



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CARLOS HIGOR SOUSA DE FREITAS

DOS CURRÍCULOS OFICIAIS À INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL: O ENSINO DE
FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NA BNCC E A GERAÇÃO DE
QUESTÕES INÉDITAS POR MEIO DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL GENERATIVA

REDENÇÃO – CEARÁ
2026

CARLOS HIGOR SOUSA DE FREITAS

**DOS CURRÍCULOS OFICIAIS À INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL: O ENSINO DE
FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NA BNCC E A GERAÇÃO DE
QUESTÕES INÉDITAS POR MEIO DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL GENERATIVA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes

REDENÇÃO – CEARÁ

2026

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Freitas, Carlos Higor Sousa de.

F866c

Dos currículos oficiais à inteligência artificial: o ensino de funções exponencial e logarítmica na BNCC e a geração de questões inéditas por meio de inteligência artificial generativa / Carlos Higor Sousa de Freitas. - Redenção, 2026.
83f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2026.

Orientador: Pro. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes.

1. Matemática - Resolução de problemas. 2. Comentário pedagógico. 3. Inteligência Artificial Generativa (IAGen). I.
Título

CE/UF/BSCA

CDD 510

CARLOS HIGOR SOUSA DE FREITAS

**DOS CURRÍCULOS OFICIAIS À INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL: O ENSINO DE FUNÇÕES
EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA NA BNCC E A GERAÇÃO DE QUESTÕES INÉDITAS POR
MEIO DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL GENERATIVA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-brasileira, Campus das Auroras, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 23/02/2026

BANCA EXAMINADORA

Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dra. Amanda Angélica Feltrin Nunes

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira - UNILAB

Dr. Rui Eduardo Brasileiro Paiva

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE



Documento assinado eletronicamente por **RAFAEL JORGE PONTES DIOGENES, VICE-COORDENADOR(A)**, em 23/02/2026, às 18:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **AMANDA ANGELICA FELTRIN NUNES, PROFESSOR(A) DO MAGISTÉRIO SUPERIOR**, em 23/02/2026, às 18:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **RUI EDUARDO BRASILEIRO PAIVA, Usuário Externo**, em 23/02/2026, às 22:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unilab.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1383381** e o código CRC **8BB3C05D**.

AGRADECIMENTOS

Meu primeiro agradecimento nesta árdua batalha é a Deus, pois sem ele jamais teria chegado onde cheguei e sem ele jamais chegarei onde quero chegar, então obrigado meu Deus por tudo que me fez passar, aprender, conquistar e evoluir.

Meu segundo agradecimento será para as minhas duas mães, aquela que me gerou, que por mais que não tenha me dado amor e carinho enquanto criança, pagou meus estudos e me ajudou a ser quem eu sou hoje da maneira dela, e também a minha mãe/avó, minha vovó, aquela que até hoje quer cuidar de mim e dar-me amor e carinho.

Agradeço também a minha pequena, pois após conhecê-la o meu mundo se tornou mais colorido, passei a sorrir mais, a ver alegria na vida e a querer cada vez mais formar uma família ao seu lado um dia.

Também quero agradecer a minha família no geral, pois por mais que seja uma família totalmente desestruturada foi a família que Deus me deu e todas as dificuldades que passei na infância me moldaram para ser a pessoa íntegra que sou hoje.

Agradeço também ao meu pai/avó que nos deixou pouco antes de eu passar no mestrado. Ele é minha única referência paterna e foi um grande homem, que sempre lutou, mesmo sem estudos, para jamais faltar um pedaço de pão para merendar de manhã e nunca deixou faltar o arroz com feijão no almoço. Sei que jamais irá ler o que escrevo para o senhor, mas saiba que eu amo o senhor com todas as minhas forças e irei cuidar da minha mãe/avó enquanto eu tiver forças, pai.

Também não posso deixar de agradecer aos amigos que fiz ao longo dessa vida e também no mestrado. Fiz amizades que irei levar para a vida. Como o grande Araga, que já trabalhava junto comigo, mas o mestrado me mostrou que ali se escondia uma grande amizade e hoje sou padrinho do casamento dele. Tem também meu amigo Júlio, anos de amizade que sempre me apoiou nos estudos e sempre abriu meus olhos para não se iludir com as escolas particulares e buscar sempre um concurso e aperfeiçoamento profissional. Tem também meu grande amigo Victor, mais de 15 anos de amizade e que sempre me motivava a melhorar, a ser melhor nos estudos após cada simulado que fazíamos juntos. Aquela nossa batalha para passar no vestibular também fez parte de minha moldagem do que sou hoje.

Agradecer também ao meu orientador, o grande Rafael Diógenes, por ter me mostrado um mundo novo chamado LaTeX e a facilidade que isso é para escrever uma dissertação.

Agradeço também aos membros da banca, à Professora Amanda Feltrin e ao Professor Rui Paiva, por suas valiosas contribuições que foram dadas em minha pesquisa e às críticas que sempre são bem-vindas para que possa evoluir em minha jornada como educador.

Também agradeço à CAPES pela bolsa durante esse período de mestrado, que foi essencial para que eu não desistisse, pois esse apoio financeiro me ajudou com a possibilidade de largar algumas escolas em que trabalhava para poder focar nos estudos.

Enfim, agradeço a todos que tiveram uma contribuição em minha jornada neste mestrado

e na vida, pois todos os acontecimentos bons ou ruins nos ensinam algo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“A matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é a base de todas as ciências e de todas as artes.”.
(Malba Tahan)

RESUMO

A Matemática, especialmente os conceitos de funções exponencial e logarítmica, representa um desafio significativo para muitos estudantes do Ensino Médio, um cenário corroborado por avaliações de larga escala como o PISA. Esta dissertação tem como objetivo central promover uma análise integrada do ensino desses conteúdos, conectando a teoria matemática, as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a Matriz de Referência do Enem. A pesquisa estrutura-se a partir de uma revisão histórica e teórica, e uma análise documental detalhada da BNCC e do Enem. O trabalho apresenta duas contribuições principais. A primeira é um produto educacional composto por uma seleção de problemas do Enem e do vestibular da Universidade Estadual do Ceará, resolvidos com um nível de detalhamento passo a passo seguidos de comentários pedagógicos, visando servir como um material de apoio aprofundado para docentes e discentes. A segunda consiste em uma contribuição original: o desenvolvimento de uma metodologia para o uso ético da Inteligência Artificial Generativa, demonstrando como professores podem criar novas questões análogas às de exames, otimizando o tempo e o preparo de avaliações. Conclui-se que o trabalho preenche uma lacuna ao unir o aprofundamento matemático, a análise curricular, um produto educacional prático e a incorporação de novas tecnologias como ferramenta pedagógica.

Palavras-chave: BNCC. Função Exponencial. Função Logarítmica. Resolução de Problemas. Comentário Pedagógico. Inteligência Artificial Generativa.

ABSTRACT

Mathematics, particularly exponential and logarithmic functions, poses a significant challenge for many high-school students, a pattern evidenced by large-scale assessments such as PISA. This dissertation aims to provide an integrated analysis of how these topics are taught by connecting mathematical theory with the guidelines of Brazil's National Common Core Curriculum (BNCC) and the ENEM Reference Matrix. The research comprises a historical and theoretical review alongside a detailed documentary analysis of both BNCC and ENEM. It offers two main contributions. First, an educational product: a curated set of ENEM items and questions from the State University of Ceará entrance exam, solved step by step and followed by pedagogical commentary, designed as in-depth support material for teachers and students. Second, an original methodology for the ethical use of Generative Artificial Intelligence, demonstrating how teachers can create new exam-style items analogous to official assessments, thereby optimizing preparation time and improving the quality of evaluations. The study concludes that it addresses a key gap by uniting mathematical depth, curriculum analysis, a practical educational product, and the responsible incorporation of new technologies as pedagogical tools.

Keywords: BNCC. Exponential Functions. Logarithmic Functions. Problem Solving. Pedagogical Commentary. Generative Artificial Intelligence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Imagem de Johannes Kepler.	16
Figura 2 – Imagem de John Napier.	17
Figura 3 – Imagem de William Oughtred.	19
Figura 4 – Régua de Cálculo.	20
Figura 5 – Imagem de Leonhard Euler	21
Figura 6 – Código Alfanumérico da BNCC	23
Figura 7 – Exemplos de Funções Exponenciais crescentes e decrescentes	31
Figura 8 – Exemplos de funções exponenciais e logarítmicas com a reta $y = x$ como espelho	37
Figura 9 – Função Logarítmica decrescente	38

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Diferenças entre BNCC e matriz de referência do ENEM	24
Tabela 2 – Relação entre problemas (Cap. 5) e habilidades da BNCC	39
Tabela 3 – Relação entre problemas (Cap. 5) e habilidades da Matriz de Referência do ENEM	40

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DOS LOGARITMOS E DA EXPO- NENCIAL	15
2.1	FATOS IMPORTANTES QUE ANTECEDERAM A CRIAÇÃO DOS LO- GARITMOS	15
2.2	JOHN NAPIER	16
2.3	LOGARITMOS	17
2.4	A RÉGUA DO CÁLCULO: A MATERIALIZAÇÃO DA INVENÇÃO DOS LOGARITMOS	19
2.5	UM SÉCULO DEPOIS... A EXPONENCIAL.	20
3	FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA NOS DO- CUMENTOS OFICIAIS: BNCC E MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM	22
3.1	A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC): O QUE ENSINAR?	22
3.2	A MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM: O QUE AVALIAR?	23
3.3	PRINCIPAIS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS	24
3.4	FOCO EM FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA	25
4	BREVE REVISÃO SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA	29
4.1	POTENCIAÇÃO	29
4.2	FUNÇÃO EXPONENCIAL	30
4.3	LOGARITMOS	33
4.4	FUNÇÃO LOGARÍTMICA	36
5	PROBLEMAS	39
6	PROCEDIMENTO METODOLÓGICO PARA GERAÇÃO DE QUES- TÕES COM INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL	67
6.1	IA NA EDUCAÇÃO	67
6.2	PROCEDIMENTO METODOLÓGICO PARA A GERAÇÃO DE PROBLE- MAS INÉDITOS ATRAVÉS DO USO ÉTICO DA IA	70
7	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	82

1 INTRODUÇÃO

A constatação de que a Matemática representa um desafio significativo para muitos estudantes do Ensino Médio é um ponto de partida recorrente em discussões pedagógicas. Essa percepção, frequentemente traduzida na expressão popular de que a disciplina é um “bicho de sete cabeças”, é corroborada de forma contundente por indicadores de avaliações em larga escala.

Os resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) de 2022, por exemplo, revelam um cenário preocupante: 73% dos estudantes brasileiros de 15 anos não atingiram o nível 2 de proficiência em matemática, considerado o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Este dado alarmante, que posiciona o Brasil significativamente abaixo da média dos países da Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE), em que o índice é de 31%, valida a urgência de se pesquisar e propor novas abordagens para o ensino da matéria.

Frente ao questionamento sobre como mitigar essa defasagem, surgem diversas propostas. Abordagens de aulas diferenciadas, como a gamificação, mostram-se eficazes para uma parcela dos alunos, mas não resolvem a questão de forma universal, reiterando que o processo de ensino-aprendizagem é singular para cada indivíduo. Dentre as estratégias viáveis, a resolução de problemas e o aprofundamento em questões de vestibulares se destacam como uma prática pedagógica consolidada historicamente.

Trabalhos como os de (Campelo, 2023), que abordou a resolução de problemas sob a ótica de uma única competência do Enem; (Silva, 2020), que vinculou resolução de questões envolvendo funções exponenciais e logarítmicas a ferramentas como o GeoGebra; e (Costa, 2021), que se aprofundou na função exponencial à luz da BNCC trazendo ao final de sua pesquisa problemas práticos sobre o assunto, convergem para a importância da resolução de problemas como eixo de estudo. Esta dissertação se insere nessa vertente de pesquisa, mas buscando preencher uma lacuna específica.

O objetivo central deste trabalho é, portanto, promover uma análise integrada entre o conteúdo de Função Exponencial e Logarítmica, as competências e habilidades descritas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e na Matriz de Referência do Enem. Buscou-se não apenas fornecer resoluções detalhadas de questões de vestibulares, como também um comentário pedagógico após cada resolução e também atrelar cada problema às diretrizes dos documentos oficiais que norteiam a educação nacional.

Adicionalmente, é apresentado como contribuição original uma metodologia para que docentes e discentes possam utilizar ferramentas de Inteligência Artificial (IA) para criar novas questões análogas às de exames, otimizando o tempo de preparo e ampliando as possibilidades de estudo.

A originalidade desta pesquisa reside na síntese desses elementos: o aprofundamento em um tema matemático específico, sua conexão explícita com dois dos principais documentos norteadores da educação brasileira, a oferta de um produto educacional com resoluções comenta-

das em detalhe e a incorporação ética e produtiva da Inteligência Artificial Generativa como ferramenta pedagógica. Até a presente data, não foram encontradas, no repositório do PROFMAT, dissertações que unam essas quatro frentes de trabalho.

Para alcançar tais objetivos, esta pesquisa está estruturada da seguinte forma: O Capítulo 2 dedica-se a uma breve imersão na história da matemática por trás desses conceitos. A contextualização histórica é uma ferramenta pedagógica valiosa e que chama a atenção dos alunos para introduzir temas no ensino básico, pois, como afirma (Eves, 2011), “a compreensão autêntica de uma ideia não é possível sem a análise de suas origens.”

É interessante e pertinente que, reciprocamente, seja impossível uma apreciação verdadeira de um ramo da matemática sem algum conhecimento da história desse ramo, pois a matemática é, em grande parte, um estudo de ideias, e uma compreensão autêntica das ideias não é possível sem uma análise de suas origens. Um exemplo particularmente óbvio dessa observação é o estudo da geometria não euclidiana. Com muita propriedade J. W. L. Glaisher disse: ‘Estou certo de que nenhuma matéria perde tanto quanto a matemática ao se dissociá-la de sua história’. (Eves, 2011, p.18)

Já o Capítulo 3 apresenta um estudo sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a Matriz de Referência do Enem, detalhando suas funções, objetivos, semelhanças e diferenças. Ao final, identificamos e discutimos as competências e habilidades de ambos os documentos que se conectam diretamente ao estudo das Funções Exponencial e Logarítmica.

O Capítulo 4 cumpre a obrigação formal do trabalho de um matemático que é estabelecer a fundamentação teórica sobre o tema, recorrendo a fontes canônicas da literatura matemática como Elon Lages Lima e Gelson Iezzi para apresentar os conceitos primordiais das funções exponencial e logarítmica, e algumas demonstrações mais pertinentes.

Os capítulos 5 e 6 constituem o núcleo da pesquisa aplicada. No capítulo 5, apresentamos uma seleção de problemas do Enem e de um vestibular local, que é o da Universidade Estadual do Ceará (UECE), com resoluções comentadas passo a passo, com um nível de detalhamento que visa a acessibilidade tanto para docentes quanto para discentes, em seguida, após cada resolução um comentário pedagógico dissertando sobre o problema, com a finalidade de deixar este trabalho mais rico pedagogicamente.

Já no capítulo 6 será mostrado a metodologia de uso de IAs generativas para a criação de questões inéditas, explorando as potencialidades, de maneira ética, dessa ferramenta para a otimização do trabalho docente e enriquecimento da prática discente.

Também é válido salientar que, neste capítulo 6, ficarão questões inéditas criadas pela Inteligência Artificial Generativa para o uso livre, após a devida validação, de todos os interessados neste tema, e claro que pode-se estender essa metodologia para qualquer tema da Matemática do Ensino Médio e até Ensino Superior.

E por fim o capítulo 7 mostra a conclusão desta pesquisa finalizando-a de maneira simples e coerente ao relembrar todo o processo de construção deste trabalho e o que se espera que seja alcançado com ele.

2 UM POUCO SOBRE A HISTÓRIA DOS LOGARITMOS E DA EXPONENCIAL

Neste capítulo, será comentado acerca dos principais fatos a respeito dessa preciosa parte da Matemática, além de buscar, em famosos livros sobre História da Matemática como (Boyer, 2012) e (Eves, 2011) fatos muitas vezes esquecidos sobre esse assunto, fatos que apenas enriquecem sua fascinante história e que contribuíram para o seu desenvolvimento há muitos séculos e que foram cruciais para que o chamado “inventor” dos logaritmos, de fato, o “inventasse”.

Também será dissertado sobre a origem da Exponencial, que somente veio surgir cerca de um século depois da “invenção” dos logaritmos. Seguiremos, dessa forma, uma espécie de cronologia dos fatos históricos neste capítulo.

2.1 FATOS IMPORTANTES QUE ANTECEDERAM A CRIAÇÃO DOS LOGARITMOS

Qual o objetivo da criação de algo? Resolver um problema que está em evidência com certeza é uma resposta plausível. Com os logaritmos aconteceu da mesma forma. Existia um problema que foi colocado em xeque por muitos matemáticos da época, e com o passar dos anos, foi necessária sua criação. Podemos dizer que o problema inicial que fomentou a criação dos logaritmos surgiu com a mudança do nosso sistema de entendimento do universo, quando saímos do geocentrismo para o heliocentrismo.

E por que este fato precisaria dos logaritmos? Justamente pelas distâncias astronômicas possuírem muitas casas decimais. Esse cenário foi exacerbado inicialmente por Tycho Brahe, que no final do século XVI, compilou o maior conjunto de dados observacionais de sua época.

Porém, com sua morte, ficou para o ainda mais famoso, Johannes Kepler, a missão de dar sentido a esses dados. E quando o mesmo se deparou com esse vasto material, ele expressou em seus escritos a grande dificuldade e o tempo consumido pelos cálculos de divisões e multiplicações de números com várias casas decimais. Kepler publicou seu material e suas teorias, baseadas também nos estudos de Tycho Brahe, o que foi um triunfo de longa perseverança. Fazendo uma pequena anedota nesta escrita, o que seria do modelo de Kepler, se em sua época existissem os devaneios tecnológicos que existem hoje. Pode-se afirmar então que já urgia ali uma necessidade da criação de algo que facilitasse tal tipo de trabalho. A figura 1 a seguir é do famoso astrônomo Kepler.

Figura 1 – Imagem de Johannes Kepler.

