,\ 803 \text{ e } 902. \quad \blacksquare$$

Problema 6.22. (OBMEP 2017-BQN1Q3) Existem 100 caixas idênticas, todas tampadas, dispostas em uma linha. Em uma das caixas, existe um diamante. Cada caixa possui a seguinte mensagem escrita em sua tampa: "O diamante está na caixa da esquerda ou da direita". Sabemos que exatamente uma das mensagens é verdadeira e todas as demais são falsas. Abrindo apenas a tampa de uma delas, é possível descobrirmos onde está o diamante?

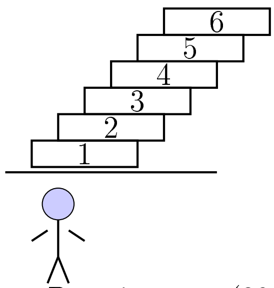
Solução: Supomos que o diamante não esteja em uma das caixas que ficam nos extremos, logo, as duas caixas vizinhas, da caixa com o diamente, terão uma mensagem verdadeira e isso contradiz a informação dada (absurdo!). Portanto, basta abrir uma das caixas dos extremos. Se o dimante estiver nela, teremos descoberto a sua posição. Caso contrário, certamente ele estará na caixa do outro extremo. ■

Problema 6.23. (OBMEP 2014- N3Q5) Fábio gosta de brincar em escadas, subindo ou descendo seus degraus da seguinte maneira:

- começa no degrau de número 1;
- a cada movimento ele sobe ou desce um ou dois degraus e, ao subir ou descer dois degraus, não pisa no degrau intermediário;
- pisa em todos os degraus exatamente uma vez.

Por exemplo, em uma escada com três degraus ele pode brincar de duas maneiras diferentes: 1-2-3, 1-3-2; com quatro degraus ele pode brincar de quatro maneiras diferentes: 1-2-3-4, 1-2-4-3, 1-3-2-4 e 1-3-4-2.

Figura 18 – Fábio



Fonte: Próprio autor (2025).

(a) Fábio pode brincar de seis maneiras diferentes em uma escada com cinco degraus. Escreva essas seis maneiras.

(b) Explique por que sempre é possível terminar a brincadeira no degrau de número 2 em qualquer escada com dois ou mais degraus.

(c) Há 31 e 68 maneiras diferentes de se brincar em escadas com nove e onze degraus, respectivamente. De quantas maneiras diferentes Fábio pode brincar em uma escada com doze degraus?

Solução:

(a)

$$1\text{-}2\text{-}3\text{-}4\text{-}5, \quad 1\text{-}2\text{-}3\text{-}5\text{-}4, \quad 1\text{-}2\text{-}4\text{-}3\text{-}5,$$
$$1\text{-}3\text{-}2\text{-}4\text{-}5, \quad 1\text{-}3\text{-}2\text{-}5\text{-}4, \quad 1\text{-}3\text{-}4\text{-}2\text{-}5.$$

(b) Basta ele subir pelos degraus ímpares até o mais alto dos ímpares e em seguida ir para o mais alto dos pares e descer pelos degraus pares. Exemplos:

- Para 12 degraus: 1-3-5-7-9-11-12-10-8-6-4-2.
- Para 13 degraus: 1-3-5-7-9-11-13-12-10-8-6-4-2.

(c) Para uma escada de 12 degraus:

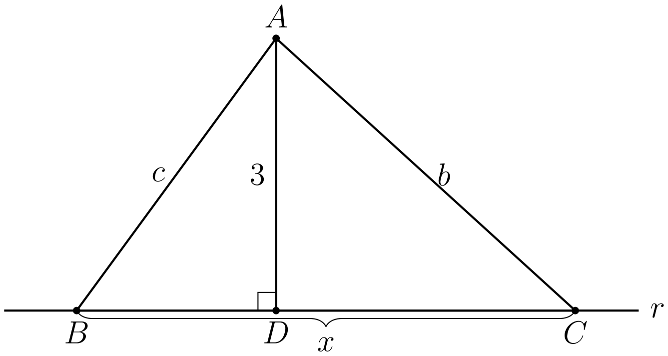
- Se ele começar com os movimentos 1-2, o problema recairá no caso com 11 degraus e, portanto, será possível completá-lo de 68 maneiras.
- Se ele começar com 1-3-2, então ele terá que ir pro degrau 4 e o problema recairá na mesma situação com 9 degraus. Portanto ele terá 31 maneiras de completá-los.
- Se ele começar com 1-3-4, os degraus 2 e 5 ficarão com um afastamento de 3 degraus, logo não será possível completar o movimento.
- Se ele começar com 1-3-5, ele não poderá mais descer ou subir um degrau, até atingir o último ímpar para depois voltar pelos pares como descrito no item (b) e, assim, ele só tem uma maneira de completar o movimento. Portanto, o número de maneiras de realizar a brincadeira com 12 degraus é:

$$68 + 31 + 1 = 100.$$

■

Problema 6.24. (OCM 2004- N2Q4) São dados no plano uma reta r e um ponto $A \notin r$ e a distância de A a r é igual a $3\,\text{cm}$. Determine, com prova, o menor comprimento possível de um segmento BC, com $B, C \in r$ e tais que $\angle BAC = 120°$.

Figura 19 – Triângulo ABC, com altura relativa BC= 3 cm



Fonte: Próprio autor (2025).

Solução: Temos que pela lei dos cossenos, aplicado no triângulo ABC:

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$x^2 = b^2 + c^2 + bc$$

Usando que $b^2 + c^2 \geq 2bc$ na equação acima temos:

$$x^2 \geq 3bc. \qquad (6)$$

Seja S a área do triângulo ABC, então:

$$\frac{3 \cdot x}{2} = S = \frac{1}{2}bc\sin 120^\circ = \frac{bc\sqrt{3}}{4}.$$

Assim, $bc = 2x\sqrt{3}$ e, por (6), temos $x^2 \geq 3 \cdot 2x\sqrt{3}$, assim teremos $x \geq 6\sqrt{3}$. A igualdade só ocorre se, e somente se, $b = c$. ■

Problema 6.25. (OBM 2016-N2Q11) Num país imaginário vivem somente duas espécies de pessoas: os honestos, que sempre dizem a verdade e os mentirosos, que só dizem mentira. Numa fila de 2016 pessoas da ilha, o primeiro da fila diz que todos atrás dele são mentirosos e todas as demais pessoas da fila dizem que a pessoa imediatamente à sua frente é mentirosa. Quantas pessoas mentirosas estão nessa fila?

Solução: Supomos que a primeira pessoa da fila seja honesta, assim sua afirmação de que todos atrás são mentirosos implicaria um padrão alternado de mentirosos e honestos a partir do segundo indivíduo, mas isso levaria a uma contradição quando a última pessoa (de número par) teria que mentir sobre a anterior ser mentirosa (quando na verdade seria honesta); portanto, a primeira pessoa deve ser mentirosa, o que significa que existe pelo menos um honesto após ela. A partir daí, o primeiro honesto na posição k estabelece um padrão de pares (H, M) subsequentes, onde cada pessoa diz que a anterior é mentirosa - como temos 2015 pessoas restantes (um número ímpar), isso resulta em 1007 mentirosos nesse grupo, somando-se ao primeiro mentiroso, totalizando 1008 mentirosos na fila. ■

Problema 6.26. (OBM 2001-N1Q19) Cinco animais A, B, C, D, e E, são cães ou são lobos. Cães sempre contam a verdade e lobos sempre mentem. A diz que B é um cão. B diz que C é um lobo. C diz que D é um lobo. D diz que B e E são animais de espécies diferentes. E diz que A é um cão. Quantos lobos há entre os cinco animais?

Solução: Começamos analisando as afirmações extremas de E ("A é um cão") e A ("B é um cão"), que estão interligadas. Se assumirmos que E é um cão (verdadeiro), então A seria de fato um cão (por dizer a verdade), o que implicaria que B também é cão (já que A estaria falando a verdade). No entanto, essa cadeia leva a uma contradição quando D (um suposto cão nesse cenário) afirmaria que B e E são de espécies diferentes, quando na verdade ambos seriam cães. Portanto, E não pode ser um cão e deve ser um lobo (mentiroso), o que significa que A também é um lobo (já que E mente sobre ele ser cão). Como A é lobo, sua afirmação sobre B é falsa, tornando B um lobo. B, sendo lobo, mente ao afirmar que C é lobo, logo C é cão. C, como cão, diz a verdade que D é lobo, e D, sendo lobo, mente ao afirmar que B e E são diferentes, quando na verdade, ambos são lobos, mantendo a coerência. Assim, concluímos que A, B, D e E são **lobos (4 no total)**, e apenas C como cão. ■