Fonte: Eves (2011)

Paralelamente a estes fatos, o que se usava para facilitar os cálculos astronômicos era a chamada técnica de Prostaférese, que vem de uma palavra grega que significa adição e subtração. Um método que utilizava identidades trigonométricas para converter produtos em somas e subtrações. Essas identidades trigonométricas são creditadas ao alemão Johannes Werner (1468-1528), pois segundo (Eves, 2011) Werner as usou para simplificar cálculos que envolviam comprimentos que apareciam em astronomia. Seguem as identidades de Werner:

$$2 \cos(A) \cos(B) = \cos(A + B) + \cos(A - B);$$

$$2 \sin(A) \cos(B) = \sin(A + B) + \sin(A - B);$$

$$2 \cos(A) \sin(B) = \sin(A + B) - \sin(A - B);$$

$$2 \sin(A) \sin(B) = \cos(A - B) - \cos(A + B).$$

O importante Matemático alemão, Michael Stifel (1487-1567), o qual estabeleceu uma comparação direta entre uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, observando que a soma na primeira correspondia à multiplicação na segunda. Essa correspondência é a essência do conceito logarítmico. Embora Stifel não tenha desenvolvido a ideia como uma ferramenta de cálculo universal, seu trabalho estabeleceu o fundamento algébrico sobre o qual a invenção de Napier (próximo e principal matemático na história dos logaritmos) pôde ser construída.

Dessa forma, a origem dos logaritmos pode ser vista como o produto de uma sequência de fatores: a necessidade prática imposta pela revolução astronômica, a prova de conceito fornecida pela prostaférese e a maturação das ideias sobre progressões na álgebra do século XVI.

2.2 JOHN NAPIER

Nesta seção será falado deste grande personagem da Matemática, John Napier (1550-1617). Segundo (Eves, 2011), John Napier era um homem que tinha uma grande engenhosidade

e imaginação, e o seu comportamento em outras áreas, excetuando-se a Matemática, o fizeram ser enxergado por pessoas da época como um homem mentalmente desequilibrado e até um explorador de magia negra.

Contam-se muitas histórias, provavelmente infundadas, em defesa dessas opiniões. Uma delas dá conta de que seu galo negro teria identificado para ele os empregados que o roubavam. Um a um os empregados foram enviados a um quarto escuro com instruções para tocar no dorso do galo. Sem que os empregados soubessem, Napier havia coberto o dorso da ave com uma fuligem, e os empregados culpados, temendo tocar no galo, voltavam com as mãos limpas. (Eves, 2011, p.342)

Mas nem só de polêmicas vivia John Napier, ele era um grande estudioso de Matemática e Ciências, e teve quatro grandes contribuições para a história da Matemática. São elas: A criação dos Logaritmos; Regra das partes circulares; Pelo menos duas das fórmulas conhecidas como Analogias de Napier; e a criação de um instrumento conhecido como Barras de Napier ou Ossos de Napier, usado para efetuar mecanicamente divisões, multiplicações e extração de raízes quadradas. Porém, o objetivo é a expansão da história dos Logaritmos, logo o foco será apenas na sua primeira e mais conhecida contribuição. A figura 2 a seguir é do grande criador dos Logaritmos, John Napier.

Figura 2 – Imagem de John Napier.



Fonte: Eves (2011)

2.3 LOGARITMOS

Como já citado neste texto a importância dos logaritmos é advinda da tentativa de simplificar os grandes cálculos astronômicos em contas mais simples, fazer grandes multiplicações e divisões se transformarem em somas e subtrações, e, para isto, Napier se baseou em ideias predecessoras como as fórmulas de Werner, e na ideia de Stifel, a qual vale salientar que foi um grande fundamento algébrico para a invenção de Napier. Por mais que Napier tivesse

conhecimento sobre essas ideias, seu método se diferencia consideravelmente, pois associando-se aos termos de uma progressão geométrica

$$a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^m, \dots, a^n, \dots$$

os da seguinte progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, \dots, m, \dots, n, \dots,$$

daí, podemos dizer que o produto $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ desses dois termos genéricos da primeira sequência está associado à soma dos termos correspondentes $m + n$ da segunda sequência.

Segundo (Eves, 2011), John Napier trabalhou cerca de 20 anos em sua teoria para somente em 1614 fazer sua primeira publicação a respeito dos Logaritmos, intitulada de “*Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*” traduzindo significa “Descrição Maravilhosa da Lei dos Logaritmos”. Vale salientar que segundo (Eves, 2011), um ano após a publicação deste texto, o Matemático Henry Briggs (1561-1631) viajou até Edimburgo para dar o tributo de seu reconhecimento ao grande inventor dos Logaritmos.

Foi durante essa visita que Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns, os logaritmos dos dias de hoje. Esses logaritmos, que são essencialmente os logaritmos de base 10, devem sua superioridade em cálculos numéricos ao fato de que nosso sistema de numeração é decimal. Para um outro sistema de numeração de base b e para propósitos computacionais, é claro que seriam mais convenientes tábuas de logaritmos também na base b . (Eves, 2011, p.345-346)

Mas de onde surgiu a palavra logaritmo? John Napier utilizou inicialmente a expressão “número artificial”, e só depois adotou o nome logaritmo, que vem do grego e significa “razão de um número”. Já Briggs, que passou a devotar forças para continuar os estudos sobre este assunto, criando inclusive um texto de nome “*Arithmetica Logarithmica*”, o qual continha uma tábua de logaritmos comuns com 14 casas decimais, que só foram superadas no século 20, quando foi publicada extensas tábuas com até 20 casas decimais.

A invenção dos logaritmos foi amplamente difundida em toda a Europa, Cavalieri na Itália, Kepler na Alemanha, Wingate na França, pois foi utilizado como uma maneira para diminuir em muito tempo o trabalho que astrônomos tinham em fazer suas contas, e assim, como disse (Eves, 2011, p.346) “a invenção dos logaritmos, ao diminuir o trabalho, dobrou a vida dos astrônomos”.

No entanto, assim como outros grandes tópicos da Matemática, tais como o Teorema de Pitágoras, o Cálculo Diferencial e Integral, entre outros, há relatos de que um segundo matemático também tenha tido a ideia de criação dos Logaritmos na mesma época que John Napier. Jobs Burgi (1552-1632), independente de Napier, construiu uma tábua de logaritmos e publicou seus resultados 6 anos após Napier. Embora possivelmente ambos tenham tido a ideia sobre logaritmos antes de publicá-la, acredita-se que, de fato, Napier tenha realmente vencido esta corrida, contudo a abordagem de ambos era distinta, enquanto um, Napier, abordava de maneira mais geométrica, o outro, Burgi, abordou de maneira mais algébrica.

2.4 A RÉGUA DO CÁLCULO: A MATERIALIZAÇÃO DA INVENÇÃO DOS LOGARITMOS

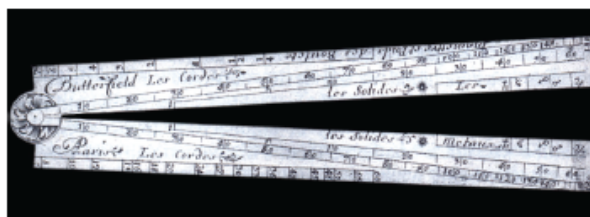
Com a invenção dos logaritmos veio a materialização dessa importante ferramenta teórica. As primeiras ferramentas foram criadas por Edmund Gunter (1581-1626) e William Oughtred (1574-1660). O primeiro, segundo (Boyer, 2012), graduado em Oxford, e pastor em duas igrejas foi quem criou um instrumento que precedeu a régua do cálculo logarítmico (com lingueta deslizante), instrumento que ficou conhecido como a “Escala de Gunter” e que utilizava uma escala logarítmica e um compasso. Já o segundo, William Oughtred, ainda segundo (Boyer, 2012), inventou duas réguas do cálculo, uma circular e outra linear. A seguir, na figura 3, uma rara imagem de William Oughtred.

Figura 3 – Imagem de William Oughtred.



Fonte: Eves (2011)

A régua do cálculo representa um marco crucial antes do advento das calculadoras eletrônicas, que somente vieram em meados de 1970, ou seja, durante mais de 300 anos de muitas descobertas científicas, essas invenções, que obviamente foram melhoradas com o passar dos anos, foram cruciais para fazer com que diversos cientistas famosos diminuíssem o tempo gasto com contas e ganhassem em resultados menos demorados. A seguir, na figura 4, uma régua linear do cálculo utilizada séculos atrás.

Figura 4 – Régua de Cálculo.

Fonte: Boyer (2012)

O legado da régua do cálculo perdurará para sempre, pois é um testemunho do quão engenhoso são os humanos na tentativa de simplificar cálculos e buscar soluções práticas. Hoje ela é apenas um artefato de museu, porém, outrora, foi ferramenta importante em grandes descobrimentos matemáticos.

2.5 UM SÉCULO DEPOIS... A EXPONENCIAL.

A ideia de exponencial, que descreve processos que aumentam a uma taxa proporcional ao seu valor atual, tem raízes que remontam à antiguidade, muito antes de existirem os logaritmos e a própria função exponencial, embora sua formalização matemática seja mais recente. O conceito fundamental pode ser observado em problemas antigos envolvendo juros compostos. Por exemplo, Babilônicos já trabalhavam com problemas que hoje seriam resolvidos através da teoria de juros compostos, e o famoso problema do trigo em um tabuleiro de xadrez ilustra um crescimento geométrico, uma forma discreta de crescimento exponencial. A lenda diz que o inventor do xadrez pediu ao rei a seguinte recompensa: um grão de trigo na primeira casa do tabuleiro, dois na segunda, quatro na terceira e assim por diante, dobrando a quantidade em cada casa subsequente, até a 64 casa. Porém, o rei, ao ouvir o pedido, por achar que seria uma quantidade pequena, acabou por aceitar. Grave erro do rei, pois a quantidade total é astronômica, e vai muito além da capacidade de qualquer reino.

No entanto, segundo (Eves, 2011) o desenvolvimento formal do conceito de exponencial e sua notação ocorreram de forma mais sistemática nos séculos XVI e XVII. O matemático Michael Stifel, como já citado neste trabalho, em sua obra *Arithmetica Integra* de 1544, trabalhou com progressões geométricas e aritméticas, comparando-as de uma maneira que prenunciava a relação entre expoentes e logaritmos. Ele estabeleceu uma correspondência entre uma progressão geométrica e uma progressão aritmética de expoentes.

A função exponencial, como a conhecemos hoje, $y = a^x$, e a constante e (base do logaritmo natural) foram fundamentadas muito mais tarde, principalmente através do trabalho de Leonhard Euler no século XVIII. Segundo (Boyer, 2012), Euler foi fundamental para estabelecer a conexão profunda entre as funções exponenciais e os logaritmos, além de introduzir a notação e . A seguir, na figura 5, a imagem de um gigante da Matemática, Leonhard Euler.

Figura 5 – Imagem de Leonhard Euler



Fonte: Eves (2011)

3 FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS: BNCC E MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM

Neste capítulo, o objetivo será muito claro, entender como a Função Exponencial e Função Logarítmica se encontram em dois pilares da educação brasileira, a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) e a Matriz de Referência para o Exame Nacional do Ensino Médio (Brasil, 2009). No entanto, antes de falarmos desses assuntos dentro desses pilares precisamos entender o que é cada um desses documentos, seus objetivos, semelhanças e também suas diferenças, pois há uma grande gama de docentes que pensam que esses documentos são iguais e têm a mesma finalidade, o que não é verdade e será visto nos parágrafos a seguir.

No complexo universo da educação brasileira, dois documentos se destacam para a organização do Ensino Médio: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a Matriz de Referência para o Exame Nacional do Ensino Médio. Embora muitas vezes mencionados em conjunto e bastante relacionados, eles possuem naturezas e objetivos distintos. Entender suas funções é essencial para educadores, estudantes e toda a comunidade escolar. A BNCC atua como um documento curricular normativo, estabelecendo o que deve ser ensinado, enquanto a Matriz de Referência do Enem funciona como um guia de avaliação, delineando o que e como será cobrado no mais importante exame de acesso ao ensino superior do país.

3.1 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC): O QUE ENSINAR?

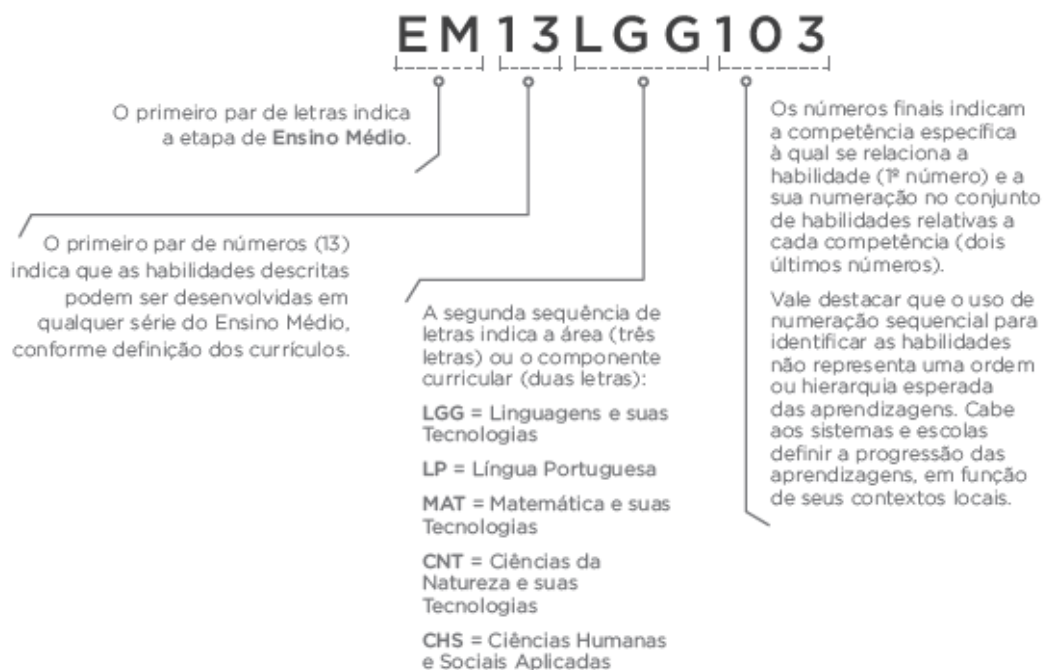
A Base Nacional Comum Curricular é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, podemos dizer que a BNCC é como se fosse uma espécie de Constituição Federal do Ensino Básico, pois ela dita o que deve ser seguido em todo o território nacional. Seu principal objetivo é ser uma referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação dos currículos e das propostas pedagógicas das redes de ensino e das escolas, tanto públicas quanto privadas. Em sua essência, a BNCC busca promover a equidade e a qualidade no sistema educacional brasileiro, garantindo que, independentemente da região, da escola ou da condição social, todos os estudantes tenham o direito de aprender um conjunto fundamental de conhecimentos, competências e habilidades.

A BNCC não é um currículo pronto, mas sim uma diretriz. Ela não nos fornece uma metodologia de ensino, mas estabelece o que de aprendizagem temos que alcançar em nossos alunos. Sua estrutura é baseada em dez Competências Gerais, que se desdobram em Competências Específicas para cada área do conhecimento (como Matemática e suas Tecnologias) e, finalmente, em Habilidades. Esta estrutura valoriza uma formação integral, que vai além do conteúdo factual, focando no desenvolvimento da capacidade do aluno de mobilizar conhecimentos para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. As escolas e redes de ensino têm a autonomia para criar seus próprios currículos e projetos pedagógicos, desde que estes estejam alinhados às diretrizes da BNCC.

Vale salientar sobre o que são as competências e habilidades citadas anteriormente, pois na BNCC existe uma diferenciação desses elementos. De acordo com a BNCC (Brasil, 2018, p.8), competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas na vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho. Já as habilidades servem como um suporte para o desenvolvimento das competências, as habilidades estão relacionadas a diferentes objetos de conhecimento, como conteúdos, conceitos e processos, ou seja, representam as aprendizagens essenciais a serem garantidas no âmbito da BNCC a todos os estudantes do Ensino Médio.

A BNCC utiliza-se de um código alfanumérico, como será visto a seguir na figura 6, para identificação de cada habilidade.

Figura 6 – Código Alfanumérico da BNCC



Fonte: Brasil (2018, p. 34)

3.2 A MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM: O QUE AVALIAR?

A Matriz de Referência do Enem é o documento que orienta a elaboração dos itens (as questões) do exame. Ela funciona como um recorte específico e operacional das diretrizes curriculares nacionais mais amplas. Seu objetivo primordial é definir, de forma clara e transparente, quais habilidades serão avaliadas, garantindo a validade pedagógica e a padronização do exame em todo o território nacional. A Matriz serve como um guia tanto para os elaboradores das questões quanto para os professores e estudantes que se preparam para a prova, focando não em

uma lista de conteúdos, mas na capacidade de aplicar o conhecimento em situações-problema.

Assim como a BNCC, a Matriz de Referência está estruturada em Competências e Habilidades. Para a área de Matemática e suas Tecnologias, por exemplo, são definidas competências de área que se desdobram em 30 habilidades específicas. Cada questão (item) do Enem é construída para avaliar uma dessas habilidades. Uma habilidade na matriz geralmente começa com um verbo de ação (como “identificar”, “resolver”, “analisar”, “interpretar”) e descreve uma tarefa cognitiva que o estudante deve ser capaz de realizar, aplicando seus conhecimentos matemáticos a um contexto específico.

3.3 PRINCIPAIS SEMELHANÇAS E DIFERENÇAS

As semelhanças são maiores que as diferenças. Como diferença primordial temos exatamente o conceito de cada uma como já definido anteriormente, a BNCC é uma norma curricular, a “manda-chuva”, enquanto que a Matriz do Enem é uma espécie de guia de avaliação. Já as semelhanças são mais abrangentes, como ambos os documentos adotam um processo pedagógico de competências e habilidades, também compartilham de uma visão educacional que supera a mera memorização de conteúdos, valorizando a contextualização e aplicação para a resolução dos problemas, além de que servem como referências nacionais, buscando uma certa coesão do sistema educacional do Brasil. A seguir tem-se a tabela 1 que mostrará de maneira bem simples as semelhanças e diferenças entre BNCC e Matriz de Referência do Enem.

Tabela 1 – Diferenças entre BNCC e matriz de referência do ENEM

Característica	BNCC do Ensino Médio	Matriz de Referência do Enem
Propósito Principal	O que ensinar. É um documento de caráter normativo que estabelece o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da educação básica. Seu objetivo é orientar a construção dos currículos das escolas e redes de ensino em todo o Brasil.	O que e como avaliar. É o referencial que orienta a elaboração dos itens (questões) do Exame Nacional do Ensino Médio. Ela não detalha conteúdos, mas sim as competências e habilidades que serão avaliadas no exame.
Abrangência	Ampla e Abrangente. Cobre todas as áreas do conhecimento e detalha as expectativas de aprendizagem para toda a etapa do Ensino Médio, servindo como base para livros didáticos, formação de professores e políticas educacionais.	Focada e Específica. É um recorte das habilidades consideradas essenciais e passíveis de serem avaliadas em um exame de larga escala como o Enem. Nem tudo que está na BNCC será necessariamente cobrado no Enem.

Verbos e Ações	Utiliza verbos que descrevem o processo de aprendizagem (ex: “compreender”, “investigar”, “elaborar problemas”).	Utiliza verbos que descrevem uma tarefa a ser executada em uma prova (ex: “identificar”, “resolver”, “analisar gráfico”).
Público-Alvo	Gestores educacionais, autores de livros didáticos, formuladores de currículo, professores (para planejamento).	Elaboradores de itens do Enem, professores e estudantes (para preparação e direcionamento dos estudos).

Fonte: Autor (2025)

3.4 FOCO EM FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Agora será dada ênfase a uma área em específico, a área de Matemática e suas Tecnologias, mais especificamente, em dois assuntos: Função Exponencial e Função Logarítmica. A BNCC na etapa do Ensino Médio busca aprofundar o que foi aprendido no Ensino Fundamental, promovendo uma visão aplicada à Matemática. E esses dois assuntos são fundamentais neste processo, pois aparecem em algumas competências e em algumas habilidades. A seguir registra-se quais competências e habilidades esses dois assuntos estão integrando.

Primeiramente, de acordo com o documento oficial da Base Nacional Comum Curricular, seguem as competências e habilidades que possuem alguma ligação com o tema matemático desta pesquisa.

Competência BNCC 1: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. (Brasil, 2018, p. 524).

Desta competência utilizam-se as seguintes habilidades:

- **(EM13MAT101)** Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- **(EM13MAT103)** Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade.

Competência BNCC 2: Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (Brasil, 2018, p.526)

Desta competência usufrui-se da seguinte habilidade:

- **(EM13MAT203)** Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

Competência BNCC 3: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (Brasil, 2018, p. 527).

Nesta competência, a qual possui a maior variedade de habilidades, é também a que irá fornecer a maior quantidade de habilidades para o trabalho. Seguem as habilidades dessa competência:

- **(EM13MAT303)** Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagens em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial.
- **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
- **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.
- **(EM13MAT313)** Resolver e elaborar problemas que envolvem medições em que se discuta o emprego de algarismos significativos e algarismos duvidosos, utilizando, quando necessário, a notação científica.

Competência BNCC 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (Brasil, 2018, p.530)

E a habilidade que será utilizada, é:

- **(EM13MAT403)** Comparar e analisar as representações, em plano cartesiano, das funções exponencial e logarítmica para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada uma, com ou sem apoio de tecnologias digitais, estabelecendo relações entre elas.

Competência BNCC 5: Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2018, p.531)

E a última habilidade citada é:

- **(EM13MAT508)** Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Já a Matriz de Referência do Enem, por sua vez, promove uma visão mais técnica à Matemática, e esses dois assuntos, Função Exponencial e Função Logarítmica, também aparecem em algumas competências e habilidades, porém não de maneira direta, mas sim nas entrelinhas.

Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

As habilidades da Matriz do Enem referentes a esta competência, são:

- **H19** - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- **H20** - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
- **H21** - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Competência de área 6: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Por fim, as habilidades referentes a esta outra competência da Matriz estão listadas abaixo:

- **H24** - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- **H25** - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- **H26** - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Todas essas competências e habilidades possuem textos muito bem escritos e que fazem parecer ser simples resolver um problema de matemática do Enem e até mesmo de outros vestibulares, até porque tudo que é visto no ensino médio é normatizado pela BNCC, portanto todo vestibular obedece as diretrizes da BNCC e por consequência estão interligados com a Matriz do Enem. No entanto, é muito importante deixar claro que para se resolver a grande maioria dos problemas do Enem e de outros vestibulares necessita-se de conhecimentos matemáticos básicos. Tais conhecimentos são considerados pré-requisitos.

Por exemplo, se é feito uma questão de logaritmo e no logaritmando há uma equação do 2º grau, precisa-se ter conhecimentos de equação do 2º grau atrelado ao estudo dos logaritmos, pode-se dizer que há uma espécie de efeito dominó, um conteúdo vai precisando do outro, e o outro vai precisando de um terceiro assunto. Segundo Pereira (2021),

A grande dificuldade de aprender um conteúdo da Matemática é que quase sempre as áreas da Matemática estão interligadas, e um aprendizado defasado em certo conteúdo pode acarretar um aprendizado ainda mais defasado em outro. Tomemos por exemplo a área de Geometria, mais especificamente a distância entre dois pontos, o aluno deve ter um bom conhecimento de raiz quadrada, potenciação e mais outros detalhes, ou seja, é inteiramente ligada a vários outros assuntos que os alunos devem ter aprendido durante sua vida acadêmica, desde o ensino fundamental. (Pereira, 2021, p. 18)

Portanto não é um pensamento de um único docente, é um pensamento docente em geral, um dos problemas na resolução de itens do Enem está numa base matemática fragilizada desde os anos iniciais do ensino fundamental.

4 BREVE REVISÃO SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Neste capítulo será estudado especificamente a Função Exponencial e a Função Logarítmica, e será suposto que o leitor já possui domínio dos conteúdos que são pré-requisitos dos citados, tais como função, função do 1º grau, função do 2º grau e função modular.

Usaremos como fonte o livro *Números e Funções* (Lima, 2023), da coleção Profmat e também o livro *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 2 (Iezzi; Dolce; Murakami, 2013).

Assim como na educação básica, nesta pesquisa será relembrando as propriedades fundamentais de potenciação. Para ratificar esta decisão, no livro *Fundamentos de Matemática Elementar*, volume 2 (Iezzi; Dolce; Murakami, 2013), é dedicado um capítulo inteiro a este tópico, dada sua importância para a fixação dos conceitos que serão vistos sobre o tema principal.

4.1 POTENCIAÇÃO

Como o objetivo desta pesquisa não é falar de potenciação, seremos breves neste tópico e iremos apenas citar algumas definições e as propriedades que delas decorrem.

Definição 4.1.1. Seja a um número real e n um número natural, define-se potência de base a e expoente n como sendo o número a^n , de tal forma que:

- $a^0 = 1$, se $a \neq 0$.
- $a^n = a^{n-1} \cdot a$, para todo $n \geq 1$.

Dessa definição decorre que a^p é um produto de p fatores iguais a a , para $p \geq 2$. A partir da Definição 4.1.1, define-se potências para expoentes inteiros não negativos.

Definição 4.1.2. Dado um número real $a \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, define-se a^{-n} como:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Ou seja, quando o expoente é um inteiro negativo, teremos como resultado o inverso da correspondente potência de inteiro positivo. A partir das Definições 4.1.1 e 4.1.2 é possível estender o conceito de potência com expoentes racionais.

Definição 4.1.3. Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $p/q \in \mathbb{Q}$, com $q \geq 2$, define-se potência de base a e expoente p/q como:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Para potências com expoentes irracionais, a definição será dada por aproximação.

Definição 4.1.4. Seja $a \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e α um número irracional. Considere os seguintes conjuntos:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} | r < \alpha\};$$

$$A_2 = \{s \in \mathbb{Q} | s > \alpha\}.$$

Em correspondência aos conjuntos A_1 e A_2 , considere os conjuntos:

$$B_1 = \{a^r | r \in A_1\};$$

$$B_2 = \{a^s | s \in A_2\}.$$

Daí, se $a > 1$, tem-se que:

1. todo número de B_1 é menor que qualquer número de B_2 .
2. existem dois números $a^r \in B_1$ e $a^s \in B_2$ tais que a diferença $a^s - a^r$ é menor que qualquer número positivo e arbitrário.

Portanto, dizemos que a^r e a^s são aproximações por falta e por excesso, respectivamente, de a^α e que B_1 e B_2 são classes que definem a^α .

Para o caso $0 < a < 1$ tudo ocorrerá de modo análogo.

Consequentemente, como foram definidas potências de expoentes racionais e irracionais, as potências de expoentes reais já estão definidas. Por fim, tem-se as principais propriedades das potências.

Proposição 4.1.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$, com $m, n \in \mathbb{R}$, então:*

$$P_1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$P_2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

$$P_3) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$P_4) a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$P_5) \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m, \text{ com } b \neq 0.$$

De posse dessas definições e com essas propriedades em mão, podemos partir para os dois tópicos principais deste capítulo.

4.2 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste momento serão expostos os conceitos de uma parte do tema escolhido, a saber, função exponencial. Anteriormente foram mostradas uma espécie de base que este assunto necessita, e agora será mostrado uma parte mais carregada de notações matemáticas e de definições e teoremas.

Definição 4.2.1. *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, e também $a \neq 1$, a função exponencial de base a , $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ indicada pela expressão $f(x) = a^x$ deve ser definida de modo que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, possua as seguintes propriedades:*

- i) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$;
- ii) $f(1) = a$;
- iii) Se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ quando $a > 1$, e se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ quando $0 < a < 1$.

A interpretação direta deste último ponto é que quando a base $a > 1$, teremos uma função crescente, já quando $0 < a < 1$ teremos uma função decrescente.

Outro ponto a ser observado, trivial até, é que na Definição 4.2.1 há a exclusão de $a = 1$. Isto é válido pois se $f(x) = 1^x$ teríamos uma função do tipo constante, já que para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ sempre é igual a 1.

Observe também que da Definição 4.2.1 é que se f é uma função tal que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e possui a propriedade i), então f não pode assumir o valor zero, a não ser que f seja identicamente nula.

De fato, seja $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$, teremos:

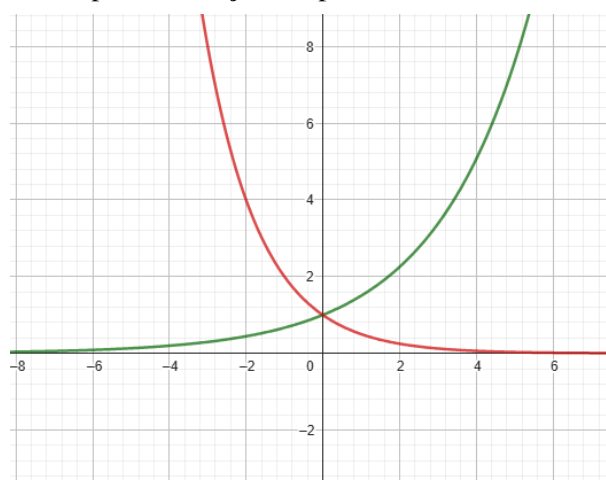
$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) \Rightarrow f(x) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0.$$

Portanto f é, de fato, identicamente nula.

Para se ter uma pequena visão geométrica do que representa a função exponencial ser crescente ou decrescente, veja o gráfico do exemplo a seguir:

Exemplo 1. Sejam $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, seus gráficos estão representados na Figura 7. O gráfico em verde é de f e o vermelho é de g . Note que ambos possuem o ponto $(0, 1)$ em comum, e nenhum deles toca o eixo x , fazendo com que o eixo x se torne uma assíntota em relação aos gráficos de f e g .

Figura 7 – Exemplos de Funções Exponenciais crescentes e decrescentes



Fonte: Autor (2025)

Há ainda outras três propriedades além das três citadas na definição. São elas:

- Seja f uma função com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$, então f é ilimitada superiormente.
- A função exponencial é contínua.
- A função exponencial é sobrejetiva.

Teorema 4.2.1 (Caracterização da função exponencial). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ uma função monótona injetiva, ou seja, crescente ou decrescente, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) $f(nx) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
- ii) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$.
- iii) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

$i) \Rightarrow ii)$: Note inicialmente que para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$) tem-se $f(rx) = f(x)^r$. Como $m = r \cdot n$, teremos:

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$$

logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$. Daí, como $f(1) = a$, $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Suponhamos agora, sem perda de generalidade, que f seja crescente. Note que: $1 = f(0) < f(1) = a \Rightarrow 1 < a$. Admita, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Seja então que $f(x) < a^x$. Temos então que existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, ou seja, $f(x) < f(r) < a^x$. Como supomos que f é crescente, $f(x) < f(r) \Rightarrow x < r$. Absurdo, pois tínhamos $a^r < a^x \Rightarrow r < x$. Como chegamos em um absurdo, concluímos que $f(x) = a^x$.

$ii) \Rightarrow iii)$: Substituindo a expressão de f dada por ii), temos:

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y).$$

$iii) \Rightarrow i)$: Usaremos indução sobre n , para mostrar o resultado nos números naturais.

- **Caso base:** $n = 0$. $f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = f(0)^2 \Rightarrow f(0)[f(0) - 1] = 0$. Como f não é identicamente nula, $f(0) \neq 0$. Logo, $f(0) - 1 = 0 \Rightarrow f(0) = 1$. Assim, $f(0 \cdot x) = f(0) = 1$ e $f(x)^0 = 1$, portanto $f(0 \cdot x) = f(x)^0$.
- **Hipótese de Indução:** Suponha que vale para um natural $n - 1$, ou seja, $f((n - 1)x) = f(x)^{n-1}$.
- **Passo Indutivo:** Para n , tome $y = (n - 1)x$. Então: $f(nx) = f(x + (n - 1)x) = f(x) \cdot f((n - 1)x)$. Pela hipótese de indução, temos: $f(nx) = f(x) \cdot f(x)^{n-1} = f(x)^n$.

Portanto, a propriedade vale para todo $n \in \mathbb{N}$. A extensão para $n \in \mathbb{Z}$ é direta. ■

Definição 4.2.2. Dizemos que uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é do tipo exponencial quando se tem $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas e $a \neq 1$. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

Se uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ é do tipo exponencial, então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$, o quociente

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = a^h$$

depende somente de h . Mostraremos que vale a recíproca.

Teorema 4.2.2 (Caracterização de $b \cdot a^t$). *Para cada $b > 0$ e cada t real, suponhamos dado um número $f(b, t) > 0$ com as seguintes propriedades:*

- i) $f(b, t)$ depende linearmente de b e é monótona injetiva em relação a t .
- ii) $f(b, s+t) = f(f(b, s), t)$.

Então, pondo $a = f(1, 1)$, tem-se $f(b, t) = b \cdot a^t$.

Demonstração: Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, dada por $\varphi(t) = f(1, t)$. Ela é monótona injetiva e cumpre:

$$\varphi(s+t) = f(1, s+t) = f(f(1, s), t).$$

Pela linearidade em b , $f(f(1, s), t) = f(1, s) \cdot f(1, t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$. Logo, $\varphi(s+t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$. Pelo Teorema 4.2.1, temos que $\varphi(t) = a^t$, onde $a = \varphi(1) = f(1, 1)$. Portanto,

$$f(b, t) = f(b \cdot 1, t) = b \cdot f(1, t) = b \cdot \varphi(t) = b \cdot a^t.$$

■

Observação 1. A condição ii) do Teorema 4.2.2 tem seu significado esclarecido quando se percebe que $b = b \cdot a^0 = f(b, 0)$, logo b é o valor inicial de $f(b, t)$ no instante $t = 0$. Então, a propriedade ii) diz que começar com o valor b e deixar passar o tempo $s+t$ é o mesmo que começar com o valor $f(b, s)$ e deixar transcorrer o tempo t .

4.3 LOGARITMOS

Assim como foi introduzido o tópico Função Exponencial com uma pequena revisão sobre potenciação, de modo análogo será feito com a Função Logarítmica. Desse modo, iniciaremos com uma pequena revisão dos logaritmos e suas propriedades.

Definição 4.3.1. Sendo a e b números reais maiores que zero e adicionalmente a diferente de 1, chamamos de *logaritmo* de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo a se obter o valor b . Usando símbolos, escrevemos:

$$\log_a b = x \iff a^x = b.$$

Neste caso, diz-se que:

- a : Base;
- b : Logaritmando;
- x : Logaritmo.

Exemplos:

- $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$.
- $\log_3 243 = 5$, pois $3^5 = 243$.
- $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right) = -2$, pois $3^{-2} = \frac{1}{9}$.

Um nome que é pouco comentado na educação básica é a *logaritmação*. Este é o nome da operação para se encontrar o logaritmo.

Consequências da definição:

1. $\log_a 1 = 0$.

Sempre que a base a obedece suas restrições e o logaritmando é igual a 1, o logaritmo é zero.

2. $\log_a a = 1$.

Sempre que o logaritmando e a base a obedecem suas restrições e assumem o mesmo valor, o logaritmo é igual a 1.

3. $a^{\log_a b} = b$.

Pela definição, temos que:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \Rightarrow a^{\log_a b} = b.$$

4. $\log_a b = \log_a c \iff b = c$.

Pela definição, temos:

$$\log_a b = \log_a c \iff a^{\log_a b} = a^{\log_a c} \iff b = c.$$

O próximo resultado mostra as principais propriedades dos Logaritmos.

Proposição 4.3.1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ e $a \neq 1$, tem-se:*

i) **Logaritmo do produto:**

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c,$$

com a, b, c positivos e $a \neq 1$.

ii) **Logaritmo do quociente:**

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

iii) **Logaritmo da potência:**

$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b, \quad \text{onde } c \in \mathbb{R}.$$

iv) **Mudança de expoente:**

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c} \cdot \log_a b, \quad \text{onde } c \in \mathbb{R}^*.$$

v) **Mudança de base:**

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \text{onde } c > 0 \text{ e } c \neq 1.$$

A seguir será demonstrado a primeira propriedade e as outras, por seguirem um padrão similar, serão deixadas a cargo da curiosidade do leitor.

Demonstração:

Sejam $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a(b \cdot c) = z$.

Pela definição:

$$a^x = b. \tag{4.1}$$

$$a^y = c. \tag{4.2}$$

$$a^z = b \cdot c. \tag{4.3}$$

Multiplicando (4.1) e (4.2):

$$a^x \cdot a^y = b \cdot c \Rightarrow a^{x+y} = a^z \Rightarrow x + y = z.$$

Portanto, $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$. ■

Com a mudança de base, é normal que existam bases em que se trabalhem mais. A seguir será listado duas dessas bases mais importantes.

Definição 4.3.2. O logaritmo decimal é o caso particular em que a base é 10. Sua notação é $\log_{10}(x)$.

No entanto, nos livros textos que tratam deste tópico, fica suprimido o número 10 na base, aparecendo somente o logaritmando, ficando da seguinte forma:

$$\log_{10}(x) = \log x.$$

Definição 4.3.3. O logaritmo natural de um número $x > 0$ é definido como:

$$\ln x = \log_e x.$$

em que e é o número de Euler, $e \approx 2.71828 \dots$

A única diferença do logaritmo natural para os outros já citados é a notação, já que o logaritmo natural possui notação própria ($\ln x$).

É válido salientar também sobre a importância deste logaritmo, pois ele aparece em muitas áreas fora da matemática, como: Física, Engenharia, Economia, Estatística, Química, dentre outras. Ele é tão importante que existem inúmeras monografias, dissertações e teses sobre este número.

4.4 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Analogamente com a ideia de função exponencial, anteriormente foi exposto um conteúdo sobre logaritmos que é considerado um pré-requisito para buscar uma melhor compreensão, pois neste momento será inserido a segunda parte do tema desta dissertação, a saber, Função Logarítmica.