Problema 6.27. (OBMEP 2013-BQN3Q13) Sergio pediu para Ivan pensar em um número inteiro positivo. Depois, pediu para Ivan calcular a soma de seus algarismos e, finalmente, elevar ao quadrado o resultado. Sem falar o número em que pensou inicialmente, Ivan contou que obteve como resultado final x. Mostre a Sergio como chegar às seguintes conclusões:

(a) Se Ivan tivesse pensado em um número com 3 ou menos algarismos, então x seria menor do que 730.

(b) Se Ivan tivesse pensado em um número com 4 algarismos, então x seria menor do que o número no qual Ivan pensou.

(c) Se Ivan tivesse pensado em um número com 5 ou mais algarismos, então x seria menor do que o número que Ivan pensou.

Sergio fez depois o seguinte: Considerou o número x que Ivan disse, calculou a soma dos seus algarismos e elevou ao quadrado o resultado. Quando Sergio falou para Ivan o número que obteve, Ivan disse com surpresa que esse foi o número que havia pensado.

Solução:

(a) Sim! De fato se Ivan tivesse pensado em um número com 3 ou menos algarismos, teríamos como soma de seus algarismos no máximo $9+9+9=27$. Então o número final de Ivan x seria no máximo $27^2 = 729$ que é menor que 730.

(b) Vamos considerar a possibilidade de Ivan pensar no menor número ou o maior número com 4 algarismos, digamos que $\overline{abcd}$ é esse número, então $x = (a+b+c+d)^2$. Logo as duas possibilidades são:

- $a = 1$, $b = c = d = 0$, então

$$x \leq (1+0+0+0)^2 = 1 < 1000.$$

- $a = b = c = d = 9$, então

$$x \leq (9+9+9+9)^2 = 1296 < 9999.$$

Em qualquer um dos casos temos que, $x < \overline{abcd}$. Portanto se esse número tiver 4 algarismo então x é menor que o número que Ivan pensou.

(c) Suponhamos que Ivan pensou em um número com $n \geq 5$ algarismos, digamos $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$. Então, $x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$. Logo,

$$x \leq (9n)^2 = 81n^2.$$

Note que o número que Ivan pensou deve ser menor ou igual a 10^{n-1}, logo:

$$10^{n-1} \leq \overline{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Assim, para mostrar que $x < \overline{a_1a_2\ldots a_n}$ só precisamos provar que

$$81n^2 < 10^{n-1}, \quad \text{para todo inteiro } n \geq 5.$$

Usaremos indução para provar esse resultado. Para $n = 5$, temos

$$81 \cdot 5^2 = 1755 < 10000 = 10^{5-1}.$$

Suponhamos então que essa desigualdade é válida para algum inteiro $k \geq 5$, ou seja,

$$81k^2 < 10^{k-1}. \quad (H.I)$$

Vamos mostrar que ela é válida para $k + 1$. Observemos que, por ser $k \geq 5$, então

$$81(k+1)^2 < 81(2k)^2 = 4(81k^2).$$

Usando a hipótese de indução vemos que

$$81k^2) < 4(10^{k-1}). \tag{7}$$

Como $4 < 10$ vemos que a última expressão em (7) é menor do que $10 \times 10^{k-1} = 10^k$. Daí concluímos que

$$81(k+1)^2 < 10^{(k+1)-1}.$$

Portanto

$$81n^2 < 10^{n-1}, \quad \text{para todo inteiro } n \geq 5.$$

E assim provamos que qualquer que seja o número que Ivan pensar de cinco ou mais algarismos x é menor. ■

Problema 6.28. (OCM 2003-N2Q2) No país da verdade, onde ninguém mente, reuniram-se os amigos Marcondes, Francisco e Fernando. Entre os três ocorreu a seguinte conversa:

- Marcondes: Estou escolhendo dois inteiros positivos e consecutivos e vou dar um deles ao Francisco e outro ao Fernando, sem que vocês saibam quem recebeu o maior. Após receber cada um o seu número, Francisco e Fernando continuaram a conversa.
- Francisco: Não sei o número que Fernando recebeu;
- Fernando: Não sei o número que Francisco recebeu;
- Francisco: Não sei o número que Fernando recebeu;
- Fernando: Não sei o número que Francisco recebeu;
- Francisco: Não sei o número que Fernando recebeu;
- Fernando: Não sei o número que Francisco recebeu;
- Francisco: Agora eu sei o número que o Fernando recebeu;
- Fernando: Agora eu também sei o número que Francisco recebeu;

Quais os números recebidos por cada um deles?

Solução: Este problema usa o princípio do elemento extremo quando usa o menor natural (o número 1 no caso) como ponto de partida. A partir daí construimos um raciocínio por eliminação indutivo: Francisco não pode ter recebido 1, pois saberia imediatamente que Fernando teria 2 (já que os números são consecutivos e positivos). Fernando, ao ouvir que Francisco não sabe seu número, descarta a possibilidade de ter recebido 2 (pois, se tivesse 2, deduziria que Francisco tem 1 ou 3; mas como Francisco não tem 1, Fernando concluiria que Francisco tem 3). Cada nova negação ("não sei") elimina o próximo número possível na cadeia:

$$\begin{aligned}
&\text{Francisco não tem } 1 \Rightarrow \text{Fernando não tem } 2\\
&\text{Fernando não tem } 2 \Rightarrow \text{Francisco não tem } 3\\
&\text{Francisco não tem } 3 \Rightarrow \text{Fernando não tem } 4\\
&\quad\vdots\\
&\text{Fernando não tem } 6 \Rightarrow \text{Francisco tem } 7.
\end{aligned}$$

O padrão só é interrompido quando Francisco, após seis rodadas de negações, conclui que só pode ter 7 (pois 6 já foi eliminado para Fernando). A solução emerge justamente porque o processo iterativo explora que não há número menor que 1 nos inteiros positivos, o que gera essa uma cadeia dedutiva sem ciclos. ■

Problema 6.29. (OBMEP 2018-BQN3Q25) Determine o termo mínimo da sequência

$$\sqrt{\frac{7}{6}}+\sqrt{\frac{96}{7}},\ \sqrt{\frac{8}{6}}+\sqrt{\frac{96}{8}},\ \sqrt{\frac{9}{6}}+\sqrt{\frac{96}{9}},\ \ldots,\ \sqrt{\frac{95}{6}}+\sqrt{\frac{96}{95}}.$$

Solução: Lembre que $(x-y)^2 \geq 0$ para todos os reais x e y. Assim pela desigualdade das médias, temos que $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$. Substituindo $x=\sqrt{a}$ e $y=\sqrt{b}$, com a e b reais não negativos, temos:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Observe que todos os termos são do tipo:

$$\sqrt{\frac{n}{6}}+\sqrt{\frac{16\times 6}{n}}=\sqrt{\frac{n}{6}}+4\sqrt{\frac{6}{n}}$$

com n inteiro e $7 \leq n \leq 95$. Tomando $a=\sqrt{\frac{n}{6}}$ e $b=4\sqrt{\frac{6}{n}}$, temos:

$$\frac{\sqrt{\frac{n}{6}}+4\sqrt{\frac{6}{n}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{\frac{n}{6}}\cdot 4\sqrt{\frac{6}{n}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{n}{6}}+4\sqrt{\frac{6}{n}} \geq 2\cdot 2\cdot \sqrt{\sqrt{\frac{n}{6}\cdot\frac{6}{n}}}=4$$

O valor mínimo de cada termo é 4 e ocorre quando:

$$\sqrt{\frac{n}{6}}=4\sqrt{\frac{6}{n}} \implies \frac{n}{6}=16\cdot\frac{6}{n} \implies n^2=576 \implies n=24.$$

O termo mínimo é $\sqrt{\dfrac{24}{6}}+\sqrt{\dfrac{96}{24}}=2+2=4.$ ■

Problema 6.30. (OBMEP 2016-BQN3Q16) Sejam a e b números reais positivos com produto diferente de 1, define-se a operação estrela, representada por "$*$", pela equação

$$a*b=\frac{a+b-2ab}{1-ab}.$$

Em uma lousa, estão escritos 2015 números iguais a $\frac{1}{2}$. Em cada passo, apagam-se dois números x e y escritos na lousa e escreve-se o número $x*y$. Este passo é repetido 2014 vezes até que fique apenas um número na lousa.