Definição 4.4.1. Dado um número real a positivo e diferente de 1, chamamos de função logarítmica de base a a função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x > 0$ o número $\log_a x$.

Proposição 4.4.1. *Seja $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, então tem-se:*

i) Sendo $a \in \mathbb{R}_+^ - \{1\}$, as funções $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$, e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra. Ou seja, as funções exponenciais e logarítmicas são inversas uma da outra.*

ii) A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente se, e somente se, $a > 1$.

iii) A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é decrescente se, e somente se, $0 < a < 1$.

Demonstração: Para provar a propriedade i) devemos mostrar que $f \circ g$ e $g \circ f$ são ambas iguais a x .

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log_a(g(x)) = \log_a(a^x) = x, \text{ e}$$

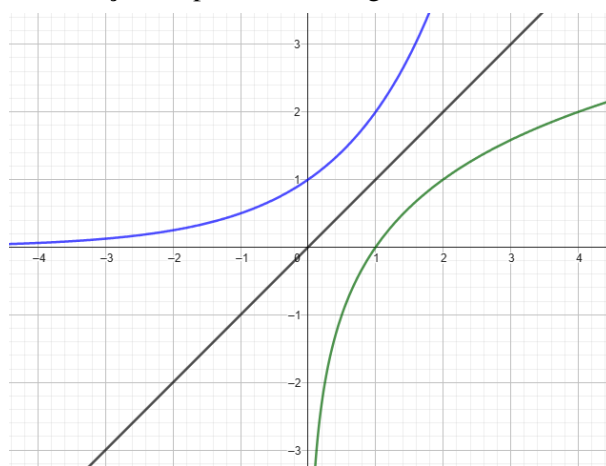
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{\log_a x} = x.$$

■

As propriedades ii) e iii) ficarão a cargo do leitor e podem ser encontradas no livro Fundamentos de Matemática Elementar volume 6.

Exemplo 2. Considere a função $f(x) = \log_2 x$ que está em verde e $g(x) = 2^x$ que está em azul, veremos que os gráficos dessas funções (veja figura 8), são simétricos em relação à chamada bissetriz dos quadrantes ímpares.

Figura 8 – Exemplos de funções exponenciais e logarítmicas com a reta $y = x$ como espelho



Fonte: Autor (2025)

Note que a bissetriz dos quadrantes ímpares funciona como uma espécie de espelho para as funções f e g , e que, por este motivo, podemos concluir que qualquer ponto (a, b) pertencente à função f e qualquer ponto (b, a) pertencente a função g , ou seja, simétricos em relação à bissetriz serão equidistantes da reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares).

Observação 2. Outro modo para se verificar tal fato é utilizar a ideia de distância entre ponto e reta, um conceito ensinado nas aulas de Geometria Analítica na educação básica.

Seja uma reta r e um ponto $P(x_0, y_0)$, a distância entre r e P é dada por:

$$D_{P,r} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

onde A , B e C são os coeficientes da reta r escritos na forma de equação geral, ou seja, $Ax + By + C = 0$.

Como a reta r que usaremos é $y = x \Rightarrow 1x - 1y + 0 = 0$. E os pontos são $P = (a, b)$ e $P' = (b, a)$.

Daí,

$$D_{P,r} = \frac{|1 \cdot a + (-1) \cdot b + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{2}}.$$

ou

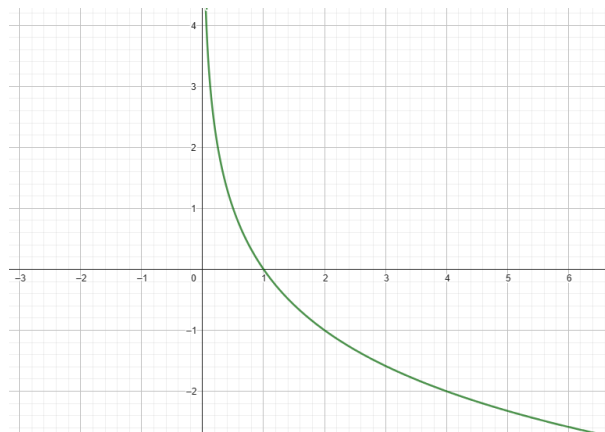
$$D_{P',r} = \frac{|1 \cdot b + (-1) \cdot a + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|b - a|}{\sqrt{2}}.$$

Como $|a - b| = |b - a|$, logo $D_{P,r} = D_{P',r}$ e assim, de fato, as distâncias dos pontos simétricos à reta r são iguais.

Note que no Exemplo 2 fornecido anteriormente tem-se uma função logarítmica crescente, a seguir será dado outro exemplo, porém sendo com uma função logarítmica decrescente.

Exemplo 3. Seja $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, observe seu gráfico, conforme ilustra a figura 9 a seguir.

Figura 9 – Função Logarítmica decrescente



Fonte: Autor (2025)

Perceba que ao comparar os gráficos das funções logarítmicas crescentes e decrescentes, ambos possuem como uma de suas características estarem totalmente do lado direito do eixo y. Outra característica comum é possuir o ponto $(1, 0)$ em comum.

Teorema 4.4.2 (Caracterização das Funções Logarítmicas). *Seja $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Então existe $a > 0, a \neq 1$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$.*

Demonstração: Para esta demonstração será admitido f crescente. O outro caso é análogo.

Seja $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

Vamos supor que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$. Como f é crescente, $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, temos que $a > 1$. Teremos também que $\forall m \in \mathbb{Z}$ vale que $f(a^m) = m$.

Se $r = m/n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então $rn = m$, portanto $m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r)$, logo $f(a^r) = \frac{m}{n} = r$.

Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, para r, s racionais, tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Assim, todo número racional r menor que x é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s maior que x é também maior que $f(a^x)$. Portanto, $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $y = a^x \in \mathbb{R}_+^*$. Logo $x = \log_a y$. Concluimos que $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$. ■

5 PROBLEMAS

Neste capítulo são apresentados problemas oriundos do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), considerado o maior vestibular do Brasil, bem como do vestibular da Universidade Estadual do Ceará (UECE), de caráter local. O objetivo é evidenciar as formas distintas pelas quais esses exames abordam os conteúdos centrais desta dissertação, a saber: Função Exponencial e Função Logarítmica.

Para tanto, cada problema foi associado às competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e às habilidades da Matriz de Referência do ENEM que lhes são pertinentes. Além disso, elaborou-se uma resolução detalhada de cada item, de modo a proporcionar ao estudante uma compreensão clara da sequência de raciocínios matemáticos adotada, minimizando dificuldades e lacunas que comumente surgem quando etapas importantes são omitidas e, após cada solução, é feito um comentário pedagógico para enriquecer as soluções e dar aos docentes mais embasamento teórico para cada problema.

Este capítulo constitui-se, portanto, no principal produto educacional desta pesquisa, pois servirá de base para a elaboração de uma apostila didático-pedagógica ampliada, contemplando todos os problemas do ENEM relativos a esse conteúdo até o ano de 2025, bem como uma seleção de questões da UECE sobre o mesmo tema. Tal material pretende contribuir como recurso de apoio tanto para professores quanto para estudantes, oferecendo resoluções comentadas de forma minuciosa, em contraposição ao tratamento simplificado frequentemente encontrado em manuais ou plataformas digitais, que acabam por gerar insegurança e frustração em alunos que já apresentam dificuldades em Matemática.

Uma observação deve ser feita a respeito das tabelas 2 e 3 que serão listadas a seguir, pois o vestibular local da UECE não aborda os conteúdos conforme a Matriz de Referência do Enem como “roteiro” de elaboração do seu concurso, porém foi feita uma análise aproximada de quais competências e habilidades da Matriz de Referência do Enem mais dialogavam com os dados problemas.

Tabela 2 – Relação entre problemas (Cap. 5) e habilidades da BNCC

Problema (ID)	Vestibular de origem	Ano	Habilidade(s) BNCC
1	ENEM	2024	EM13MAT403
2	ENEM	2023	EM13MAT304
3	ENEM	2021	EM13MAT508
4	ENEM	2020	EM13MAT508 e EM13MAT305
5	ENEM PPL	2019	EM13MAT304
6	ENEM PPL	2019	EM13MAT305
7	ENEM 2ª aplicação	2016	EM13MAT304
8	ENEM PPL	2015	EM13MAT304
9	ENEM	2013	EM13MAT303
10	ENEM	2013	EM13MAT303
11	ENEM	2007	EM13MAT508

12	UECE	2024	EM13MAT508
13	UECE	2024	EM13MAT305
14	UECE	2022	EM13MAT304 e EM13MAT305

Fonte: Autor (2025)

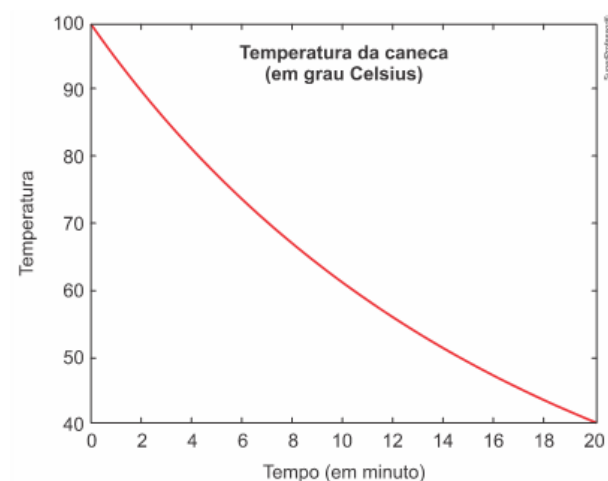
Tabela 3 – Relação entre problemas (Cap. 5) e habilidades da Matriz de Referência do ENEM

Problema (ID)	Vestibular de origem	Ano	Habilidade(s) — Matriz ENEM
1	ENEM	2024	H20
2	ENEM	2023	H20, H21
3	ENEM	2021	H20, H21
4	ENEM	2020	H24, H25
5	ENEM PPL	2019	H21
6	ENEM PPL	2019	H21
7	ENEM 2ª aplicação	2016	H20, H21
8	ENEM PPL	2015	H21
9	ENEM	2013	H20, H21
10	ENEM	2013	H19
11	ENEM	2007	H20, H25
12	UECE	2024	H19, H21
13	UECE	2024	H19, H21
14	UECE	2022	H19, H21

Fonte: Autor (2025)

Após o exposto sobre as tabelas 2 e 3 feitos acima, a seguir virão os problemas do Enem e da UECE, com suas respectivas soluções com forte detalhamento e após finalizar cada solução será feito um comentário pedagógico a fim de enriquecer esta pesquisa e torná-la mais forte em termos educacionais.

Problema 1 (Enem 2024 - Habilidade EM13MAT403 - H20). Uma caneca com água fervendo é retirada de um forno de micro-ondas. A temperatura T , em grau Celsius, da caneca, em função do tempo t , em minuto, pode ser modelada pela função $T(t) = a + 80 \cdot b^t$ representada no gráfico a seguir.



Os valores das constantes a e b são

a) $a = 20$; $b = \log(0,5)$

b) $a = 100$; $b = 0,5$

c) $a = 20$; $b = (0,5)^{\frac{1}{10}}$

d) $a = 20$; $b = \frac{(40)^{\frac{1}{10}}}{80}$

e) $a = 20$; $b = 40$

Solução: A função que modela a temperatura da caneca é:

$$T(t) = a + 80b^t.$$

Sabemos que a caneca está a 100°C no instante $t = 0$ e atinge 40°C no instante $t = 20$. Vamos usar esses dados para montar um sistema e encontrar os valores de a e b .

• Para $t = 0$:

$$T(0) = a + 80b^0 = a + 80 \cdot 1 = a + 80 = 100.$$

$$a = 20.$$

• Para $t = 20$:

$$T(20) = 20 + 80b^{20} = 40 \Rightarrow 80b^{20} = 20 \Rightarrow b^{20} = \frac{1}{4}.$$

Como $b^{20} = \frac{1}{4}$, podemos reescrever:

$$b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{2}{20}} = 2^{-\frac{1}{10}} = \left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}}.$$

Logo, temos: $b = (0,5)^{\frac{1}{10}}$.

Assim, a função fica: $T(t) = 20 + 80 \cdot (0,5)^{\frac{t}{10}}$. Portanto, os valores de a e b são: $a = 20$ e $b = (0,5)^{\frac{1}{10}}$.

Alternativa correta: c). ■

Comentário Pedagógico:

Esta questão é um clássico exemplo de modelagem a partir de um gráfico, aplicando uma função exponencial translatada (empurrada), que ecoa a Lei de Resfriamento de Newton. A principal dificuldade conceitual para os alunos é interpretar o significado do coeficiente ‘ a ’. É crucial que o professor explore a ideia de assíntota horizontal, questionando os alunos: “O que acontecerá com a temperatura da caneca depois de muito tempo?”. Isso os levará a concluir que a temperatura se aproxima da temperatura ambiente, que é o valor de ‘ a ’. No campo algébrico, a manipulação para encontrar ‘ b ’ a partir de ‘ $b^{20} = \frac{1}{4}$ ’ pode ser um obstáculo, exigindo domínio das propriedades de potenciação. Uma estratégia didática eficaz é, antes da resolução, pedir que os alunos descrevam o fenômeno verbalmente, conectando a física do resfriamento à matemática da função.

Problema 2 (ENEM PPL 2023 - Habilidade EM13MAT304 - H20 e H21). Um tipo de célula se reproduz constantemente por divisão celular, triplicando sua quantidade a cada duas horas, sob condições ideais de proliferação. Suponha uma quantidade inicial Q_0 dessas células sob as condições ideais de proliferação durante um certo período.

Qual a representação algébrica da quantidade Q dessas células em função do tempo t , em hora, nesse período?

- a) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^t$
- b) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{2t}$
- c) $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$
- d) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$
- e) $Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}-1}$

Solução: O problema informa que a quantidade de células **triplica a cada 2 horas**, e que no instante inicial $t = 0$ existe uma quantidade Q_0 de células. Deseja-se encontrar uma expressão para $Q(t)$, a quantidade de células após t horas.

Como a cada 2 horas a quantidade triplica, temos uma função exponencial com base 3 e expoente fracionário, pois o crescimento acontece a cada 2 horas.

A forma geral da função exponencial que modela esse tipo de crescimento é:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}.$$

Justificativa:

Para $t = 0$:

$$Q(0) = Q_0 \cdot 3^0 = Q_0 \quad (\text{correto}).$$

Para $t = 2$:

$$Q(2) = Q_0 \cdot 3^{\frac{2}{2}} = Q_0 \cdot 3 = 3Q_0 \quad (\text{correto}).$$

Portanto, a função correta que representa a quantidade de células em função do tempo t , em horas, é:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 3^{\frac{t}{2}}.$$

Alternativa correta: d). ■

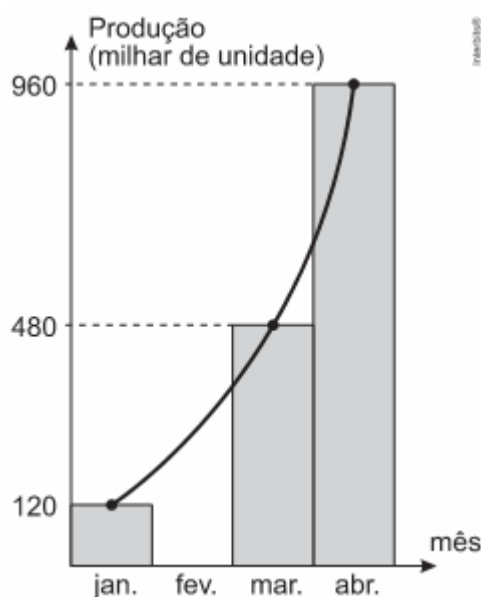
Comentário Pedagógico:

O desafio central desta questão é a correta modelagem do tempo no expoente. Muitos alunos, por impulso, poderiam escolher alternativas que envolvem ' 3^t ' ou ' 3^{2t} ', sem compreender como a frequência do evento (a cada duas horas) afeta a variável. Uma excelente estratégia didática é a construção de uma tabela de valores:

- $t = 0$ horas $\rightarrow Q_0$;
- $t = 2$ horas $\rightarrow Q_0 \cdot 3^1$;
- $t = 4$ horas $\rightarrow Q_0 \cdot 3^2$;
- $t = 6$ horas $\rightarrow Q_0 \cdot 3^3$;

Ao analisar a tabela, o professor pode perguntar: “Qual é a relação entre o tempo ' t ' e o expoente da base 3?”. Os alunos perceberão que o expoente é sempre a metade do tempo, chegando naturalmente à expressão ' $t/2$ '. Essa construção evita a simples memorização da fórmula e promove o raciocínio.

Problema 3 (ENEM PPL 2021 - Habilidade EM13MAT508 - H20 e H21). O gráfico informa a produção registrada por uma indústria nos meses de janeiro, março e abril.



Por problemas logísticos, não foi feito o levantamento sobre a produção no mês de fevereiro. Entretanto, as informações dos outros três meses sugerem que a produção nesse quadrimestre cresceu exponencialmente, conforme aponta a curva de tendência traçada no gráfico.

Assumindo a premissa de que o crescimento nesse período foi exponencial, pode-se inferir que a produção dessa indústria no mês de fevereiro, em milhar de unidade, foi

- a) 0
- b) 120
- c) 240
- d) 300
- e) 400

Solução: Para resolver o problema, assumimos que o crescimento da produção pode ser modelado por uma função exponencial da forma $f(x) = a \cdot b^x$, onde x é o número do mês (janeiro=1, fevereiro=2, março=3) e $f(x)$ é a produção em milhares de unidades.

Coletar os dados do gráfico:

Do gráfico, extraímos os dados de produção para os meses de janeiro e março:

- Para janeiro $x = 1$, a produção foi de $f(1) = 120$.
- Para março $x = 3$, a produção foi de $f(3) = 480$.

Montar o sistema de equações:

Substituindo os pontos na função $f(x) = a \cdot b^x$, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$a \cdot b^1 = 120. \quad (5.1)$$

$$a \cdot b^3 = 480. \quad (5.2)$$

Resolver o sistema para encontrar 'b':

A forma mais simples de resolver é dividir a equação (5.2) pela equação (5.1):

$$\frac{a \cdot b^3}{a \cdot b} = \frac{480}{120}.$$

Simplificando a expressão, os termos 'a' se cancelam:

$$b^{3-1} = 4.$$

$$b^2 = 4.$$

Como o problema descreve um crescimento, consideramos a raiz positiva:

$$b = 2.$$

Encontrar o valor de 'a':

Agora, substituimos o valor de $b = 2$ na equação (5.1):

$$a \cdot (2) = 120.$$

$$a = \frac{120}{2}.$$

$$a = 60.$$

Escrever a função exponencial:

Com os valores de $a = 60$ e $b = 2$, a função que modela a produção é:

$$f(x) = 60 \cdot 2^x.$$

Calcular a produção para fevereiro:

A questão pede a produção no mês de fevereiro, que corresponde a $x = 2$. Substituímos $x = 2$ na função:

$$f(2) = 60 \cdot 2^2.$$

$$f(2) = 60 \cdot 4.$$

$$f(2) = 240.$$

Portanto, pode-se inferir que a produção no mês de fevereiro foi de **240** mil unidades.

Alternativa correta: c). ■

Comentário Pedagógico:

Este problema conecta a função exponencial com a Progressão Geométrica (PG), uma associação explícita na habilidade EM13MAT508 da BNCC. A resolução via sistema de equações é robusta, mas o professor pode enriquecer a aula apresentando uma solução alternativa mais elegante: a interpolação geométrica. Como o crescimento é exponencial e os intervalos de tempo são iguais (um mês), a produção de fevereiro deve ser a média geométrica entre as produções de janeiro e março. Assim,

$$P_{\text{fev}} = \sqrt{P_{\text{jan}} \cdot P_{\text{mar}}} = \sqrt{120 \cdot 480} = \sqrt{57600} = 240.$$

Apresentar essa alternativa não só oferece um atalho, mas aprofunda a compreensão da natureza da PG e do crescimento exponencial, mostrando que os termos em um gráfico exponencial, para intervalos de tempo iguais, formam uma PG.

Problema 4 (ENEM 2020 - Habilidades EM13MAT508 e EM13MAT305 - H24 e H25). Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono 14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5.730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5.730 anos haverá metade do carbono 14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para

saber a idade de um fóssil encontrado: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}$, em que t é o tempo, medido em ano, $Q(t)$ é a quantidade de carbono 14 medida no instante t e Q_0 é a quantidade de carbono 14 no ser vivo correspondente. Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono 14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono 14 nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1024	512
5	2048	128

Valores de Q_0 e $Q(t)$ dos fósseis analisados

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

Solução: O objetivo do problema é identificar o fóssil mais antigo entre os cinco encontrados. A idade de um fóssil está diretamente relacionada à proporção de carbono 14 que decaiu ao longo do tempo.

i) Análise da Fórmula

Para determinar qual fóssil é o mais antigo, precisamos manipular a fórmula de decaimento fornecida no enunciado, $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}$, para isolar a variável tempo, 't'.

Primeiramente, dividimos ambos os lados por Q_0 para obter a proporção de carbono-14 restante:

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = 2^{\frac{-t}{5730}}.$$

Utilizando a propriedade de expoentes negativos ($a^{-n} = 1/a^n$), podemos reescrever a equação:

$$\frac{Q(t)}{Q_0} = \frac{1}{2^{\frac{t}{5730}}}.$$

Invertendo ambos os lados da equação, chegamos a:

$$\frac{Q_0}{Q(t)} = 2^{\frac{t}{5730}}.$$

Para isolar 't', aplicamos a definição de logaritmo (ou aplicamos o logaritmo de base 2 em ambos os lados):

$$\frac{t}{5730} = \log_2 \left(\frac{Q_0}{Q(t)} \right).$$

$$t = 5730 \cdot \log_2 \left(\frac{Q_0}{Q(t)} \right).$$

A partir desta equação, observa-se que a idade 't' é diretamente proporcional ao valor de $\log_2 \left(\frac{Q_0}{Q(t)} \right)$. Como a função logarítmica de base maior que 1 é estritamente crescente, o fóssil mais antigo (maior valor de 't') será aquele que apresentar a **maior razão** $\frac{Q_0}{Q(t)}$.

ii) Cálculo das Razões

Vamos agora calcular a razão $\frac{Q_0}{Q(t)}$ para cada um dos cinco fósseis, utilizando os dados da tabela fornecida:

- **Fóssil 1:** $\frac{Q_0}{Q(t)} = \frac{128}{32} = 4.$
- **Fóssil 2:** $\frac{Q_0}{Q(t)} = \frac{256}{8} = 32.$
- **Fóssil 3:** $\frac{Q_0}{Q(t)} = \frac{512}{64} = 8.$
- **Fóssil 4:** $\frac{Q_0}{Q(t)} = \frac{1024}{512} = 2.$
- **Fóssil 5:** $\frac{Q_0}{Q(t)} = \frac{2048}{128} = 16.$

iii) Conclusão

Comparando os valores das razões calculadas:

$$2 < 4 < 8 < 16 < 32.$$

A maior razão encontrada foi 32, que corresponde ao Fóssil 2. Portanto, o fóssil mais antigo encontrado na expedição foi o Fóssil 2.

Alternativa correta: b). ■

Comentário Pedagógico:

O aspecto mais importante a ser trabalhado aqui é o conceito, e não o cálculo. O professor deve garantir que os alunos compreendam a relação inversa fundamental do decaimento radioativo: quanto menor a proporção de Carbono-14 restante, mais antigo é o fóssil. Esta é uma questão arquetípica do ENEM, que valoriza a análise proporcional em detrimento de cálculos extensos. A “armadilha” para o estudante seria tentar calcular a idade 't' para cada um dos cinco fósseis,

um processo demorado e desnecessário. A tarefa central é apenas comparar as frações $\frac{Q(t)}{Q_0}$. O professor pode usar este problema para reforçar estratégias de prova, como a importância de identificar o que a questão realmente pede (uma comparação) antes de iniciar um cálculo complexo. O fóssil mais antigo será aquele com a menor razão $\frac{Q(t)}{Q_0}$ ou, equivalentemente, a maior razão $\frac{Q_0}{Q(t)}$.

Problema 5 (ENEM PPL 2019 - Habilidade EM13MAT304 - H21). Em um laboratório, cientistas observaram o crescimento de uma população de bactérias submetida a uma dieta magra em fósforo, com generosas porções de arsênio. Descobriu-se que o número de bactérias dessa população, após t horas de observação, poderia ser modelado pela função exponencial

$$N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$$

em que N_0 é o número de bactérias no instante do início da observação ($t = 0$) e representa uma constante real maior que 1, e k é uma constante real positiva. Sabe-se que, após uma hora de observação, o número de bactérias foi triplicado.

Cinco horas após o início da observação, o número de bactérias, em relação ao número inicial dessa cultura, foi

- a) $3N_0$
- b) $15N_0$
- c) $243N_0$
- d) $360N_0$
- e) $729N_0$

Solução: O problema descreve o crescimento de uma população de bactérias modelado pela função exponencial $N(t) = N_0 e^{kt}$. O objetivo é determinar o número de bactérias após 5 horas em relação à quantidade inicial.

i) Determinar o fator de crescimento e^k .

A primeira informação crucial é que, após uma hora ($t = 1$), o número de bactérias triplicou.

Matematicamente, isso significa que $N(1) = 3N_0$.

Substituímos $t = 1$ na função de crescimento dada:

$$N(1) = N_0 e^{k \cdot 1} = N_0 e^k.$$

Agora, igualamos essa expressão ao valor conhecido de $N(1)$:

$$3N_0 = N_0 e^k.$$

Para encontrar o valor do fator de crescimento e^k , dividimos ambos os lados da equação por N_0 (considerando $N_0 \neq 0$):

$$e^k = 3.$$

Este resultado é fundamental para a resolução do problema.

ii) Calcular o número de bactérias após 5 horas

A pergunta final é sobre o número de bactérias após cinco horas ($t = 5$). Para isso, calculamos $N(5)$ usando a função original:

$$N(5) = N_0 e^{k \cdot 5}.$$

Utilizando a propriedade das potências $(a^b)^c = a^{bc}$, podemos reescrever a expressão da seguinte forma:

$$N(5) = N_0 (e^k)^5.$$

Agora, podemos substituir o valor de $e^k = 3$ que encontramos no passo anterior:

$$N(5) = N_0 \cdot (3)^5.$$

$$N(5) = 243N_0.$$

Portanto, cinco horas após o início da observação, o número de bactérias será 243 vezes o número inicial da cultura.

Alternativa correta: c). ■

Comentário Pedagógico:

A presença da base ‘ e ’ (número de Euler) pode intimidar os alunos, que podem associá-la a uma matemática mais avançada. O papel do professor aqui é desmistificar essa constante, tratando-a, no contexto do problema, como “uma base como qualquer outra”. A dificuldade mais comum é o aluno tentar isolar a constante ‘ k ’ utilizando o logaritmo natural, um caminho mais complexo e totalmente desnecessário para a resolução. A estratégia didática central deve ser orientar os alunos a enxergarem o termo ‘ e^k ’ como um único “bloco de crescimento”. O professor pode perguntar: “Se a população triplica em uma hora, qual é o fator que multiplica a população a cada hora?”. A resposta é 3. Assim, os alunos concluem que o bloco ‘ e^k ’ vale 3. Uma vez que esse fator é visto como uma única entidade, a resolução para ‘ $t = 5$ ’, ou seja, ‘ $(e^k)^5$ ’, torna-se uma simples potenciação (3^5), reforçando o domínio das propriedades de potências.

Problema 6 (ENEM PPL 2019 - Habilidade EM13MAT305 - H21). Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é

$$h = 5 \cdot \log_2(t + 1).$$

em que t é o tempo contado em dias e h , a altura da planta em centímetros.

A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dias, ela alcançará sua altura máxima?

- a) 63
- b) 96
- c) 128
- d) 192
- e) 255

Solução: O problema pede para calcular o tempo, em dias, que uma planta leva para crescer de 30 cm (altura de venda) até sua altura máxima de 40 cm. O crescimento da planta é modelado pela função logarítmica $h = 5 \cdot \log_2(t + 1)$, onde h é a altura em cm e t o tempo em dias.

A solução consiste em dois cálculos principais: primeiro, encontrar o tempo (t_1) em que a planta atinge 30 cm; segundo, encontrar o tempo (t_2) em que ela atinge 40 cm. A resposta será a diferença entre esses dois tempos ($t_2 - t_1$).

i) Tempo para atingir 30 cm

Substituímos $h = 30$ na fórmula para encontrar o tempo t_1 :

$$30 = 5 \cdot \log_2(t_1 + 1).$$

Dividindo por 5 ambos os membros, temos:

$$\frac{30}{5} = \log_2(t_1 + 1).$$

$$6 = \log_2(t_1 + 1).$$

Para resolver o logaritmo, usamos sua definição ($\log_b(x) = y \Leftrightarrow b^y = x$):

$$t_1 + 1 = 2^6.$$

$$t_1 + 1 = 64.$$

$$t_1 = 64 - 1 = 63.$$

Portanto, a planta é colocada à venda após 63 dias.

ii) Tempo para atingir 40 cm

Agora, substituímos $h = 40$ na fórmula para encontrar o tempo t_2 :

$$40 = 5 \cdot \log_2(t_2 + 1).$$

Dividindo por 5 ambos os membros, temos:

$$\frac{40}{5} = \log_2(t_2 + 1).$$

$$8 = \log_2(t_2 + 1).$$

Novamente, usando a definição de logaritmo:

$$t_2 + 1 = 2^8.$$

$$t_2 + 1 = 256.$$

$$t_2 = 256 - 1 = 255.$$

A planta atinge sua altura máxima em 255 dias.

iii) Cálculo do intervalo de tempo

O tempo necessário para a planta crescer de 30 cm para 40 cm é a diferença entre t_2 e t_1 :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 255 - 63 = 192.$$

A resposta é 192 dias.

Alternativa correta: d). ■

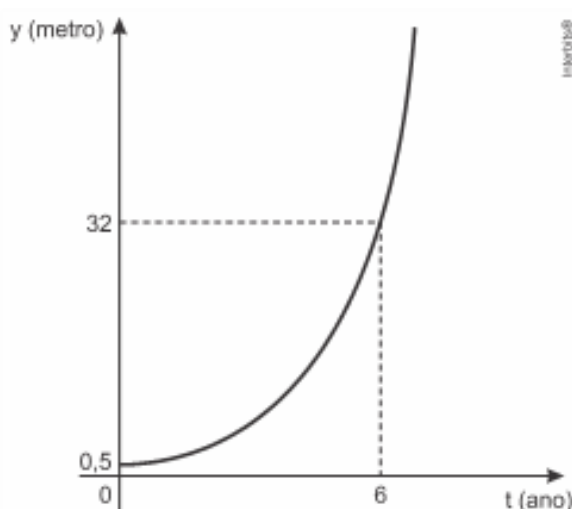
Comentário Pedagógico:

Este problema de função logarítmica é, em sua essência, uma aplicação direta da definição de logaritmo. A principal fonte de erro dos alunos é a interpretação do enunciado: a pergunta não é o tempo para atingir 40 cm, mas o tempo para ir *de 30 cm até 40 cm*. O professor deve enfatizar a necessidade de calcular os dois tempos: ' t_1 ' para 30 cm e ' t_2 ' para 40 cm e depois encontrar a diferença entre eles. Sugere-se que o professor divida a lousa em duas colunas, uma para cada cálculo, para modelar visualmente a estrutura do raciocínio necessário para a solução do problema.

Problema 7 (ENEM 2º APLICAÇÃO 2016 - Habilidade EM13MAT304 - H20 e H21). Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função

$$y(t) = a^{t-1}$$

na qual y representa a altura da planta em metros, t é considerado em anos, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y .



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio. O tempo entre a plantação e o corte, em anos, é igual a:

- a) 3
- b) 4
- c) 6
- d) $\log_2 7$
- e) $\log_2 15$

Solução: O problema pede para determinar o tempo, em anos, entre o plantio de uma muda de eucalipto e o momento do seu corte. O crescimento da planta é modelado pela função exponencial $y(t) = a^{t-1}$, em que y é a altura em metros e t o tempo em anos.

i) Determinar o valor da base a

O primeiro passo é encontrar o valor da constante a . O problema informa que $y(0)$ representa a altura da muda no momento do plantio. Pelo gráfico, vemos que em $t = 0$, a altura é $y(0) = 0,5$ metros. Substituímos esses valores na função:

$$y(0) = a^{0-1} = 0,5.$$

$$a^{-1} = 0,5.$$

Lembrando que $a^{-1} = \frac{1}{a}$ e $0,5 = \frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \implies a = 2.$$

Com isso, a função de crescimento completa é $y(t) = 2^{t-1}$.

ii) Determinar a altura do corte

Deseja-se cortar os eucaliptos quando eles tiverem crescido 7,5 metros após o plantio. A altura inicial da muda era de 0,5 metros. Portanto, a altura final no momento do corte será:

$$\text{Altura do corte} = \text{Altura inicial} + \text{Crescimento desejado}$$

$$\text{Altura do corte} = 0,5 + 7,5 = 8,0 \text{ metros.}$$

iii) Calcular o tempo para o corte

Agora, precisamos encontrar o tempo t em que a altura da planta $y(t)$ será igual a 8 metros. Usamos a função de crescimento com $a = 2$:

$$y(t) = 8$$

$$2^{t-1} = 8.$$

Para resolver a equação, expressamos o número 8 como uma potência de base 2:

$$2^{t-1} = 2^3.$$

Como as bases são iguais, podemos igualar os expoentes:

$$t - 1 = 3$$

$$t = 3 + 1 = 4.$$

iv) Conclusão

O tempo entre a plantação e o corte é de **4 anos**.

Alternativa correta: b). ■

Comentário Pedagógico:

A interpretação do gráfico e do texto é fundamental neste problema. Duas informações cruciais, uma de cada fonte, precisam ser combinadas: a altura inicial (dada pelo gráfico em ' $t = 0$ ') e o crescimento desejado (descrito no texto). Um erro normal seria o aluno calcular o tempo para a planta atingir 7,5 metros, esquecendo-se de que a altura final de corte deve ser a altura inicial de 0,5 m somada ao crescimento 7,5 m, totalizando 8 m. O professor pode usar este problema para discutir como diferentes partes de uma questão do ENEM como gráfico, texto principal e comando fornecem peças de um quebra-cabeça que devem ser cuidadosamente montadas antes de se iniciar qualquer solução.

Problema 8 (ENEM PPL 2015 - Habilidade EM13MAT304 - H21). O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R\$ 1.800,00 propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é

$$s(t) = 1800 \cdot (1,03)^t$$

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais:

- a) R\$ 7.416,00
- b) R\$ 3.819,24
- c) R\$ 3.709,62
- d) R\$ 3.708,00
- e) R\$ 1.909,62

Solução: O problema pede para calcular o salário de um profissional com 2 anos de serviço, de acordo com a proposta de um sindicato. A expressão que modela o salário (s), em função do tempo de serviço (t) em anos, é dada por:

$$s(t) = 1.800 \cdot (1,03)^t.$$

Onde o valor de 1.800 representa o piso salarial em reais e o fator 1,03 representa um aumento anual de 3%.

i) Identificar o valor de t

A questão especifica que o profissional possui 2 anos de tempo de serviço. Portanto, o valor a ser utilizado na função é:

$$t = 2.$$

ii) Calcular o salário para $t = 2$

Substituímos $t = 2$ na função salarial para encontrar o valor correspondente:

$$s(2) = 1.800 \cdot (1,03)^2.$$

Primeiro, calculamos o termo exponencial:

$$(1,03)^2 = 1,03 \times 1,03 = 1,0609.$$

Em seguida, multiplicamos esse fator pelo salário base:

$$s(2) = 1.800 \cdot 1,0609$$

$$s(2) = 1909,62.$$

iii) Conclusão

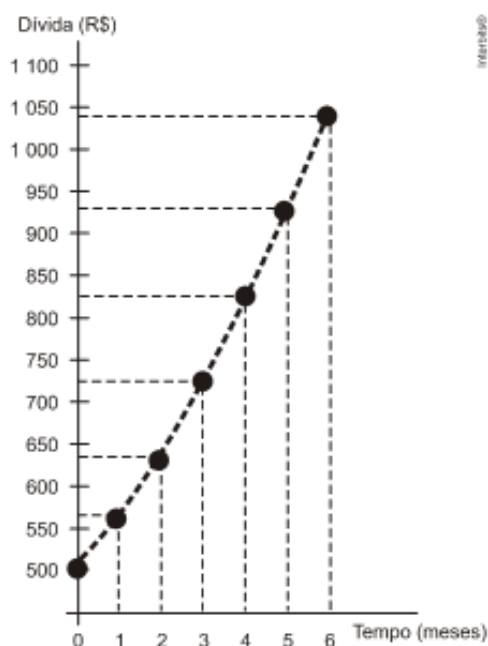
O salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será de **R\$ 1.909,62**.