(a) Demonstre que a equação

$$\frac{x*y}{1-x*y}=\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}$$

é verdadeira para quaisquer x e y reais com $x\neq 1$, $y\neq 1$ e $xy\neq 1$.

(b) Se para cada número x que é escrito na lousa, calcularmos $\frac{x}{1-x}$ e somarmos todos estes resultados, teremos um certo resultado. Mostre que este resultado é sempre o mesmo não importando quantos passos tenham sido feitos até aquele momento.

(c) Qual o número que estará escrito na lousa ao final dos 2014 passos?

(d) Se além dos 2015 números iguais a $\frac{1}{2}$ na situação inicial, também escrevermos um número 1, qual será o número final após a realização de 2015 passos?

Solução:

(a) Desenvolvendo a expressão da operação estrela, temos:

$$\begin{aligned}\frac{x*y}{1-x*y} &= \frac{\frac{x+y-2xy}{1-xy}}{1-\frac{x+y-2xy}{1-xy}}=\frac{x+y-2xy}{1-xy-x-y+2xy}=\frac{x+y-2xy}{1-x-y+xy}\\ &= \frac{x+y-2xy}{(1-x)(1-y)}=\frac{x}{1-x}+\frac{y}{1-y}.\end{aligned}$$

(b) Seja S a soma dos termos $\frac{x}{1-x}$ para cada x escrito na lousa. Usando o item anterior, concluímos que retirando dois termos $\frac{x}{1-x}$ e $\frac{y}{1-y}$ e adicionando o termo $\frac{x*y}{1-x*y}$, a soma não se altera. Como isto vale para cada passo, então continua valendo não importando quantos passos tenham sido feitos.

(c) Seja N o número final. Pelo item anterior, sabe-se que a soma não sofre alteração com as trocas. Portanto, podemos usá-la para descobrir o número final.

$$\frac{N}{1-N} = \frac{1/2}{1-1/2} + \frac{1/2}{1-1/2} + \cdots + \frac{1/2}{1-1/2} = 1 + 1 + \cdots + 1 = 2015$$

$$\Rightarrow \quad N = 2015(1-N)$$

$$\Rightarrow \quad 2016N = 2015$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{2015}{2016}$$

(d) Para um número $x \neq 1$, fazendo a operação $x * 1$, temos:

$$x * 1 = \frac{x + 1 - 2x}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1.$$

Como $x * 1 = 1$, fazer a troca de x e 1 por $x * 1$ é o mesmo que apagar o x. Assim, podemos afirmar que ao final dos 2015 passos o único número escrito será 1. ■

Observação 6.9. Neste problema, a chave para a solução foi a identificação do **invariante**, isto é, uma quantidade que se manteve constante durante todas as operações. Que no caso foi especificamente, a soma

$$S = \sum \frac{x_i}{1-x_i}$$

que se manteve inalterada ao longo do processo, conforme demonstrado no item (b).

A invariância veio da propriedade:

$$\frac{x * y}{1 - x * y} = \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y},$$

que garante a conservação de S quando substituímos quaisquer dois números x e y por $x * y$.

Este invariante foi necessário para resolver os itens (c) e (d), pois ele permite determinar o valor final na lousa sem necessidade de rastrear individualmente cada uma das 2014 (ou 2015) operações. Em problemas que envolvem operações sucessivas como este, a identificação de invariantes é importante, pois pode reduzir um processo complexo ao acompanhamento de uma quantidade constante.

Vale observar que a expressão $\frac{x}{1-x}$ sugere uma conexão com transformações fracionarias lineares (transformações de Möbius), que preservam certas propriedades combinatórias.

7 CONCLUSÃO

Os princípios que exploramos aqui exigem análise e criatividade, não bastando somente conhecer as ideias matemáticas, mas saber aplicá-las com flexibilidade. Nosso objetivo foi ajudar o leitor a desenvolver um olhar estratégico para problemas complexos, mostrando que, mesmo quando os conceitos são simples no papel, usá-los com eficiência requer prática e intuição. Isso é especialmente útil para estudantes e professores envolvidos em olimpíadas de matemática, onde a identificação de invariantes e a procura por elementos extremos foram o pilar da nossa metodologia, transformando problemas aparentemente abstratos em desafios com caminhos claros para a solução.