Alternativa correta: e). ■

Comentário Pedagógico:

Esta é uma aplicação direta de função exponencial em um contexto de matemática financeira. Como a expressão $s(t) = 1800 \cdot (1,03)^t$ é fornecida no enunciado, a questão se torna um teste direto da habilidade de substituição de variáveis. O elemento pedagógico mais valioso aqui é o fator (1,03). Ele serve como um ponto de partida ideal para o professor revisar o conceito de aumento percentual, e expandir para desconto percentual questionando os alunos: “Por que um aumento de 3% corresponde a multiplicar por 1,03?”. Essa discussão reforça a ideia de que o novo valor é 100% do anterior mais o acréscimo de 3%, totalizando 103% (ou 1,03). Dada a sua simplicidade, esta questão funciona perfeitamente como um problema introdutório ao tópico de juros compostos e a conexão clara entre exponencial e juros compostos.

Problema 9 (ENEM PPL 2013 - Habilidade EM13MAT303 - H20,H21). Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são:

- a) R\$ 500,00; constante e inferior a 10% ao mês.
- b) R\$ 560,00; variável e inferior a 10% ao mês.
- c) R\$ 500,00; variável e superior a 10% ao mês.
- d) R\$ 560,00; constante e superior a 10% ao mês.
- e) R\$ 500,00; variável e inferior a 10% ao mês.

Solução: A questão pede para analisarmos as características de uma dívida de cartão de crédito (saldo inicial, parcela de juros e taxa de juros) com base em seu gráfico de evolução ao longo de 6 meses.

i) Saldo Devedor Inicial

O saldo devedor inicial corresponde ao valor da dívida no tempo $t = 0$. Observando o gráfico, o ponto que cruza o eixo vertical (Dívida (R\$)) está em 500.

- **Saldo inicial:** R\$ 500,00.

ii) Parcela Mensal de Juros

O gráfico é uma curva com inclinação crescente, e não uma linha reta. Em uma linha reta, os acréscimos mensais seriam constantes (juros simples). A forma da curva indica que os juros são calculados sobre o montante acumulado (dívida + juros do mês anterior), o que é característico de juros compostos. Neste regime, o valor absoluto dos juros pagos a cada mês aumenta.

- **Parcela mensal de juros:** Variável.

iii) Análise da Taxa de Juros

Para avaliar se a taxa de juros é superior ou inferior a 10% ao mês, podemos simular o crescimento da dívida com uma taxa fixa de 10% a.m. e comparar com o valor do gráfico. Usamos a fórmula de juros compostos: $M = C(1 + i)^t$.

- **Capital inicial (C):** R\$ 500,00.
- **Taxa de teste (i):** 10% ou 0,10.
- **Tempo (t):** 6 meses.

O montante final (M) seria:

$$M = 500 \cdot (1 + 0,10)^6 = 500 \cdot (1,1)^6.$$

Calculando a potência, temos $(1,1)^6 \approx 1,771561$. Logo,

$$M \approx 500 \cdot 1,771561 \approx 885,78.$$

O saldo devedor com uma taxa de 10% ao mês seria de aproximadamente R\$ 885,78. O gráfico, no entanto, mostra que o saldo real após 6 meses foi de R\$ 1.050,00. Como o valor real da dívida (R\$ 1.050,00) é maior que o valor que seria obtido com uma taxa de 10% (R\$ 885,78), podemos concluir que a taxa de juros efetiva é superior a 10% ao mês.

- **Taxa de juros:** Superior a 10% ao mês.

iv) Conclusão

Reunindo as informações:

- **Saldo devedor inicial:** R\$ 500,00.
- **Parcela mensal de juros:** Variável.
- **Taxa de juros:** Superior a 10% ao mês.

Alternativa correta: c).



Comentário Pedagógico:

Uma questão rica em análise gráfica, conceitual e até de educação financeira, que vai além da simples aplicação de fórmulas. A principal distinção pedagógica a ser explorada é a diferença visual entre juros simples (cujo gráfico seria uma reta) e juros compostos (representado pela curva exponencial). O professor deve incitar os alunos a observarem a “velocidade” com que a dívida cresce, notando que os acréscimos mensais não são constantes, o que valida a ideia de uma parcela de juros variável. A análise sobre a taxa ser superior ou inferior a 10% introduz uma importante estratégia de resolução: o *teste de hipótese*. O aluno não precisa encontrar a taxa exata; ele deve apenas usar o valor de referência de 10% para criar um cenário e compará-lo com a realidade do gráfico. Essa habilidade de estimar e comparar é frequentemente mais valorizada no ENEM do que o cálculo exato, que neste caso exigiria logaritmos.

Problema 10 (ENEM 2013 - Habilidade EM13MAT303 - H19). Em um experimento, uma cultura de bactérias tem sua população reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida.

Neste experimento, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo:

- a) afim.
- b) seno.
- c) cosseno.
- d) logarítmica crescente.
- e) exponencial.

Solução: *A questão descreve um processo onde a população de uma cultura de bactérias é reduzida pela metade a cada hora, devido à ação de um agente bactericida. Precisamos identificar o tipo de função matemática que melhor modela esse fenômeno.*

i) Análise do Processo

Vamos analisar o comportamento da população em intervalos de tempo:

- Seja N_0 a população inicial de bactérias (no tempo $t = 0$).
- Após 1 hora ($t = 1$), a população será metade da inicial: $N(1) = N_0 \cdot \frac{1}{2}$.
- Após 2 horas ($t = 2$), a população será metade da população no instante anterior:
$$N(2) = N(1) \cdot \frac{1}{2} = \left(N_0 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
- Após 3 horas ($t = 3$), o processo se repete: $N(3) = N(2) \cdot \frac{1}{2} = \left(N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{2} = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

ii) Generalização do Modelo

Observando o padrão, podemos generalizar a função que descreve a população $N(t)$ em qualquer instante de tempo t (em horas):

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Esta função também pode ser escrita na forma $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t}$.

iii) Classificação da Função

Uma função do tipo $f(x) = c \cdot a^x$, onde a variável x aparece no expoente e a e c são constantes (com $a > 0$ e $a \neq 1$), é, por definição, uma **função exponencial**.

Neste caso, temos a variável t no expoente e as constantes N_0 e $\frac{1}{2}$. Como a base $\frac{1}{2}$ está entre 0 e 1, a função descreve um decaimento exponencial, mas ainda pertence à família das funções exponenciais. As demais opções não se aplicam:

- **Função afim** ($f(x) = ax + b$): Descreve um decréscimo constante, não proporcional à quantidade existente.
- **Seno e Cosseno**: São funções periódicas, que oscilam, o que não descreve uma redução contínua.
- **Logarítmica crescente**: Descreveria um aumento, não uma redução.

iv) Conclusão

Portanto, o número de bactérias em função do tempo pode ser modelado por uma função do tipo **exponencial**.

Alternativa correta: e). ■

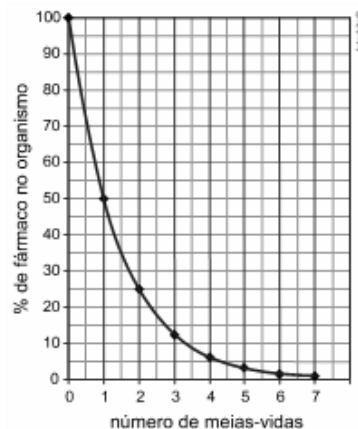
Comentário Pedagógico:

Este problema é conceitual e serve para avaliar a compreensão do aluno sobre a natureza dos diferentes tipos de funções. A chave para a resolução está na distinção entre uma variação constante (modelo afim) e uma variação proporcional (modelo exponencial). É uma excelente oportunidade para o professor revisar os diferentes tipos de modelos de funções:

- **Função Afim**: Descreveria um decréscimo constante, não proporcional à quantidade existente.
- **Função Exponencial**: Descreve um decréscimo (ou acréscimo) proporcional à quantidade atual.
- **Funções Periódicas (Seno/Cosseno)**: São inadequadas, pois descrevem fenômenos que oscilam periodicamente, e não uma redução contínua.

O professor pode usar este item para solidificar a ideia de que qualquer processo em que uma quantidade é multiplicada por um fator constante em intervalos de tempo fixos é, por definição, modelado por uma função do tipo exponencial.

Problema 11 (ENEM 2007 - Habilidade EM13MAT508 - H20 e H25). A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13h30min será aproximadamente de:

- a) 10%
- b) 15%
- c) 25%
- d) 35%
- e) 50%

Solução: A questão pede para encontrarmos o percentual aproximado de uma dose do antibiótico amoxicilina que permanece no organismo de um paciente em um determinado horário. Para isso, devemos usar o gráfico fornecido, que relaciona o percentual de um fármaco com o número de meias-vidas decorridas.

i) Calcular o Número de Meias-Vidas

O primeiro passo é determinar quantas meias-vidas se passaram entre o momento da injeção e o momento da verificação.

- **Horário da injeção da dose:** 12h 00min.

- **Horário da verificação:** 13h 30min.
- **Tempo total decorrido:** de 12h 00min até 13h 30min, temos 1 hora e 30 minutos, o que equivale a **1,5 horas**.
- **Meia-vida da amoxicilina:** Conforme o enunciado, é de 1 hora.

Para encontrar o número de meias-vidas, dividimos o tempo total decorrido pelo tempo de uma meia-vida:

$$\text{Número de meias-vidas} = \frac{\text{Tempo decorrido}}{\text{Duração da meia-vida}} = \frac{1,5 \text{ horas}}{1 \text{ hora}} = 1,5.$$

Portanto, no horário de 13h 30min, terão se passado **1,5 meias-vidas**.

ii) Interpretação do Gráfico

Agora, usamos o gráfico para encontrar o percentual do fármaco correspondente a 1,5 meias-vidas.

- Localizamos o valor **1,5** no eixo horizontal ("número de meias-vidas"). Este valor está posicionado exatamente entre os marcadores 1 e 2.
- A partir desse ponto (1,5), traçamos uma linha vertical até encontrar a curva de decaimento.
- Do ponto de interseção na curva, traçamos uma linha horizontal para a esquerda, em direção ao eixo vertical ("% de fármaco no organismo").
- O valor que essa linha atinge no eixo vertical é a resposta. Observando o gráfico, esse valor está entre 30% e 40%. Uma leitura visual cuidadosa indica um valor aproximado de 35%.

iii) Conclusão

De acordo com o gráfico, após 1,5 meias-vidas, o percentual da dose que restará no organismo do paciente será de aproximadamente **35%**.

Alternativa correta: d). ■

Comentário Pedagógico:

Esta é uma questão de leitura e interpretação de um gráfico não linear. O único cálculo prévio foi determinar o número de meias-vidas, um passo crucial para conectar a informação temporal do enunciado com o eixo das abscissas do gráfico. A maior dificuldade para os alunos pode ser a necessidade de interpolação visual, ou seja, a habilidade de estimar a posição do valor 1,5 entre os marcadores 1 e 2 no eixo horizontal. O professor deve treinar essa competência de "ler entre as linhas" de um gráfico, mostrando como projetar o ponto no eixo x para a curva e, em seguida, para o eixo y, ou seja, conceitos básicos de geometria analítica, avaliando a posição do resultado entre os valores conhecidos, neste caso, entre 25% e 50%. Adicionalmente, esta

questão serve como uma excelente ponte para conectar a representação gráfica à sua função algébrica correspondente, $P(n) = 100 \cdot (0,5)^n$, onde n é o número de meias-vidas. O cálculo de $P(1,5)$ pode ser usado para validar a leitura do gráfico, aprofundando a compreensão do aluno sobre o decaimento exponencial.

A partir deste ponto, esta pesquisa passa a apresentar questões em nível local, especificamente do vestibular da Universidade Estadual do Ceará (UECE), com o propósito de evidenciar ao leitor as diferenças existentes entre o nível de complexidade das questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e de um vestibular tradicional que aborda os mesmos conteúdos de maneira distinta.

Embora haja uma correlação entre os vestibulares tradicionais, o ENEM, a BNCC e a Matriz de Referência do ENEM na medida em que contemplam, em grande parte, os mesmos tópicos, a forma de cobrança difere consideravelmente. De modo geral, os vestibulares tradicionais apresentam um nível de exigência mais elevado, demandando dos candidatos maior domínio de uma linguagem matemática abstrata e de procedimentos algébricos mais refinados para a resolução dos problemas.

Problema 12 (UECE 2024 - Habilidade EM13MAT508 - H19 e H21). Sejam $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ e $f : N^* \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = p \cdot q^x$, onde p e q são números reais. Se a imagem de f é a progressão geométrica $a_n = f(n)$ com $a_1 = 1$ e razão igual a -2 , então, a soma $p + q$ é igual a

- a) $-3/2$.
- b) $-7/2$.
- c) $-5/2$.
- d) $-9/2$.

Solução: O problema afirma que a imagem da função $f(n) = p \cdot q^n$ é uma progressão geométrica (PG) com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $r = -2$.

i) Expressão do Termo Geral da PG

A fórmula para o termo geral de uma progressão geométrica é $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. Com os dados fornecidos, temos:

$$a_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}.$$

ii) Relação entre a Função e a PG

A condição de que a imagem de f é a PG significa que $f(n) = a_n$. Portanto, podemos igualar as duas expressões:

$$p \cdot q^n = (-2)^{n-1}.$$

Para encontrar os valores de p e q , precisamos reescrever o lado direito da equação para que ele tenha a mesma forma do lado esquerdo, ou seja, uma constante multiplicada por uma potência

de expoente n . Utilizando as propriedades de potências:

$$(-2)^{n-1} = (-2)^n \cdot (-2)^{-1} = (-2)^n \cdot \left(\frac{1}{-2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)^n.$$

Agora, a equação fica na forma:

$$p \cdot q^n = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)^n.$$

iii) Identificação de p , q e Cálculo da Soma

Comparando os dois lados da equação, identificamos diretamente os valores de p e q :

- $p = -\frac{1}{2}$.
- $q = -2$.

A questão pede o valor da soma $p + q$:

$$p + q = \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{5}{2}.$$

O valor da soma é $-5/2$.

Alternativa correta: c).

■

Comentário Pedagógico:

Esta questão mostra perfeitamente o perfil mais abstrato e algébrico de vestibulares tradicionais como o da UECE, em contraste com a abordagem contextualizada do ENEM. O desafio aqui é puramente a manipulação de expoentes para fazer com que a expressão da Progressão Geométrica, ' $a_n = (-2)^{n-1}$ ', se ajuste ao formato da função exponencial dada, ' $f(n) = p \cdot q^n$ '. O passo crítico, e que pode confundir os alunos, é a decomposição ' $(-2)^{n-1} = (-2)^n \cdot (-2)^{-1}$ '. O professor deve enfatizar que o objetivo é forçar uma equivalência estrutural entre as duas expressões para, então, identificar os coeficientes por comparação direta. Esta é uma excelente questão para treinar as propriedades de potenciação de forma rigorosa e abstrata, desenvolvendo uma fluência algébrica que é crucial para exames com esse perfil.

Problema 13 (UECE 2024 - Habilidade EM13MAT305 - H19 e H21). Um investidor aplicou, no sistema de juros compostos, certa quantia em uma instituição financeira que remunera as aplicações à taxa de 1% mensal. Assim, é correto afirmar que o número de meses, a partir da aplicação, em que o capital inicial será dobrado é igual a

Use os valores aproximados: $\log(1,01) = 0,0043$ e $\log(2) = 0,30103$.

- 74.
- 68.

c) 72.

d) 70.

Solução: Para resolver um problema de juros compostos, utilizamos a fórmula do montante:

$$M = C(1 + i)^t.$$

Onde:

- M é o montante final;
- C é o capital inicial;
- i é a taxa de juros por período;
- t é o número de períodos (meses, neste caso).

A taxa de juros mensal fornecida é de $i = 1\% = 0,01$. O objetivo é encontrar o tempo t em que o capital inicial será dobrado, o que nos dá a condição $M = 2C$.

i) Montagem da Equação

Substituindo a condição $M = 2C$ e a taxa $i = 0,01$ na fórmula, temos:

$$2C = C(1 + 0,01)^t.$$

Simplificamos a equação dividindo ambos os lados pelo capital inicial C :

$$2 = (1,01)^t.$$

ii) Solução com Logaritmos

Como a incógnita t está no expoente, a ferramenta adequada para resolver a equação é o logaritmo. Aplicamos o logaritmo decimal (base 10) em ambos os lados:

$$\log(2) = \log(1,01^t).$$

Utilizando a propriedade do logaritmo de uma potência, que nos permite “descer” o expoente, temos:

$$\log(2) = t \cdot \log(1,01).$$

Agora, substituímos os valores aproximados que foram fornecidos no enunciado:

$$0,30103 = t \cdot 0,0043.$$

Finalmente, isolamos t :

$$t = \frac{0,30103}{0,0043}$$

$$t \approx 70,0069\dots$$

O número de meses necessários é, portanto, aproximadamente 70.

Alternativa correta: d). ■

Comentário Pedagógico:

Embora o tema de juros compostos seja recorrente no ENEM, esta questão da UECE se diferencia pela exigência explícita do cálculo com logaritmos, uma habilidade que o ENEM geralmente busca contornar. A questão é um exemplo canônico para o professor ilustrar o propósito fundamental dos logaritmos: resolver equações exponenciais onde não é possível igualar as bases. O enunciado, ao fornecer os valores aproximados de ‘log(1,01)’ e ‘log(2)’, funciona como um sinal claro para o aluno sobre o método que deverá ser utilizado. O professor deve treinar os estudantes a reconhecerem essas “dicas” como parte do roteiro de resolução. A questão serve, portanto, como uma avaliação direta da capacidade do aluno em aplicar a propriedade do logaritmo da potência para isolar uma variável no expoente, uma competência de fluidez algébrica.

Problema 14 (UECE 2022 - Habilidade EM13MAT305 - H19 e H21). O rádio é uma substância radioativa que se desintegra espontaneamente ao longo do tempo. Sua desintegração pode ser descrita matematicamente pela expressão $Q(t) = K \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-0.001t}$ onde K é a quantidade inicial de rádio e $Q(t)$ é a quantidade ainda presente após t anos. Observa-se que, após transcorridos 1000 anos, ocorre uma redução percentual, relativa à quantidade inicial, de aproximadamente 33,33%. Quando decorridos 2000 anos, a redução percentual (relativa à quantidade inicial) aproximada será de

- a) 55,55%.
- b) 88,88%.
- c) 66,66%.
- d) 77,77%.

Solução: *O problema pede para calcular a redução percentual da quantidade de rádio após um período de 2000 anos.*

i) Cálculo da Quantidade Remanescente após 2000 anos

A função que descreve a quantidade de rádio (Q) em função do tempo (t) é:

$$Q(t) = K \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-0.001t}.$$

Vamos calcular a quantidade que resta para $t = 2000$ anos:

$$Q(2000) = K \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-0.001 \cdot 2000}.$$

Primeiro, simplificamos o expoente:

$$-0.001 \times 2000 = -2.$$

A expressão para $Q(2000)$ se torna:

$$Q(2000) = K \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}.$$

Usando a propriedade do expoente negativo, que inverte a base ($(a/b)^{-n} = (b/a)^n$):

$$Q(2000) = K \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = K \cdot \frac{4}{9}.$$

Isso nos diz que, após 2000 anos, $\frac{4}{9}$ da quantidade inicial K ainda está presente.

ii) Cálculo da Redução Percentual

A quantidade que se desintegrou (a redução) é a diferença entre a quantidade inicial (K) e a quantidade remanescente ($Q(2000)$):

$$\text{Redução} = K - Q(2000) = K - \frac{4}{9}K = \frac{9K - 4K}{9} = \frac{5}{9}K.$$

A redução percentual é a razão entre a quantidade reduzida e a quantidade inicial, multiplicada por 100%:

$$\text{Redução Percentual} = \frac{\text{Redução}}{K} \times 100\% = \frac{\frac{5}{9}K}{K} \times 100\% = \frac{5}{9} \times 100\%.$$

Calculando o valor:

$$\frac{5}{9} \approx 0,5555\dots$$

$$\text{Redução Percentual} \approx 55,55\%.$$

(Nota: a informação sobre a redução em 1000 anos serve para validar a fórmula, mas não é estritamente necessária para resolver o problema.)

iii) Conclusão

A redução percentual da substância após 2000 anos será de aproximadamente 55,55%.

Alternativa correta: a). ■

Comentário Pedagógico:

O ponto crucial desta questão, e uma armadilha comum em problemas de variação percentual, é a diferença conceitual entre a **quantidade remanescente** e a **redução percentual**. Após calcular corretamente que a quantidade restante, $Q(2000)$, é igual a $\frac{4}{9}K$, muitos alunos podem, por impulso, converter a fração $\frac{4}{9}$ para porcentagem (aproximadamente 44,44%) e procurar uma alternativa correspondente. O professor deve destacar a leitura atenta do comando **“redução percentual”**. Uma boa prática de sala de aula é sempre esquematizar o problema da seguinte forma:

- Quantidade Total = 1 (ou 100%).
- Quantidade Restante = $\frac{4}{9}$.

- Redução = Total - Restante = $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

Forçar esse passo intermediário de calcular a fração *reduzida* antes de converter para porcentagem é uma estratégia eficaz para ajudar os alunos a evitarem esse erro comum de interpretação.

Observa-se que, embora haja um alinhamento temático nos conteúdos cobrados, a estrutura das questões nos vestibulares tradicionais apresentam características distintas em relação às do ENEM. Nessas provas, os enunciados tendem a ser mais concisos, frequentemente sem o apoio de figuras ou de contextualizações extensas, o que resulta em problemas formulados em poucas linhas. Em contrapartida, a resolução dessas questões exige maior aprofundamento, demandando, em muitos casos, procedimentos algébricos e dedutivos que resultam em desenvolvimentos significativamente mais longos do que aqueles observados em itens do ENEM.

Tal diferença se relaciona ao caráter da avaliação. Enquanto o ENEM, conforme previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), prioriza situações-problema contextualizadas que promovem a aplicação do conhecimento matemático em diferentes áreas do cotidiano, os vestibulares tradicionais tendem a enfatizar o domínio formal e abstrato da linguagem matemática, com maior foco em técnicas e manipulações algébricas complexas.

6 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO PARA GERAÇÃO DE QUESTÕES COM INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

Este último capítulo é dedicado ao estudo da Inteligência Artificial Generativa (IAG). A sua estrutura foi desenhada em duas partes complementares.

Inicialmente, é apresentada uma fundamentação teórica sobre o que é a Inteligência Artificial (IA). Esta seção aborda definições e conceitos essenciais que, embora cruciais, são frequentemente desconhecidos ou negligenciados. Tal alicerce é indispensável, considerando o poder inegável e a ampla disseminação que as IAs possuem no cenário contemporâneo.

Em seguida, o capítulo foca-se em uma faceta específica da IAG: a geração de problemas. O objetivo é analisar o potencial desta ferramenta como um recurso para auxiliar docentes na elaboração de provas, avaliações, testes ou similares. Além disso, propõe-se uma metodologia de ensino focada em como utilizar as IAs de forma produtiva e ética a favor da educação.

6.1 IA NA EDUCAÇÃO

O que é a IA?

De acordo com o site (Iberdrola, 2026) o termo “Inteligência Artificial” é bem mais antigo do que se imagina. Desde 1943 já existem dados e pesquisas científicas sobre essa ideia. O primeiro modelo de neurônios artificiais veio com Warren Mcculloch e Walter Pitts, mas não com o nome “Inteligência Artificial”. Depois em 1950, o famoso Matemático, que já foi até inspiração para filme de grande sucesso (O jogo da Imitação), Alan Turing publicou um artigo chamado “Computing machinery and intelligence” (Maquinaria Computacional e Inteligência) que indagava se as máquinas poderiam pensar.

Porém, apenas em 1956, o termo “Inteligência Artificial” foi cunhado por John McCarthy, que a definiu como “a ciência e engenharia de fazer máquinas inteligentes”. Embora simples, esta definição captura a essência de um campo multifacetado. De forma mais ampla, a Inteligência Artificial pode ser entendida como a área da ciência da computação dedicada à criação de agentes que são capazes de perceber seu ambiente, raciocinar, aprender com dados e experiências, e tomar decisões para realizar tarefas que normalmente exigiriam inteligência humana.

Quais os tipos de IA que existem?

Esta é a classificação mais conhecida e divide a IA em duas categorias teóricas segundo o site (Docusign, 2025):

IA Fraca (Weak AI) ou IA Estreita (Narrow AI): Refere-se aos sistemas de IA que são projetados e treinados para realizar uma tarefa específica. Eles operam dentro de um conjunto limitado de restrições e não possuem consciência ou inteligência geral.

Todas as Inteligências Artificiais que existem até o dado momento em que se escreve este

texto se enquadram nesta categoria. Exemplos incluem assistentes virtuais como Siri e Alexa, sistemas de recomendação da Netflix, softwares de reconhecimento facial, a IA generativa, a qual usaremos mais a seguir, que é a mais avançada desta categoria, filtros de assistente virtual (as conhecidas mensagens automáticas das redes sociais), dentre outras.

IA Forte (Strong AI) ou Inteligência Artificial Geral (AGI - Artificial General Intelligence): Descreve uma forma teórica de IA que possuiria uma inteligência comparável à humana. Um sistema de AGI seria autoconsciente e capaz de compreender, aprender e aplicar seu conhecimento para resolver qualquer problema, em vez de se limitar a tarefas específicas. A AGI permanece no campo da ficção científica e da pesquisa teórica, sem previsão de sua concretização.

Poderíamos citar ainda a IA super inteligente, que superaria em muito a inteligência humana em todos os aspectos, no entanto não foi alcançado nem a IA forte neste momento.

Uso Ético da IA na Educação

A integração da Inteligência Artificial (IA) no cenário educacional promete revolucionar as práticas pedagógicas, personalizar o aprendizado e otimizar a gestão escolar. Contudo, essa adição não é isenta de desafios, que exigirão uma reflexão ética aprofundada por parte de educadores, gestores e alunos.

Muitos docentes imaginam que as IAs trarão um único problema na educação, que é a questão da falta de autenticidade dos alunos devido ao uso exacerbado de inteligência artificial, ou seja, que muitos alunos não usarão essa ferramenta da maneira correta, que eles irão buscar as respostas através das IAs antes de tentar resolver os problemas por conta própria, e isso de fato é um problema muito grave.

Nesta pesquisa acadêmica o uso da IA é para ser uma ferramenta adicional ao docente e também ao discente interessado no assunto, portanto é necessário saber validar as informações fornecidas pelas IAs.

Contudo este problema citado é apenas um dentre outros que o uso não ético da IA poderá acarretar. Outro tipo de problema é a respeito do uso de dados dos estudantes e dos docentes, a equidade no acesso, pois existem plataformas pagas que são bem superiores às grátis, o que pode acarretar em outro problema que já existe no Brasil, que é a distância entre o público e o privado. Outro problema diz respeito à responsabilidade no processo de ensino-aprendizagem, pois imagine que uma plataforma X se equivoque num ensinamento matemático a um aluno, e o aluno não tenha o conhecimento necessário para validar o erro da IA, quem assumiria essa culpa?

Assim, existem alguns problemas éticos no uso da IA, e neste trabalho acadêmico, será comentado acerca de apenas um que é a necessidade de validação das informações fornecidas pelas IAs. O docente e o discente precisarão saber validar o que for dado pela Inteligência Artificial. Os outros problemas não serão foco desta pesquisa, pois cada um deles podem ser desenvolvidos em uma dissertação distinta de tão abrangente que é o tema.

Quais os principais tipos de IA sob o viés da Educação?

Hoje existe uma infinidade de tipos de Inteligências Artificiais voltadas para a educação. Para docentes e discentes não podemos deixar de citar o mais conhecido ChatGPT, que é uma IA generativa para a criação de conteúdo, apoio nos estudos, planejamento de aulas, resolução de problemas, estruturação de textos, entre diversas outras características. Outras que seguem o mesmo padrão é a Gemini, do Google, a DeepSeek que é a IA chinesa que surpreendeu o mundo com um baixo custo de produção, a Grok, a Claude entre outros exemplos.

Exclusivamente para professores temos a Teachy e a MagicSchool.ai, que são ferramentas prontas para criar planos de aula alinhados a currículos, gerar rubricas de avaliação, redigir comunicados para os pais e criar atividades personalizadas, economizando um tempo significativo no preparo administrativo das aulas.

Há também plataformas mais focadas nos alunos como o Khan Academy com o “Khanamigo”, o aplicativo para celular que pode ser interpretado também como IA, o Duolingo, o MathGPTPro que é focado em Matemática, dentre outros.

A rápida evolução dessas ferramentas indica uma tendência crescente de integração da IA no ambiente educacional, não como um substituto para o professor, mas como uma poderosa ferramenta para a personalização do ensino e a otimização de tarefas pedagógicas e administrativas.

Diante dos desafios éticos expostos, em especial a necessidade de validação da informação e a manutenção da autonomia docente, torna-se imperativo estabelecer um paradigma claro para a integração da IA na educação. A visão adotada nesta dissertação rejeita a noção simplista da tecnologia como substituta do professor. Pelo contrário, o objetivo é posicionar a Inteligência Artificial como uma ferramenta de potencialização, um recurso capaz de maximizar a eficiência e a criatividade do trabalho docente, sem jamais suplantarem seu papel central.

Nessa perspectiva, a IA não é a fonte final do saber, mas um gerador de insumos que demandam a curadoria, o julgamento pedagógico e a intencionalidade que apenas o educador humano possui. A verdadeira inovação não reside em delegar tarefas, mas em otimizá-las, liberando o professor de processos repetitivos para que possa se concentrar em atividades de maior valor agregado, como a análise de aprendizagem, o feedback personalizado e a criação de experiências didáticas mais ricas.

A metodologia a seguir foi desenvolvida, portanto, com esse propósito fundamental: demonstrar um procedimento prático e ético que capacita o educador a utilizar a IA Generativa como uma aliada estratégica, mantendo o controle do processo e reafirmando que a tecnologia serve à educação, e não o contrário.

6.2 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO PARA A GERAÇÃO DE PROBLEMAS INÉDITOS ATRAVÉS DO USO ÉTICO DA IA

A aplicação da Inteligência Artificial (IA) na educação representa uma fronteira promissora para a otimização de práticas pedagógicas. Este estudo propõe e detalha um método para utilizar a IA Generativa como uma ferramenta de apoio ao docente na elaboração de instrumentos avaliativos. O objetivo é demonstrar como, a partir de um único problema-base, é possível gerar um conjunto diversificado de questões que mantêm a mesma estrutura matemática, mas variam em contexto e complexidade cognitiva.

Este procedimento, pautado pelo uso ético da tecnologia, visa capacitar o educador, fornecendo-lhe meios para enriquecer seu banco de questões de forma rápida e criativa, e não substituí-lo.

Fases do Procedimento:

A metodologia consiste em duas fases principais. A primeira é a preparação do material de origem e a segunda é a formulação de um comando (prompt) eficaz.

1. Digitalização da Fonte: A questão-base é convertida para um formato digital acessível à IA, preferencialmente um documento em PDF, garantindo que todo o seu conteúdo (enunciado, alternativas e imagem, se houver) seja processado. Vale salientar que em formato de imagem também é feita a leitura, ou seja, o interessado neste assunto pode simplesmente bater um print da sua tela do celular ou notebook da questão desejada e fazer o envio para a IAG que a mesma consegue fazer a leitura.

2. Elaboração e Execução do Comando: Um comando claro e estruturado é fornecido à IA. Para o presente exemplo, o comando utilizado foi:

“Com base na Questão 1 deste arquivo, crie um problema derivado. Varie o contexto (a história do problema) e o que está sendo perguntado.”

Observe que foi usado “com base na questão 1”, porém esse é um comando genérico, feito para exemplificar uma situação em que foi enviado um arquivo para a IAG analisar e neste arquivo há uma questão numerada com o número 1.

Análise Estrutural do Comando (Prompt Engineering)

A eficácia do comando não é acidental, mas fruto de uma construção lógica que direciona o modelo de linguagem para o resultado esperado. A análise de seus componentes revela o porquê de seu sucesso:

- Delimitação do Objeto (“Com base na Questão 1...”): A instrução ancora a tarefa em um objeto específico, evitando ambiguidades e garantindo que a IA foque sua análise no problema correto.

- Definição da Tarefa (“...crie um problema derivado.”): A palavra-chave “derivado” instrui o modelo a realizar uma tarefa de transformação, e não de criação livre. Ela estabelece a restrição fundamental: a essência matemática (o crescimento de 50%, o valor inicial de 500) deve ser preservada como alicerce para as novas questões. Porém, vale salientar que pode-se trocar também a parte numérica, sem perda de qualidade do novo problema.
- Parâmetros de Variação (“Varie o contexto... e o que está sendo perguntado.”): Este trecho finaliza a instrução definindo os eixos de criatividade permitidos. Ao solicitar a variação de contexto, abre-se a possibilidade de aplicações interdisciplinares (finanças, biologia, etc.). Ao demandar a variação da pergunta, estimula-se a criação de problemas que explorem diferentes habilidades cognitivas relacionadas ao mesmo tópico, como aplicação direta, análise para encontrar uma variável específica ou a soma de uma série.

Este método demonstra que, com uma instrução bem formulada, a Inteligência Artificial se torna uma poderosa aliada na personalização e diversificação do ensino e da avaliação.

Vamos pôr em prática este método usando esse comando com algumas questões do ENEM. Iniciaremos por uma questão que esteve presente no ENEM PPL 2024, a qual vale salientar que estará presente no recurso educacional que será criado a partir desta dissertação, e usaremos o mesmo comando em três IAs distintas: Gemini, ChatGPT e DeepSeek, a fim de analisar a especificidade do prompt e o quão preciso ele é:

Questão original:

Visando obter créditos de carbono, uma empresa, emissora de gases de efeito estufa, elabora um projeto de reflorestamento em uma área desmatada. De acordo com o projeto, no primeiro ano serão reflorestados 500 hectares. A partir daí, a cada ano, a área total reflorestada será aumentada em 50% em relação ao ano anterior.

A expressão algébrica que representa a área total reflorestada (A_n), em hectare, ao final de n anos é:

- a) $A_n = 500 \cdot 0,5^{n-1}$
- b) $A_n = 500 \cdot 1,5^{n-1}$
- c) $A_n = 500 + n \cdot 250$
- d) $A_n = 500 \cdot (1 + 0,5^{n-1})$
- e) $A_n = 500 + (n - 1) \cdot 250$

Será usado o comando:

“Com base na Questão 1 deste arquivo, crie um problema derivado. Varie o contexto (a história do problema) e o que está sendo perguntado.”

Note que o problema foi chamado de questão 1, porém isso dependerá de qual numeração ele terá no PDF criado. Lembre-se que o primeiro passo é digitalizar a fonte (arquivo com os problemas) e fazer o envio para a Inteligência Artificial Generativa.

Problema Derivado 1: Problema proposto pelo Gemini.

Enunciado: Visando obter créditos de carbono, uma empresa elabora um projeto de reflorestamento em uma área desmatada. De acordo com o projeto, no primeiro ano serão reflorestados 500 hectares. A partir daí, a área reflorestada a cada ano é 50% maior que a área reflorestada no ano anterior.

Ao final do quarto ano, qual será a **área total acumulada** que foi reflorestada por essa empresa desde o início do projeto?

- a) 1.687,5 hectares
- b) 2.375,0 hectares
- c) 3.562,5 hectares
- d) 4.187,5 hectares
- e) 5.000,0 hectares

Problema Derivado 2: Problema proposto pela DeepSeek

Enunciado: Uma organização ambiental está restaurando um manguezal degradado. No primeiro ano, serão recuperados **200 hectares**. A partir do segundo ano, a área restaurada será ampliada em **25%** em relação ao ano anterior, devido a novas técnicas de replantio.

A expressão algébrica que representa a área total restaurada (A_n), em hectare, ao final de n anos é:

- (a) $A_n = 200 \cdot 0.25^{n-1}$
- (b) $A_n = 200 \cdot 1.25^{n-1}$
- (c) $A_n = 200 + (n - 1) \cdot 50$
- (d) $A_n = 200 \cdot (1 + 0.25^{n-1})$
- (e) $A_n = 200 \cdot n^{1.25}$

Problema Derivado 3: Problema proposto pelo ChatGPT

Enunciado: Uma startup especializada em energias renováveis iniciou a instalação de painéis solares em uma comunidade rural. No primeiro mês de atuação, foram instalados 400 metros

quadrados de painéis solares. A partir do segundo mês, a área total instalada passa a crescer 60% em relação ao mês anterior, devido ao aumento de investimentos e mão de obra.

Sabendo que o crescimento da área instalada segue um padrão exponencial, responda:

Após quantos meses a área total de painéis solares instalados ultrapassará 10.000 m²? Apresente e justifique sua resposta com base em uma modelagem matemática adequada.

Sobre essa questão fornecida pelo ChatGPT é válido tecer alguns comentários, já que a questão fornecida por ele não foi objetiva como as outras. A “Questão Derivada 3”, apresenta uma excelente mudança de contexto para painéis solares. No entanto, a pergunta “Após quantos meses a área total [...] ultrapassará 10.000 m²?” exige o uso de logaritmos para uma solução exata, elevando a complexidade em relação à questão original, que era uma aplicação direta das ideias de função exponencial. O docente, ao validar, pode decidir usar a questão para uma turma mais avançada ou ajustar a pergunta para, por exemplo, “qual será a área total instalada no 4º mês?”, mantendo o nível de dificuldade mais próximo do original. Essa etapa de curadoria é fundamental no uso ético da ferramenta e apenas fortalece o fazer docente de cada profissional.