A execução desses princípios embora em algumas situações simples, apresentou uma adversidade significativa, pois cada problema exigiu a identificação de invariantes específicos ou a determinação de extremos particulares. Essa inconstância intrínseca transformou cada questão em um contratempo único, reforçando a importância da prática contínua na resolução de problemas diversificados. É claro que a falta de fórmulas prontas ou teoremas milagrosos para esses problemas pode assustar no começo e chegou até causar uma certa ansiedade. Mas, no fim das contas, é justamente isso que faz a matemática ser tão incrível: ela exige criatividade e nos faz pensar fora dos nosso limites naturais.

Este trabalho buscou evidenciar a relevância do princípio da invariância e do elemento extremo na matemática olímpica, demonstrando sua aplicabilidade em problemas desafiadores. Espero que este trabalho sirva como incentivo para pesquisas futuras, estimulando ainda mais a exploração criativa desses princípios através de novas formulações de problemas, abordagens inovadoras e refinamento das técnicas apresentadas. Sempre pautando o rigor e a precisão que definem a matemática de alto nível. Espero sinceramente que este trabalho tenha proporcionado ao leitor uma experiência intelectual estimulante, capaz de despertar não apenas o interesse pelo tema aqui explorado, mas também uma curiosidade renovada por outros campos do conhecimento. Os questionamentos que surgiram tanto da leitura quanto da pesquisa mostram o que faz o trabalho acadêmico tão valioso: essa capacidade única de transformar dúvidas em descobertas e desafios em novos caminhos para a investigação.

Foi nessa jornada de constante aprendizado e superação que encontrei a motivação para desenvolver esta dissertação. Meu maior desejo é que este trabalho possa contribuir com a comunidade matemática já interessada no tema e, ao mesmo tempo, despertar o interesse de novos pesquisadores.

A Matemática não conhece raças ou fronteiras geográficas; para a matemática,
o mundo cultural é um país. David Hilbert

REFERÊNCIAS

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; MORGADO, Augusto César. **Matemática discreta**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

ENGEL, Arthur. **Problem-Solving Strategies**. Problem Books in Mathematics. Springer, 1998. 1st Edition.

GOMES, Keyson Gondim. **Olimpíada Cearense de Matemática(OCM):** laboratório de oportunidades, experiências e de desenvolvimento da Matemática do Estado do Ceará. 2019. 123 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**, v. 2. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1981.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar**, Volume 1, Números Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar**, Volume 4, Combinatória. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

OBM, Olimpíada Brasileira de Matemática. **Brasil conquista 3 pratas e 1 bronze na Cone Sul 2025.** [*S.l.*], 2025. Disponível em: https://www.obm.org.br/. Acesso em: 22 jun. 2025.

OBMEP, documentário. **O alcance do programa em todo o Brasil.** Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=sgiT4aylNGQ. Acesso em: 22 jun. 2025.

OBMEP, Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. **Histórias Inspiradoras.** Rio de Janeiro, 2025. Disponível em: http://www.obmep.org.br/. Acesso em: 22 jun. 2025.

OCM, Olimpíada Cearense de Matemática. **XLIV Olimpíada Cearense de Matemática.** Fortaleza, 2025. Disponível em: https:/ocm.mat.br/. Acesso em: 22 jun. 2025.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números**, v. 128. IMPA, 1998.

SBM, Noticiário. **O Brasil Olímpico.** Rio de Janeiro , 2019. Disponível em: https://www.obm.org.br/content/uploads/2019/10/OBM_uma_jovem_de_40_anos.pdf. Acesso em: 22 jun. 2025.

VILLAFLOR, Roberto. **Notas Olímpicas:** Principio Extremal, 2021. Disponível em:

https://www.mat.uc.cl/ roberto.villaflor/pdf/notes/Principio_Extremal.pdf. Acesso em: 22 jun. 2025.

ZEITZ, Paul. **The art and craft of problem solving**. John Wiley & Sons, 2016.