Note também que de um único problema foram feitas três questões inéditas. Tanto a Gemini quanto a DeepSeek mantiveram o padrão de questão de múltipla escolha, enquanto que o ChatGPT mudou para uma questão discursiva. Isso significa que o ChatGPT errou? Com certeza não, pois se o mesmo recebesse um comando similar porém com o acréscimo do prompt para manter a múltipla escolha dos itens ele teria obedecido. Isso apenas valida o quão poderosa é essa ferramenta que há disponível para os docentes e discentes buscarem se aperfeiçoar e facilitar o trabalho.

Outro comentário que será repetido nesta pesquisa mais de uma vez é sobre a importância da validação do problema. O docente que se utiliza deste método de obtenção de questões inéditas deve fazer a validação das questões com os seus conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo de sua trajetória acadêmica, pois nenhuma IA é livre de erros, isso vem, inclusive, exposto em seus aplicativos e sites.

Vamos aplicar um comando similar, porém para outra questão e dessa vez vamos utilizar a IA Gemini Pro deste momento em diante, uma versão paga do Gemini, porém anteriormente usamos versões gratuitas de cada uma das IAs citadas.

Será utilizado o seguinte comando: Com base na questão 2 deste arquivo, crie uma questão inédita. Varie o contexto e o que está sendo perguntado.

Novamente é válido salientar sobre a numeração usada no prompt. Esta numeração é apenas lúdica para ensinar o método correto, e irá variar de acordo com cada arquivo criado pelos docentes.

Questão Original:

Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta

brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é

$$h = 5 \cdot \log_2(t + 1)$$

em que t é o tempo contado em dias e h , a altura da planta em centímetros.

A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dias, ela alcançará sua altura máxima?

- a) 63
- b) 96
- c) 128
- d) 192
- e) 255

Questão criada pela IA Generativa Gemini Pro

Enunciado: Uma plataforma de ensino de idiomas verificou que a aquisição de vocabulário de um novo idioma por um estudante dedicado segue um modelo logarítmico. A proficiência, medida pela quantidade de palavras P que um aluno consegue usar ativamente, pode ser descrita em função do tempo de estudo t (em meses) pela seguinte fórmula:

$$P(t) = 400 \cdot \log_3(2t + 1)$$

Se um estudante iniciar o curso hoje e mantiver um ritmo de estudo constante por **13 meses**, qual será o número aproximado de palavras que ele conseguirá usar ativamente ao final desse período?

- a) 400 palavras
- b) 800 palavras
- c) 1200 palavras
- d) 1600 palavras
- e) 2400 palavras

Para o próxima criação da IA Generativa Gemini Pro, seremos mais detalhistas e ao mesmo tempo generalista. Será fornecido uma espécie de prompt generalizado que o docente leitor deste trabalho poderá usar em suas empreitadas quando estiver usando as IAs, e, além disso, será feito uma conexão com um novo ponto, a linguagem LaTeX, pois será deixado como adicional o prompt do código LaTeX da questão, pois é a linguagem oficial matemática que as IAs usam, então para a inteligência artificial é mais fácil fornecer as respostas em linguagem

LaTeX, e o docente curioso sobre o assunto pode usar os aplicativos e sites como *Overleaf* ou *TexPage* para compilar as questões com os devidos códigos. Observe a complexidade do seguinte prompt e como ele é completo e pode ser usado em diversos exemplos:

“Crie uma questão [DISCURSIVA OU OBJETIVA] inédita sobre [INSIRA O TEMA], contextualizada em [INSIRA O CONTEXTO] e dividida em [NÚMERO] itens. Após criar o enunciado, apresente a resolução didática e completa passo a passo. Por fim, forneça o código LaTeX pronto para compilar, organizando-o estritamente em dois blocos de código separados: o primeiro contendo apenas o enunciado e o segundo contendo a resolução detalhada.”

Uma observação é válida neste momento. Foram feitas algumas inserções como o tema específico escolhido pelo leitor, porém poderia ser deixado a cargo da própria IAG que a mesma iria criar algo totalmente aleatório.

Será exposto, a seguir, a questão original que foi fornecida à IA, e logo após a questão criada pela IA.

Questão Original:

Enunciado: Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono 14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5.730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5.730 anos haverá metade do carbono 14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$, em que t é o tempo, medido em ano, $Q(t)$ é a quantidade de carbono 14 medida no instante t e Q_0 é a quantidade de carbono 14 no ser vivo correspondente. Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono 14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono 14 nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1024	512
5	2048	128

Valores de Q_0 e $Q(t)$ dos fósseis analisados

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi

- a) 1
- b) 2
- c) 3

- d) 4
- e) 5

Questão Inédita criada pela IA Generativa Gemini Pro:

Enunciado: Durante uma pesquisa em uma das grutas do Parque Nacional de Ubajara, no Ceará, uma equipe de arqueólogos da Universidade Federal do Ceará (UFC) encontrou uma ossada de um animal pré-histórico, possivelmente uma preguiça-gigante. Para determinar a idade do fóssil, foi utilizada a técnica de datação por carbono-14. A idade de um fóssil pode ser calculada pela fórmula:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}.$$

Onde:

- t é o tempo em anos desde a morte do organismo.
- $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 medida no fóssil.
- Q_0 é a quantidade inicial de carbono-14 no organismo quando estava vivo.
- 5.730 anos é a meia-vida do carbono-14.

A análise em laboratório revelou que a ossada encontrada continha apenas 25% da quantidade de carbono-14 que um animal da mesma espécie teria em vida.

Com base na situação apresentada, responda aos itens a seguir, apresentando os cálculos e o raciocínio utilizados.

- a) Qual é a idade aproximada da ossada encontrada na gruta de Ubajara?
- b) Anos mais tarde, em uma camada mais profunda de escavação no mesmo local, a equipe encontrou um fragmento de madeira fossilizada. A análise revelou que a madeira continha apenas $\frac{1}{8}$ da sua quantidade original de carbono-14. Qual dos dois achados arqueológicos é o mais antigo e qual a diferença de idade entre eles?

Resolução do item a): O objetivo é encontrar a idade (t) da ossada. Sabemos que a quantidade de carbono-14 restante, $Q(t)$, é 25% da quantidade original, Q_0 .

Podemos expressar essa relação matematicamente como:

$$Q(t) = 0,25 \cdot Q_0.$$

Agora, substituímos essa relação na fórmula de datação por carbono-14:

$$0,25 \cdot Q_0 = Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}.$$

Podemos cancelar Q_0 em ambos os lados da equação:

$$0,25 = 2^{\frac{-t}{5730}}.$$

Para resolver, precisamos reescrever 0,25 como uma potência de base 2. Sabemos que 0,25 é o mesmo que $\frac{1}{4}$, e que $4 = 2^2$. Portanto:

$$0,25 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}.$$

Agora, substituímos 2^{-2} na equação:

$$2^{-2} = 2^{\frac{-t}{5730}}.$$

Como as bases são iguais, podemos igualar os expoentes:

$$-2 = \frac{-t}{5730}.$$

Multiplicando ambos os lados por -1 :

$$2 = \frac{t}{5730}.$$

Finalmente, isolamos t :

$$t = 2 \cdot 5730$$

$$t = 11.460.$$

Resposta (a): A idade aproximada da ossada encontrada é de 11.460 anos.

Resolução do item b) Primeiro, calculamos a idade do fragmento de madeira, que continha $\frac{1}{8}$ da sua quantidade original de carbono-14. A relação é: $Q(t) = \frac{1}{8} \cdot Q_0$.

Substituindo na fórmula e cancelando Q_0 :

$$\frac{1}{8} = 2^{\frac{-t}{5730}}.$$

Reescrevemos $\frac{1}{8}$ como uma potência de base 2. Como $8 = 2^3$, temos:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}.$$

Substituindo na equação:

$$2^{-3} = 2^{\frac{-t}{5730}}.$$

Igualando os expoentes:

$$-3 = \frac{-t}{5730}$$

$$t = 3 \cdot 5730$$

$$t = 17.190.$$

A idade do fragmento de madeira é de **17.190 anos**.

Agora, comparamos as idades:

- Idade da ossada: 11.460 anos.
- Idade da madeira: 17.190 anos.

O fragmento de madeira é o mais antigo. A diferença de idade é:

$$\text{Diferença} = 17.190 - 11.460 = 5.730 \text{ anos.}$$

Resposta (b): O fragmento de madeira é o mais antigo. A diferença de idade entre os dois achados é de 5.730 anos.

Ficará exposto o código LaTeX desse problema para os docentes que se interessam pelo assunto.

Código LaTeX do problema criado pela IA e da solução fornecida

Durante uma pesquisa em uma das grutas do Parque Nacional de Ubajara, no Ceará, uma equipe de arqueólogos da Universidade Federal do Ceará (UFC) encontrou uma ossada de um animal pré-histórico, possivelmente uma preguiça-gigante. Para determinar a idade do fóssil, foi utilizada a técnica de datação por carbono-14. A idade de um fóssil pode ser calculada pela fórmula:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5730}}$$

Onde:

```
\begin{itemize}
```

```
\item $t$ é o tempo em anos desde a morte do organismo.
```

```
\item $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 medida no fóssil.
```

```
\item $Q_0$ é a quantidade inicial de carbono-14 no organismo quando estava vivo.
```

```
\item $5.730$ anos é a meia-vida do carbono-14.
```

```
\end{itemize}
```

A análise em laboratório revelou que a ossada encontrada continha apenas 25% da quantidade de carbono-14 que um animal da mesma espécie teria em vida.

Com base na situação apresentada, responda aos itens a seguir, apresentando os cálculos e o raciocínio utilizados.

```
\begin{enumerate}
```

```
\item[\textbf{a)}] Qual é a idade aproximada da ossada encontrada na gruta de Ubajara?
```

```
\item[\textbf{b}]] Anos mais tarde, em uma camada mais profunda de escavação no mesmo local, a equipe encontrou um fragmento de madeira fossilizada. A análise revelou que a madeira continha apenas  $\frac{1}{8}$  da sua quantidade original de carbono-14. Qual dos dois achados arqueológicos é o mais antigo e qual a diferença de idade entre eles?  
\end{enumerate}
```

Observa-se que a questão proposta apresenta intencionalidade regional. Por que isso ocorreu? Em princípio, um sistema de IA generativa poderia, de modo espontâneo, mencionar qualquer cidade, inclusive uma no Ceará, uma vez que sua capacidade de composição admite a variação de contextos e cenários, o que favorece a elaboração de enunciados inéditos. No caso em análise, entretanto, a referência ao Ceará não foi fortuita, resultou de um prompt adicional que explicitou a necessidade de um problema com enfoque regional. Tal parametrização orientou a escolha do cenário e ilustra como o detalhamento das instruções direciona os resultados produzidos pela ferramenta.

Além da capacidade de gerar questões derivadas de um problema-base, a IA Generativa também se destaca na criação de conteúdo avaliativo a partir de um comando puramente temático. Ou seja, sem a necessidade de um exemplo prévio, a ferramenta é capaz de elaborar, do zero, problemas, listas de exercícios e até mesmo questionários interativos (“quizzes”). Essa funcionalidade serve como um recurso valioso para docentes e discentes, permitindo a criação rápida de materiais para revisão, fixação de conteúdo ou avaliação formativa.

Sobre essa funcionalidade, é importante citar que quando é dado um comando mais simples às IAs, como “criar perguntas sobre um tema para estudar” ou “elaborar exercícios de revisão”, é inferido que o objetivo final é testar os conhecimentos, daí, automaticamente a IA entende que o formato de “Quiz” é uma das estruturas pedagógicas mais eficientes e universalmente reconhecidas para esse fim. E como a Inteligência Artificial é treinada com uma gama de conteúdos educacionais da internet e dos livros, o modelo aprende que quando o contexto é educacional e avaliativo (criação de questões), o formato de “quiz” é uma resposta altamente provável e apropriada, portanto, nesses casos, mesmo sem ser dado um prompt direcionado à criação de um “Quiz”, as IAs fazem essa interpretação e criam um “Quiz”.

A partir do exposto, vê-se o quão benéfico pode ser o uso da IA a favor dos docentes e também dos discentes, pois com apenas comandos simples surgem questões totalmente novas e que poderão ser utilizadas como fonte de estudo e aprofundamento para o público leitor. Além de ser uma fonte inesgotável de questões para a facilitação do trabalho docente, na criação de provas e estudos dirigidos.

O poderio tecnológico apresentado nesta pesquisa limitou-se apenas a dois assuntos do ramo da educação básica, porém é intuitivo pensar que essa mesma metodologia utilizada serviria para qualquer assunto presente nas diretrizes da BNCC e na Matriz de Referência do Enem, bastando para isso a indicação do prompt correto. Supõe-se então que esse recurso será amplamente utilizado por docentes e discentes à proporção que haja a disseminação desse tipo

de metodologia de uso de IA.

Contudo, toda IA é passível de erro, dessa forma faz-se necessário que cada indivíduo que as utilize faça uma checagem minuciosa da questão. Por isso, bate-se na tecla do uso ético da IA generativa, pois não se pode apenas usar sem fazer uma verificação daquilo que é fornecido.

Por fim é válido salientar a respeito da expressão “Problemas inéditos” presente nesta subseção, pois para o leitor pode parecer que é forte, porém é um termo adequado do ponto de vista pedagógico, pois a IAG não funciona como um motor de busca que vai num banco de dados e copia e cola um problema parecido com o que foi fornecido, ela cria um problema novo em contexto e em dados números, mas mantém o padrão do que é pedido de acordo com as diretrizes do prompt fornecido, podendo deixar o “problema modelo” ligeiramente mais fácil ou mais difícil, mas ainda dentro dos padrões pedidos. E mais um motivo do “ineditismo” é o fato de que caso esse problema novo seja colocado para ser pesquisado no google ele não será encontrado, pois toda a contextualização e parte numérica original fora transformada.

7 CONCLUSÃO

A presente pesquisa partiu da constatação da dificuldade generalizada dos alunos do Ensino Médio em Matemática, especificamente nos temas de Funções Exponencial e Logarítmica, e no decorrer do processo de construção desta dissertação viu-se a necessidade da inserção de uma metodologia de uso ético e aplicável das Inteligência Artificial Generativa no processo de criação de itens. O objetivo central foi promover uma análise integrada entre o conteúdo, as diretrizes BNCC e a Matriz de Referência do Enem, e, a partir disso, desenvolver recursos pedagógicos que auxiliem no processo de ensino-aprendizagem.

Para alcançar este objetivo, o trabalho revisou a fundamentação histórica e teórica dos temas, e realizou uma análise documental que identificou as competências e habilidades específicas exigidas nos documentos oficiais.

O Capítulo 5 consolidou o principal produto educacional desta pesquisa: uma seleção de problemas do Enem e da UECE. A análise desses problemas e a elaboração de resoluções minuciosas e pedagogicamente comentadas permitiram evidenciar não apenas as soluções matemáticas, mas as diferentes abordagens exigidas por cada exame. Este produto visa servir como uma apostila didática que preenche as lacunas de raciocínio frequentemente deixadas por materiais didáticos convencionais.

Como contribuição original e inovadora, o Capítulo 6 apresentou uma metodologia para o uso da Inteligência Artificial Generativa (IAG) na criação de questões. Foi demonstrado, através de um procedimento metodológico de “prompt engineering”, como é possível gerar um conjunto diversificado de problemas inéditos, variando contexto e complexidade, a partir de uma única questão-base. Esta abordagem posiciona a IA generativa como uma ferramenta de potencialização e otimização do tempo do trabalho docente, e não como um substituto, reforçando a necessidade da validação e curadoria do professor.

A originalidade desta pesquisa reside, portanto, na síntese desses elementos: a conexão explícita da teoria com os documentos oficiais norteadores (BNCC/Matriz de Referência do Enem), a oferta de um produto educacional com resoluções comentadas em detalhe, e a incorporação ética e produtiva da IAG como ferramenta pedagógica.

Reconhece-se que o estudo se limitou à análise de questões do Enem e de um vestibular local (UECE). Como trabalhos futuros, sugere-se a aplicação prática da apostila didática em salas de aula para avaliar seu impacto na aprendizagem dos alunos. Adicionalmente, a metodologia de IA pode ser expandida para outros tópicos da Matemática do Ensino Médio, e de todas as outras áreas que integram a chamada Formação Geral Básica, e testada em programas de formação continuada de professores.

Espera-se que esta dissertação contribua para a prática docente e também discente, oferecendo tanto um material de apoio concreto quanto um caminho inovador para a elaboração de avaliações, alinhando o ensino de funções às exigências curriculares e às novas possibilidades tecnológicas, que devem ser ferramentas potencializadoras do árduo trabalho docente na educação.

REFERÊNCIAS

- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- BRASIL. **Matrizes de Referência, Tópicos e Itens: Exame Nacional do Ensino Médio - Enem 2009**. Brasília, DF: [S.l.: s.n.], 2009. Disponível em: https://download.inep.gov.br/download/enem/2009/matriz_referencia.pdf. Acesso em: 10 nov. 2025.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília, DF: [S.l.: s.n.], 2018. Documento homologado em 14 de dezembro de 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 10 nov. 2025.
- CAMPELO, Kaio Lamaison Araújo. **Resolução de Problemas no Ensino Médio: Sequência Didática das Habilidades da Competência Específica 3 da BNCC**. 121 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2023. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171056204&id1=7072. Acesso em: 17 nov. 2025.
- COSTA, Atílio Vieira. **Função Exponencial: Uma Abordagem Guiada Pela BNCC**. 76 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal de Alagoas, Maceio, 2021. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171052945&id1=5977. Acesso em: 17 nov. 2025.
- DOCUSIGN. **Tipos de inteligência artificial: quais são e aplicações**. 2025. Disponível em: <https://www.docuSign.com/pt-br/blog/tipos-ai>. Acesso em: 04 mar. 2026.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. ISBN 8526806572.
- IBERDROLA. **A história da Inteligência Artificial: como chegamos até aqui?** 2026. Disponível em: <https://www.iberdrola.com/quem-somos/nosso-modelo-inovacao/historia-inteligencia-artificial>. Acesso em: 24 fev. 2026.
- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 2: Logaritmos**. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2023.
- PEREIRA, Paulo Ricardo Gonçalves. **Ensino de Funções a Partir das Competências e Habilidades Propostas na Base Nacional Comum Curricular: Uma Aplicação para a Resolução de Problemas do ENEM e Diversos**. 127 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, CE, 2021. Disponível em: <https://repositorio.unilab.edu.br/jspui/bitstream/123456789/2415/1/PAULO%20RICARDO%20GON%20ALVES%20PEREIRA%20Disserta%20A7%20A3o.pdf>. Acesso em: 17 nov. 2025.
- SILVA, Vilmar Costa. **Uma Proposta para o Ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas Usando a Resolução de Problemas Mediada pelo Geogebra**. 85 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Tocantins, Arraias,

2020. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171054064&id1=5740. Acesso em: 17 nov. 2025.